Zur Frage des höheren mathematischen Unterrichts.

Von

F. Klein in Göttingen.

Der mathematische Kongrefs neigt sich seinem Ende zu. Wenn es verfrüht ist, von seinen Resultaten zu sprechen, so dürfen wir doch einer Empfindung Ausdruck geben, die einen jeden von uns beherrscht. Es handelt sich um den überwältigenden Eindruck der Mannigfaltigkeit mathematischer Auffassungen und Interessen, die eine Bezugnahme von Mathematiker zu Mathematiker aufserordentlich erschwert. Die Verschiedenheit der Sprache tritt fast zurück hinter der Verschiedenheit der mathematischen Denkweise.

Und doch lebt in uns Allen ebenso deutlich der Wunsch nach Verständigung. Hierfür giebt es keinen besseren Beleg, als die grofse Zahl der Festgenossen, die sich zu diesem ersten internationalen Kongresse zusammengefunden hat. Wir möchten versuchen, unsere Wissenschaft als eine grofse Einheit, als eine Harmonie zu begreifen, und dieses nicht nur um der philosophischen Erkenntnis willen, sondern auch von der praktischen Einsicht aus, dafs wir die Geltung unserer Wissenschaft nach aufsen hin zu sichern und vielfach wiederzugewinnen haben.

Unter diesen Umständen mag es gestattet sein, einige Ideen darüber vorzutragen, wie wir im Sinne des so bezeichneten Bedürfnisses die wissenschaftliche Vorbildung des mathematischen Nachwuchses in geeignete Wege möchten leiten können.

Dabei werde ich das Thema enger fassen, als der von mir angegebene etwas unbestimmte Titel meines Vortrags vielleicht vermuten läfst. Die letzten Jahre haben uns wichtige Diskussionen über die mathematische Vorbildung solcher Kandidaten gebracht, welche die Mathematik als ein Mittel im späteren Berufsleben brauchen wollen, also der späteren Lehrer oder Naturforscher oder Ingenieure. So sehr ich mich für diese Diskussionen interessiere und bis zu einem gewissen Grade selbst daran teilgenommen habe, so mögen dieselben doch heute beiseite bleiben. Es darf dies um so mehr geschehen, als uns gestern der ausgezeichnete Vortrag des Herrn Stodola nach dieser Richtung bereits Vorzügliches gebracht hat. Nicht minder werde ich die allgemeine Frage nach der inneren Beziehung der Mathematik zu den Anwendungen, welche Herr Poincaré zum Gegenstande seines glänzenden Exposés gemacht hat, hier unberührt lassen. Niemand ist von der Wichtigkeit der genannten Beziehungen mehr überzeugt als ich selbst. Aber ich meine, daſs es angezeigt ist, vor dem versammelten mathematischen Kongresse nun auch ein weiteres zu betonen, nämlich, daſs es eine reine Mathematik giebt, welche schlieſslich doch den Kern unserer Wissenschaft ausmacht, und deren Gedeihen die Vorbedingung für alle anderen mathematischen Bethätigungen bildet, falls letztere nicht sofort auf ein niederes Niveau herabsinken sollen. So lassen Sie mich von der Vorbildung der Wenigen sprechen, welche berufen sein sollen, in Zukunft die reine Mathematik weiterzuführen, der eigentlichen mathematischen Forscher. Ich setze voraus, daſs ein Studierender von geeigneter Begabung die gewöhnlichen Anfangsstadien bereits hinter sich hat, vielleicht auch die Examina, welche ihm die landesübliche Ordnung auferlegt, bereits überwunden hat; wie wollen wir ihn in der von uns beabsichtigten Richtung fördern?

Täuschen wir uns nicht, daſs von vorneherein eine auſserordentliche Schwierigkeit vorliegt, welche sich auf dem Gebiete keiner anderen Wissenschaft in gleicher Stärke einstellen dürfte, weil keine andere Wissenschaft so langsam assimiliert wird, wie die Mathematik. Eine wissenschaftliche Persönlichkeit kann sich nicht bilden ohne Konzentration auf ein Einzelnes bis hin zur selbständigen Produktion, also ohne Spezialisierung. Wir aber wollen unseren Kandidaten gerade zu einem allgemeinen Überblicke über das Ganze der Wissenschaft hinleiten!

Es folgt, daſs wir seine Zeit für unseren Zweck nicht vollständig werden in Anspruch nehmen dürfen, daſs wir allerlei Kompromisse werden treffen müssen. Ich weiſs zu sehr aus eigener Erfahrung, wie schwierig es ist, einen richtigen Mittelweg einzuhalten. Aber so ist es schlieſslich mit Allem, was wir in idealem Sinne unternehmen; es ist daraus nur zu schlieſsen, daſs wir immer auf's neue versuchen sollen, das nie völlig Erreichte anzustreben.

Ein Erstes, was ich hier empfehlen will, sind gewisse äuſsere Einrichtungen für das weitergehende mathematische Studium. Vielleicht bedarf es der Entschuldigung, daſs ich hier solche Dinge berühre, aber es scheint mir praktisch nicht unwichtig. Denn ein Wort, vor dem mathematischen Kongresse gesprochen und von ihm aufgenommen, findet vielleicht mehr Beachtung als jede noch so beredte private Meinungsäufserung. Was wir vor allen Dingen verlangen müssen, sind wirklich zugängliche, umfassende mathematische Bibliotheken. In dieser Hinsicht dürften an vielen Plätzen noch recht unentwickelte Verhältnisse herrschen. Ich kenne grofse ausländische Lehranstalten, an denen bis vor kurzem noch keine umfassendere mathematische Zeitschrift gehalten wurde, und auch in Deutschland glaubte man vor noch nicht langer Zeit vielfach, auf der Höhe zu stehen, wenn die Seminarbibliothek ein vollständiges Exemplar eines einzelnen Journals aufwies! Es steht dies in merkwürdigem Gegensatz zu den reichen Mitteln, welche allerorts für naturwissenschaftliche Institute aufgewendet werden. Auf naturwissenschaftlichem Gebiete wird auch Niemand den Grundsatz aufstellen (oder auch vielleicht nur aus Bequemlichkeit thatsächlich befolgen), dafs es genüge, die wissenschaftliche Produktion des eigenen Landes zu kennen.

Mit den genannten Einrichtungen Hand in Hand sollte dann ferner eines gehen: ein naher persönlicher Verkehr der Studierenden nicht nur mit den Professoren, sondern auch unter einander. Dieser Verkehr scheint im Bereiche der Mathematik ein ganz besonders wichtiges Moment. Wo immer ich Gelegenheit hatte, die wissenschaftliche Entwickelung eines hervorragenden Mathematikers näher zu beobachten, da hat sich bestätigt, dafs daran der tägliche, Jahre hindurch fortgesetzte intensive Verkehr mit Gleichstrebenden einen hervorragenden Anteil hatte. Nehmen Sie an, dafs auf dem Gebiete unserer Wissenschaft der persönliche Gedankenaustausch plötzlich gehindert würde: ein Verfall der mathematischen Studien, wie ihn die Welt beim Ausgang des klassischen Altertums erlebt hat, würde die Folge sein. Die mathematische Litteratur unserer Bibliotheken würde nicht mehr gelesen werden, weil das Verständnis mangels geeigneter Anleitung zu schwierig geworden wäre.

Doch nun zu meinem engeren Thema. Es kann sich selbstverständlich nicht darum handeln, dafs wir eine encyklopädische Ausbildung unserer Studierenden anstreben. In dieser Hinsicht werden uns ja zum Glücke, wie nach den Verhandlungen des gestrigen Tages zu hoffen steht, recht bald geeignete Sammelwerke entlasten. Was wir bei unseren Kandidaten erreichen müssen, ist etwas anderes, allgemeineres; es handelt sich darum, denselben ein gewisses prinzipielles Verständnis der in den verschiedenen Teilen unserer Wissenschaft vorwaltenden Ideen und Arbeitsmethoden zu vermitteln.

Ich drücke das absichtlich so unbestimmt aus. Es handelt sich beim Studium der Mathematik, wie ich mir dasselbe hier denke, in erster Linie gar nicht um die schematische Aneignung bestimmter Begriffe und der für sie geltenden Sätze. · Für den Lernenden ist die Mathematik ohnehin keine rein deduktive Wissenschaft. Für ihn ist unter dem hier in Betracht kommenden Gesichtspunkt vor allem wichtig, dafs er dem konkreten Inhalt der einzelnen mathematischen Disziplin gewisse Ideenassoziationen entnimmt, die ihn fortan begleiten und ihm bei anderen Aufgaben, denen er sich zuwenden mag, sofort zur Verfügung stehen. Die logische Durcharbeitung bis in alle Einzelheiten hinein kann schon der Zeit halber nur auf einzelnen Gebieten durchgeführt werden und wird darum passender an das Spezialstudium angeknüpft.

In diesem Sinne wollen Sie es gelten lassen, wenn ich jetzt geradezu eine Reihe mathematischer Disziplinen nenne und zu charakterisieren suche, die für die allgemeine mathematische Bildung, wie ich sie im Auge habe, von besonderer Wichtigkeit sein möchten. Ich knüpfe dabei gern an meine eigene Entwickelung an, nicht weil ich dieselbe irgendwie für typisch halte, sondern weil sich andernfalls die Erläuterung zu leicht in Unbestimmtheiten verliert. Es ist Clebsch gewesen, von dem ich die ersten weitergehenden Anregungen in der hier in Betracht kommenden Richtung erhielt, aber nicht minder wichtig war für mich die Zeit, welche ich im engen Verkehr mit Lie in Paris zubrachte. Als ich bald nachher meine Lehrthätigkeit begann, geschah es im Glauben an eine Trias der mafsgebenden mathematischen Disziplinen: die neuere Geometrie, die Funktionentheorie komplexer Variabler, die Gruppentheorie.

Unter neuerer Geometrie möchte ich dabei nicht nur die Entwickelungen der projektiven Schule verstanden wissen, wie sie von Poncelet beginnend ihre typische Ausbildung gefunden haben, sondern alle die Weiterbildungen der späteren Zeit, die Theorien des Raumes von n Dimensionen nicht minder, als die moderne Transformationsgeometrie, welche sich nicht mehr auf algebraische Gebilde beschränkt, sondern alle Fragen der Differentialgeometrie in sich aufgenommen hat. Der Gegensatz zwischen synthetischer und analytischer Behandlung ist mir dabei gleichgültig. Was ist das Wesen dieser ganzen Disziplin? Dafs wir die einzelne Figur nicht als starr gegeben ansehen, sondern als transformierbar, als veränderlich, dafs wir unseren Gebilden sozusagen organisches Leben erteilen.

Die Funktionentheorie komplexer Veränderlicher, wie ich sie damals verstand, kann in doppelter Weise aufgefafst werden. Indem wir die Riemann'sche Fläche als Substrat der Funktionen nehmen, handelt es sich bei ihr nur erst um einen Spezialfall der vorbezeichneten räumlichen Konstruktionen, den wir uns mehr oder minder anschaulich ausgestalten können. Aber dies ist nur die Einleitung zu einer allgemeineren Auffassung, der zufolge Alles, was in der uns umgebenden gemeinen Realität geschieht, sozusagen als Durchschnitt einer allgemeineren, gesetzmäfsigeren und darum vollkommeneren Welt von der doppelten Dimensionenzahl erscheint; in letzterer machen wir unsere Überlegungen und schliefsen von da auf die erstere zurück, — eine Art Platonischer Philosophie auf mathematischer Basis.

Die Gruppentheorie endlich liefert das verbindende Prinzip, welches die Menge der Einzelheiten systematisch ordnet, dann aber infolge eines allgemeinen Fortschrittprinzips sehr bald zum Gegenstande selbständiger Forschung wird. Indem sie dazu führt, im Wechsel der Erscheinungen das Bleibende zu erkennen, wird sie von selbst zur Invariantentheorie, dieses Wort in der allgemeinsten Bedeutung genommen. —

An der primären Wichtigkeit der drei so bezeichneten Disziplinen möchte ich auch noch heute festhalten. Insbesondere hat ja in der Zwischenzeit die Gruppentheorie eine immer ausgedehntere Geltung gewonnen. Aber ich bin allerdings seit lange dazu übergegangen, ihnen diejenigen zwei weiteren Gebiete anzureihen, welche im Universitätsunterricht durch Weierstrafs und Kronecker ihre typische Ausgestaltung gefunden haben: die allgemeine Gröfsenlehre und die Zahlentheorie.

Als allgemeine Gröfsenlehre will ich hier den Inbegriff aller derjenigen Überlegungen bezeichnen, welche die logische Grundlegung unserer Wissenschaft betreffen. Dahin gehört vor allen Dingen die genaue Erfassung des Grenzbegriffs bei der allgemeinsten funktionellen Abhängigkeit irgendwelcher Gröfsen. Jedermann empfindet den Wert der hier gebotenen philosophischen Vertiefung, — daneben besteht freilich die Gefahr, der wir entgegentreten müssen, dafs die freie Produktivität und Ideenbildung durch die Kritik gehindert, ja geradezu aufgehoben wird. Es ist hier wie auf anderen geistigen Gebieten: die Kritik ist an sich nicht das Höchste, aber nicht die Zurückschiebung der Kritik, sondern nur ihre innere Überwindung kann das Programm sein.

Die Zahlentheorie nimmt in der Wertschätzung der Mathematiker von früher her eine ganz besondere Stellung ein. Die enthusiastischen Lobsprüche, welche Gaufs ihr widmete, sind bekannt, und es hat nicht an Mathematikern gefehlt, welche dieselben wiederholten.

Auf der anderen Seite steht die Thatsache, dafs viele unserer besten Mathematiker ohne alle zahlentheoretischen Kenntnisse aufgewachsen sind, und dafs beispielsweise unter der grofsen Zahl vorzüglicher mathematischer Lehrbücher, welche wir den Franzosen verdanken, nur verschwindend wenige sind, welche ausschliefslich der Zahlentheorie gewidmet sind. Die Verbindung der Zahlentheorie mit anderen Teilen der Mathematik war in der That in früheren Jahren eine mehr zufällige. Sie wird aber je länger je mehr zu einer organischen. Nach der einen Seite stellt der Gruppenbegriff die Verbindung her, nach der anderen Seite die Thatsache, dafs man die algebraischen Zahlen genau nach denselben Gesichtspunkten studieren kann, wie die algebraischen Funktionen von Veränderlichen. Man kann sich eine ganze Stufenleiter von Gröfsenarten denken: diskrete Gröfsen, kontinuierlich veränderliche Gröfsen, Funktionen solcher Gröfsen; auf alle finden bis zu einem gewissen Grade dieselben mathematischen Ansätze Anwendung. Ich zweifele nicht, dafs diese Auffassung sich bald noch in weiteren Kreisen Geltung verschaffen wird.

Mit den fünf so aufgezählten Disziplinen sollte es wohl eigentlich genug sein, wenn ich nicht doch noch zum Schlusse einige wenige Worte von der angewandten Mathematik sagen möchte. Gewifs werden solche Vertreter der reinen Mathematik eben in jetziger Zeit besonders nützlich sein, welche mit den Anwendungen nach der einen oder anderen Seite hin engere Beziehung besitzen. Aber sollen wir eine solche Beziehung darum jedem reinen Mathematiker zur Pflicht machen? Ich glaube, nein, selbst wenn es möglich wäre eine derartige Forderung durchzuführen. Denn einmal sind die Formen der Begabung bei den einzelnen Individuen aufserordentlich verschieden, andererseits aber sind auch die Anforderungen, die an den einzelnen Mathematiker je nach seiner Lebensstellung herantreten können, selbst äufserst heterogen. Ich halte es am liebsten mit dem Satz, dafs man den richtigen Mann auf den richtigen Platz bringen soll. Dies verschlägt aber nicht, dafs ich auch dem reinen Mathematiker eine gewisse Fühlung mit der angewandten Mathematik empfehlen möchte, soweit, dafs er versteht, um was es sich bei letzterer überhaupt handelt und welches die eigenartigen Bedingungen derselben sind. Ich erwarte davon in mehrfacher Hinsicht einen heilsamen Einflufs auf den Betrieb der reinen Mathematik selbst, dahingehend, dafs manche Übertreibungen gemildert oder auch Unterlassungen korrigiert werden.

Die Anwendungen entwickeln zunächst, was ich den Sinn für einfache und natürliche Auffassung, für eine ungekünstelte, allgemein verständliche Ausdrucksweise nennen möchte. Einseitige Beschäftigung mit der reinen Mathematik führt leicht dazu, die Methode als solche zu überschätzen. Es entsteht dann jener Subjektivismus, der sich in der Ausgestaltung besonderer Bezeichnungen gefällt und damit diejenigen Gedankenreihen, deren Entwickelung er fördern will, den Aufsenstehenden nur um so schwerer zugänglich macht.

Des Ferneren aber erwarte ich von der Berührung mit den Kreisen der angewandten Mathematik eine Stärkung des Sinnes für mathematische Exekutive. Die Ideen des reinen Theoretikers verflüchtigen sich leicht zu luftigen Gedankengebilden, die mehr postuliert als realisiert werden, — er gleicht dann einem Gesetzgeber, der seine Formulierungen nach systematischen Erwägungen trifft, ohne die Schwierigkeiten oder gar die Unmöglichkeit der Durchführung zu bedenken. Dem ist schon Kronecker nachdrücklich entgegengetreten, indem er geradezu verlangte, dafs nur solche Entwickelungen gelten sollen, welche in einer „endlichen Zahl von Schritten“ zum Ziele führen. In demselben Sinne verstehe ich es, wenn Herr Gordan gestern in seinem Vortrage über die Resultante der ternären Formen sagte, dafs es nicht blofs genügt, allgemeine Eigenschaften der Resultante anzugeben, sondern notwendig ist, das wirkliche Bildungsgesetz des ausgerechneten Ausdrucks zu erforschen. Beidemal handelt es sich um denselben Gedanken, der sich in der Praxis auf Schritt und Tritt aufdrängt. Haben doch alle Rechnungen und Konstruktionen auf angewandtem Gebiet nichts zu bedeuten, wenn sie nicht bis zu einem konkreten Zielpunkte gelangen! — Ich bitte die jüngeren Mathematiker recht sehr, den hiermit angedeuteten Grundsatz zu beherzigen.

Doch es ist Zeit, dafs ich schliefse. Sie haben diese sechs: die neuere Geometrie, die Funktionen von $x + iy$, die Gruppentheorie, die allgemeine Gröfsenlehre und die Zahlentheorie, endlich in etwas unbestimmterer Form die Anwendungen; es liegt an Ihnen zu beurteilen, ob diese Auswahl richtig getroffen ist und den treibenden Kräften unserer modernen Wissenschaft wirklich gerecht wird.