Über die Entwickelung der allgemeinen Theorie der analytischen Funktionen in neuerer Zeit.*)

Von

A. Hurwitz in Zürich.

Die allgemeine Theorie der analytischen Funktionen, über deren Entwickelung in neuerer Zeit ich Ihnen berichten möchte, besitzt in zweifacher Hinsicht ein hohes Interesse. Einerseits giebt sie uns die allgemeinen Gesichtspunkte und Hülfsmittel für die Untersuchung spezieller Funktionen irgend welcher Art. In dieser Hinsicht brauche ich nur zu erinnern an die Theorie der algebraischen Funktionen und ihrer Integrale, ferner an die neueren Untersuchungen von Klein, Poincaré u. a. über die Funktionen mit linearen Transformationen in sich, endlich an die ausgedehnte Theorie der durch algebraische Differentialgleichungen definierten Transcendenten.

Auf der anderen Seite hat die allgemeine Theorie der analytischen Funktionen ein mehr selbständiges, erkenntnistheoretisches Interesse. Sie leitet insbesondere zu den prinzipiellen Grundlagen aller Gröfsen-

---

*) Der Vortrag erscheint hier im wesentlichen in unveränderter Form. Nur an einigen wenigen Stellen habe ich den ursprünglichen Text des Vortrages verbessert, zumeist auf Grund von Besprechungen mit Fachgenossen, die an dem Kongresse teilnahmen. Wenn sich trotzdem, was mir sehr wahrscheinlich, ja beinahe gewifs erscheint, noch Ungenauigkeiten im Einzelnen finden, dadurch hervorgerufen, dafs mir wichtige Arbeiten entgangen sind, so darf ich wohl in Rücksicht auf die aufserordentliche Ausdehnung der einschlägigen Litteratur auf einige Nachsicht rechnen. Was die Umgrenzung des Stoffes angeht, die ja der Natur der Sache nach bis zu einem gewissen Grade willkürlich blieb, so war für mich der Wunsch mafsgebend, namentlich diejenigen Punkte zur Sprache zu bringen, welche in naher Beziehung zu den Grundlagen der Gröfsenlehre stehen. Übrigens war eine möglichste Beschränkung des Stoffes schon durch den Umstand geboten, dafs für den Vortrag nur eine eng begrenzte Zeit zur Verfügung stand. Dem Texte des Vortrages habe ich hier ein ausführliches Litteraturverzeichnis, sowie einige Anmerkungen angefügt, welche einzelne im Vortrage berührte Punkte weiter ausführen und erläutern.

forschung zurück und vervollkommnet und festigt hier die Fundamente, auf welchen die gesamte Analysis aufgebaut ist.

Bei meinen Ausführungen werde ich vielfach diese letztere Seite der allgemeinen Funktionentheorie in den Vordergrund stellen. Es geschieht dies in der Meinung, daſs die Fragen prinzipieller Natur auch über den engeren Kreis der Funktionentheoretiker hinaus Interesse beanspruchen dürften.

Unter dem Namen der allgemeinen Theorie der analytischen Funktionen begreifen wir eigentlich zwei Theorien: die Cauchy-Riemann'sche und die Weierstraſs'sche.

Ihr wesentlicher Unterschied liegt darin, daſs sie von verschiedenen Definitionen des Funktionsbegriffes ausgehen. Da die Definition von Weierstraſs den elementareren Charakter hat, so knüpfe ich an sie an.

Lagrange hatte in seiner „Théorie des Fonctions analytiques" den unrichtigen Satz zu beweisen versucht, daſs jede stetige Funktion in eine Potenzreihe entwickelbar ist. Weierstraſs sagt umgekehrt: ich nenne eine Funktion „analytisch", wenn sie sich in eine Potenzreihe entwickeln läſst. Diese Festsetzung bedarf natürlich noch einer präziseren Fassung. In voller Schärfe hat Weierstraſs seinen Funktionsbegriff nicht sowohl in seinen Abhandlungen als vielmehr in seinen Universitäts-Vorlesungen entwickelt und zwar folgendermaſsen:

Wir stellen die Werte der komplexen Variabeln z in üblicher Weise durch die Punkte einer Ebene dar. Eine nach ganzen positiven Potenzen von $z - a$ fortschreitende Reihe konvergiert dann in einem Kreise, dessen Mittelpunkt der Punkt a ist. Beiläufig bemerkt, hängt der Radius dieses Kreises von den Koeffizienten der Potenzreihe nach einem einfachen Gesetze ab, welches schon Cauchy[1]) angegeben hat, das aber erst in neuerer Zeit durch eine Arbeit von Herrn Hadamard[2]), der es unabhängig von Cauchy wieder entdeckt hat, in weiteren Kreisen bekannt geworden ist.

Weierstraſs betrachtet nun zwei Potenzreihen, deren Konvergenzkreise verschiedene Mittelpunkte besitzen, jedoch ein Flächenstück gemeinsam haben. Wenn in jedem Punkte dieses gemeinsamen Stückes die beiden Potenzreihen denselben Wert annehmen, so heiſst jede der Potenzreihen eine unmittelbare Fortsetzung der anderen. Allgemeiner heiſsen zwei Potenzreihen schlechthin Fortsetzungen von einander, wenn sie Anfangs- und Endglied einer endlichen Reihe von Potenzreihen sind, von denen jede eine unmittelbare Fortsetzung der vorhergehenden ist.

Geht man nun von einer bestimmten Potenzreihe aus und faſst dieselbe mit allen ihren Fortsetzungen zu einem Systeme zusammen, so hat man das vor sich, was Weierstraſs ein monogenes System von Potenzreihen nennt. Ein solches System erzeugt eine bestimmte Funktion der komplexen Variabeln z, d. h. es ordnet den Werten der Variabeln z bestimmte komplexe Zahlenwerte $f(z)$ zu. Man fasse nämlich einen bestimmten Wert von z ins Auge; dann wird jede Potenzreihe des Systemes, deren Konvergenzkreis den Punkt z in seinem Innern enthält, für den betrachteten Wert von z eine bestimmte Summe $f(z)$ besitzen. Sind die den verschiedenen Potenzreihen des Systemes entsprechenden Werte $f(z)$ sämtlich unter einander gleich, so wird die Funktion $f(z)$ für den betrachteten Wert von z eindeutig sein, im anderen Falle mehrdeutig.

Eine Funktion heiſst nun nach Weierstraſs analytisch, wenn sie in der geschilderten Weise durch ein monogenes System von Potenzreihen definiert werden kann.

Wie man sieht, ist der Begriff des monogenen Systemes von Potenzreihen das Primäre; auf ihn baut sich erst der Funktionsbegriff auf. Bemerkt sei übrigens, daſs der französische Mathematiker Méray [3]) unabhängig von Weierstraſs einen im wesentlichen mit dem Weierstraſs'schen übereinstimmenden Begriff der analytischen Funktion aufgestellt hat.

An diese Definition der analytischen Funktion knüpft sich nun sofort eine Reihe von wichtigen Fragen. Ich will zunächst nur eindeutige Funktionen betrachten. Liegt eine eindeutige Funktion vor, definiert durch ein monogenes System von Potenzreihen, so scheiden sich die Punkte der komplexen Zahlenebene in zwei Kategorien. Die eine Kategorie wird von denjenigen Punkten gebildet, die in das Innere des Konvergenzkreises von Potenzreihen des Systemes fallen, die andere Kategorie von allen übrigen Punkten. Die Gesamtheit der ersteren Punkte heiſst nach Weierstraſs der „Stetigkeitsbereich" der Funktion [4]). Hier erhebt sich nun zunächst die Frage:

Welche Möglichkeiten liegen in bezug auf die Gestaltung des Stetigkeitsbereiches einer eindeutigen analytischen Funktion vor?

Um die Antwort auf diese Frage in präziser Weise aussprechen zu können, muſs ich an einige Begriffe aus der Lehre von den Punktmengen erinnern. Man denke sich irgend eine Punktmenge in der Zahlenebene oder auch auf einer Kugel, die stereographisch auf die Zahlenebene bezogen ist. Ein beliebiger Punkt der Ebene oder der Kugel kann sich dann auf drei verschiedene Arten in bezug auf die Punktmenge verhalten. Entweder läſst sich um den Punkt ein Kreis so legen, daſs alle Punkte im Innern dieses Kreises der Punktmenge angehören. Der betreffende Punkt heifst dann ein innerer Punkt der Menge. Oder es läfst sich um den Punkt ein Kreis so legen, dafs kein Punkt im Innern des Kreises der Menge angehört. Der betreffende Punkt heifst dann ein äufserer Punkt der Menge. Oder endlich kann es sein, dafs jeder um den Punkt abgegrenzte Kreis sowohl mindestens einen Punkt enthält, der zur Menge gehört, als auch mindestens einen, der nicht zur Menge gehört. In diesem Falle sagt man, dafs der betreffende Punkt an der Grenze der Menge liegt.

Der Stetigkeitsbereich einer eindeutigen analytischen Funktion ist nun, wie man leicht einsieht, jedenfalls eine Punktmenge, welche erstens ausschliefslich aus inneren Punkten besteht und zweitens in sich zusammenhängt, womit gemeint ist, dafs man zwischen je zwei Punkten der Menge eine endliche Anzahl von Punkten der Menge einschalten kann, so dafs der Abstand von je zwei auf einander folgenden Punkten unter einer beliebig klein vorgeschriebenen Gröfse liegt.

Nennen wir eine Punktmenge, welche diese beiden Eigenschaften besitzt, zur Abkürzung ein „Kontinuum", so können wir sagen, dafs der Stetigkeitsbereich einer eindeutigen analytischen Funktion stets ein Kontinuum ist. Die Antwort auf die vorhin aufgeworfene Frage lautet nun dahin, dafs hiermit das Charakteristische des Stetigkeitsbereiches bezeichnet ist. Es gilt also der Satz:

Ist ein Kontinuum beliebig gegeben, so giebt es stets eindeutige analytische Funktionen, deren Stetigkeitsbereich mit dem gegebenen Kontinuum identisch ist.

Dieser grundlegende Satz ist zuerst von Herrn Mittag-Leffler[5]) bewiesen worden in einer Abhandlung, welche die analytische Darstellung der eindeutigen Funktionen betrifft. In sehr einfacher und elementarer Weise haben sodann Herr Runge[6]) und später Herr Stäckel[7]) denselben Satz begründet.

Zu weiteren und tiefer liegenden Fragen führt die Betrachtung derjenigen Punkte, welche an der Grenze des Stetigkeitsbereiches liegen. Diese sogenannten singulären Punkte oder Stellen bilden für sich eine Punktmenge, deren Beschaffenheit das wichtigste Einteilungsprinzip für die eindeutigen Funktionen abgiebt.

Nach der klassischen Abhandlung von Weierstrafs aus dem Jahre 1876, „Zur Theorie der eindeutigen analytischen Funktionen"[4]), in welcher das erwähnte Klassifikationsprinzip wohl zum ersten Male in voller Schärfe ausgesprochen wird, hat sich Herr Guichard[8]) und später in weitgehendster Allgemeinheit Herr Mittag-Leffler in der schon genannten Arbeit mit diesem Gegenstande beschäftigt.

Die Grundlage der ganzen Untersuchung bilden hier die allgemeinen

Sätze von Herrn Cantor[9]) über Punktmengen, welche in Rücksicht auf ihre Anwendung in der Funktionentheorie von den Herren Bendixson[10]) und Phragmèn[11]) in mehreren Punkten ergänzt worden sind.

Bei diesen Sätzen spielen die transfiniten Zahlen Cantor's eine wichtige Rolle. Ich mufs deshalb zunächst auf diese Zahlgebilde, welche eine wesentliche Verallgemeinerung des Begriffes der gewöhnlichen ganzen Zahl darstellen, näher eingehen.

Betrachten wir die Reihe der gewöhnlichen positiven ganzen Zahlen, so vollzieht sich der Übergang von einer Zahl zu der nächstfolgenden durch die Addition einer Einheit. Diese Operation der Addition einer Einheit heifse das erste Erzeugungsprinzip. Durch fortgesetzte Anwendung des ersten Erzeugungsprinzipes entsteht die Reihe der gewöhnlichen ganzen Zahlen aus der am Anfang der Reihe stehenden Zahl 1. Aber mit der Herstellung der gewöhnlichen ganzen Zahlen aus der Zahl 1 ist die Wirksamkeit des ersten Erzeugungsprinzipes zunächst völlig erschöpft. Um eine Zählung über die Reihe der gewöhnlichen ganzen Zahlen hinaus zu ermöglichen, bedarf es daher eines zweiten Erzeugungsprinzipes.

Dieses besteht in Folgendem: Man denke sich eine bestimmte Menge von Objekten, die in einer bestimmten Rangordnung gegeben sind, jedoch so, dafs ein dem Range nach höchstes nicht existiert. Man kann dann den Inbegriff dieser Objekte als einen neuen Begriff in die Betrachtung einführen. Und nun soll dieser neue Begriff, wenn die Objekte der Menge schon als ganze Zahlen bezeichnet worden sind, ebenfalls eine ganze Zahl und zwar die nächst höhere ganze Zahl genannt werden. In diesem Vorgang der Schaffung einer neuen ganzen Zahl aus einer unendlichen Folge schon vorhandener ganzer Zahlen, unter denen sich eine gröfste nicht findet, besteht das zweite Erzeugungsprinzip. So liefert die Zusammenfassung der Reihe der gewöhnlichen ganzen Zahlen zu einem Inbegriff die erste überendliche Zahl ω, die also die nächstgröfsere ganze Zahl zu allen gewöhnlichen ganzen Zahlen ist. Nach der Schaffung dieser ganzen Zahl ω vermöge des zweiten Erzeugungsprinzipes setzt nun das erste Erzeugungsprinzip wieder ein und liefert uns die an ω sich anschliefsende Reihe ganzer Zahlen $\omega + 1$, $\omega + 2$, $\omega + 3$, u. s. f. Da in der Succession der gewöhnlichen ganzen Zahlen und der sich daranschliefsenden Zahlen ω, $\omega + 1$, $\omega + 2$, u. s. f. eine gröfste sich nicht findet, so tritt aufs neue das zweite Erzeugungsprinzip in Kraft, welches uns die nächstgröfsere, am zweckmäfsigsten mit $\omega . 2$ zu bezeichnende ganze Zahl liefert. An diese legt sich vermöge des ersten Erzeugungsprinzipes die Reihe der Zahlen $\omega . 2 + 1$, $\omega . 2 + 2, \ldots$ an. Auf diese Weise entsteht durch das Ineinandergreifen des ersten und zweiten Erzeugungsprinzipes die ins Schrankenlose sich ausdehnende Reihe der endlichen und überendlichen ganzen Zahlen.

Nun ist es sehr merkwürdig, daſs das System dieser Zahlen natürliche Einschnitte darbietet, durch welche dasselbe in bestimmte Zahlklassen zerfällt.

Zunächst wird man die gewöhnlichen endlichen ganzen Zahlen zu einer ersten Zahlklasse zusammenfassen. Betrachten wir sodann eine überendliche Zahl α, so ist es möglich, daſs diejenigen Zahlen, die kleiner sind als α, durch die Zahlen der ersten Zahlklasse abzählbar sind, d. h. daſs die Zahlen, die kleiner sind als α, sich den gewöhnlichen ganzen Zahlen eindeutig umkehrbar zuordnen lassen. Die überendlichen Zahlen α von dieser Eigenschaft bilden die zweite Zahlklasse. Die Zahlen der zweiten Zahlklasse bilden eine Menge, welche nicht durch die Zahlen der ersten Zahlklasse abzählbar ist. Auf diese Thatsache gründet sich die Definition der dritten Zahlklasse u. s. f.

Diese allgemeinen Begriffsbestimmungen finden nun sofort ihre Anwendung in der Lehre von den Punktmengen. Einfachheit halber beschränke ich mich hier auf den Fall, der zunächst ausschlieſslich in Betracht kommt, wo es sich nämlich um Punktmengen auf einer Kugel handelt.

Besteht eine solche Punktmenge P aus unendlich vielen Punkten, so besitzt sie bekanntlich Grenzstellen, d. h. es giebt dann solche Punkte auf der Kugel, in deren noch so kleiner Umgebung sich unendlich viele Punkte der Menge finden.

Der Inbegriff dieser Grenzstellen bildet eine Punktmenge P', welche nach Cantor die Ableitung der Punktmenge P heiſst. Besteht die Punktmenge P nur aus einer endlichen Zahl von Punkten, so sind Grenzstellen nicht vorhanden. Man sagt dann, daſs ihre Ableitung P' gleich Null ist.

Wenn alle Punkte der Ableitung P' auch der ursprünglichen Menge P angehören, so heiſst die Menge P „abgeschlossen". Es genügt, weiterhin nur Mengen dieser Art zu betrachten, denn die singulären Punkte einer eindeutigen analytischen Funktion bilden stets eine abgeschlossene Menge. (Mit anderen Worten: jede Grenzstelle von singulären Punkten ist ebenfalls ein singulärer Punkt.)

Man betrachte nun irgend eine abgeschlossene Punktmenge P auf der Kugel. Die Ableitung derselben sei P', die Ableitung von P' sei P'', die von P'' sei P''' u. s. f. Auf diese Weise entspringt aus der Menge P die Reihe von Punktmengen

$$P', P'', P''', \ldots .$$

Nun fasse man diejenigen Punkte zusammen, die in jeder einzelnen dieser Punktmengen enthalten sind. Diese bilden wieder eine Punktmenge, die mit $P^{(\omega)}$ bezeichnet wird, wo der Index ω die erste überendliche Zahl bedeutet. Die Ableitung von $P^{(\omega)}$ heifse $P^{(\omega+1)}$, die von $P^{(\omega+1)}$ heifse $P^{(\omega+2)}$ u. s. w. Die gemeinsamen Punkte von $P', P'', P''' \ldots$ $P^{(\omega)}$, $P^{(\omega+1)}$, $P^{(\omega+2)}$, . . . bilden eine Punktmenge, die mit $P^{(\omega . 2)}$ bezeichnet wird u. s. f. Man sieht, wie man durch Fortsetzung dieses Prozesses zu jeder endlichen oder überendlichen Zahl α eine bestimmte Ableitung $P^{(\alpha)}$ erhält. (Dabei ist es nicht ausgeschlossen, dafs einmal eine dieser Ableitungen, und dann auch jede folgende, gleich Null wird.) Für die Funktionentheorie kommen nun die folgenden beiden Sätze von Cantor in Betracht:

1) Ist die abgeschlossene Punktmenge P abzählbar, so giebt es stets eine Ableitung $P^{(\alpha)}$, die nur aus einer endlichen Zahl von Punkten besteht. Und zwar ist α eine Zahl der ersten oder zweiten Zahlklasse.
2) Ist die abgeschlossene Punktmenge P nicht abzählbar, so giebt es unter den Ableitungen von P keine einzige, die nur aus einer endlichen Zahl von Punkten besteht. Dagegen giebt es eine Zahl α der ersten oder zweiten Zahlklasse, für welche die Ableitung $P^{(\alpha)}$ mit der folgenden $P^{(\alpha+1)}$ identisch ist.

Diese Ableitung $P^{(\alpha)}$ ist eine sogenannte perfekte Punktmenge, nämlich eine solche, die nicht nur alle ihre Grenzstellen enthält, sondern für welche auch jeder ihrer Punkte Grenzstelle ist.

Die Cantor'schen Sätze lehren nun, dafs die eindeutigen analytischen Funktionen in zwei grofse Klassen zerfallen:

Die eine Klasse umfafst die Funktionen, deren singuläre Punkte eine abzählbare Menge bilden, die andere Klasse diejenigen Funktionen, deren singuläre Punkte eine nicht abzählbare Menge bilden.

Durch die Methoden, welche dem Beweise des Mittag-Leffler'schen Satzes zu Grunde liegen, gelingt es, die Funktionen der ersten Klasse durch einfach geordnete Summen darzustellen, deren Glieder je nur einen einzigen singulären Punkt besitzen, welcher zugleich singulärer Punkt der darzustellenden Funktion ist. Für die Funktionen der zweiten Klasse ist dies nicht möglich. Hier kann man nur durch Subtraktion einer Summe der genannten Art gewisse singuläre Punkte zum Fortfallen bringen. Die restierende Differenz ist dann eine Funktion, deren singuläre Punkte eben jene perfekte Menge $P^{(\alpha)}$ bilden, auf welche der Ableitungsprozefs führt.

In bezug auf die analytische Darstellung besitzen hiernach die

Funktionen, deren singuläre Punkte eine perfekte Menge bilden, einen irreducibeln Charakter. Die Funktionen dieser Art lassen sich übrigens noch auf eine andere Weise charakterisieren. Irgend ein singulärer Punkt kann nämlich entweder Grenzstelle von singulären Punkten sein oder nicht. Im letzteren Falle heifst der singuläre Punkt „isoliert". Und nun sind die in Rede stehenden Funktionen keine anderen als solche, welche isolierte singuläre Punkte überhaupt nicht besitzen.

Bei der analytischen Darstellung der eindeutigen Funktionen tritt ein zuerst von Weierstrafs bemerkter Umstand zu Tage, den ich kurz berühren will, da sich auf ihn eine grofse Zahl neuerer Arbeiten bezieht. Es liegt die Vermutung nahe, dafs eine konvergierende Reihe, deren Glieder rationale Funktionen sind, immer eine einzige analytische Funktion definiert. Dem ist aber nicht so; vielmehr giebt es derartige Reihen, welche in verschiedenen Gebieten gänzlich verschiedene analytische Funktionen darstellen.[12])

Eine andere ebenfalls von Weierstrafs zuerst bemerkte Thatsache folgt unmittelbar aus dem vorhin erwähnten Satze, nach welchem zu jedem Kontinuum eindeutige analytische Funktionen gehören. Ich meine die Thatsache, dafs es Funktionen mit natürlichen Grenzen giebt, d. h. solche Funktionen, deren Stetigkeitsbereich mit den seine Begrenzung bildenden singulären Punkten die Zahlenkugel nicht völlig bedeckt. Aus didaktischen Gründen ist es wünschenswert, einfache Beispiele solcher Funktionen zu besitzen. Diesem Bedürfnisse kommt eine ganze Reihe von Arbeiten nach, die sich zum grofsen Teil auf eine besondere Klasse derartiger Funktionen beziehen.[13]) Man betrachte eine Potenzreihe mit endlichem Konvergenzradius, die eine über ihren Konvergenzkreis hinausreichende Fortsetzung nicht besitzt. Der Stetigkeitsbereich der Funktion, die durch eine solche Potenzreihe definiert ist, wird offenbar durch das Innere des Konvergenzkreises gebildet; die singulären Punkte der Funktion sind die Punkte auf der Peripherie des Konvergenzkreises. Man hat sich übrigens nach den Arbeiten, welche diese Potenzreihen betreffen, die Vorstellung zu bilden, dafs in gewissem Sinne die über den Konvergenzkreis hinaus fortsetzbaren Potenzreihen die Ausnahme, die nicht fortsetzbaren die Regel bilden.[14])

Doch kehren wir zu der Klassifikation der eindeutigen analytischen Funktionen zurück. Nachdem dieselben nach der Beschaffenheit der Punktmenge eingeteilt sind, welche von den singulären Punkten gebildet wird, liegt es nahe, als weiteres Einteilungsprinzip das Verhalten der Funktionen in der Nachbarschaft der singulären Punkte heranzuziehen. Die erste Frage, welche sich hier darbietet, ist die: welches sind die charakteristischen Unterschiede, die sich in bezug auf das Verhalten einer Funktion in der Nähe eines singulären Punktes zeigen können?

Betrachten wir zunächst einen isolierten singulären Punkt, so können die Funktionswerte bei unbegrenzter Annäherung des Argumentes an den singulären Punkt zweifaches Verhalten zeigen: entweder wachsen die Funktionswerte, in welcher Weise auch die Annäherung geschieht, über alle Grenzen oder nicht. Im ersten Falle heifst bekanntlich der singuläre Punkt ein Pol oder „aufserwesentlich", im letzteren Falle „wesentlich". Man denke sich nun weiter um einen isolierten wesentlich-singulären Punkt irgend einen Kreis gelegt, welcher in seinem Innern keinen weiteren singulären Punkt enthält und beachte die Werte, welche die Funktion im Innern dieses Kreises annimmt. Nach einem klassischen Theorem von Herrn Picard sind dann nur zwei Fälle möglich: entweder befindet sich unter den betrachteten Funktionswerten jeder beliebige endliche Wert oder aber jeder beliebige endliche Wert mit Ausnahme eines einzigen.

Den Beweis dieses Satzes stützt Herr Picard auf die Eigenschaften der Modulfunktionen. Spezielle Fälle dieses Satzes haben später die Herren Hadamard und Borel mit elementareren Hülfsmitteln bewiesen.[15])

Ein ähnlicher Satz, wie der Picard'sche, ist für nicht isolierte singuläre Punkte nicht bekannt. Überhaupt ist meines Wissens eine eingehende Studie des Verhaltens einer analytischen Funktion in der Nachbarschaft eines nicht isolierten singulären Punktes nicht vorhanden. Indessen ist eine hierhergehörige Thatsache zu erwähnen, die unmittelbar aus einer Arbeit des Herrn Lerch folgt, später von Herrn Fredholm besonders hervorgehoben und von Herrn Pringsheim zum Gegenstand ausführlicher Betrachtung gemacht worden ist.[16]) Wie vorhin bemerkt, definiert eine Potenzreihe mit endlichem Konvergenzradius, die über den Konvergenzkreis hinaus nicht fortsetzbar ist, eine eindeutige analytische Funktion, deren singuläre Punkte die Punkte der Peripherie des Konvergenzkreises sind. Man kann nun Beispiele solcher Potenzreihen bilden, für welche nicht nur die analytische Funktion, sondern auch ihre sämtlichen Ableitungen für den Konvergenzkreis einschliefslich seiner Peripherie stetig sind.

Was die mehrdeutigen analytischen Funktionen angeht, so sind für diese allgemein die charakteristischen Eigenschaften ihres Definitionsbereiches, der die Kugel oder Teile derselben mehrfach, eventuell unendlich vielfach überdeckt, bislang nicht aufgestellt worden. Wir wissen hierüber jedoch wenigstens Folgendes:

Betrachtet man einen bestimmten Wert des Argumentes z, so bilden die zugehörigen Werte einer unendlich vieldeutigen analytischen

Funktion stets eine abzählbare Menge. Mit dem Beweise dieses, von Herrn Cantor aufgestellten Satzes beschäftigen sich Arbeiten der Herren Vivanti, Poincaré und Volterra.[17]) Der Satz zeigt, daſs jedenfalls für die Nachbarschaft eines bestimmten Wertes z eine jede unendlich vieldeutige Funktion in Riemann'scher Weise eindeutig gemacht werden kann durch Verteilung der Funktionswerte auf unendlich viele Blätter, die in bestimmter Weise numeriert sind.

In anderer Ideenverbindung werden die vieldeutigen Funktionen durch einen Satz von Herrn Poincaré auf eindeutige zurückgeführt.[18]) Herr Poincaré zeigt, daſs sich zwei komplexe Veränderliche, von welchen die eine analytische Funktion der anderen ist, unter allen Umständen als eindeutige analytische Funktionen einer Hülfsvariabeln darstellen lassen.

Wenn sich auch in der Funktionentheorie von Weierstraſs die Definition der analytischen Funktion als naturgemäſse Verallgemeinerung des Zahlbegriffes darstellt, so kann man doch gegen diese Definition den Einwand erheben, daſs sie die Funktionen als analytische durch eine spezielle Darstellungsform derselben, nämlich in Gestalt von Potenzreihen, charakterisiert. Diesem Einwande ist die Cauchy'sche Definition, welche Riemann adoptiert hat, nicht unterworfen. Dafür tritt aber bei der Cauchy'schen Definition ein anderer Miſsstand zu Tage: bei ihr bereitet nämlich die einwurfsfreie Begründung der Theorie gleich von Anfang an sehr erhebliche Schwierigkeiten. Der innere Grund hierfür liegt darin, daſs die Heranziehung des Grenzbegriffes in seinen schwierigsten Formen von vornherein notwendig wird. Cauchy und Riemann waren sich freilich dieser Schwierigkeiten nicht voll bewuſst. Erst neuere Autoren sind auf die Frage eingegangen, wie man die Cauchy-Riemann'sche Theorie in strenger Weise zu begründen hat. Dabei zeigte sich zunächst, daſs die Cauchy'sche Definition, nach welcher eine Funktion analytisch — oder, wie Cauchy sagt, synektisch — heiſst, wenn sie einen eindeutigen Differentialquotienten besitzt, durch eine schärfere ersetzt werden muſs. Man hat etwa folgendermaſsen zu definieren:

Eine Funktion, die für ein Kontinuum der Zahlenebene irgendwie definiert ist, heiſst synektisch, wenn sie in jedem Punkte des Kontinuums stetig ist und einen Differentialquotienten, sowohl in der Richtung der wachsenden Abscissen als auch in der Richtung der wachsenden Ordinaten besitzt; wenn ferner diese beiden Differentialquotienten in jedem Punkte denselben Wert haben und dieser gemeinsame Wert ebenfalls eine in dem Kontinuum stetige Funktion ist.

Wenn man mit Cauchy und Riemann die synektischen Funktionen durch die Existenz eines eindeutigen Differentialquotienten charakterisiert, so ist es natürlich, zunächst zu fragen, wie sich diese Funktionen bezüglich der Integration verhalten. Hierauf giebt bekanntlich der Cauchy'sche Integralsatz die Antwort. Man kann diesen Satz kurz, wenn auch etwas ungenau, dahin aussprechen, dafs die synektischen Funktionen nicht nur eine eindeutige Differentiation, sondern auch eine eindeutige Integration zulassen.

Man kann sogar die Forderung der eindeutigen Integrierbarkeit an Stelle derjenigen der eindeutigen Differenzierbarkeit zum Ausgangspunkt der ganzen Theorie nehmen. Dies folgt aus einer interessanten Bemerkung von Morera[19]), nach welcher eine Funktion, die in einem Kontinuum stetig ist und durch jede geschlossene Kurve integriert das Resultat 0 liefert, notwendig im Cauchy'schen Sinne synektisch ist. Der Cauchy'sche Integralsatz ist leicht zu beweisen für den Fall, dafs man als Integrationskurve gewisse einfache Linien, z. B. einen Kreis oder den Umfang eines Rechteckes wählt. Für viele Zwecke, wie z. B. für den Nachweis, dafs der Cauchy'sche und der Weierstrafs'sche Funktionsbegriff sich decken, genügen auch derartige spezielle Fälle. Indessen entfaltet doch der Cauchy'sche Satz seine grofse Fruchtbarkeit erst in seiner allgemeinen Fassung und in dieser ist der Beweis des Satzes nicht ohne Schwierigkeit. Neuere Arbeiten, die sich mit der einwurfsfreien Begründung des Cauchy'schen Satzes beschäftigen, rühren von den Herren Falk, Goursat, Lerch, Jordan und Pringsheim her.[20]) Man kann den Cauchy'schen Satz auf folgende Weise aussprechen:

Ist die Funktion $f(z)$ synektisch in einem Kontinuum, in welchem jede einfach geschlossene Linie die volle Begrenzung eines Flächenstückes bildet, so ist das Integral $\int f(z)\,dz$ jedesmal dann Null, wenn es durch eine geschlossene Linie erstreckt wird, die ganz im Innern des Kontinuums verläuft.

Hier erheben sich nun zunächst die Fragen: was ist eine einfach geschlossene Linie, was ist eine Linie, insbesondere eine geschlossene Linie überhaupt, und sind alle oder nur gewisse geschlossene Linien in dem Ausspruch des Cauchy'schen Satzes zulässig?

Ich möchte diese Fragen hier um so lieber erörtern, als sie von prinzipiellem Interesse sind. Dabei gehe ich von folgender Betrachtung aus:

Eine abgeschlossene Punktmenge P sei auf eine andere abgeschlossene Punktmenge Q derart bezogen, dafs jedem Punkte der Menge P

ein bestimmter Punkt der Menge Q entspricht. Die Beziehung soll überdies folgendermaſsen beschaffen sein:

Wenn die Punkte A_1, A_2, A_3 u. s. f. der Menge P eine einzige Grenzstelle A besitzen, so sollen die entsprechenden Punkte B_1, B_2, B_3 u. s. f. der Menge Q ebenfalls eine einzige Grenzstelle B besitzen, und der Grenzstelle A soll dann jedesmal die Grenzstelle B entsprechen.

Unter diesen Voraussetzungen heiſse die Punktmenge Q stetig auf die Punktmenge P bezogen oder ein stetiges Bild der Punktmenge P.

Nun kommt die gewöhnliche Definition eines Kurvenbogens, welche diesen als Ort eines Punktes erklärt, dessen Koordinaten stetige Funktionen einer reellen Veränderlichen sind, auf Folgendes hinaus:

Eine abgeschlossene Punktmenge wird ein stetiger Kurvenbogen genannt, wenn sie das stetige Bild einer geradlinigen Strecke ist.

Man darf hierbei nicht vergessen, daſs dieser Begriff eines stetigen Kurvenbogens nicht dem entspricht, was man sich anschauungsmäſsig unter einem stetigen Kurvenbogen vorzustellen pflegt. In der That haben die Herren Peano und Hilbert[21]) gezeigt, daſs z. B. die Punkte eines Quadrates als ein stetiges Bild einer geradlinigen Strecke aufgefaſst werden können. Die Punkte eines Quadrates bilden also in dem festgesetzten Sinne einen stetigen Kurvenbogen. Freilich ist dabei festzuhalten, daſs die Punkte des Quadrates in einer bestimmten Anordnung gedacht werden, insofern sie eben den Punkten einer geradlinigen Strecke zugeordnet sind.

Was nun den Begriff einer einfach geschlossenen stetigen Kurve angeht, so läſst sich derselbe an die folgenden allgemeinen Betrachtungen anknüpfen:

Die abgeschlossene Punktmenge Q sei ein stetiges Bild der abgeschlossenen Punktmenge P, zugleich sei aber die Beziehung zwischen den Punkten der beiden Mengen eindeutig umkehrbar. (Dann ist offenbar auch die Punktmenge P ein stetiges Bild der Punktmenge Q.)

Zwei Punktmengen, die in dieser Weise eindeutig umkehrbar und stetig auf einander bezogen werden können, will ich äquivalent nennen und auf diesen Äquivalenzbegriff eine Einteilung der Punktmengen in Klassen gründen. Zwei abgeschlossene Punktmengen werden hiernach in dieselbe Klasse gerechnet oder nicht, je nachdem sie äquivalent sind oder nicht. Diese Einteilung der Punktmengen in Klassen bildet, beiläufig bemerkt, die allgemeinste Grundlage der Analysis situs. Die Aufgabe der Analysis situs ist es, die Invarianten der einzelnen Klassen von Punktmengen aufzusuchen.

Eine einfach geschlossene stetige Kurve ist nun eine Punktmenge, welche in dieselbe Klasse gehört, wie die von den Punkten auf dem Rande eines Quadrates gebildete Punktmenge.

Hieran knüpft sich nun weiter der grundlegende Satz:

Wenn eine einfach geschlossene stetige Kurve in einer Ebene liegt, so teilt sie dieselbe in zwei Kontinua, deren gemeinsame Begrenzung durch die Kurve gebildet wird.

In etwas anderer Fassung hat Herr C. Jordan in seinem Cours d'Analyse diesen Satz aufgestellt und bewiesen, während für einen speziellen Fall des Satzes neuerdings Herr Schoenflies einen einfachen Beweis geliefert hat.[22])

Sind nun so die Begriffe stetige Kurve und einfach geschlossene stetige Kurve festgelegt, so bedarf es noch der näheren Bestimmung darüber, welche Kurven im Ausspruch des Cauchy'schen Satzes als Integrationskurven zulässig sind. Zu diesem Zwecke müssen wir auf die Definition der Länge eines Kurvenbogens eingehen.

Liegt ein stetiger Kurvenbogen vor, so können wir ihm einen vom Anfangs- bis zum Endpunkte führenden geradlinigen Streckenweg einbeschreiben und dann die Eckpunkte dieses Streckenweges auf dem Kurvenbogen überall dicht werden lassen. Nähert sich dabei stets die Länge des Streckenweges ein und demselben Grenzwert, so heifst dieser die Länge des Kurvenbogens; der Kurvenbogen ist dann „rektifizierbar". Im anderen Falle besitzt der Kurvenbogen keine Länge, er ist nicht „rektifizierbar".

Auf einen etwas beschränkteren Kurvenbegriff bezogen, hat diese Definition der Kurvenlänge der leider so früh verstorbene Scheeffer seinen Untersuchungen über die Bogenlänge zu Grunde gelegt.[23]) Paul du Bois-Reymond hat gegen diese Scheeffer'sche Definition Einwendungen erhoben.[24]) Wie mir scheint, mit Unrecht. Denn im Reiche der mathematischen Ideenbildung hat die Verallgemeinerung nur vor natürlichen, nicht vor künstlich errichteten Schranken Halt zu machen. Und die Thatsache, dafs dem umfassenderen Begriffe Eigenschaften des beschränkteren fehlen, spricht durchaus nicht gegen den ersteren, sondern liegt vielmehr in der Natur der Sache.*)

Der Cauchy'sche Satz gilt nun jedenfalls dann, wenn man das Integral $\int f(z)\,dz$ durch einen stetigen rektifizierbaren Kurvenbogen erstreckt, dessen Anfangs- und Endpunkt zusammenfallen. Dies ist in aller Strenge von Herrn C. Jordan a. a. O. nachgewiesen worden.

*) In ähnlicher Weise äufsert sich, wie ich kürzlich bemerkte, Herr Study am Schlusse seiner Abhandlung „Über eine besondere Klasse von Funktionen einer reellen Veränderlichen", Math. Ann. Bd. 47 (1896).

Einen elementaren Beweis des Cauchy'schen Satzes hat neuerdings Herr Pringsheim veröffentlicht.[25]) Herr Pringsheim legt dabei seinen Betrachtungen aus gewissen Gründen einen anderen, spezieller gefaſsten Kurvenbegriff zu Grunde. Indessen ist doch zu bemerken, daſs die von Herrn Pringsheim zugelassenen Kurven ebenfalls rektifizierbare stetige Kurven im vorhin angegebenen Sinne sind.

Einen Vorzug der Cauchy-Riemann'schen Definition der analytischen Funktion hat man darin zu erblicken, daſs dieselbe zu den wichtigen und interessanten Fragestellungen Anlaſs bietet, die sich auf die konforme Abbildung der Flächen auf einander beziehen. Es ist ja allgemein bekannt, welche Bedeutung für die Funktionentheorie Riemann's der Satz besitzt, daſs es eine und im wesentlichen nur eine analytische Funktion giebt, welche die konforme Abbildung eines einfach zusammenhängenden Stückes der komplexen Zahlenebene auf ein anderes eben solches Stück vermittelt. Riemann hatte den Beweis dieses Satzes bekanntlich auf das nicht einwurfsfreie Dirichlet'sche Prinzip gegründet. Die Arbeiten von Neumann und Schwarz, denen sich solche von Harnack, Poincaré u. a. anschlossen, haben dann, wenigstens für ausgedehnte Klassen von einfach zusammenhängenden Flächen, die Gültigkeit des Riemann'schen Satzes nachgewiesen.[26])

Die allgemeinen Grundlagen für die Theorie der analytischen Funktionen von mehreren Variabeln verdanken wir ebenfalls Weierstraſs und Méray.[27]) Es ist leicht, den Begriff des monogenen Systemes von Potenzreihen auf den Fall zu übertragen, wo es sich um Potenzreihen mit mehreren Variabeln handelt und damit ist dann auch der Begriff der analytischen Funktion mehrerer Variabeln unmittelbar gegeben. Aber die weitere Entwickelung der Theorie bietet gegenüber der Theorie der Funktionen einer Variabeln erhebliche Schwierigkeiten dar. Beschränken wir uns der Einfachheit halber auf die Betrachtung eindeutiger Funktionen. Der Stetigkeitsbereich einer solchen Funktion wird ein Kontinuum von $2n$ Dimensionen sein, wenn n die Zahl der Variabeln bedeutet. Unter Kontinuum ist hierbei wieder ein Punktsystem gemeint, welches nur aus inneren Punkten besteht und in sich zusammenhängt. Die Punkte, welche die Begrenzung dieses Kontinuums bilden, sind die singulären Punkte der Funktion. Hier kann nun aber nicht, wie bei Funktionen einer Variabeln, j e d e s Kontinuum der Stetigkeitsbereich einer eindeutigen analytischen Funktion sein. Dies folgt schon daraus, daſs eine analytische Funktion von mehreren Variabeln isolierte singuläre Punkte überhaupt nicht besitzen kann, wie man mit Hülfe des verallgemeinerten Laurent'schen Satzes leicht beweist.

Eine weitere Schwierigkeit besteht darin, daſs man bei Funktionen mehrerer Variabeln zwei Arten von aufserwesentlich singulären Punkten unterscheiden mufs. Nach Weierstrafs heifst ein singulärer Punkt bekanntlich aufserwesentlich, wenn in seiner Umgebung die Funktion als Quotient zweier gewöhnlichen Potenzreihen darstellbar ist. Ein solcher Punkt ist dann von der ersten oder zweiten Art, je nachdem er für den reciproken Wert der Funktion regulär oder ebenfalls singulär ist.

Die Frage der Einteilung der analytischen Funktionen mehrerer Variabeln nach der Beschaffenheit ihrer singulären Stellen ist bis heute wenig gefördert. Wir besitzen in dieser Hinsicht Anfänge in den beiden Sätzen:

1) Eine eindeutige Funktion, welche nur aufserwesentlich singuläre Stellen besitzt, ist notwendig eine rationale Funktion[28]), und
2) Eine eindeutige Funktion, welche im Endlichen nur aufserwesentlich singuläre Stellen besitzt, ist als Quotient zweier beständig konvergierender Potenzreihen darstellbar.[29])

Der letztere Satz ist besonders bemerkenswert wegen der grofsen Schwierigkeiten, die sich seinem Beweise entgegenstellten. Erst ganz neuerdings ist es Herrn Pierre Cousin gelungen, einen allgemeinen Beweis des Satzes zu liefern, nachdem Herr Poincaré durch wesentlich höhere Hülfsmittel den besonderen Fall der Funktionen von zwei Variabeln erledigt hatte.

In ähnlichen Ideenrichtungen, wie die Arbeit des Herrn Cousin, bewegen sich übrigens frühere Arbeiten der Herren Biermann und Appell, welche die Ausdehnung des Mittag-Leffler'schen Satzes auf Funktionen mehrerer Variabeln betreffen.[30])

Die Cauchy-Riemann'sche Richtung auf dem Gebiete der allgemeinen Theorie der Funktionen mehrerer Variabeln ist durch Arbeiten von Kronecker, Picard und Poincaré vertreten.[31]) Diese Arbeiten beschäftigen sich mit der Ausdehnung des Cauchy'schen Integralsatzes und seiner Folgerungen auf Funktionen mehrerer Variabeln.

Schliefslich möchte ich noch ganz kurz auf diejenigen neueren Bestrebungen hinweisen, die auf Verallgemeinerungen der Theorie der analytischen Funktionen abzielen. Von der ausgedehnten Theorie des drei- und mehrdimensionalen Potentiales abgesehen, habe ich in dieser Hinsicht zunächst Arbeiten der Herren Picard und Scheffers zu nennen.[32]) Herr Picard verallgemeinert die partiellen Differentialgleichungen, welchen der reelle und imaginäre Teil einer analytischen Funktion genügt, indem er die Gruppeneigenschaft dieser Gleichungen als charakteristisch ansieht. Bei Herrn Scheffers handelt es sich darum, die Begriffe der Funktionentheorie auf Zahlensysteme zu übertragen, welche nicht, wie die gewöhnlichen komplexen Zahlen, aus zwei sondern aus beliebig vielen Einheiten gebildet sind. In anderer Richtung bewegen sich die Arbeiten mehrerer jüngerer italienischer Mathematiker. Von mathematisch-physikalischen Vorstellungen ausgehend, gelangt Herr Volterra dazu, Funktionen von Linien zu untersuchen, d. h. solche Abhängigkeitsgesetze, welche jeder Linie im Raume einen bestimmten komplexen Zahlenwert zuordnen.[33] Eine ähnliche Ideenbildung liegt neueren Untersuchungen von Pincherle, Levi-Civita und Bourlet zu Grunde.[34] Hier werden solche Gesetze betrachtet, die aus einer beliebig angenommenen Funktion eine neue Funktion entstehen lassen. Man hat es, in einem höheren Sinne des Wortes, mit Funktionen von Funktionen zu thun.

Aber ich mufs es mir versagen, auf die in diesen Arbeiten niedergelegten interessanten Untersuchungen näher einzugehen, da sie schon über das eigentliche Gebiet der Theorie der analytischen Funktionen hinausführen.

Litteratur-Nachweise und Anmerkungen.*)

(Die eingeklammerten Jahreszahlen und Seitenzahlen beziehen sich auf den Band des Jahrbuchs über die Fortschritte der Mathematik, in welchem die citierte Arbeit besprochen ist.)

1) Cauchy, Analyse algébrique, p. 151. Résumé analytique p. 17.

2) J. Hadamard, Essai sur l'étude des fonctions données par leur développement de Taylor. Journal de mathématiques (4). vol. 8. (1892, 359.)
Vgl. auch O. Biermann, Über Funktionen zweier reeller Variabeln, Math. Ann. Bd. 48, p. 395 Anmerkung.
Das in Rede stehende Gesetz lautet:
Der Konvergenzradius der Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n$ ist der reciproke Wert der oberen Unbestimmtheitsgrenze der Wertemenge

$$|c_1|,\ \sqrt{|c_2|},\ \sqrt[3]{|c_3|},\ \ldots,\ \sqrt[n]{|c_n|},\ \ldots .$$

3) Méray, Nouveau Précis d'Analyse infinitésimale. (Paris 1872.)
„ , Leçons nouvelles sur l'Analyse infinitésimale. (Paris 1894/97.)

*) Das folgende Verzeichnis bezieht sich auf die seit 1880 erschienene Litteratur. Von früheren Publikationen sind nur einzelne ihrer grundlegenden Bedeutung wegen aufgeführt.

4) K. Weierstrafs, Zur Theorie der eindeutigen analytischen Funktionen, pag. 1. Abhandlungen aus der Funktionenlehre. (Berlin 1886.)
5) G. Mittag-Leffler, Sur la représentation analytique des fonctions monogènes uniformes d'une variable indépendante. Acta mathem., vol. 4. (1884, 351.)
6) C. Runge, Zur Theorie der eindeutigen analytischen Funktionen. Acta mathem., vol. 6. (1885. 379.)
7) P. Stäckel, Zur Theorie der eindeutigen analytischen Funktionen. Crelles Journal, Bd. 112. (1893. 681.)
8) Guichard, Théorie des points singuliers essentiels. Ann. de l'Éc. Norm. (2). vol. 12. (1883. 330.)
9) G. Cantor, Über unendliche lineare Punktmannigfaltigkeiten. Math. Ann., Bdde. 15, 17, 20, 21, 23. Acta mathem., vol. 2, 4, 7.
„ , Beiträge zur Begründung der transfiniten Mengenlehre. Math. Ann., Bdde. 46, 49.
10) J. Bendixson, Quelques théorèmes de la théorie des ensembles de points. Acta mathem., vol. 2. (1883. 455.)
11) E. Phragmèn, Beweis eines Satzes aus der Mannigfaltigkeitslehre. Acta mathem., vol. 5. (1884. 333.)
„ , Über die Begrenzungen von Kontinua. Acta mathem., vol. 7. (1885. 505.)

12) Sind $C_1, C_2, \ldots, C_n$ einfach geschlossene Linien, die sich gegenseitig ausschliefsen und bez. $f_1(z), f_2(z), \ldots, f_n(z)$ analytische Funktionen, die innerhalb und auf diesen Linien regulär sind, so ist

$$F(z) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{C_1}\frac{f_1(\zeta)\,d\zeta}{\zeta - z} + \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{C_2}\frac{f_2(\zeta)\,d\zeta}{\zeta - z} + \cdots + \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{C_n}\frac{f_n(\zeta)\,d\zeta}{\zeta - z}$$

ein analytischer Ausdruck, welcher innerhalb der Contour C_i die Funktion $f_i(z)$ darstellt. Nach der ursprünglichen Bedeutung eines Linien-Integrales sind aber die Integrale auf der rechten Seite nichts anderes, wie die Grenzwerte von rationalen Funktionen von z, die von einem ganzzahligen ins Unendliche wachsenden Index abhängen. Dementsprechend läfst sich die rechte Seite der vorstehenden Gleichung in der Form $\lim\limits_{n=\infty} R_n(z)$ darstellen, so dafs

$$F(z) = R_1(z) + [R_2(z) - R_1(z)] + [R_3(z) - R_2(z)] + \cdots$$

eine unendliche Summe ist, deren einzelne Glieder rationale Funktionen von z sind. Eine solche Summe kann also in den verschiedenen, durch $C_1, C_2, \ldots, C_n$ begrenzten Gebieten beliebig vorgeschriebene analytische Funktionen $f_1(z)$, $f_2(z), \ldots, f_n(z)$ bez. darstellen.

K. Weierstrafs, Zur Funktionenlehre. Sitzungsber. der Berliner Akademie. (1880. 310.)
„ , Abhandlungen aus der Funktionenlehre.
„ , Gesammelte Werke, Bd. 2. (Berlin 1895.)
G. Mittag-Leffler, Recherches sur la théorie des fonctions. Darboux Bull. (2), vol. 5. (1881. 307.)
„ , Verschiedene Noten in den Comptes Rendus de l'Ac. d. Sc. de Paris, vol. 94, 95. (1882. 325.)
Ch. Hermite, Sur quelques points de la théorie des fonctions. Crelles Journal, Bd. 91. (1881. 307.)

12) P. Appell, Développements en série dans une aire limitée par des arcs de cercle. Acta mathem., vol. 1. (1883. 323.)
„ , Développements en série d'une fonction holomorphe dans une aire limitée par des arcs de cercle. Mathem. Ann., Bd. 21. (1883. 324.)
S. Pincherle, Sopra una formula del sign. Hermite. Rom. Acc. L. Rend. (4), vol. 1. (1885. 388.)
M. Lerch, Note sur les expressions qui, dans diverses parties du plan, représentent des fonctions diverses. Darb. Bull. (2), vol. 10. (1886. 345.)
P. Stäckel, siehe unter 7).
J. v. Puzyna, Über eine methodische Bildung der analytischen Ausdrücke $\Sigma f_\nu(x)$, $\Sigma f_\nu(x, y)$ von konstanten Werten. Monatshefte f. Math., Bd. 5. (1894. 711.)
F. d'Arcais, Sulle espressioni analitiche rappresentanti porzioni di funzioni analitiche diverse. Rivista di Mat., vol. 5. (1896. 439.)
13) K. Weierstrafs, siehe unter 12).
E. Goursat, Sur les fonctions uniformes présentant des lacunes. Comptes Rendus, vol. 94. (1882. 336.)
Th. Homén, Analytisk framställning af nagra lakunära funktioner. Soc. sc. Fenn. Acta, vol. 12. (1883. 341.)
H. Poincaré, Sur les fonctions à espaces lacunaires. Comptes Rendus, vol. 96. Soc. sc. Fenn. Acta, vol. 12. (1883. 340/1.)
M. Lerch, Contribution à la théorie des fonctions. Prag. Ber. (1886. 330.)
T. J. Stieltjes, Exemple d'une fonction qui n'existe qu'à l'intérieur d'un cercle. Darboux Bull. (2), vol. 11. (1887. 380.)
E. Goursat, Sur les fonctions à espaces lacunaires. ibid. (1887. 394.)
G. Teixeira, Exemples de fonctions à espaces lacunaires. Nouvelles Ann. (3), vol. 6. (1887. 394.)
M. Lerch, Über Funktionen mit beschränktem Existenzbereiche. Prag. Abh. (7), Bd. 2. (1888. 412.)
„ , Sur une classe de fonctions à espace lacunaire. Teixeira J., vol. 10. (1890. 388.)
A. Pringsheim, Zur Theorie der Taylor'schen Reihe und der analytischen Funktionen mit beschränktem Existenzbereich. Münch. Ber., Bd. 22. (1892. 356.)
J. Hadamard, siehe unter 2).
H. Poincaré, Sur les fonctions à espaces lacunaires. American J., vol. 14. (1892. 388.)
P. Stäckel, siehe unter 7).
E. Goursat, Sur une fonction à espace lacunaire. Darb. Bull. (2), vol. 17. (1893. 715.)
F. G. Teixeira, Extrait d'une lettre adressée à M. Hermite. ibid. (1893. 716.)
A. Cayley, Note on lacunary functions. Quart. J., vol. 26. (1893. 716.)
J. Gillet, Sur les fonctions à espaces lacunaires. Progresso mat., vol. 3. (1893. 716.)
G. d'Arone, Sur les fonctions à espaces lacunaires. Bull. de la Soc. math. de Fr., vol. 23. (1895. 427.)
E. Borel, Sur les séries de Taylor. Comptes Rendus 1896.
„ , Sur les séries de Taylor admettant leur cercle de convergence comme coupure. Journal de Math. (4), vol. 2. 1896.

13) E. Fabry, Sur les points singuliers d'une fonction donnée par son développement en série et l'impossibilité du prolongement analytique dans des cas très généraux. Ann. de l'Éc. Norm. (3), vol. 13. 1896.

„ , Sur les séries de Taylor. Comptes Rendus 1897.

Eine hinreichende Bedingung von bemerkenswerter Einfachheit für die Unmöglichkeit der analytischen Fortsetzung einer Potenzreihe giebt Herr Fabry, indem er folgenden Satz beweist:

„Die Potenzreihe $a_1 z^{e_1} + a_2 z^{e_2} + \cdots + a_n z^{e_n} + \cdots$, in welcher $e_1, e_2, \ldots, e_n, \ldots$ eine Reihe wachsender ganzen Zahlen bedeuten, gestattet keine analytische Fortsetzung, wenn $e_n - e_{n-1}$ mit wachsendem n über alle Grenzen wächst."

14) Vgl. die unter 13) citierten Arbeiten von Borel und Fabry, sowie

A. Pringsheim, Über Funktionen, welche in gewissen Punkten endliche Differentialquotienten jeder endlichen Ordnung, aber keine Taylor'sche Reihenentwickelung besitzen. Math. Ann., Bd. 44, pag. 49/50. (1894. 389.)

15) E. Picard, Mémoire sur les fonctions entières. Ann. de l'Éc. Norm. (2), vol. 9. (1880. 327.)

J. Farkas, Sur les fonctions uniformes. Comptes Rendus, vol. 96. (1883. 338.)

G. d'Arone, Sur la fonction exponentielle. Bull. de la Soc. math. de Fr., vol. 20. (1892. 399.)

J. Hadamard, Étude sur les propriétés des fonctions entières et en particulier d'une fonction considérée par Riemann. Journ. de Math. (4), vol. 9. (1893. 698.)

E. Borel, Démonstration élémentaire d'un théorème de M. Picard sur les fonctions entières. Comptes Rendus, vol. 122. (1896.)

16) M. Lerch, Über die Nichtdifferenzierbarkeit gewisser Funktionen. Crelles Journal, Bd. 103. (1888. 380.)

G. Mittag-Leffler, Sur une transcendante remarquable trouvée par M. Fredholm. Acta mathem., vol. 15. (1891. 421.)

A. Pringsheim, siehe unter 13).

Die von Herrn Fredholm angegebene Funktion ist

$$f(x) = 1 + ax + a^2x^4 + \cdots + a^n x^{n^2} + \cdots \quad (|a| < 1).$$

Dafs sie über den Einheitskreis hinaus nicht fortsetzbar ist, folgt unmittelbar aus dem unter 13) angeführten Satze von Fabry. In einer Unterhaltung während des Kongresses machte Herr Fredholm darauf aufmerksam, dafs die Umkehrung der Funktion $f(x)$ bei geeigneter Wahl der Konstanten a eine eindeutige Funktion ist. In der That, wenn $|x| < 1$, $|y| < 1$, so findet man leicht

$$\left|\frac{f(x)-f(y)}{x-y}\right| = \left|\sum a^n[x^{n^2-1} + x^{n^2-2}y + \cdots + xy^{n^2-2} + y^{n^2-1}]\right|$$
$$> |a| - 4|a|^2 - 9|a|^3 - \cdots - n^2|a|^n - \cdots,$$

und es kann daher, wenn nur $|a|$ genügend klein ist, niemals $f(x) = f(y)$ werden, aufser für $x = y$.

17) G. Vivanti, Sulle funzioni ad infiniti valori. Palermo Rend., vol. 2. (1888. 393.)

H. Poincaré, Sur une propriété des fonctions analytiques. ibid. (1888. 393.)

V. Volterra, Sulle funzioni analitiche polidrome. Rom. Acc. L. Rend. (4), vol. 4. (1888. 394.)

17) Vgl. auch:

G. Vivanti, Sulle funzioni analitiche. Palermo Rend., vol. 3. (1889. 395.)

„ , Zur Theorie der mehrwertigen Funktionen. Schlömilch Z., Bd. 34. (1889. 395.)

18) H. Poincaré, Sur un théorème de la théorie générale des fonctions. Bull. de la Soc. math. de Fr., vol. 11. (1883. 348.)

19) G. Morera, Un teorema fondamentale nella teorica delle funzioni di una variabile complessa. Lomb. Ist. Rend. (2), vol. 19. (1886. 338.)

W. F. Osgood, Some points in the elements of the theory of functions. Bulletin of the American mathem. Society (2), vol. 2. (1896.)

20) M. Falk, Extrait d'une lettre adressée à M. Hermite. Darboux Bull. (2), vol. 7. (1883. 317.)

E. Goursat, Démonstration du théorème de Cauchy. Acta mathem., vol. 4. (1884. 236.)

M. Lerch, Sur une démonstration du théorème de Cauchy sur les intégrales prises entre des limites imaginaires. Prag. Ber. (1887. 273.)

C. Jordan, Cours d'Analyse. (Paris 1893.) Bd. I.

A. Pringsheim, Über den Cauchy'schen Integralsatz. Münch. Ber., Bd. 25. (1895. 318.)

„ , Zum Cauchy'schen Integralsatze. ibid. (1895. 318.)

21) G. Peano, Sur une courbe qui remplit toute une aire plane. Math. Ann., Bd. 36. (1890. 405.)

D. Hilbert, Über die stetige Abbildung einer Linie auf ein Flächenstück. ibid. Bd. 38. (1891. 422.)

22) C. Jordan, siehe unter 20).

A. Schoenflies, Über einen Satz aus der Analysis situs. Göttinger Nachr. 1896.

23) L. Scheeffer, Allgemeine Untersuchungen über Rektifikation der Kurven. Acta mathem., vol. 5. (1884. 338.)

24) P. du Bois-Reymond, Über den Begriff der Länge einer Kurve. ibid. vol. 6. (1885. 270.)

25) A. Pringsheim, siehe unter 20).

26) H. A. Schwarz, Gesammelte mathematische Abhandlungen. (Berlin 1890.) Bd. 2.

C. Neumann, Untersuchungen über das logarithmische und Newton'sche Potential. (Leipzig 1877.)

„ , Vorlesungen über Riemann's Theorie der Abel'schen Integrale. (Leipzig 1884.)

„ , Über die Methode des arithmetischen Mittels, I u. II. Leipziger Abhandl., Bd. 13 u. 14. (1887. 1029 u. 1888. 1015.)

A. Harnack, Die Grundlagen der Theorie des logarithmischen Potentiales. (Leipzig 1887.)

F. Klein, Über die konforme Abbildung von Flächen. Mathem. Ann., Bd. 19. (1881. 656.)

V. Volterra, Sopra alcune condizioni caratteristiche delle funzioni di una variabile complessa. Brioschi Ann. (2), vol. 11. (1883. 358.)

J. Riemann, Sur le problème de Dirichlet. Ann. de l'Éc. Norm. (3), vol. 5. (1888. 383.)

26) H. Poincaré, Sur les équations aux dérivées partielles de la physique mathématique. American J., vol. 12. (1890. 977.)

P. Painlevé, Sur la théorie de la représentation conforme. Comptes Rendus, vol. 112. (1891. 889.)

E. Phragmén, Remarques sur la théorie de la représentation conforme. Acta mathem., vol. 14. (1891. 890.)

W. Burnside, On functions determined from their discontinuities and a certain form of boundary conditions. London. M. Soc. Proc., vol. 22. (1891. 420.)

A. Paraf, Sur le problème de Dirichlet. Toulouse Ann., vol. 6. (1892. 366.)

F. v. Dalwigk, Über den Ersatz des Dirichlet'schen Prinzips. Göttinger Nachr. (1894. 683.)

A. Tauber, Über die Neumann'sche Methode des arithmetischen Mittels. Monatshefte f. Math., Bd. 5. (1894. 683.)

H. Poincaré, La méthode de Neumann et le problème de Dirichlet. Acta mathem., vol. 20. (1896.)

A. Noble, Über die Randwertaufgabe für eine ebene Randkurve mit stückweise stetig sich ändernder Tangente und ohne Spitzen. Göttinger Nachr. (1896.)

E. Picard, Traité d'Analyse. (Paris 1891/96.)

27) Ch. Méray, siehe unter 3).

Vgl. auch:

Riquier, Sur les principes de la théorie générale des fonctions. Ann. de l'Éc. Norm. (3), vol. 8. (1891. 422.)

28) A. Hurwitz, Beweis des Satzes, dafs eine einwertige Funktion beliebig vieler Variabeln, welche überall als Quotient zweier Potenzreihen dargestellt werden kann, eine rationale Funktion ihrer Argumente ist. Crelles Journal, Bd. 95. (1883. 321.)

S. Dautheville, Étude sur les séries entières par rapport à plusieurs variables imaginaires indépendantes. Ann. de l'Éc. Norm. (3), vol. 2. (1885. 366.)

29) H. Poincaré, Sur les fonctions de deux variables. Acta math., vol. 2. (1883. 358.)

P. Cousin, Sur les fonctions de n variables complexes. ibid. vol. 19. (1895. 456.)

30) P. Appell, Sur une classe de fonctions de deux variables indépendantes. Acta math., vol. 2. (1883. 357.)

O. Biermann, Beitrag zur Theorie der eindeutigen analytischen Funktionen mehrerer Veränderlichen. Wiener Ber., Bd. 89. (1884. 356.)

31) L. Kronecker, Über Systeme von Funktionen mehrerer Variabeln. Berliner Ber. 1869 od. Werke, Bd. 1.

E. Picard, Sur les périodes des intégrales doubles. Comptes Rendus, vol. 102. (1886. 354.)

H. Poincaré, Sur les résidues des intégrales doubles. Acta math., vol. 9. (1887. 275.)

32) E. Picard, Sur une généralisation des équations de la théorie des fonctions d'une variable complexe. Comptes Rendus, vol. 112. (1891. 411.)

„ , Sur certains systèmes d'équations aux dérivées partielles généralisant les équations de la théorie des fonctions d'une variable complexe. Journal de Math. (4), vol. 8. (1892. 331.)

32) G. Scheffers, Verallgemeinerung der Grundlagen der gewöhnlich komplexen Funktionen. Leipziger Ber., Bd. 45 u. 46. (1894. 667.)

33) V. Volterra, Sur une généralisation de la théorie des fonctions d'une variable imaginaire. Acta mathem., vol. 12. (1889. 397.)

„ , eine gröfsere Reihe von Aufsätzen in den Bänden 3, 4, 5, 6 der vierten Serie der Rendiconti della Ac. dei Lincei. (1887—1890.)

C. Arzelà, Funzioni di linee. ibid. vol. 5.

„ , Sulle funzioni di linee. Bologna Mem. (5), vol. 5. (1895. 454.)

Cornelia Fabri, Sopra alcune proprieta generali delle funzioni che dipend~~er~~ono da altre funzioni e da linee. Atti di Torino, vol. 25. (1890. 401.)

34) S. Pincherle, mehrere Abhandlungen in den Bänden 6, 7, 8 der vierten Serie der Memorie dell' Accad. di Bologna, in Band 10 der Acta mathem., ferner in Lomb. Ist. Rend. (4), vol. 20 und Rom. Acc. L. Rend. (5), vol. 4. Eine zusammenfassende Darstellung seiner Untersuchungen veröffentlichte S. Pincherle neuerdings unter dem Titel: Mémoire sur le calcul fonctionnel distributif in Bd. 49 der Mathem. Annalen.

B. Calo, Sulle operazioni funzionali distributive. Rom. Acc. L. Rend. (5), vol. 4. (1895. 434.)

Levi-Civita, Sui gruppi di operazioni funzionali. Lomb. Ist. Rend. (2), vol. 28. (1895. 434/5.)

V. Volterra, Sull' inversione degli integrali definiti. Rom. Acc. L. Rend. (5), vol. 5, Torino Atti, vol. 31. (1896.)

Bourlet, Sur les opérations, en général, et les équations différentielles linéaires d'ordre infini. Ann. de l'Éc. Norm. (1897.)