Sur la théorie des équations intégrales et ses applications

Par Torsten Carleman, Stockholm

La théorie des équations intégrales qui s'est développée très rapidement à la suite des travaux de Volterra, Fredholm et Hilbert, constitue aujourd'hui une importante branche de l'analyse mathématique, trop vaste pour qu'on puisse donner, dans une seule conférence, un exposé systématique de son développement. Je me bornerai à parler de certains chapitres choisis.

Remarques sur les théories générales

Les équations intégrales linéaires ,,proprement dites" sont des relations de la forme

$$A(x)\,\varphi(x) + \int_E K(x, y)\,\varphi(y)\,d y = f(x) \tag{1}$$

où $\varphi(x)$ est la fonction inconnue, E le domaine d'intégration, $A(x)$, $K(x, y)$ et $f(x)$ des fonctions données. Il faut y adjoindre les équations à plusieurs variables qu'on obtient si l'on interprête x et y comme points dans des espaces à plusieurs dimensions.

Il est souvent utile de considérer les équations (1) comme cas particuliers des équations fonctionnelles linéaires

$$S(\varphi) = f, \tag{2}$$

où S est une transformation fonctionnelle linéaire, c'est-à-dire une opération satisfaisant aux relations

$$S(\varphi + \psi) = S(\varphi) + S(\psi),\ \ S(c\,\varphi) = c\,S(\varphi),$$

c étant une constante arbitraire. Cela n'empêche pas que les équations (2) peuvent se réduire à la forme (1) au moyen des transformations convenables. On voit immédiatement que les généralisations suivantes de (1)

$$\sum_{p,q} A_{p\,q}\,\varphi^{(p)}\,[w_{p_1 q}(x)] + \int_E K(x, y)\,\varphi(y)\,d y = f(x)$$

$$\int \varphi(y)\,d_y\,K(x, y) = f(x)$$

sont des cas particuliers de (2).

En utilisant la représentation de fonctionnelles linéaires continues donnée par M. Hadamard on est conduit à considérer des équations linéaires de la forme

(3) $$\lim_{n \to \infty} \int G_n(x, y)\, \varphi(y)\, d\, y = f(x)$$

où $G_n(x, y)$ est une suite donnée de fonctions continues. Il semble que cette classe d'équations embrasse tous les cas considérés jusqu'ici.

Equivalence de la théorie des équations intégrales linéaires et celle des systèmes d'équations linéaires à une infinité d'inconnues.

Remarquons d'abord que les systèmes d'équations linéaires à une infinité d'inconnues peuvent se ramener à des équations intégrales. Cela peut se faire de plusieurs manières. La plus simple est la suivante. Considérons un système d'équations linéaires sous la forme

(4) $$x_p - \lambda \sum_{q=1}^{\infty} c_{p\,q}\, x_q = a_p \quad (p = 1, 2. \ldots.).$$

Si nous définissons un noyau $K(x, y)$ par les relations

$$\begin{array}{ll} K(x, y) = c_{p\,q} & \text{pour } p - 1 < x < p,\ q - 1 < y < q \\ K(x, y) = 0 & \text{pour } x \text{ ou } y = \text{nombre entier} \end{array}$$

et une fonction $f(x)$ par les conditions

$$\begin{array}{ll} f(x) = a_p & \text{pour } p - 1 < x < p \\ f(x) = 0 & \text{pour } x = \text{nombre entier} \end{array}$$

et si nous faisons correspondre à la suite $x_1, x_2 \ldots x_n \ldots$ une fonction $\varphi(x)$:

$$\begin{array}{ll} \varphi(x) = x_p & \text{pour } p - 1 < x < p \\ \varphi(x) = 0 & \text{pour } x = \text{nombre entier} \end{array}$$

nous trouverons que le système (4) est équivalent à l'équation intégrale

$$\varphi(x) - \lambda \int_0^{\infty} K(x, y)\, \varphi(y)\, d\, y = f(x).$$

La proposition inverse, c'est-à-dire que chaque équation fonctionnelle linéaire peut se réduire à un système d'équations linéaires à une infinité d'inconnues, est moins évidente. Elle est démontrée sous des conditions assez générales si l'on se borne à chercher des solutions à carré intégrable. Considérons le cas suivant. Soit $K(x, y)$ un noyau pour lequel

$$\int_a^b |K(x, y)|^2\, d\, y = k(x)^2$$

existe presque partout et proposons-nous de déterminer toutes les solutions à carré intégrable de l'équation:

$$\varphi(x) - \lambda \int_a^b K(x, y)\, \varphi(y)\, d y = f(x). \tag{5}$$

Soit $P_1(x), P_2(x) \ldots P_n(x) \ldots$ un système orthogonal fermé de fonctions à carré intégrable. Posons

$$\varrho(x) = \frac{1}{k(x) + 1}$$

et orthogonalisons le système des fonctions $\varrho(x)\, P_\nu(x)$. Désignons le système orthogonal ainsi obtenu par $\psi_\nu(x)$ $(\nu = 1, 2 \ldots)$. Il est clair que $f(x)\, \varrho(x)$ doit être à carré intégrable. En multipliant (5) par $\overline{\psi_\nu}(x)$ et en intégrant, il vient

$$\varphi_p - \lambda \sum_{q=1}^{\infty} k_{pq}\, \varphi_q = f_p \qquad p = 1, 2 \ldots \tag{6}$$

où l'on a posé

$$\varphi_p = \int_a^b \varphi(x)\, \overline{\psi_p}(x)\, d x, \qquad k_{pq} = \int_a^b \int_a^b K(x, y)\, \overline{\psi_q(x)}\, \psi_q(y)\, d x\, d y$$

$$f_p = \int_a^b f(x)\, \overline{\psi_p(x)}\, d x.$$

A chaque solution de carré intégrable de (5) il correspond une solution du système (6) telle que $\Sigma\, |\varphi_p|^2$ converge. On démontre que la réciproque est vraie en utilisant le théorème suivant qui s'obtient par un procédé donné par M. Weyl. Soit $F(x)$ une fonction telle que

$$\int_a^b |\varrho(x) F(x)|^2\, d x$$

converge. Si alors la série

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \left| \int_a^b F(x)\, \psi_\nu(x)\, d x \right|^2 \tag{7}$$

converge il faut que l'intégrale $\int_a^b |F(x)|^2\, d x$ existe et soit égale à la série (7). Si les coefficients de Fourier sont tous nuls il faut que $F(x)$ s'annule aussi.

Ecrivons maintenant l'équation (3) sous la forme

$$\lim_{n \to \infty} \int_0^1 G_n(x, y)\, d\, \psi(x) = f(x) \tag{8}$$

et supposons que $f(x)$ soit continue dans l'intervalle (0,1) et que le premier membre tende uniformément vers $f(x)$. Nous nous proposons de ramener le problème de déterminer les solutions à variation bornée de (8) à la résolution d'un système d'équations à une infinité d'inconnues. Posons

$$K_1(x, y) = G_1(x, y)$$
$$K_p(x, y) = G_p(x, y) - G_{p-1}(x, y) \qquad p \geq 2$$

et soient $\xi_1\ \xi_2 \ldots\ \xi_n \ldots$ une infinité de nombres partout denses dans l'intervalle (0, 1). Cela posé, nous pouvons remplacer (8) par les équations

$$\sum_{p=1}^{\infty} \int_0^1 K_p(\xi_m, y)\, d\,\psi(y) = f(\xi_m) \qquad m = 1, 2 \ldots$$

En prenant comme variables inconnues les quantités à deux indices

$$\psi_{n,\nu} = \psi\left(\frac{\nu}{2^n}\right) - \psi\left(\frac{\nu-1}{2^n}\right) \qquad \begin{array}{l} \nu = 1, 2 \ldots 2^n \\ n = 0, 1, \ldots . \end{array}$$

il s'ensuit

$$\sum_{p=1}^{\infty} \left\{ K_p(\xi_m, 1)\, \psi_{0,1} + \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{\nu=1}^{2^n} \left[K_p\left(\xi_m, \frac{2\nu}{2^{n+1}}\right) \psi_{n+1, 2\nu} + K_p\left(\xi_m, \frac{2\nu-1}{2^{n+1}}\right) \psi_{n+1, 2\nu-1} \right.\right.$$
$$\left.\left. - K_p\left(\xi_m, \frac{\nu}{2^n}\right) \psi_{n,\nu} \right] \right\} = f(\xi_m).$$

En introduisant les variables auxiliaires

$$(9) \quad \gamma_{m,n}^{(p)} = \sum_{\nu=1}^{2^n} \left[K_p\left(\xi_m, \frac{2\nu}{2^{n+1}}\right) \psi_{n+1, 2\nu} + K_p\left(\xi_m, \frac{2\nu-1}{2^{n+1}}\right) \psi_{n+1, 2\nu-1} - K_p\left(\xi_m, \frac{\nu}{2^n}\right) \psi_{n,\nu} \right]$$

$$(10) \qquad \omega_m^{(p)} = \sum_{n=0}^{\infty} \gamma_{m,n}^{(p)} + K_p(\xi_m, 1)\, \psi_{0,1}$$

on trouve

$$(11) \qquad \sum_{p=1}^{\infty} \omega_m^{(p)} = f(\xi_m)$$

A ces relations il faut ajouter les identités

$$(12) \qquad \psi_{n,\nu} = \psi_{n+1, 2\nu} + \psi_{n+1, 2\nu-1}$$

et les inégalités

$$\sum_{\nu=1}^{2^n} |\psi_{n,\nu}| < \text{constante}.$$

Le problème posé se trouve ainsi ramené à la résolution du système (9), (10), (11), (12) où $\psi_{n,\nu}$, $\gamma_{m,n}^{(p)}$, $\omega_m^{(p)}$ figurent comme inconnues.

Problèmes divers concernant la résolution des systèmes d'équations à une infinité d'inconnues.

Grâce aux travaux de Poincaré, v. Koch, Hilbert, Dixon, Schmidt, F. Riesz, Toeplitz, Helly et d'autres nous possédons une série de méthodes plus ou moins générales pour traiter des systèmes d'équations de la forme

$$(13) \qquad L_p(x) = \sum_{q=1}^{\infty} c_{pq}\, x_q = a_p \qquad p = 1, 2 \ldots.$$

Dans toutes ces théories on se pose le problème de déterminer toutes les solutions $(x_1\, x_2 \ldots x_n \ldots)$ qui satisfont à certaines conditions C de convergence ou de croissance (*p. ex.* $|x_n|$ borné, $\Sigma\, |x_n|^p$ convergente) données à priori et l'on impose à la matrice (c_{pq}) des restrictions qui permettent d'assurer la convergence absolue des $L_p(x)$ pour toutes les suites x_n qui satisfont aux conditions C. Cette méthode de traiter la question est très souvent celle qui est la plus utile pour les applications. Or, il existe des cas où l'on est conduit à considérer le problème plus général que voici: *Rechercher toutes les suites $(x_1, x_2 \ldots x_n \ldots)$ qui rendent les séries $L_p(x)$ convergentes et égales aux quantités données a_p.* Il semble que cette question n'a été traitée que dans des cas particuliers (voir: E. Borel. Ann. de l'Ecole normale 1895, O. Toeplitz: Über zeilenfinite Gleichungssysteme). Nous nous proposons d'indiquer une méthode qui permet d'attaquer ce problème et de le transformer en un autre qui paraît être plus simple.

Supposons d'abord que l'équation $L_1(x) = a_1$ contienne toutes les variables $x_1\, x_2 \ldots$ et que les $L_p(x)$ soient linéairement indépendantes. Etant donnés des nombres entiers positifs $m_1\, m_2 \ldots m_n$ nous chercherons le minimum $R(m_1, m_2, \ldots m_n)$ de

$$\sum_{\nu=1}^{m_1} |x_\nu|^2$$

lorsque les inégalités

$$\begin{array}{llll} & \left(\sum\limits_{q=1}^{\nu} c_{1q}\, x_q - a_1\right) \leq 1 & m_1 < \nu \leq m_1 + m_2 & \\ (14) & \left(\sum\limits_{q=1}^{\nu} c_{pq}\, x_q - a_p\right) \leq \dfrac{1}{2} & m_1 + m_2 < \nu \leq m_1 + m_2 + m_2, & p = 1, 2. \\ & \cdots\cdots\cdots & & \\ & \left(\sum\limits_{q=1}^{\nu} c_{pq}\, x_q - a_p\right) \leq \dfrac{1}{n-1}, & m_1 + m_2 + \ldots m_{n-1} < \nu \leq m_1 + m_2 + \ldots m_n, & p = 1, 2 \ldots, n-1 \end{array}$$

sont remplies. Si ces inégalités sont incompatibles nous poserons $R(m_1, m_2 \ldots m_n) = \infty$. A cause de l'indépendance des $L_p(x)$ on est sûr que R est une quantité finie lorsque m_1, est suffisamment grand. On voit aussi que $R(m_1\, m_2 \ldots m_n)$ est une fonction non croissante des variables $m_2 \ldots m_n$. Nous obtenons ainsi, par des calculs algébriques, une infinité dénombrable de quantités

$$R\,(m_1, m_2 \ldots m_n) \qquad 1 \leq m_\nu < \infty \qquad n = 2, 3 \ldots .$$

La condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe une solution du système (13) est qu'on puisse trouver une suite de nombres positifs $\mu_1\, \mu_2 \ldots\, \mu_r \ldots .$ telle que

$$\lim_{r \to \infty} R\,(\mu_1, \mu_2 \ldots \mu_r)$$

soit finie.

Le même critère est applicable aussi dans le cas où aucune des séries $L_p\,(x)$ ne contient toutes les variables mais la démonstration est dans ce cas un peu plus compliquée. On peut d'ailleurs énoncer le critère sous d'autres formes p. ex. la suivante: Pour que les équations (13) admettent une solution il faut et il suffit qu'il existe une suite $m_1,\ m_2,\ \ldots,\ m_n \ldots$ telle que les systemes d'inégalités soit compatibles quel que soit n[1]).

Nous pouvons aussi indiquer un procédé pour trouver (théoriquement) les solutions dans les cas où elles existent. Ajoutons finalement que la méthode esquissée plus haut est aussi applicable aux systèmes d'équations non linéaires.

Si c_{pq} peut s'écrire

$$c_{pq} = f\,(p, q)$$

où $f\,(p, q)$ est une fonction analytique simple des variables p et q, on peut souvent traiter le système (13) au moyen des méthodes de la théorie des fonctions analytiques. Supposons par exemple que $f\,(x, y)$ soit une fonction rationnelle

$$f\,(x, y) = \frac{a_0\,(x) + a_1\,(x)\,y + \ldots\, a_n\,(x)\,y^n}{b_0\,(x) + b_1\,(x)\,y + \ldots\, b_m\,(x)\,y^m}$$

On démontre d'abord la proposition suivante: Si une série de la forme

$$\Phi\,(x) = \sum_{q=1}^{\infty} f\,(x, q)\,x_q$$

converge pour une valeur ξ, telle que $a_n\,(\xi) \neq 0$, elle converge pour toutes les valeurs x différentes des racines de $b_m\,(x) = 0$ et représente une fonction méromorphe dans tout le plan des x. Notre problème est ainsi ramené à la détermination d'une fonction méromorphe dont on connaît les pôles, certaines relations entre les résidus, et les valeurs pour $x = 1, 2, \ldots n \ldots .$ On peut résoudre cette question dans des cas étendus. Je me bornerai à énoncer le résultat simple suivant: Si a n'est pas un nombre réel négatif, le système d'équations homogènes

$$\sum_{q=1}^{\infty} \frac{1}{p + a\,q}\, x_q = 0$$

n'admet pas d'autre solution que $x_1 = x_2 = \ldots x_n \ldots = 0$.

[1]) On transforme ainsi le système (13) en un système infini d'inégalités dont chacune ne contient q'un nombre fini des variables $m_1,\ m_2,\ \ldots\ m_n \ldots$

Problèmes des moments généralisés.

Il est presque évident que les systèmes d'équations linéaires

$$\int_a^b a_n(y)\,\varphi(y)\,d\,y = c_n \qquad n = 1, 2 \ldots \tag{15}$$

$$\int_a^b a_n(y)\,d\,\varphi(y) = c_n \tag{16}$$

peuvent se réduire formellement à des équations intégrales. En introduisant un noyau $K(x, y)$ définie par les relations

$$\begin{aligned} K(x, y) &= a_n(y) && \text{pour } n - 1 < x < n \\ K(x, y) &= 0 && \text{pour } x = \text{nombre entier} \end{aligned}$$

et en posant

$$\begin{aligned} f(x) &= c_n && \text{pour } n - 1 < x < n \\ f(x) &= 0 && \text{pour } x = \text{nombre entier} \end{aligned}$$

on trouve que les systèmes (15) et (16) sont équivalents aux équations

$$\int_a^b K(x, y)\,\varphi(y)\,d\,y = f(x)$$

$$\int_a^b K(x, y)\,d\,\varphi(y) = f(x).$$

Les systèmes (16) ont été étudiés d'une manière détaillée par M. F. Riesz. Il obtient en même temps un théorème important sur l'approximation des fonctions continues par des systèmes donnés de fonctions continues.

Il y a lieu de rappeler aussi à cette occasion les travaux récents de M. S. Bernstein sur les fonctions absolument monotones.

La théorie des formes quadratiques et les équations intégrales symétriques.

La théorie, créée par M. Hilbert, des formes quadratiques (où hermitiennes) à une infinité de variables en connexion avec la théorie des équations intégrales à noyau symétrique est certainement la plus importante découverte qui ait été faite dans la théorie des équations intégrales après les travaux fondamentaux de Fredholm.

Remarquons d'abord que les sujets d'études suivantes:

Formes hermitiennes à une infinité de variables;
Substitutions hermitiennes à une infinité de variables;
Equations intégrales hermitiennes;
Fonctionnelles linéaires hermitiennes;
sont équivalents.

En utilisant le langage de la théorie des substitutions, nous pouvons énoncer quelques-uns des résultats de M. Hilbert de la manière suivante. Soit (c_{pq}) une matrice hermitienne infinie mais „bornée" au sens de M. Hilbert. Désignons, pour abréger, par x, y, etc. des suites $x_1\, x_2 \ldots\, x_n \ldots$, $y_1\, y_2 \ldots\, y_n \ldots$ et par S ou $S\,(x)$ la substitution

$$x_p' = \sum_{q=1}^{\infty} c_{pq}\, x_q$$

où $\Sigma \left| x_q \right|^2$ est supposée convergente. Ecrivons, d'après M. Hilbert,

$$(x, y) = \sum_{\nu=1}^{\infty} x_\nu\, \overline{y_\nu}$$ [1].

Cela posé, il existe une substitution hermitienne bornée (substitution spectrale) $\theta\,(\lambda) = \theta\,(x \mid \lambda)$ à variation bornée par rapport au paramètre réel λ et satisfaisant aux relations

$$(17) \qquad \Delta\, \theta\,(\lambda) \cdot \Delta\, \theta\,(\lambda) = \Delta\, \theta\,(\lambda) \qquad [\Delta\, \theta\,(\lambda) = \theta\,(\lambda + \Delta\lambda) - \theta\,(\lambda)]$$

$$(18) \qquad \Delta_1\, \theta\,(\lambda) \cdot \Delta_2\, \theta\,(\lambda) = 0 \qquad \text{si } \Delta_1 \text{ et } \Delta_2 \text{ n'ont pas des intervalles communs}$$

$$(19) \qquad S \cdot \Delta\, \theta\,(\lambda) - \int_{\Delta} \lambda\, d_\lambda\, \theta\,(\lambda) = 0$$

$$(20) \qquad \int_{-\infty}^{\infty} d_\lambda\, \theta\,(\lambda) = E = \text{substitution identique}$$

telle qu'on ait

$$(21) \qquad (x, y) = \int_{-\infty}^{\infty} d_\lambda\, [\theta\,(x \mid \lambda), y]$$

$$(22) \qquad S\,(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \lambda\, d_\lambda\, \theta\,(x \mid \lambda)$$

$$(23) \qquad [S\,(x), y] = \int_{-\infty}^{\infty} \lambda\, d_\lambda\, [\theta\,(x \mid \lambda), y]$$

si (x, x) et (y, y) sont finis.

Les travaux de M. Hilbert sur la théorie des formes quadratiques et bilinéaires et ses applications ont été poursuivis par un grand nombre d'auteurs parmi lesquels nous mentionnons M. M. Hellinger, Toeplitz, F. Riesz, Weyl, Hilb, Plancherel, etc.

[1] Nous appellerons (x, x) la norme de la suite (x).

Pour les applications il est important d'étendre la théorie de M. Hilbert aux matrices non bornées. Voici quelques-uns des résultats que j'ai obtenus dans cette direction. Considérons les matrices hermitiennes $(c_{p\,q})$ qui ne sont soumises qu'à la condition

$$\sum_{q=1}^{\infty} |c_{p\,q}|^2 \text{ convergente pour } p = 1, 2, \ldots.$$

Nous partagerons l'ensemble des matrices de cette catégorie en deux classes I et II suivant que le système d'équations

$$\lambda\, x_p - \sum_{q=1}^{\infty} c_{p\,q}\, x_q = 0$$

n'admettent pas ou admettent, pour des valeurs non réelles de λ, des solutions (non identiquement nulles) telles que $\Sigma \left| x_p \right|^2$ converge. La condition nécessaire et suffisante pour que $(c_{p\,q})$ soit de la classe I est que la relation

$$[S\,(x),\, y] = [x,\, S\,(y)]$$

ait lieu sous la seule condition que

$$(x,\, x)\ (y,\, y),\ [S\,(x),\, S\,(x)],\ [S\,(y),\, S\,(y)]$$

soient finis. Si $(c_{p\,q})$ est de la classe I, tous les résultats (17)—(22) subsistent. Il en est de même de la formule (23) si $[S\,(x),\, S\,(x)]$ est fini. Elle résulte dans ce cas de (21) et (19).

Si $(c_{p\,q})$ appartient à la classe II il existe une infinité de substitutions spectrales $\theta\,(x \mid \lambda)$ satisfaisant aux relations (19), (20), (21) (22) et en outre à l'équation

$$[\varDelta\,\theta \cdot \varDelta\,\theta\,(x \mid \lambda),\, x] \leq [\varDelta\,\theta\,(x \mid \lambda),\, x]. \tag{24}$$

Si le signe d'égalité a lieu ici pour toutes les suites (x) telles que $\sum_{\nu=1}^{\infty} (x_\nu)^2$ converge alors les relations (17) et (18) sont aussi remplies. Il existe une infinité de substitutions spectrales ayant cette propriété si $(c_{p\,q})$ est réel. Il en est de même si les systèmes

$$S\,(x) - \lambda\, E\,(x) = 0,\ \ S\,(x) - \lambda\, E\,(x) = 0$$

ont le même nombre de solutions à norme finie linéairement indépendantes.

Il y a lieu de parler à cette occasion de certains travaux récents par MM. Stone, J. v. Neumann, F. Riesz sur les transformations linéaires hermitiennes de l'espace hilbertien. Il me semble que le sujet considéré par ces auteurs est intimement lié à la théorie que nous venons d'exposer. Supposons que l'espace hilbertien H soit représenté par toutes les fonctions f à carré intégrable dans un domaine Ω. Soit D un sous-ensemble de H linéaire et partout dense dans H. Posons $(f,\, g) = \int_{\Omega} f\, \bar{g}\, d\,\omega$. L'objet des travaux cités plus haut est l'étude générale des transformations fonctionnelles linéaires $T(f)$ qui transforment les fonctions f de D en des fonctions à carré intégrable qui satisfont à la relation

$$[f, T(g)] = [T(f), g] \tag{25}$$

pour toutes les fonctions f et g de D.

Soit $\varphi_1, \varphi_2 \ldots \varphi_n \ldots$ un système orthogonal fermé de fonctions appartenant à D. On voit immédiatement que $T(f)$ est complètement déterminé par la connaissance des $T(\varphi_\nu)$. Représentons maintenant l'espace H sur l'espace hilbertien à une infinité de variables H, au moyen des développements

$$f \sim \Sigma\, x_q \varphi_q$$

qui font correspondre à f une suite infinie (x) à norme finie et inversement. Posons

$$T(\varphi_p) \sim \Sigma\, \overline{c_{pq}} \varphi_q$$
$$T(f) \sim \Sigma\, y_q \varphi_q.$$

En appliquant la relation (25) on trouve

$$y_p = \Sigma\, c_{pq}\, x_q \qquad c_{pq} = \overline{c_{qp}}.$$

L'image de la transformation $T(f)$ dans l'espace H_1 est donc une substitution $S(x)$ du type que nous avons examiné plus haut. La notion d'hypermaximalité, introduite par M. Schmidt, qui joue un rôle fondamental dans le travail de M. v. Neumann peut s'interpréter ainsi: La condition nécessaire et suffisante pour que $T(f)$ soit hypermaximale est que la substitution $S(x)$ correspondante appartienne à la classe I. Les développements spectraux que nous avons trouvés pour $S(x)$ se traduisent immédiatement en des développements analogues pour $T(f)$.

Applications

Applications à la théorie des fonctions analytiques.

M. Hilbert a démontré que la théorie des équations intégrales permet de résoudre le problème suivant posé par Riemann: Déterminer une fonction analytique dans un domaine D lorsque on connaît une relation (linéaire) entre sa partie réelle et sa partie imaginaire à la frontière de D. Il a aussi traité le problème plus général que voici: Trouver n fonctions $f_\nu(z)$ de caractère rationnel à l'intérieur d'une courbe C et n fonctions $g_\nu(z)$ de caractère rationnel à l'extérieur de C telles qu'on ait sur C

$$f_p(z) = \sum_{q=1}^{n} c_{pq}(z)\, g_q(z) \qquad p = 1, 2 \ldots n,$$

$c_{pq}(z)$ étant des fonctions données définies sur C. Comme cas particulier M. Hilbert obtient une solution du problème de déterminer les équations différentielles linéaires qui admettent un groupe de monodromie donné. M. Plemelj a donné une autre méthode remarquable pour résoudre ces problèmes au moyen des équations intégrales. M. Uhler a utilisé des méthodes analogues pour généraliser la théorie des fonctions zetafuchsiennes. M. Hasemann a obtenu certaines généralisations des résultats de M. Hilbert cités plus haut.

Nous allons considérer le problème suivant: Etant donnée une courbe C rectifiable et une fonction $\theta(z)$ définie sur C qui transforme C en elle-même; rechercher les fonctions analytiques $f(z)$ qui satisfont à la relation

$$f[\theta(z)] = a(z)\, f(z) \quad \text{sur } C \quad [a(z) = \text{fonction donnée}]$$

et qui admettent les mêmes singularités qu'une fonction rationnelle $P(z)$ donnée à l'intérieur de C. Si aucune des itérées

$$\theta(z) \quad \theta_2(z) = \theta[\theta(z)],\ \theta_2(z) = \theta[\theta_3(z)]\ldots$$

ne se réduise pas à z le problème ne peut admettre de solutions que dans des cas très particuliers. Nous supposerons que $\theta_2(z) = z$ et que $\theta(z)$ décrit C en sens inverse lorsque la variable z parcourt C en sens direct. Pour que notre problème soit possible il faut qu'on ait

$$a(z)\, a[\theta(z)] = 1.$$

Supposons en outre que $P(z)$ soit une fonction rationnelle régulière à l'extérieur de C et s'annulant à l'infini. En appliquant l'intégrale de Cauchy on trouve une équation intégrale de la forme

$$f(x) - \frac{1}{2\pi i}\int\limits_C \left[\frac{1}{z-x} - \frac{a(z)\, a[\theta(x)]\ \theta'(z)}{\theta(z)-\theta(x)}\right] f(z)\, dz = a[\theta(x)]\, P[\theta(x)] + P(x).$$

On voit que le noyau est borné si C est à courbure continue et si $\theta'(z)$ est une fonction continue.

Je dis que le problème fondamental sur l'existence des fonctions automorphes est un cas particulier de la question que nous avons posée. Considérons pour simplifier un groupe fuchsien dont un polygone générateur C est situé entièrement audessus de l'axe réel. Les substitutions fondamentales définissent une transformation involutoire $\theta(z)$ de C en elle-même. $\theta(z)$ est, en général, discontinue en les sommets de C. Pour que $f(z)$ soit une fonction automorphe appartenant au groupe donné il faut et il suffit qu'on ait

$$f[\theta(z)] = f(z) \ \text{ sur } C.$$

L'équation intégrale

$$f(x) - \frac{1}{2\pi i}\int\limits_C \left[\frac{1}{z-x} - \frac{\theta'(z)}{\theta(z) - \theta(x)}\right] f(z)\, dz = P(x) + P[\theta(x)]$$

qui correspond à ce problème est singulière à cause de la discontinuité de $\theta(z)$. Pour éviter cette difficulté nous remplacerons dans les calculs précédents $\frac{1}{z-x}$ par

$$G(z, x) = \frac{1}{z-x} + \sum_r \frac{1}{z - \xi_r(x)}$$

où $\xi_r(x)$ sont les transformées de x qui sont situées dans les transformées (en nombre limité) du polygone générateur dont les frontières ont des points communs avec C. On obtient ainsi l'équation

$$f(x) - \frac{1}{4\pi i}\int\limits_C \left\{ G(z, x) - \theta'(z)\, G[\theta(z), \theta(x)] \right\} f(z)\, dz = \frac{P(x) + P[\theta(x)]}{2}$$
$$+ \frac{1}{2}\sum_{(r)} \left[P(\zeta_r[x]) + P(\zeta_r[\theta(x)])\right]$$

qui est une équation régulière de Fredholm. En appliquant les théorèmes de Fredholm, nous pouvons, au moyen de cette équation, établir d'une manière simple les points essentiels de la théorie des fonctions fuchsiennes. Une méthode analogue est applicable aussi dans le cas où le polygone générateur a des points communs avec l'axe réel. Le même procédé est applicable aux fonctions teta-fuchsiennes et aux fonctions zéta-fuchsiennes.

Si l'on considère en particulier les fonctions doublement périodiques on obtient le résultat simple suivant: Les fonctions doublement périodiques de périodes ω_1 et ω_2 sont les solutions de l'équation intégrale

$$f(x) - \frac{1}{2\omega_1 i}\int\limits_0^{\omega_1} \left[\cot\frac{\pi}{\omega_1}(z - x - \omega_2) - \cot\frac{\pi}{\omega_1}(z - x + \omega_2)\right] f(z)\, dz =$$
$$= \frac{H(x) + H(x+\omega_1)}{2}$$

où $H(x)$ est une fonction meromorphe périodique de période ω_1, n'ayant pas des pôles à lexterieur da la bande

$$z = \omega_1 s + \omega_2 t, \quad -\infty < s < \infty, \quad 0 \leqq t < 1$$

et tendant vers zéro dans la direction de $\pm\omega_2$.

Ajoutons finalement que l'ensemble des fonctions analytiques régulières à l'intérieur du cercle d'unité E (et à carré intégrable dans E) peuvent s'obtenir comme fonctions fondamentales de l'équation intégrale hermitienne suivante

$$F(x) = \frac{1}{\pi} \int\int_E \frac{1}{(1 - x\,y)^2} F(y)\, d\,\sigma.$$

Applications aux équations différentielles.

L'importance fondamentale de la théorie des équations intégrales pour les problèmes aux limites de la théorie des équations différentielles linéaires, ordinaires ou partielles, est si bien connue qu'il est inutile d'y insister.

Nous dirons quelques mots d'un problème posé par Poincaré: Appliquer la théorie des équations intégrales linéaires à l'étude des systèmes d'équations différentielles non linéaires. Une solution de ce problème a été donnée par M. Fredholm en 1920. Il semble que, après Fredholm, c'est M. B. Koopman qui a publié le premier un résultat nouveaux dans cette direction. Il trouve que les propriétés des trajectoires d'un système d'équations différentielles canoniques sont intimement liées à la décomposition spectrale d'une certaine transformation fonctionnelle linéaire. J'ai étudié la même question à la même époque en transformant le système d'équations differentielles non linéaires en un système infini d'équations différentielles linéaires à coefficients constants. Des résultats ainsi obtenus j'ai déduit un critère pour déterminer si un système dynamique est quasi-ergodique ou non. Je démontre en même temps l'existence de certaines valeurs moyennes qui jouent un rôle important dans la mécanique statistique. Plus tard ce problème a été traité par MM. Birkhoff, J. v. Neumann, E. Hopf, B. Koopman, F. Riesz.

Applications à la Physique mathématique.

A cette catégorie appartiennent indirectement les applications indiquées dans le numéro précédent.

Il est bien connu que la théorie des matrices infinies et la théorie des équations intégrales sont des outils indispensables pour les théories physiques modernes, la mécanique quantique et la mécanique ondulatoire. M. Schrödinger a démontré que les problèmes mathématiques de ces deux théories sont au fond identiques. Le problème mathématique fondamental qui se présente dans la théorie de Schrödinger est le suivant: Etant donnée une équation linéaire aux dérivées partielles du second ordre et du type elliptique $L(\varphi) = 0$, qui coïncide avec son adjointe et a ses coefficients réels; rechercher les valeurs de λ pour lesquelles

$$L(\varphi) + \lambda\,\varphi = 0 \tag{26}$$

admette une solution à carré intégrable dans tout l'espace des variables indépendantes; et, plus généralement, déterminer les développements spectraux qui correspondent à (26). Cette extension de la théorie classique des fonctions fondamentales attachées à une équation différentielle a été posée et traitée d'une manière générale, il y a une vingtaine d'années, par M. Weyl dans le cas des équations différentielles ordinaires. Il montre que deux cas peuvent se présenter: ,,Le Grenzpunktfall" et le ,,Grenzkreisfall". Le ,,Grenzpunktfall" est caractérisé par la non-existence de solutions à carré intégrable (non nulles) de (26) pour λ non réel. Ce cas est le seul où la fonction spectrale est déterminée d'une manière unique. Il est facile d'étendre la théorie de M. Weyl aux équations à plusieurs variables, soit directement, soit par l'intermédiaire de la théorie des équations intégrales hermitiennes.

Pour que la théorie de Schrödinger puisse réussir il faut que l'équation de Schrödinger

$$\left[H\left(\frac{h}{2\pi i}\frac{\partial}{\partial q}, q\right) - \lambda\right]\varphi = 0$$

appartienne au ,,Grenzpunkttypus". Nous nous bornerons à remarquer que cela est certainement le cas pour l'équation

$$\sum_{\nu=1}^{n} \frac{1}{m_\nu}\left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_\nu^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y_\nu^2} + \frac{\partial^3 \varphi}{\partial z_\nu^2}\right) + \left(k \sum_{p,q} \frac{e_p e_q}{r_{pq}} + \lambda\right)\varphi = 0$$

qui correspond au problème des n-corps. On démontre que cette équation admette une fonction de Green formant un noyau borné au sens de M. Hilbert si λ a une valeur négative suffisamment grande. On trouve en même temps que le spectre ne peut pas s'étendre à l'infini du côté des λ négatifs.

La théorie des réseaux cristallins et la théorie cinétique des gaz sont d'autres chapitres importants de la Physique mathématique où la théorie des matrices infinies et la théorie des équations intégrales sont de la plus grande utilité.

La liste des disciplines mathématiques où l'on peut appliquer la théorie des équations intégrales n'est pas epuisée par celles dont nous venons de parler. Nous pouvons citer encore la Géometrie, le calcul des variations, le calcul des probabilités et même la théorie des nombres.