

## D. HILBERT

---

### PROBLEME DER GRUNDLEGUNG DER MATHEMATIK

Für die mathematische Wissenschaft waren die letzten Jahrzehnte eine Periode höchster Blüte. Ich erinnere daran, wie in der Arithmetik, insbesondere in der Theorie der algebraischen Zahlkörper die schwierigsten Probleme gelöst und die Vollendung dieses herrlichen Gedankengebäudes erreicht worden ist. Zugleich gelang die Entdeckung der lange gesuchten transzendenten Funktionen, die dem Zahlkörper zugehören und durch die die verborgensten zahlentheoretischen Wahrheiten ans Licht gelangten. Andererseits wurden die Begriffsbildungen der Idealtheorie weit über die Grenzen der Zahlentheorie hinaus auf Algebra und Funktionentheorie mit bestem Erfolge übertragen, und dadurch erhielt ein grosser Komplex mathematischen Wissens ein einheitliches Gefüge.

In der Theorie der Funktionen einer komplexen Veränderlichen sind in dem verflossenen Zeitraum nicht geringe Fortschritte gemacht worden. Der Ausbildung des Prinzips der konformen Abbildung insbesondere verdanken wir die herrlichen Methoden zur Gewinnung der automorphen Funktionen und des Problems der Uniformisierung. Die so schwierigen Beweise der Existenzsätze haben durch Anwendung der Methoden der Variationsrechnung den höchsten Grad von Einfachheit und Durchsichtigkeit erreicht.

Und welche Fülle der Gesichter liefert die Geometrie: allein die Topologie ist so sehr durch neue Fragestellungen und Behandlungsmethoden bereichert worden, dass man darin die Entstehung eines neuen selbständigen Wissenszweiges sehen muss. Die Physik liess vor unseren Augen neue mathematische Gedankengebäude erstehen, deren Hallen von imponierender Grossartigkeit sind. Und überhaupt gedenken wir auch der Anwendungen: es sind nicht die schlechtesten Früchte, die die mathematische Forschung auf dem Felde der Anwendungen erntet, sei es dass die Anwendungen anderen Wissensgebieten oder praktischen Bedürfnissen entspringen. Und der Bezirk, in den die Mathematik eindringt, dehnt sich beständig.

Wegen dieser so erfreulichen Sachlage erwächst dem Mathematiker die besondere Pflicht, die Mathematik in ihren Grundlagen zu sichern.

Wie ist doch die allgemein verbreitete populäre Meinung über Mathematik und mathematisches Denken? « Die mathematischen Wahrheiten « so sagt man » sind

absolut sicher; denn sie werden auf Grund von Definitionen durch untrügliche Schlüsse bewiesen. Sie müssen daher auch überall in der Wirklichkeit stimmen». Dieser populären Meinung zufolge sollte die Mathematik zum Vorbild für alle Wissenschaft überhaupt dienen.

Wir wollen nun sehen, ob es so schön mit der Mathematik bestellt ist.

Wie war der Stand der Grundlagenfrage im drittletzten Jahrzehnt? Die grossen Klassiker und Schöpfer der Grundlagenforschung waren DEDEKIND und CANTOR; sie hatten in ZERMELO einen kongenialen Interpreten gefunden. ZERMELO hatte die Annahmen, die zum axiomatischen Aufbau der Mengenlehre nötig sind, aufgestellt und damit die von CANTOR nur unbestimmt und teilweise unbewusst angewandten Mittel in aller Schärfe präzisiert. Diese Zermelo'schen Axiome sind zudem alle von der Art, dass ein ernster Zweifel an ihrer Richtigkeit nicht aufkommen konnte. Das Vorgehen Zermelos war durchaus berechtigt und entspricht der axiomatischen Methode. Doch die Zermelo'schen Bahnen wurden damals unter dem Druck massgebender Kreise verlassen. Alte Einwürfe KRONECKERS gegen DEDEKIND und CANTOR, die wir Jüngeren längst überwunden glaubten, und die KRONECKER selbst niemals in seinen Arbeiten befolgt hatte, wurden vorgeschützt. Eine unglückliche Auffassung POINCARÉ'S, dieser Meisters mathematischer Erfindungskunst, betreffend den Schluss von  $n$  auf  $n + 1$ , eine Auffassung die überdies bereits zwanzig Jahre früher von DEDEKIND widerlegt war, verrammelte den Weg zum richtigen Vorwärtsschreiten. Ein neues Verbot, das Verbot der « impraedikativen » Aussage wurde erfunden und aufrecht erhalten, obwohl ZERMELO sofort ein schlagendes Beispiel gegen dies Verbot angab. Leider auch die sonst so scharfsinnige Logik RUSSELLS leistete in ihrer Anwendung auf Mathematik der Irrlehre Vorschub. So kam es, dass unsere geliebte Wissenschaft — was die Frage nach ihrem Wesen und ihren Grundlagen betrifft — zwei Jahrzehnte hindurch wie von einem bösen Traum heimgesucht worden ist.

Ich begrüsse es als ein Erwachen, als ein leuchtendes Morgenrot, wenn in letzter Zeit eine Reihe jüngerer Mathematiker wieder auf ZERMELOS Gedanken zurückgehen; diese Mathematiker haben die Zermelo'schen Axiome vervollständigt und eine Reihe sehr wichtiger tiefliedender mit ZERMELOS Axiomatik zusammenhängender Fragen erfolgreich behandelt.

Freilich eine endgültige Lösung der Grundlagenprobleme ist durch dieses alte axiomatische Verfahren niemals möglich. Denn die von ZERMELO zugrunde gelegten Axiome enthalten echte inhaltliche Annahmen. Wenn wir inhaltliche Axiome, mögen sie noch so plausibel sein, als Ausgangspunkte und Grundlagen für die Beweise benutzen, so verliert die Mathematik damit den Charakter des absolut Sicheren. Mit der Annahme von Voraussetzungen kommen wir auf das Gebiet des Problematischen — beruhen doch die Meinungsverschiedenheiten der Menschen meist darauf, dass von verschiedenen Voraussetzungen ausgegangen wird. In einer Reihe von Vorträgen während der letzten Jahre habe ich daher

einen neuen Weg zur Behandlung des Grundlagenproblems betreten. Mit dieser Neubegründung der Mathematik, die man füglich als eine Beweistheorie bezeichnen kann, glaube ich die Grundlagenfragen in der Mathematik als solche endgültig aus der Welt zu schaffen, indem ich jede mathematische Aussage zu einer konkret aufweisbaren und streng ableitbaren Formel mache und dadurch die mathematisch-philosophischen Fragen in die Domäne der reinen Mathematik versetze.

Freilich bedarf es zur vollen Durchführung dieser Aufgabe der hingebenden Mitarbeit der jüngeren Mathematikergeneration.

In diesem Sinne möchte ich heute einige nähere Ausführungen machen. Die wichtigsten Probleme konzentrieren sich auf das von mir aufgestellte sogenannte  $\varepsilon$ -Axiom; dasselbe lautet

$$A(a) \rightarrow A(\varepsilon A).$$

In der Verwendung des Axioms hat man vor allem die Gattung von Variablen zu beachten, auf die  $\varepsilon$  zu beziehen ist. Bei den Zahlen dient es zur Formulierung der üblichen Schlüsse mit « irgend ein »: man versteht unter  $\varepsilon A$  irgend eine Zahl, für die die Aussage  $A$  sicher zutrifft, wenn es überhaupt eine Zahl gibt, für die  $A$  zutrifft. Für  $a$  ist irgend eine ganze Zahl zunehmen.

Ich möchte nun einige Probleme nennen.

Durch die Arbeiten von ACKERMANN und v. NEUMANN ist der Beweis für die Widerspruchsfreiheit des  $\varepsilon$ -Axioms für die Zahlen geführt: damit sind folgende drei Probleme erledigt:

1) Das Tertium non datur für die Zahlen, d. h. wenn eine Aussage nicht für alle ganze Zahlen gilt, so gibt es eine Zahl, für die sie nicht gilt. So war es z. B. nach KRONECKER unrichtig, eine ganze rationale Funktion einer Variablen  $x$  mit ganzen rationalen Koeffizienten als irreduzibel zu definieren, wenn es keine Zerlegung derselben als Produkt von zwei ebensolchen Funktionen gibt. Ich beweise durch meine Beweistheorie, dass im Gegenteil diese Definition eine völlig strenge Definition in rein mathematischem Sinne ist und dass daher die Behauptung KRONECKERS nicht bloss logisch unzutreffend, sondern auch in rein arithmetischem Sinne unrichtig ist — in gleichem Sinne unrichtig, wie irgend ein falscher zahlentheoretischer Satz oder eine falsche arithmetische Formel.

2) Die Auflösung einer Behauptung über Existenz einer Zahl nach dieser Zahl: « die kleinste Zahl, welche ».

3) Der Schluss von  $n$  auf  $n+1$ .

Wie Sie bemerken, ist ein wesentliches Hilfsmittel für meine Beweistheorie die Begriffsschrift, und wir verdanken dem Klassiker dieser Begriffsschrift, PEANO, die sorgfältigste Pflege und weitgehendste Ausbildung derselben. Die Form, in der ich die Begriffsschrift brauche, ist wesentlich diejenige, die Russell zuerst eingeführt hat.

Bisher noch nicht erledigt sind folgende Probleme.

PROBLEM I. - Der Nachweis für die Widerspruchsfreiheit des  $\varepsilon$ -Axioms für die Funktionsvariable  $f$ . Der Ansatz eines Beweises liegt vor. Diesen hat ACKERMANN auch schon so weit durchgeführt, dass die verbleibende Aufgabe nur noch in dem Beweise eines rein arithmetischen elementaren Endlichkeitssatzes besteht.

Mit der Lösung dieses Problems ist schon ein sehr grosser Komplex von grundsätzlichen Fragen behoben: Nämlich dieser Nachweis der Widerspruchsfreiheit liefert:

1) das Tertium non datur für Funktionen von ganzen Zahlen und damit auch für die reellen Zahlen;

2) die Definitionsprozesse, die als imprädikativ angefochten worden sind, die RUSSELL und WHITEHEAD nur mit Hilfe des sehr problematischen Reduzierbarkeits-Axioms begründen, und mit Bezug auf die WEYL früher einmal von einem Circulus vitiosus in der Analysis gesprochen hat;

3) das Auswahlprinzip in der schwächeren Form.

Zu 3) sei folgendes bemerkt. Es werden in den neueren Betrachtungen über das Auswahlaxiom, wie sie besonders jetzt von den italienischen Mathematikern gepflegt werden, vielfach Unterscheidungen gemacht zwischen schwächeren und schärferen Formen des Auswahlprinzips. Diese betreffen zumeist die Mächtigkeit der Mengen insbesondere den Unterschied des Abzählbaren und Ueberabzählbaren.

Durch die Beweistheorie werden wir veranlasst, vor allen eine anderweitige Unterscheidung als wesentlich anzusehen, nämlich, ob verlangt wird, dass die Auswahl des Repräsentanten für eine Menge unabhängig von der Art, wie die Menge definiert ist, eindeutig durch den Elementen-Bestand der Menge bestimmt sein soll, oder ob dies nicht verlangt wird.

Beispielsweise sei eine einparametrische Mengenschar  $M(t)$  vorgelegt. Für jeden Wert des reellen Parameters  $t$  bezeichne  $M(t)$  eine bestimmte Menge von reellen Zahlen.

Das Auswahlprinzip in der schwächeren Form verlangt dann, dass es eine eindeutige Funktion  $f(t)$  gibt von der Art, dass für jeden Wert von  $t$  der Wert  $f(t)$  zu  $M(t)$  gehört. In der stärkeren Form verlangt das Auswahlprinzip überdies die Existenz einer solchen Funktion  $f(t)$ , dass

$$f(t_1) = f(t_2)$$

ist, falls die Mengen  $M(t_1)$  und  $M(t_2)$  ihrem Elementenbestande nach übereinstimmen.

Mit Hilfe des  $\varepsilon$  für die Funktionsvariable  $f$  erhalten wir das Auswahlprinzip für Mengen von reellen Zahlen in der schwächeren Form.

Durch die Lösung unseres Problems I werden vor allem folgende Theorien beherrscht:

1) Die Theorie der reellen Zahlen. (Dedekindsche Schnitt, obere Grenze einer beschränkten Menge reeller Zahlen).

2) Die Peanosche Begründung der Zahlenlehre. - In dieser Theorie braucht man kein Auswahlprinzip, wohl aber die imprädikative Definition, z. B. die Definition für  $a \leq b$ , d. h. jede Menge die  $a$  enthält und mit  $n$  zugleich  $n + 1$ , enthält auch  $b$ . Man hat früher immer nur das Problematische bei den mengentheoretischen Begründungen der Zahlentheorie in der Voraussetzung eines unendlichen Individuenbereichs gesehen. Diese Voraussetzung wird bereits auf grund des Bisherigen als widerspruchsfrei erkannt. Die grössere Schwierigkeit liegt in dem Nachweis der Widerspruchsfreiheit der imprädikativen Definition.

3) Die Cantorsche Theorie der Wohlordnungen der Zahlenreihe. Durch diese wird die Lehre von den Zahlen der zweiten Zahlenklasse, welche sich axiomatisch ganz analog zu der Zahlentheorie aufbauen lässt, auf die Theorie der Funktionen von Zahlenvariablen zurückgeführt.

PROBLEM II. - Für die weitere Ausgestaltung der Analysis, insbesondere für die Punktmengen-Theorie (mengentheoretische Topologie), hat man die Widerspruchsfreiheit für das  $\varepsilon$ -Axiom, bezogen auf höhere Variablen-Gattungen, zunächst einmal auf die der Funktionen reeller Variabler nötig.

PROBLEM III. - Andererseits gebraucht man zum Beweis des Wohlordnungssatzes und auch für manche Beweise in der Theorie der Messbarkeit (Beweise für Nicht-Messbarkeit) die schon erwähnte Verschärfung des  $\varepsilon$ -Axiom, wie sie durch die Formel

$$(f)[A(f) \vdash B(f)] \rightarrow (\varepsilon A = \varepsilon B)$$

ausgedrückt wird (Axiom der Auswahlgleichheit);  $\varepsilon A$  und  $\varepsilon B$  sind hier Funktionen der Zahlenvariablen und die Gleichheit bedeutet Uebereinstimmung für alle Argumentwerte. Für die Hinzunahme dieser Formel sind wiederum Beweise der Widerspruchsfreiheit nötig.

PROBLEM IV. - Die Vollständigkeit des Axiomensystems für die Zahlentheorie sowie für die Analysis wird zwar allgemein behauptet. Aber die übliche Ueberlegung, mit der man zeigt, dass je zwei Realisierungen des Axiomensystems der Zahlentheorie, bzw. der Analysis isomorph sein müssen, genügt nicht den Anforderungen finiter Strenge.

Es kommt darauf an, zunächst für die Zahlentheorie, den üblichen Beweis der Isomorphie finit umzugestalten, sodass dadurch folgendes gezeigt wird.

Wenn für einen Satz  $\mathfrak{S}$  die Widerspruchsfreiheit mit den Axiomen der Zahlentheorie nachgewiesen werden kann, so kann nicht auch für  $\bar{\mathfrak{S}}$  (das Gegenteil von  $\mathfrak{S}$ ) die Widerspruchsfreiheit mit jenen Axiomen nachgewiesen werden, und damit in engsten Zusammenhänge: Wenn eine Aussage widerspruchsfrei ist, so ist sie auch beweisbar.

Die Aufgabe ist zunächst hier nur für den Bereich der ganzen Zahlen gestellt worden; sie ist dann sicher keine philosophische, sondern eine rein mathematische und kann nur durch rein mathematische Mittel gelöst werden.

Gegen meine Beweistheorie sind Einwände erhoben worden; diese beruhen wesentlich auf einer Verkennung meiner Beweistheorie. Ich gestatte mir daher, zu dieser noch einige Erläuterungen zu machen.

• Wenn eine Aussage oder ein Beweis vorliegt, so muss er sich in allen Teilen überblicken lassen. Die Aufweisung, das Wiedererkennen, die Unterscheidung und Aufeinanderfolge seiner einzelnen Teile ist unmittelbar anschaulich für uns da. Ohne diese Einstellung ist überhaupt ein Denken oder gar eine wissenschaftliche Tätigkeit unmöglich. Wenn ich also von einer Formel, diese als Axiom genommen, konstatieren will, ob sie zu einem Widerspruch führt, so handelt es sich darum, ob mir ein Beweis vorgelegt werden kann, der zu einem Widerspruch führt. Wenn mir ein solcher Beweis nicht vorgelegt werden kann: umso besser - da mir dann ein Eingehen erspart bleibt. Wenn mir der Beweis vorliegt, so darf ich gewisse einzelne Teile herausgreifen und für sich behandeln, insbesondere in ihren auftretenden Zahlzeichen, welche aufgebaut und hergestellt vorliegen, wieder abbauen. Damit wird der Schluss von  $n$  auf  $n+1$  keineswegs schon benutzt - vielmehr ist es, wie wir schon von DEDEKIND her wissen und wie es meine Beweistheorie von neuem bestätigt, noch ein weiter Weg, um die Gültigkeit des Schlusses von  $n$  auf  $n+1$  einzusehen.

Auf der Grundlage, die ich eben diskutiert habe, muss jedesmal der Beweis für die Widerspruchsfreiheit geführt werden. Gelingt es, diesen Beweis zu führen, so bedeutet dies für die Theorie, dass, wenn eine numerische oder finit deutungsfähige Aussage aus ihr abgeleitet wird, diese tatsächlich jedesmal richtig ist. Der Beweis für die Widerspruchsfreiheit lehrt zugleich in jedem Falle eines zu einem falschen Resultat führenden Beweises, die Stelle zu finden, wo der Fehler liegt.

Es liegt auf der Hand, dass auch rein logische Probleme sich durch die Methode der Beweistheorie behandeln lassen. Als Beispiel diene folgendes Problem.

PROBLEM V. - Die Behauptung der Vollständigkeit des Axiomensystems der Zahlentheorie lässt sich auch so aussprechen: Wird eine dem Bereich der Zahlentheorie angehörige aber nicht beweisbare Formel zu den Axiomen der Zahlentheorie hinzugenommen, so kann aus dem erweiterten Axiomensystem ein Widerspruch abgeleitet werden.

Da wir es hier in der Beweistheorie stets mit formalisierten Beweisen zu tun haben, so ist in der ausgesprochenen Behauptung über die Vollständigkeit der Zahlentheorie zugleich die Behauptung eingeschlossen, dass die formalisierten Regeln des logischen Schliessens jedenfalls im Gebiete der Zahlentheorie ausreichend sind.

Die Frage nach der Vollständigkeit des Systems der logischen Regeln, in allgemeiner Form gestellt, bildet ein Problem der theoretischen Logik. Bisher haben wir nur durch Probieren die Ueberzeugung gewonnen, dass diese Regeln ausreichen.

Ein wirklicher Nachweis dafür ist vorhanden im Bereich der reinen Aussagen-Logik. Im Bereich der Logik der Prädikate mit einem Subjekt kann aus der Methode der Lösung des Entscheidungsproblems ebenfalls ein Nachweis für die Vollständigkeit der Regeln gewonnen werden, wie sie in Anknüpfung an die Ausätze von SCHRÖDER zuerst von LÖWENHEIM und später in abschliessen der Form von BEHMANN zur Anwendung gebracht worden ist.

Mein heutiger Vortrag zeigt, wie viele Probleme noch der Lösung harren. Aber im allgemeinen prinzipiellen Sinne ist auch nicht mehr die leiseste Spur einer Unklarheit möglich: jede prinzipielle Frage lässt sich aufgrund meiner Beweistheorie in einer Weise beantworten, die mathematisch präzise und eindeutig ist. Die betreffenden Sätze lassen sich zum Teil schon jetzt mit Hilfe der bisherigen Ergebnisse auf absolut sichere und rein mathematische Weise beweisen und sind daher, wie ich glaube, dem Streite entzogen worden. Wer mich widerlegen will, muss, wie es in der Mathematik bisher stets üblich war und bleiben wird, mir genau die Stelle zeigen, wo der vermeintliche Fehler von mir liegt. Eine Einwendung, die das nicht tut, lehne ich a limine ab.

Ich glaube, dass meine Beweistheorie uns auch noch einen allgemeinen Dienst leistet. Denn wie wäre es mit der Wahrheit unseres Wissens überhaupt und wie mit der Existenz und dem Fortschritt der Wissenschaft bestellt, wenn es nicht einmal in der Mathematik sichere Wahrheit gäbe? Tatsächlich kommt heutzutage gar nicht selten selbst in Fachschriften und öffentlichen Vorträgen Zweifelsucht und Kleinmut gegenüber der Wissenschaft zum Ausdruck; es ist das eine gewisse Art Okultismus, den ich für schädlich halte. Die Beweistheorie beseitigt diese Einstellung und verschafft uns das Hochgefühl der Ueberzeugung, dass wenigstens dem mathematischen Verstande keine Schranken gezogen sind und dass er sogar die Gesetze des eigenen Denkens selbst aufzuspüren vermag. CANTOR hat gesagt: das Wesen der Mathematik besteht in ihrer Freiheit, und ich möchte für die Zweifelsüchtigen und Kleinmütigen hinzufügen: in der Mathematik gibt es kein Ignorabimus: wir können jede sinnvolle Frage durch dauern des Nachdenken lösen. Es erfüllt sich, was vielleicht schon ARISTOTELES vorausfühlte, dass unser Verstand keinerlei geheimnisvolle Künste betreibt, sondern nach bestimmten aufstellbaren Regeln verfährt - worin zugleich die beste Gewähr der absoluten Objektivität liegt.

