Neuere Methoden und Probleme der Geometrie

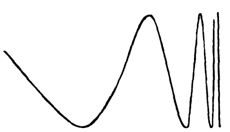
Von Karl Menger, Wien

Als mir die Auszeichnung zuteil wurde, von diesem Kongresse zu einem Vortrag aus meinem Arbeitsgebiete aufgefordert zu werden, war es zunächst meine Absicht, über einige neuere Methoden und Probleme der Geometrie im allgemeinen zu sprechen, wobei ich, um auftragsgemäss mein Arbeitsgebiet darzustellen, vor allem die mengentheoretische Richtung der Geometrie ins Auge fasste. So viel sich nun jedoch über Methoden und Probleme der mengentheoretischen Geometrie in Dimensions- und Masstheorie, in Topologie und Metrik sagen liesse — und zwar nicht nur über diese Wissenszweige an sich, sondern insbesondere auch über ihre Verknüpfung mit Gegenständen der klassischen Geometrie, — *einen* Eindruck würde Ihnen ohne Beschränkung des so ausserordentlich umfassenden Gebietes ein solcher Vortrag in Anbetracht der Kürze der verfügbaren Zeit kaum vermitteln können, nämlich den der Abgeschlossenheit, die wir an den klassischen Theorien so schätzen. Mehrere einzelne Kapitel der mengentheoretischen Geometrie aber erfreuen sich bereits einer weitgehenden Abrundung. Ich habe deshalb in der letzten Zeit beschlossen, vorwiegend doch bloss ein einziges Kapitel der mengentheoretischen Geometrie darzustellen, zumal sich dabei ja mehrfach Gelegenheit ergeben wird, allgemeine methodische Fragen zu streifen. Meine Wahl fiel auf die *Kurventheorie,* da dieses neueste Kapitel der Raumlehre an systematischer Abgeschlossenheit wohl kaum einem anderen Teile der Geometrie nachsteht und dabei vielleicht auch dem Fernerstehenden einen bequemen Zugang zu den in Rede stehenden Gegenständen bietet.

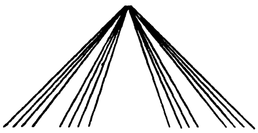
Die älteren Versuche von Kurventheorien brauche ich wohl nur kurz zu erwähnen, denn sie sind allgemein bekannt. Drei von ihnen suchten sich auf den Abbildungsbegriff zu stützen. Man hielt die Kurvennatur für eine *quantitative* Eigenschaft, d. h. man meinte, Kurven enthielten weniger Punkte als Flächen und Körper und mehr als diskontinuierliche (verstreut liegende) Gebilde. Dies führte *erstens* auf die *eineindeutigen Abbildungen.* Eineindeutig abbildbar aber ist nach Georg Cantor die Strecke auch auf Quadrat und Würfel einerseits und auf verstreute Gebilde anderseits, so dass auf eineindeutige Abbildungen ein Kurvenbegriff nicht gegründet werden kann. Man hielt die Kurven mit Jordan für jene Gebilde, welche stetig durchlaufbar sind, d. h. als Weg eines sich stetig bewegenden Punktes dargestellt werden können. Dies führte *zweitens* auf die *stetigen Abbildungen.* Aber auch stetig ist die Strecke nach Peano auf die Quadratfläche abbildbar, so dass auch auf den

Begriff der stetigen Abbildungen ein brauchbarer Kurvenbegriff nicht gegründet werden kann, wenngleich nach Hahn und Mazurkiewicz die stetig durchlaufbaren Gebilde auch durch eine wichtige gestaltliche Eigenschaft gekennzeichnet werden können, die als *Zusammenhang im Kleinen* oder als lokaler Zusammenhang bezeichnet wird. Man untersuchte *drittens* jene Gebilde, die durch eine zugleich eineindeutige und stetige Abbildung oder, wie man auch sagt, durch eine *topologische Abbildung* aus einer Strecke erhalten werden können und kam so mit Lennes zu jenen Kontinua, die linear ordenbar sind, bzw. die zwei Punkte enthalten, so dass sie nach Tilgung jedes von ihnen verschiedenen Punktes zerfallen. Diese Gebilde pflegt man heute als *Bogen* zu bezeichnen. Obwohl Quadrat und Würfel nach einem Satz von Lüroth, der ein Spezialfall eines allgemeinen Satzes von Brouwer ist, nicht zu den Bogen gehören, kann man einen allgemeinen Kurvenbegriff auch auf topologische Abbildungen nicht stützen, denn schon die Kreislinie und die Lemniskate lassen sich ja nicht durch topologische Abbildung aus einer Strecke erzeugen, gehören also nicht zu den Bogen.

Ein *vierter* Versuch bestand in einer Kombination des Begriffes der topologischen Abbildungen mit einem *Zusammensetzungsverfahren.* Man nannte Bogenkomplex oder *gewöhnliche Kurve* ein Kontinuum, welches Summe von endlichvielen Bogen ist, die paarweise höchstens Endpunkte gemein haben. Unter den Begriff der gewöhnlichen Kurven fallen Kreis und Lemniskate offenbar, aber dennoch ist er für einen allgemeinen Kurvenbegriff viel zu eng, da ja z. B. das sogenannte Sinusoid



d. h. der Graph der Funktion $y = \sin \frac{1}{x}$, $0 < x \leqq 1$ ergänzt durch die Strecke $-1 \leqq y \leqq 1$, $x = 0$ nicht zu den gewöhnlichen Kurven gehört. Und einfache Beispiele zeigen, dass es Gebilde gibt, die man als Kurven bezeichnet und die nicht einmal als Summe von *abzählbar* vielen Bogen darstellbar sind, z. B. jene Kurve, die entsteht, wenn man das Cantorsche Diskontinuum aus einem Punkt projiziert.



Liesse man dagegen Summen von *unabzählbar* vielen Bogen zu, so erhielte man einen viel zu weiten Kurvenbegriff, denn als Summe von unabzählbar vielen Strecken sind ja auch Quadrat und Würfel darstellbar.

Auch der Versuch Zorettis, die Kurven durch eine gestaltliche Eigenschaft zu charakterisieren, nämlich dadurch, dass sie zwar Kontinua sind, d. h. abgeschlossene, zusammenhängende Mengen (Mengen, die nicht in zwei getrennte Teilmengen spaltbar sind), dass sie aber sogenannte zwischen zwei Punkten *irreduzible Kontinua* sind (d. h. Kontinua, die keine die beiden Punkte enthaltende echte Teilkontinua besitzen), führte nicht zum Ziel, da nach Janiszewski irreduzible Kontinua existieren, die Quadratflächen als Teil enthalten.

Ein letzter Versuch, in der Ebene die Kurven als *die nirgends dichten Kontinua* zu erklären, oder, was auf dasselbe hinausläuft, als die Kontinua, die keine Quadratfläche enthalten, lieferte einen anschaulichen und brauchbaren Kurvenbegriff, der aber wesentlich auf die Ebene beschränkt ist, da schon im dreidimensionalen Raum auch die Flächen nirgends dichte Kontinua sind.

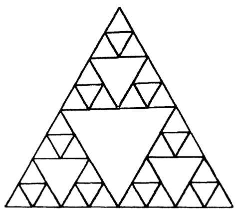
Die definitive Lösung des Problems durch die moderne Kurventheorie erfolgt auf ganz anderem Wege. Ich will, um die folgenden Ausführungen nicht fortwährend unterbrechen zu müssen, an dieser Stelle eine Zusammenstellung jener Autoren geben, die am Aufbau der Kurventheorie teilgenommen haben, und gerade vor einem internationalen Kongresse erscheint mir diese Art der Darstellung am Platze, da durch sie besonders in Evidenz gesetzt wird, wie die Kurventheorie ihre rasche Entwicklung in den verflossenen Jahren *internationaler wissenschaftlicher Kooperation* verdankt. Für alle Details sei auf das Buch „Kurventheorie" verwiesen, das der Vortragende unter Mitarbeit von Nöbeling herausgegeben hat und das im Oktober 1932 erscheint.

Mitberücksichtigt sind dort vor allem die Resultate der grossen Arbeit Urysohns über den Gegenstand. Die weitere Entwicklung gruppiert sich um einige Zentren: Von Mitarbeitern in *Polen* sind vor allem Knaster, Kuratowski, Mazurkiewicz, Sierpiński, Zarankiewicz zu nennen. In Amerika beschäftigt sich eine Gruppe von Forschern vorwiegend mit der Untersuchung von Kontinua, wobei einige Ergebnisse auch kurventheoretische Bedeutung haben. Es sind vor allem zu nennen Ayres, Gehmann, Kline, R. L Moore, der Gründer der Schule, Wilder und G. T. Whyburn, von denen besonders der letztgenannte überaus scharfsinnige Beiträge zur Kurventheorie geliefert hat. In *Russland* hat Alexandroff einige kurventheoretische Sätze mit Methoden bewiesen, die er als kombinatorisch bezeichnet. Endlich sind die letzten Endes auf Anregung meines Lehrers Hahn zurückgehenden Beiträge aus *Wien* zu nennen, von denen ich vor allem die wichtigen Resultate von Nöbeling und Reschovsky erwähne, wozu noch einige weitere Ergebnisse meines Wiener mathematischen Kolloquiums treten.

Um die Kurven unter den Kontinua zu kennzeichnen, vergleicht man eine Kurve mit einer Fläche und einem Körper. Denken Sie um einen Punkt eines *Körpers* eine kleine Umgebung (etwa eine Kugel, ein Ellipsoid oder dgl.) gelegt, so sehen Sie, dass die Begrenzung (die Oberfläche) der Umgebung vom Körper in ganzen *Flächenstücken* durchdrungen wird. Legen wir um einen Punkt einer *Fläche* eine kleine Umgebung, so wird ihre Begrenzung von der Fläche in *Linienstücken* durchschnitten. Um einen Punkt einer *Kurve* können wir beliebig kleine Umgebungen legen, deren Begrenzungen von der Kurve in *verstreut liegenden Punkten* durchstochen werden. So erhalten wir die folgende Definition: *Ein Kontinuum K heisst Kurve, wenn jeder Punkt von K in beliebig kleinen Umgebungen enthalten ist, deren Begrenzungen mit K nur verstreut liegende Punkte, d. h. kein Kontinuum gemein haben.* Z. B. ist der Kreis eine Kurve, denn jeder Punkt des Kreises ist in beliebig kleinen Kugeln enthalten, deren Begrenzungen von der Kreislinie in genau zwei Punkten durchstochen werden. Ebenso ist das erwähnte Sinusoid eine Kurve und allgemein kann man zeigen, dass in der Ebene die Kurven mit den nirgends dichten (d.h. mit den keine Quadratfläche enthaltenden) Kontinua identisch sind. Aber die allgemeine Kurvendefinition ist nicht auf die Ebene beschränkt, sondern auf Kurven in beliebigen euklidischen, ja noch in viel allgemeineren Räumen anwendbar.

Dasselbe Definitionsprinzip, das zum Kurvenbegriff führt — es ist insbesondere infolge seines lokalen Charakters eines der fruchtbarsten der mengentheoretischen Geometrie —, gestattet nun eine ausserordentlich feine Beschreibung der einzelnen Kurvenpunkte. Jeder Punkt eines Kreises ist in beliebig kleinen Umgebungen enthalten, deren Begrenzungen vom Kreise in genau zwei Punkten durchstochen werden, während um einen Kreispunkt nicht beliebig kleine Umgebungen gelegt werden können, deren Begrenzungen mit dem Kreis bloss einen Punkt gemein haben. Wir nennen daher die Kreispunkte Punkte zweiter Ordnung und in demselben Sinne den Durchsetzungspunkt einer Lemniskate einen Punkt vierter Ordnung. Allgemein heisst ein Punkt der Kurve *K von n-ter Ordnung*, wenn er in beliebig kleinen Umgebungen liegt, deren Begrenzungen n Punkte mit K gemein haben, während p nicht in beliebig kleinen Umgebungen enthalten ist, deren Begrenzungen mit K weniger als n Punkte gemein haben. Ein Punkt von K heisst *regulär*, wenn er in beliebig kleinen Umgebungen enthalten ist, deren Begrenzungen mit *K endliche* Durchschnitte gemein haben; er heisst *rational*, wenn er in beliebig kleinen Umgebungen enthalten ist, deren Begrenzungen mit *K abzählbare* Durchschnitte haben. Die Punkte der Teilstrecke des Sinusoides sind rational, aber nicht regulär. Kurven, die nur reguläre Punkte enthalten, heissen *reguläre Kurven;* Kurven, die nur rationale Punkte enthalten, werden *rationale Kurven* genannt. Ein Beispiel einer irrationalen Kurve liefert z. B. die zweite Figur.

Das nächstliegende Problem über die Struktur der Kurven besteht nun in der Frage nach der Verteilung der Punkte verschiedener Ordnung in einer gegebenen Kurve. Für jede Kurve K ist die Menge $\overset{1}{K}$ aller Punkte erster Ordnung (aller Endpunkte) diskontinuierlich, obwohl die Endpunkte, nebenbei bemerkt, in der Kurve dicht liegen können. Auch für jede natürliche Zahl $n > 2$ ist die Menge $\overset{n}{K}$ aller Punkte n-ter Ordnung von K diskontinuierlich. Die Zahl 2 ist also ausgezeichnet, denn aus Punkten zweiter Ordnung können offenbar Teilkontinua einer Kurve bestehen. Man meint auf den ersten Blick, diese Rolle der Zahl 2 sei selbstverständlich. Denn wenn man eine gewöhnliche Kurve betrachtet, so sieht man, dass fast alle ihre Punkte von der Ordnung 2 sind und nur endlich viele End- und Verzweigungspunkte in ihr auftreten. Indessen ist im allgemeinen die Sachlage eine völlig andere. Die Zahl 2 ist allerdings in beliebigen Kurven ausgezeichnet, aber gleichsam nur potentiell. 2 ist die einzige Zahl, die als Ordnung aller Punkte eines Teilkontinuums einer Kurve auftreten *kann*, aber es gibt Kurven, die überhaupt keine Punkte der Ordnung 2 enthalten. Das einfachste Beispiel einer solchen Kurve, deren sämtliche Punkte Verzweigungspunkte sind, ist folgende *Dreieckskurve,* welche entsteht, indem man ein Dreieck in vier kongruente Dreiecke teilt, das Innere des mittleren Teildreieckes tilgt, dieselbe Konstruktion in jedem der drei verbleibenden Teildreiecke durchführt und so ad infinitum fortfährt.



Damit ist zugleich Anlass zu einer methodischen Bemerkung gegeben. Wir haben hier eine jener weit bekannten und auch oft geschmähten *mengentheoretischen Singularitäten* vor uns, die nach Auffassung mancher nicht mengentheoretisch orientierter Geometer den Hauptgegenstand der mengentheoretischen Geometrie bilden. In der Tat findet es der Mengentheoretiker interessant, dass er ein Beispiel einer Kurve erbringen kann, die nur Verzweigungspunkte besitzt. Aber beachten Sie, dass abgesehen davon diese Beispiele von Singularitäten in einer ganz anderen Hinsicht von Wichtigkeit sind! Wenn Sie sich nämlich vor Augen halten, dass Kurven existieren, die nur Punkte einer Ordnung $\neq 2$ enthalten, so wird Ihnen der Satz, dass für jedes natürliche n die Menge $\overset{n}{K}$ aller Punkte n-ter Ordnung einer Kurve K diskontinuierlich ist, wohl in einem anderen Licht erscheinen. *Die Singularität bildet also einen Hintergrund, vor dem die Merkwürdigkeit allgemeiner Regelmässigkeiten erst ins rechte Licht tritt,* wie denn überhaupt mengentheoretische Singularitäten durchaus nicht nur um ihrer selbst willen von Interesse sind, sondern vor allem deshalb, weil sie erkennen lassen, *wie unermesslich umfassend und merkwürdig* *der Bereich von Gegenständen ist, in dem die mengentheoretische Geometrie Ordnung schafft und allgemein giltige Gesetze formuliert.*

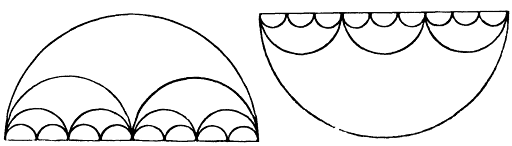
Im obigen Falle kann man übrigens viel weiter gehen. Es gibt geradezu zahlentheoretische Funktionen, welche festlegen, welche Ordnungen miteinander kombiniert auftreten können und welche nicht. Kurven, welche nur Punkte der Ordnungen 4 und 5 enthalten, können nicht existieren, während die Ordnungen n und $2n-2$ kompatibel sind und die Funktion $2n-2$ in gewissem Sinne eine Kompatibilitätsgrenze angibt.

Wieder eine methodische Bemerkung: Ich weiss nicht, wie man diese hinsichtlich beliebiger Mengen giltigen Sätze selbst für manche jener Gebilde, welche auch nicht-mengentheoretischer Definitionen fähig sind, mit anderen als mengentheoretischen Mitteln beweisen könnte. Allerdings wird man von gewissen sogenannten kombinatorischen Standpunkten aus vielleicht einwenden, dass die Mengen $\overset{n}{K}$ im allgemeinen nicht abgeschlossen sind und daher gar nicht innerhalb des Kreises der auf diesen Standpunkten betrachteten Objekte liegen. Aber ich kann nicht sehen, welchen Vorteil es für eine Theorie hat, giltige Sätze nicht formulieren zu können, noch dazu in sehr vielen Fällen Sätze, die auch für Gebilde gelten, die in der Theorie betrachtet werden. Wir werden also so unerwartete einfache allgemeine Sätze natürlich keineswegs fallen lassen. *Durch Ausschaltung angeblich pathologischer Gegenstände verzichtet man auf sicher gesunde Gesetze.* Es wäre, als wollte man aus der Zahlentheorie die transzendenten Methoden verbannen. Dabei ist zu bedenken, dass wir ja dank den grundlegenden Entdeckungen von Herrn Gödel in Wien wissen, dass sicher arithmetische Sätze existieren, die nur mit transzendenten Methoden beweisbar sind, und ebenso, *dass sicher Sätze über kombinatorisch eingeführte Gebilde existieren, die nur mit mengentheoretischen Methoden bewiesen werden können.*

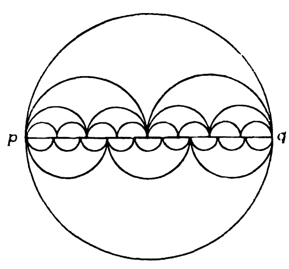
Das Problem der Verteilung der Punkte verschiedener Ordnung in einer Kurve ist nach allen Richtungen durchforscht und restlos gelöst. Lassen Sie mich aus der Fülle weiterer Sätze über die Struktur der Kurven nur erwähnen, dass die irregulären und auch die irrationalen Punkte einer Kurve nie isoliert auftreten können, sondern, so wie man im Beispiel des Sinusoides verifizieren kann, stets in kontinuierlichen Ballungen; ferner, dass die Menge aller irrationalen Punkte einer Kurve selbst in keinem ihrer Punkte regulär, dagegen in jedem ihrer Punkte rational sein kann.

Um in der Systematik der Kurventheorie fortzufahren, wende ich mich den *Zerlegungsproblemen* zu. Jede Kurve, wie allgemein und wie absonderlich sie auch sein mag, teilt mit den gewöhnlichen Kurven doch jedenfalls die Eigenschaft, dass sie in endlichviele beliebig kleine abgeschlossene Mengen zerlegt werden kann, die zu je zwei einen diskontinuierlichen Durchschnitt besitzen und die zu je drei überhaupt keine Punkte gemein haben. Und diese Eigenschaft ist für die Kurven unter den Kontinua (den Kontinua im allgemeinsten Sinne des Wortes) charakteristisch. Wenn Sie ein Kontinuum, das keine Kurve ist, also ein mehrdimensionales Kontinuum, in hinreichend kleine abgeschlossene Mengen zerlegen, treten immer Summandenpaare auf, die ganze Kontinua mit einander gemein haben und Summandentripel, die Punkte gemein haben, so wie bei einer Zerlegung der Erdoberfläche in kleine Gebiete kontinuierliche Grenzen und Dreiländerecken vorkommen. Ich erwähne noch, dass aus dieser Gemeinsamkeit beliebiger Kurven mit gewöhnlichen Kurven auch folgt, dass man jede Kurve in eine gewöhnliche Kurve durch beliebig kleine Verrückungen der Punkte stetig deformieren kann, und dass auch diese Eigenschaft für die Kurven unter den allgemeinen Kontinua charakteristisch ist.

Ein anderer Fragenkreis beschäftigt sich mit der *Summe von Kurven*. Vereinigt man zwei Kurven, so entsteht, wenn die Summe ein Kontinuum ist, wieder eine Kurve. Ja, es ist selbst die Summe von abzählbarvielen Kurven niemals eine Fläche. Ebenso ist die Summe von abzählbarvielen rationalen Kurven eine rationale Kurve. Die Summe von abzählbarvielen regulären Kurven ist natürlich, wie man am Beispiel des Sinusoides leicht erkennt, nicht notwendig regulär. Was aber ist näherliegend als die Vermutung, dass wenigstens die Summe endlichvieler regulärer Kurven regulär ist? Und doch ist dem nicht so. Schon die Summe zweier regulärer Kurven kann irregulär sein. Sie werden nun wieder ein recht absonderliches Gegenbeispiel für dieses merkwürdige Vorkommnis erwarten. Hier ist eines: Fügt man die beiden folgenden Kurven,



wobei man die Konstruktion der Halbkreise natürlich ad infinitum fortgesetzt zu denken hat und von denen man leicht zeigen kann, dass sie regulär sind, zusammen, so ist die entstehende Kurve



irregulär. Ich halte es für sehr wohl denkbar, dass man Wertkriterien formulieren könnte, denen zufolge auch diese Kontinua „geometrisch nicht vollwertig" sind. Tatsache aber ist, dass es sich um Figuren handelt, die im Kapitel über Modulfunktionen die geometrische Zierde der klassischen Bücher über Funktionentheorie bilden.

Aber die zuletzt betrachtete Summenkurve hat noch andere merkwürdige Eigenschaften, — Eigenschaften von jener Art, wie sie bisweilen als „bloss mengentheoretische Vorkommnisse" etwas geringschätzig behandelt werden. Man würde doch z. B. kaum für möglich halten, dass ein Kontinuum K zwei Punkte p und q enthält, die für jede noch so grosse natürliche Zahl n innerhalb des Kontinuums K durch n bis auf die Punkte p und q paarweise fremde Bogen verbindbar sind, ohne dass p und q innerhalb von K durch unendlichviele paarweise fremde Bogen verbindbar sind. Und doch. Die letztbetrachtete Summenkurve, die man mit Rücksicht auf ihre Definierbarkeit durch automorphe Funktionen wohl nicht als allzu pathologisch bezeichnen kann, besitzt diese Eigenschaft hinsichtlich der eingezeichneten Punkte p und q. Wieder ergibt sich eine methodische Bemerkung, gleichsam dual zur vorigen: *Durch Ausschaltung angeblich pathologischer Vorkommnisse verzichtet man auf sicher gesunde Gegenstände.*

Unter den vielen merkwürdigen Eigenschaften dieser schönen Kurve habe ich darum gerade die erwähnte herausgegriffen, weil sie zu einer wichtigen Fragestellung überleitet, die wiederum durch ein allgemeines, noch dazu auf ganze Zahlen bezügliches Gesetz beantwortet wird. Jeder Punkt p von n-ter Ordnung eines beliebigen stetig durchlaufbaren Kontinuums K ist Scheitel eines in diesem Kontinuum enthaltenen n-Beines, d. h. es lassen sich aus dem Kontinuum n im Punkt p endende, sonst paarweise fremde Bogen herausgreifen, während ein $(n + 1)$-Bein mit dem Scheitel p im Kontinuum K nicht enthalten ist. Beachten Sie, dass diese n Bogen durchaus nicht die gesamte Nachbarschaft von p im Kontinuum auszufüllen brauchen. Das Kontinuum kann z. B., wie wir sahen, bloss aus Verzweigungspunkten bestehen. Und doch lässt sich aus dem wenn auch noch so verwickelten Liniengewirre zu jedem Punkt n-ter Ordnung stets ein n-Bein, aber kein $(n + 1)$-Bein herausgreifen.

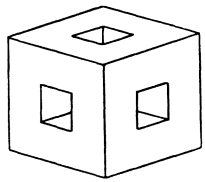
Was die Kurventheorie weiter leistet, ist eine systematische Untersuchung der hauptsächlichen Kurvenklassen, der rationalen Kurven, der regulären Kurven, spezieller Klassen regulärer Kurven und so weiter bis zu den gewöhnlichen Kurven, für die als charakteristisch erwiesen wird, dass sie nur endlichviele Punkte enthalten, deren Ordnung $\neq 2$ ist. Es ist *ein systematischer Weg vom Allgemeinen zum Speziellen* mit Kennzeichnung jeder spezielleren Klasse innerhalb der allgemeineren. Und dies ist eine ganz allgemeine Methode der mengentheoretischen Geometrie. Sie *untersucht* auch die einfachen Gebilde, aber sie *geht nicht von ihnen aus*. Sie lässt sich durch keine von vornherein angenommene Beschränkung den Weg zum Allgemeinen versperren, *sondern sie kennzeichnet das Spezielle unter dem Allgemeinen.*

Zwei Beispiele mögen dies erläutern.

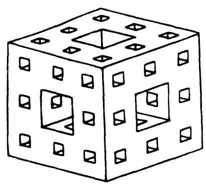
Wir haben erwähnt, dass es Kurven gibt, die nicht stetig durchlaufbar sind (wie z. B. das Sinusoid) und dass es stetig durchlaufbare Kontinua gibt, die keine Kurven sind (wie z. B. die Quadratfläche). Untersucht man jedoch jene Kontinua, die nicht nur selbst stetig durchlaufbar sind, sondern deren sämtliche Teilkontinua stetig durchlaufbar sind, so zeigt sich, dass diese „*erblich durchlaufbaren*" Kontinua durchwegs Kurven sind. Ja, man kann weiter zeigen, dass diese Klasse der erblich durchlaufbaren Kontinua sich zwischen die Klasse der regulären und die Klasse der rationalen Kurven einschiebt, in dem Sinne, dass jede reguläre Kurve erblich durchlaufbar und jede erblich durchlaufbare rational ist, während rationale Kurven existieren, die nicht erblich durchlaufbar sind, wie z. B. das Sinusoid, und erblich durchlaufbare Kurven, welche nicht regulär sind. Für das letztere Vorkommnisl iefert übrigens ein Beispiel wiederum die vorhin erwähnte und abgebildete irreguläre Kurve, welche als Summe zweier mit Hilfe der Modulfunktionen definierbarer regulärer Kurven darstellbar ist. Gekennzeichnet sind die erblich durchlaufbaren Kurven u. a. durch die Eigenschaft, dass sie kein *Konvergenzkontinuum* als Teil enthalten, d. h. kein Teilkontinuum T enthalten, zu dem eine Folge von paarweise und zu T fremden, gegen T konvergenten Teilkontinua der Kurve existiert.

Das zweite Beispiel knüpft an die Bemerkung, dass die Summe zweier regulärer Kurven nicht regulär sein muss. Diese Tatsache legt die Betrachtung von *beständig regulären* Kurven nahe, d. h. von Kurven, die nicht nur regulär sind, sondern nach Hinzufügung einer beliebigen regulären Kurve regulär bleiben. Die Klasse dieser beständig regulären Kurven schiebt sich zwischen die Klasse der regulären Kurven und die Klasse der eingangs erwähnten gewöhnlichen Kurven (oder Bogenkomplexe) ein. Gekennzeichnet sind die beständig regulären Kurven durch die Eigenschaft, dass sie kein *Häufungskontinuum* enthalten, d. h. kein Teilkontinuum besitzen, dessen Komplement in der Kurve dicht ist. Charakteristisch ist für sie ferner, dass sie kein Teilkontinuum enthalten, in welchem die Verzweigungspunkte der Kurve dicht liegen.

Mangel an Zeit verbietet mir, auch nur hinsichtlich der Kurventheorie auf die Fülle weiterer Resultate einzugehen, die aus dem Prinzip systematischen und kennzeichnenden Schreitens vom Allgemeinen zum Speziellen fliessen. Ich will hier vielmehr lediglich ein die Kurventheorie in gewissem Sinne abschliessendes Resultat erwähnen. Jede Kurve, sie mag noch so verwickelt sein und in einem noch so hochdimensionalen euklidischen Raum oder gar im Hilbertschen Raume liegen, kann topologisch auf eine Kurve des dreidimensionalen euklidischen Raumes abgebildet werden. Ja es existiert sogar eine bestimmte Kurve im dreidimensionalen euklidischen Raum, die zu jeder noch so komplizierten Kurve eine in sie topologisch transformierbare Teilkurve enthält. Diese umfassende Kurve, die übrigens noch dazu stetig durchlaufbar ist, erhält man so: Man teilt einen Würfel in 27 kongruente Teilwürfel und tilgt den innersten und seine 6 Nachbarwürfel.



Man wiederholt sodann dieses Tilgungsverfahren in jedem der 20 verbleibenden Würfel



und iteriert diesen Prozess, der offenbar eine Verallgemeinerung der Konstruktion des Cantorschen Diskontinuums ist, ad infinitum. Die Menge aller verbleibenden Punkte ist die erwähnte Universalkurve.

Aber noch viel mehr! Die Tendenz, den Raumbegriff zu verallgemeinern, so dass der Raum nicht spezieller ist als die in ihm betrachteten Gebilde, — diese Tendenz, welche sich in der Differentialgeometrie so massgebend ausgewirkt hat, hat auch in der mengentheoretischen Geometrie Früchte getragen. In der Differentialgeometrie fand man, dass der euklidische Raum spezieller ist als die in ihm betrachteten Mannigfaltigkeiten, und ging deshalb zur Untersuchung der Mannigfaltigkeiten in Riemannschen Räumen über. In der mengentheoretischen Geometrie erweist sich der euklidische Raum noch in viel höherem Masse spezieller als die in ihm betrachteten Teilmengen, und zwar sowohl im Grossen als auch im Kleinen, sowohl in topologischer als auch in metrischer Hinsicht. Die betrachteten Teilmengen sind ja, um nur ein auf der Hand liegendes Beispiel zu erwähnen, durchaus nicht notwendig homogen, während der euklidische Raum homogen ist. Die erforderlichen Abstraktionen verdankt man Fréchet, der damit zu jenen allgemeinen Raumklassen der mengentheoretischen Geometrie gelangte, von denen seine Limesklassen, seine metrischen und seine halbmetrischen Räume (classes L, V, E), sowie Hausdorff's topologische Räume heute bereits ziemlich allgemein bekannt sind. Auch bezüglich dieser allgemeinen Räume lassen sich methodische Betrachtungen an-stellen, ähnlich jenen über die in der mengentheoretischen Geometrie betrachteten Gebilde. Auch unter diesen Räumen nämlich existieren ausserordentlich merkwürdige Individuen, und zwar merkwürdig sowohl in bezug auf die Natur ihrer Elemente, welche z. B. ihrerseits Teilmengen anderer Räume oder Abbildungen sein können, als auch hinsichtlich der zwischen den Elementen bestehenden Relationen und der gestaltlichen Eigenschaften. Und doch wird auch dieser unermessliche Bereich von Räumen durch allgemeine Gesetze beherrscht. Was die Kurventheorie betrifft, deren sämtliche Begriffe und Theoreme übrigens auf diese allgemeinen Räume übertragbar sind, so kann man zeigen, dass sogar jede Teilkurve eines dieser allgemeinen Räume topologisch auf eine Teilkurve der erwähnten Universalkurve abgebildet werden kann, was übrigens nur ein Spezialfall eines allgemeinen dimensionstheoretischen Einbettungssatzes ist.

Damit möchte ich, was die systematische Kurventheorie betrifft, meine wenigen Beispiele beschliessen. Diese gesamte Kurventheorie ist nur ein einziges und zwar ein einführendes Kapitel der mengentheoretischen Geometrie. Vor allem ist sie in gewissem Sinne bloss der einfachste Spezialfall der allgemeinen mengentheoretischen *Dimensionstheorie*, welche sich auf jenen Dimensionsbegriff stützt, der im Keime bereits in den berühmten Anfangsworten Euklids enthalten ist: „Das Äusserste einer Kurve sind Punkte, das Äusserste einer Fläche sind Kurven, das Äusserste eines Körpers sind Flächen", — der sodann von Poincaré vorbereitet wurde, dem Brouwer und in den untersten Fällen Sierpiński bereits ausserordentlich nahegekommen waren, ohne dass diese Autoren allerdings ihre Definitionen zum Ausgangspunkt irgendeiner Theorie machten, und der schliesslich bei Urysohn und in meinen eigenen Abhandlungen definitiv formuliert und zum Ausgangspunkt einer umfassenden Theorie gemacht worden ist, welche in meinem Buche „Dimensionstheorie" (1928) dargestellt ist.

In welchem Verhältnis stehen nun diese allgemeinen punktmengentheoretischen Untersuchungen zur *Topologie?* Mit Vergnügen hörte ich im gestrigen Vortrage Herrn Alexander's, die Untersuchungen von Punktmengen seien eigentlich gar nicht Topologie in dem auf Leibniz zurückgehenden Sinne der kombinatorischen Topologie, welche die qualitativen Eigenschaften im Grossen des Raumes und der Raumgebilde untersucht. Diese Auffassung vertrete ich nämlich in meinen Publikationen bereits seit mehreren Jahren. Ich möchte nur vorweg bemerken, dass von den mengentheoretisch orientierten Geometern mit dieser Auffassung nicht im geringsten irgendein Vorwurf gegenüber den von ihnen sehr geschätzten *kombinatorischen* Methoden verbunden wird, gegen die eine Polemik mir völlig fern liegt. Gelegentlich werden ja kombinatorische Methoden sogar in rein mengentheoretischer Geometrie verwendet, in der Kurventheorie z. B. zum Beweise des n-Beinsatzes. Fern liegt mir auch eine Polemik gegen die mit Approximationen und ε-Deformationen arbeitenden *sogenannten* kombinatoirschen Methoden[1]). Den zahlreichen Problemen, die bisher ausschliesslich mengentheoretischen und nicht pseudokombinatorischen Methoden sich zugänglich erwiesen haben (und zwar sowohl was Formulierung als auch was Beweise betrifft), stehen ja einige Fälle gegenüber, die bisher nur grenzkombinatorisch und noch nicht mengentheoretisch in Angriff genommen worden sind, wenngleich ich nicht verschweigen kann, dass in den meisten jener Fälle, die heute sowohl in sogenannter kombinatorischer als auch in mengentheoretischer Behandlung vorliegen, wie z. B. im Falle des Zusammenhangsbegriffes die mengentheoretische Behandlung mir kürzer, eleganter und allgemeiner erscheint.

Und nun möchte ich die Herrn Alexander und mir gemeinsame Ansicht, dass die mengentheoretische Geometrie keine Topologie sei, ergänzen durch eine Bemerkung, was die mengentheoretische Richtung in der Geometrie denn meines Erachtens ist: Ihr Ziel ist *die Untersuchung beliebiger Raumgebilde.* Manche geometrische Eigenschaften erweisen sich dabei als invariant gegenüber topologischen Transformationen, manche nicht, ohne dass doch deshalb diese letzteren darum weniger wichtig sein müssen. Als Beispiel einer für beliebige metrische Räume und ihre Teilmengen definierbaren, topologisch nicht invarianten und doch recht fruchtbaren Eigenschaft erwähne ich hier nur die *Konvexität.* Liegt ein metrischer Raum vor, d. h. eine Menge von (als Punkte bezeichneten) Elementen, in der je zwei Punkten p und q eine (als Abstand von p und q bezeichnete) Zahl $p\,q = q\,p$ zugeordnet ist, die > 0 ist, falls p und q verschieden sind, während von sich selbst jeder Punkt den Abstand 0 hat, und wobei je drei Punkte p, q, r der Dreiecksungleichung $p\,q + q\,r \geqq p\,r$ genügen, — dann sagen wir, q liege *zwischen* p und r, falls q von p und r verschieden ist und die Beziehung $p\,q + q\,r = p\,r$ besteht. Und wir nennen den metrischen Raum konvex, falls zu je zwei Punkten ein Punkt zwischen ihnen existiert. Es scheint mir nun sehr bemerkenswert, dass auch in der völlig untopologischen Konvexitätstheorie beim Studium der Verteilung gewisser metrisch-singulärer Punkte ganz dieselben Methoden anwendbar sind und ganz analoge Sätze gelten wie in der mengentheoretischen Kurventheorie. Die Spitzen eines metrischen Raumes beispielsweise (d. h. jene Punkte, welche zwischen keinen zwei Punkten des Raumes liegen) genügen ganz denselben früher erwähnten Verteilungsgesetzen wie die Endpunkte einer Kurve.

Und damit komme ich zu einem besonders wichtigen, bisher noch kaum in An-

[1]) Gesprächsweise schlug Herr Alexandroff nach dem obigen Vortrage vor, dem in demselben hervorgehobenen Unterschiede zwischen den kombinatorischen (mit endlichen Mengen operierenden) und den bisher häufig gleichfalls kombinatorisch genannten, obwohl mit dem Limesbegriff, ja mit kontinuierlichen Deformationen arbeitenden Methoden dadurch Rechnung zu tragen, dass man die lezteren als *grenzkombinatorisch* bezeichnet. Für eine eingehende Behandlung aller einschlägigen methodischen Fragen verweise ich auf meinen 1933 erscheinenden Einleitungsband der Sammlung „Mengentheoretische Geometrie in Einzeldarstellungen."

griff genommenen Fragenkomplex: *nach den topologischen Eigenschaften eines allgemeinen Raumes, welche die Aufprägung spezieller Metriken gewährleisten,* und anderseits *nach den metrischen Eigenschaften, welche das Äquivalent gewisser topologischer Eigenschaften sind.* Welche topologische Eigenschaft eines kompakten Raumes gewährleistet z. B. die Einführbarkeit einer Metrik, derzufolge der Raum konvex ist, bezw. derzufolge je zwei Punkte durch eine einzige geodätische Linie verbunden sind oder gar (in bloss vollständigen Räumen) genau eine Gerade bestimmen? Ist stetige Durchlaufbarkeit für die Konvexifizierbarkeit eines Raumes nicht nur notwendig, sondern auch hinreichend? Und in welchen Beziehungen steht Unizität der geodätischen Linien zu den Bettischen- und Torsionszahlen? Dieser ganze Fragenkreis stellt letzten Endes den tiefsten Kern dessen dar, was man als *topologische Fragen der Differentialgeometrie* und als *Differentialgeometrie im Grossen* bezeichnet.

Überhaupt scheint mir nichts ungerechter, als wenn man der mengentheoretischen Geometrie vorwirft, sie habe keinen Anschluss an die klassischen Probleme der Geometrie oder sei im Begriffe, denselben zu verlieren. Wenn die Kurventheorie, von der ich Ihnen wegen ihrer Abrundung einige Beispiele vorgelegt habe, weniger Beziehungen zur älteren Geometrie besitzt, so weisen andere Zweige der mengentheoretischen Geometrie solche Beziehungen in eminentem Masse auf. Es ist überflüssig zu erwähnen, wie tief die mengentheoretischen *Masstheorien* der Pariser Schule in die gesamte Analysis eingegriffen haben. Es möge nur daran erinnert werden, wie speziell Methoden der *metrischen mengentheoretischen Geometrie* in Differentialgeometrie, Variationsrechnung, ja in Gruppentheorie langsam aber sicher einzudringen beginnen. Der Einfluss der mengentheoretischen Methoden auf diese klassischen Gebiete ist teils ein *verallgemeinernder*, teils ein *präzisierender*, teils ein *abrundender*. An manchen Stellen werden überflüssige Beschränkungen durch den Übergang zum Studium allgemeiner Mengen abgestreift, an manchen Stellen auch für die bisher bekannten Gebilde durch Heranziehung allgemeinerer Gebilde neue Sätze entdeckt. Als Beispiel erwähne ich nur eine Krümmungsdefinition unabhängig von direkten Differenzierbarkeitsvoraussetzungen für Bogen, welche nicht einmal durch Funktionen gegeben sein müssen, und eine Kennzeichnung der Strecke durch Krümmung *O* unter diesen Bogen, – also ein differentialgeometrischer Satz ohne Differentialrechnung. Erwähnt werden möge noch, dass die Kennzeichnung der euklidischen Räume unter den allgemeinen metrischen Räumen nicht nur zur Verwendung algebraischer Methoden geführt hat, sondern auch einige elementargeometrische und algebraische Sätze zutage gefördert hat.

Das aber, was mir von grundlegender Wichtigkeit an der mengentheoretischen Geometrie zu sein scheint, und was ich Ihnen zuvor durch einige kurventheoretische Bemerkungen näher zu bringen suchte, das ist *die unermessliche Erweiterung des*

Gegenstandes geometrischer Forschung, welche die unvergängliche Leistung Georg Cantor's mit sich gebracht hat, diesen Bereich, in dem sie die unglaublichsten Singularitäten entdeckt hat und von dem sie doch nachweist, dass er durch allgemeine Gesetze beherrscht wird. Wenn wir in der Geschichte der Geometrie zurückblicken, so gibt es höchstens einen einzigen Moment, der eine ähnliche Erweiterung des Forschungsbereiches zu verzeichnen hatte, nämlich die Entdeckung der analytischen Geometrie. Vor ihrer Entdeckung hatte man sich mit Geraden, Kegelschnitten und einigen wenigen algebraischen und transzendenten Kurven befasst, die zur Lösung eher zufälliger Probleme, wie Würfelverdoppelung und Winkeldreiteilung, dienten. Nach ihrer Entdeckung lag die Gesamtheit aller algebraischen Kurven und weit mehr einem systematischen Studium offen. In diesem neuen Bereiche entdeckte man die bis dahin unglaublichsten Singularitäten und fand ihn doch von harmonischen allgemeinen Gesetzen beherrscht. Und sogar diejenigen, welche heute die allgemeinen Gebilde der mengentheoretischen Untersuchungen aus der Geometrie zu verbannen suchen, haben in jener Epoche ihre Vorläufer. Denn nach der Entdeckung der analytischen Geometrie sagte man: „Die algebraischen Gebilde sind nun der Geometrie erschlossen, aber *was keiner algebraischen Gleichung genügt, das ist nicht geometrisch vollwertig, das gehört nicht in die Geometrie*."

Nun, Sie alle wissen, es ist anders gekommen. Und so mehren sich denn auch die Zeichen dafür, dass die neue Erweiterung, Cantor's mengentheoretische Erweiterung, nicht nur der Wissenschaft unverloren bleiben wird, sondern, statt als eine zur Geometrie beziehungslose Punktmengenlehre ihr Dasein zu fristen, als die organische Weiterbildung und Verallgemeinerung der *Geometrie* anerkannt werden wird, was ich seit einigen Jahren durch die Einführung der Bezeichnung *mengentheoretische Geometrie* zum Ausdruck zu bringen suche und wovon dieser Vortrag einige kleine Beispiele Ihnen vorführen sollte.

Sein Ziel wäre erreicht, wenn es mir gelungen sein sollte, einem oder dem anderen Fernerstehenden eine der angeschnittenen Fragen dieses Gebietes näher zu bringen. Wenn er sich dann in diese neue Gedankenrichtung der Geometrie, fast möchte ich sagen, in diese neue geometrische Gedankenwelt vertieft, wird er auch erkennen, dass ein kurzer Überblick über diesen Gegenstand notwendig mit Unvollkommenheiten behaftet ist, und er wird dann vielleicht auch die Unvollkommenheiten dieses kurzen Berichtes entschuldigen.