SUR L'ENSEIGNEMENT DE LA PHYSIQUE MATHÉMATIQUE

ET DE QUELQUES POINTS D'ANALYSE

PAR M. VITO VOLTERRA.

Dans les Congrès précédents de Mathématiciens, qui ont eu lieu en France et en Italie, j'ai eu l'honneur de prononcer des Conférences Générales. Je me suis occupé alors de questions historiques et j'ai essayé de fixer l'évolution qui a eu lieu en Italie dans l'analyse et dans l'ensemble des recherches mathématiques pendant ces dernières années. Permettez-moi de quitter les questions historiques dans la conférence que j'ai l'honneur de faire aujourd'hui, et de m'occuper d'une question d'enseignement. A l'époque actuelle on doit, semble-t-il, regarder l'avenir plus que le passé.

Je désire parler de l'enseignement de la physique mathématique et de questions qui s'y rattachent spécialement au point de vue de la partie analytique de cette science.

Les travaux faits depuis un siècle et demi permettent d'unifier et systématiser des recherches qui forment un tout organique, qu'on pourrait appeler *Physique analytique*. C'est le pendant de la *Mécanique analytique*. Dans celle-ci le rôle principal est joué par les équations aux dérivées ordinaires, tandis que dans la physique analytique l'instrument dont on fait le plus d'usage est constitué par les équations aux dérivées partielles.

Je consacrerai cette conférence à l'exposition du programme, qu'à mon avis il serait utile de développer. Je pense qu'un cours de physique analytique s'impose comme s'est imposé un cours de mathématiques générales et un cours de mécanique analytique. Ce cours servira à donner l'ensemble de connaissances indispensables aux chapitres plus modernes et aux développements futurs de la physique mathématique. Les notions qu'on pourra y puiser se trouvent éparses un peu partout, mais il y a peut-être œuvre nouvelle à faire dans leur exposition, quelques idées directrices permettant de relier entre eux les divers sujets abordés de manière qu'ils ne soient pas séparés les uns des autres.

L'homogénéité qu'on obtient ainsi amène à laisser de côté certaines branches de la science qui nous occupe ; c'est pourquoi, je l'avoue dès maintenant, un cours de cette sorte ne sera pas un cours complet de physique mathématique. Nous verrons tout à l'heure quelles questions ne rentrent point dans le cadre que nous allons déterminer et quels avantages on trouve à les placer dans un autre.

A quel moment historique peut-on placer la création de la physique mathématique, et quels ont été les besoins qui l'ont fait naître?

On peut rappeler à ce propos que la dynamique s'est constituée dans la période de la Renaissance, et que le calcul infinitésimal est intimement lié à sa création et à son développement. On s'en rendra compte si l'on songe que c'est l'invention de la poudre qui a donné lieu aux problèmes de la balistique. Les anciens n'avaient pas besoin de la dynamique, c'est pourquoi ils l'ont laissée de côté et n'ont pas cru nécessaire d'approfondir les lois du mouvement.

Mais lorsque le développement de l'artillerie fit voir la nécessité d'étudier le mouvement des corps pesants, les méthodes infinitésimales furent dès le premier moment employées par Galilée pour ces études. Ensuite les lois de la dynamique et les premiers exemples d'intégration des équations différentielles ordinaires furent l'œuvre de Newton. Plus tard encore la mécanique analytique et les calculs des variations ont été créés par Lagrange.

On peut fixer dans la seconde moitié de l'avant-dernier siècle et le commencement du siècle passé l'époque où la physique mathématique commence sa grandiose évolution.

Il serait naturellement possible de faire remonter plus haut les origines de la Physique mathématique. Si l'on voulait se donner la peine de fouiller dans l'histoire des mathématiques, on pourrait trouver à presque toutes les époques, même en des temps très reculés, la trace de questions de physique traitées par les mathématiques, et qu'on pourrait ainsi considérer en un sens général comme rentrant dans le domaine de la physique mathématique; mais ces essais n'ont rien de systématique, et ce n'est qu'au moment où d'Alembert, Fourier, Poisson, Cauchy commencèrent à faire un usage courant des équations aux dérivées partielles, que la période vraiment féconde de la physique mathématique est commencée.

Je viens de prononcer le mot : équations différentielles aux dérivées partielles. En effet, le développement de cette branche de l'analyse et de tout ce qui s'y rapporte a constitué le plus puissant instrument qui a servi au développement théorique de l'élasticité, de l'acoustique, de l'hydrodynamique, de l'optique, de l'électricité, de la propagation de la chaleur.

C'est justement dans les premières années du siècle passé que le besoin d'approfondir ces différents chapitres de la physique par le moyen de l'analyse s'est fait le plus sentir.

L'art de la construction rendait nécessaire d'approfondir la connaissance de la résistance des matériaux; il s'agissait, tout en assurant la solidité, de réaliser la plus grande économie possible des matériaux. Les grandes constructions en fer, les constructions de grandes machines ne devaient tarder à commencer. La nécessité de prévoir par le calcul les dimensions des différentes pièces et de connaître les lois qui règlent l'élasticité des corps se faisaient sentir. Les premiers essais de Galilée sur la flexion des poutres, les idées de Boyle sur les propriétés élastiques des gaz, les études d'Euler amenèrent peu à peu à la théorie générale de l'élasticité.

De même l'usage toujours plus répandu des machines à feu rendait nécessaire le perfectionnement des méthodes de détermination de la température, de la conductibilité et de la capacité calorifique des corps. Les questions de géophysique s'imposaient aussi. L'ensemble de ces recherches devait aboutir d'un côté, sous l'impulsion des conceptions de Sadi Carnot, à la thermodynamique, de l'autre côté à la théorie de la propagation de la chaleur. Celle-ci, qui n'avait été précédée que par des timides essais de Lambert, a été l'œuvre de Fourier. Elle constitue même aujourd'hui, après un si grand nombre de découvertes et de travaux, le plus bel édifice de toute la physique mathématique. C'est le modèle sur lequel les autres théories classiques furent édifiées. Nous l'aurons toujours présent à l'esprit au cours de cette conférence.

Mais je crois que la poussée la plus active qui ait agi sur le développement de la physique mathématique est due à l'énorme extension acquise par la théorie et les applications pratiques de l'électricité. Il n'est pas nécessaire de rappeler ici le rôle que joue l'électricité dans toute la vie moderne. De quelque côté que l'on tourne les yeux on voit cette énergie de la nature nous aider dans tous les moments et dans toutes les circonstances de la vie. Ce n'est pourtant qu'après que Coulomb eut donné les lois fondamentales de l'électrostatique et que Volta eut inventé la pile en 1800, que les applications de l'électricité se suivirent les unes les autres avec une vitesse toujours croissante. Or la plupart des découvertes de l'électricité, ayant eu une double source expérimentale et mathématique, furent l'œuvre des savants, et les applications résultèrent la plupart du temps des travaux théoriques. C'est pourquoi d'importants développements analytiques se suivirent les uns les autres jusqu'à conduire à la théorie électromagnétique de la lumière par laquelle l'optique devint un chapitre de l'électrodynamique.

J'ai dit tout à l'heure que la dynamique n'a commencé son existence que le jour où les artilleurs ont posé le problème des trajectoires des projectiles. Aurions-nous une physique mathématique aussi avancée, si l'électrotechnique n'avait eu toujours de nouvelles questions à poser aux mathématiciens ? On peut aller plus loin : la dynamique est devenue la base des théories cosmogoniques lorsque Newton conçut le problème du mouvement des planètes comme un grand problème de balistique. De même l'électricité est en train de devenir, par les travaux des physiciens modernes, la base de toutes les théories moléculaires et atomiques, et par suite la base de la constitution de l'univers.

Quoique de date assez récente le développement de la physique mathématique peut être partagé en trois phases.

Son premier âge, qui comprend les dernières an nées du dix-huitième siècle et els premières années du dix-neuvième, est son âge héroïque. C'est certainement dans cette période que se placent les œuvres fondamentales qui ont donné la première impulsion à toutes les recherches ultérieures qui ont marqué la physionomie à cette branche de la philosophie naturelle.

C'est à la période suivante, qui se place au milieu du siècle passé, que revient l'honneur d'avoir perfectionné les différents chapitres qui avaient été créés, et l'honneur bien plus grand d'en avoir relié quelques-uns entre eux et d'avoir énoncé de nouveaux principes généraux. Il va sans dire qu'entre la première et la seconde période il n'y a pas de ligne nette de démarcation. Les travaux de Maxwell, de Lord Kelvin, de Stokes, de Helmholtz, de Riemann, de Kirchhoff, de Lamé, de De Saint-Venant, de Mossotti et de Betti sont trop étroitement liés à ceux de leurs prédécesseurs Laplace, Lagrange, Ampère, Green, Fourier, Poisson, Cauchy, Gauss, pour qu'il soit possible de les en séparer.

On peut répéter des considérations analogues si l'on passe à une époque plus récente. Tout essai de démarcation serait encore plus difficile, parce que les travaux récents nous touchent de plus près et étant ainsi plus rapprochés de nous, la perspective est plus difficile à saisir. Cependant si l'on compare les œuvres de Poincaré sur la physique mathématique à celles des savants que je viens de nommer, on s'aperçoit qu'elles s'en détachent nettement. C'est pourquoi il faut dire qu'une troisième période débute à peu près à l'époque ou Poincaré a commencé ses cours et ses travaux de physique mathématique. En effet, à ce moment les idées de Maxwell, tout en présentant encore des difficultés, avaient fait leur chemin et commençaient à devenir classiques; les principes généraux de la thermodynamique étaient désormais acquis à la science. En même temps l'analyse, grâce à une critique délicate, réformait des démonstrations qui n'étaient plus suffisantes et cherchait des nouvelles bases pour les anciennes et les nouvelles théories. Une période féconde de préparation était close, et une nouvelle phase, marquée par les découvertes sur les ondulations électriques, les rayons X, le radium, la théorie des électrons, la relativité, commençait.

A l'aube du nouveau siècle, Poincaré inaugurait à Paris le Congrès des physiciens par une conférence devenue classique, dans laquelle il montrait le rôle de la physique mathématique, ses limites et toute l'importance que cette branche de la philosophie naturelle a eu dans le passé et celle qu'elle allait avoir dans l'avenir. C'était en même temps une récapitulation du travail passé et un programme pour le travail futur.

Cet aperçu très simple nous a déjà rendu compte, et des raisons pour lesquelles la physique mathématique classique s'est constituée et des branches qu'elle comprend, et enfin des moyens analytiques qu'elle utilise.

Nous avons déjà dit que l'ensemble des notions qu'on pourra puiser dans le cours, dont nous traçons ici le programme, n'est pas nouveau; mais il est important de les disposer de la manière la plus économique et la plus systématique possible.

Et voyons d'abord quelles notions y trouveront place. Elles sont de deux sortes, notions physiques et notions mathématiques.

Examinons quelles branches de la physique doivent être exposées. Nous les avons déjà nommées, mais il sera utile de les rappeler : c'est la propagation de la chaleur, l'élasticité, l'acoustique, l'optique, l'électricité et le magnétisme, l'hydrodynamique, en y comprenant aussi la théorie générale du potentiel.

D'autre part, nous pouvons énumérer les notions analytiques qui seront nécessaires : ce sont d'abord les équations différentielles ordinaires et aux dérivées partielles, puis les équations intégrales et intégro-différentielles, enfin des relations d'un type plus général.

Ces différentes théories physiques et mathématiques sont si étroitement liées les unes aux autres qu'il est impossible de les séparer, sans danger de faire perdre l'unité à un organisme créé par un long effort. On aperçoit d'abord des liens historiques, ensuite des liens intimes entre les pensées fondamentales et directrices qui ont enfanté ces différentes théories. Ils s'entrelacent de telle sorte que tout en voyant la nécessité de les démêler on comprend qu'il ne faut rien couper. Comment faire pour vaincre ces difficultés?

Rappelons ce qu'on fait ordinairement dans les cours et dans les traités. Les cours de physique mathématique sont en général de type monographique. En effet, dans cet enseignement on ne cherche pas généralement à donner une idée d'ensemble sur les différents sujets, mais on approfondit un chapitre spécial. C'est un exemple qu'on montre à l'esprit des élèves; s'ils peuvent s'approprier les méthodes qu'on expose, on est d'avis qu'ils sont capables d'étudier après par euxmêmes les autres chapitres. Si les élèves peuvent suivre plusieurs cours, ils voient défiler sous leurs yeux les unes après les autres les différentes parties de la physique mathématique. C'est ainsi qu'on a des cours d'optique, des cours d'élasticité, des cours d'électricité, etc.

Tout cela est très utile, mais de cette manière, si chaque chapitre est très convenablement approfondi, on perd évidemment de vue l'ensemble et l'unité de la physique analytique.

Il y a aussi une autre méthode. On peut d'abord exposer les notions analytiques en développant la théorie des équations aux dérivées partielles, leurs procédés d'intégration, les équations intégrales et les théories qui résultent de leur étude, et qui en constituent la continuation logique. On peut traiter ensuite les développements en séries et les fonctions spéciales qu'on emploie dans la physique mathématique. Ce n'est qu'après avoir donné les instruments qu'il faut employer, qu'on attaque les problèmes qui se présentent en physique et qu'on cherche à les résoudre.

Il va sans dire que cette voie présente des avantages considérables. C'est en effet la voie la plus méthodique, où l'on va du connu à l'inconnu, rien n'étant imprévu. Mais elle n'est pas sans inconvénients, quoique on puisse admettre qu'un bon élève qui a pleine confiance dans son maître, sera persuadé que tout ce qu'il lui expose sera utile dans la suite, et qu'il ne se perd pas dans des questions théoriques trop subtiles. Si l'élève ne comprend pas la raison d'être des théories qu'il voit développer devant ses yeux, s'il ne se rend pas compte des causes profondes qui ont amené à créer les différents procédés, à bâtir les différentes théories mathématiques, et à faire des classification qui lui paraissent artificielles, ou à se créer des difficultés qu'il ne se serait jamais proposées, il est soutenu par la foi qu'à la fin de la pièce, en voyant le dénouement il comprendra le rôle joué par chaque sujet particulier.

Vous vous doutez déjà que tout en comprenant les avantages qu'on peut en tirer, je suis loin d'être favorable à cette méthode. Nous touchons là à une question générale de la pédagogie des sciences. A mon avis, l'idéal serait de suivre justement la voie opposée. On ne peut pas s'assimiler complètement une branche quelconque des sciences, si on n'a eu l'occasion de voir les principales difficultés qui se sont opposées à son développement, et si on ne connaît pas la raison intime pour laquelle on a suivi une direction plutôt qu'une autre. Or, s'il n'est pas possible de parcourir la voie historique, car elle est trop longue, s'il n'est pas possible de partir des questions pratiques qui se sont peu à peu imposées et qui ont amené aux développements théoriques, s'il est aussi impossible de suivre les essais qu'on a fait étape par étape jusqu'au moment où l'on a établi d'une manière définitive les méthodes classiques, il faut cependant s'approcher autant que possible de cet idéal.

Je reviens au grand ouvrage de Lagrange, le meilleur modèle que l'on connaîsse d'un traité scientifique. Dans sa mécanique analytique, il n'aborde pas son sujet, en considerant l'un après l'autre les différents problèmes de la mécanique comme on faisait avant lui et il n'emploie pas des méthodes différentes pour les diverses questions. En outre, il ne commence pas par l'étude des questions analytiques et il ne prépare pas tout d'abord le lecteur en exposant des théories sur les équations différentielles et sur leur intégration.

Mais après un court et merveilleux aperçu historique où sont mis en lumière les points les plus saillants dans l'évolution des principes de la mécanique et des étapes par lesquelles ces principes sont passés, Lagrange arrive très rapidement aux équations générales qui embrassent les différentes questions, soit de la statique, soit de la dynamique. Toutes les questions sont reliées par ces équations qui résument en elles-mêmes les principes, et les questions peuvent se grouper et s'analyser par ces équations. La mécanique est ainsi réduite à leur étude, car en s'y attachant, on envisage en même temps tous les problèmes à la fois, c'est pourquoi il n'est pas nécessaire d'employer une analyse propre à chaque question, ni de répéter pour chaque sujet des considérations qui ont été déjà faites, ni d'emprunter la solution d'un problème particulier à la solution d'un autre problème.

Ayant en vue ce modèle on peut se demander s'il est possible de s'en rapprocher lorsqu'on traite le sujet beaucoup plus difficile et plus compliqué de la physique mathématique.

A mon avis cela est possible, si l'on se borne aux branches de la physique mathématique que j'ai rappelées, les équations aux dérivés partielles qui s'y rapportent établissant entre elles un lien qui présente beaucoup d'analogie avec celui des équations générales de la mécanique analytique.

Ainsi se justifie la limitation du sujet à laquelle j'ai fait allusion tout à l'heure et on aperçoit en même temps l'unité de la discipline dont il s'agit et son parallélisme avec la mécanique analytique, qui justifie la dénomination choisie de physique analytique.

Donc, à côté des deux méthodes que j'ai rappelées précédemment, il en apparaît une troisième dont je viens d'esquisser les lignes générales. Je vais maintenant entrer au cœur de mon sujet.

Il est d'abord possible d'obtenir très rapidement les équations de la propagation de la chaleur, de l'élasticité des corps solides et fluides, de leurs mouvements vibratoires et les équations des mouvements non tourbillonnaires des liquides et de fixer les problèmes qui s'ensuivent. Je n'entrerai pas dans les détails sur ce point, mais par exemple pour la théorie de la propagation de la chaleur, on passe aisément des lois de la propagation uniforme de la chaleur dans une paroi d'épaisseur finie à un élément infiniment petit. En élasticité il suffit d'établir les conséquences de la loi de Hooke.

Pour les équations générales de l'électrostatique et de l'électromagnétisme, la question est moins facile. Bien des difficultés se présentent. Trop de conceptions se sont suivies tout à fait différentes les unes des autres; la conception des fluides électriques, par exemple, celle des déplacements électriques et ainsi de suite. La plupart du temps ces conceptions sont contradictoires entre elles. Elles ont apporté des mots qui, ayant un sens bien déterminé lorsqu'ils se rapportent à une certaine théorie, perdent toute signification lorsqu'on les transporte dans une autre. Cependant ces mots sont restés les uns auprès des autres, aussi bien ceux qui sont toujours vivants que ceux qui sont morts. Cela constitue une complication qu'on ne peut pas dominer sans rappeler sommairement les phases par lesquelles sont passées les différentes théories. Aussi n'est-ce qu'en suivant une rapide exposition de type historique analogue à celle de Lagrange, et qui aboutisse aux principes généraux, que l'on peut arriver d'une manière claire aux équations fondamentales des phénomènes électriques.

On arrive ainsi à écrire les équations différentielles générales des différentes disciplines envisagées, soit les équations qu'on appelle indéfinies, soit celles qui sont valables aux frontières du temps et de l'espace, et c'est ainsi que l'on peut mettre en équation les différents problèmes que pose la physique.

La première partie du cours se termine à ce moment. On s'aperçoit que des questions de nature très différente au point de vue physique amènent à des équations identiques ou analogues dans le domaine analytique.

On se rend compte ainsi de l'avantage de les traiter simultanément, en établissant des principes uniformes, des méthodes et des théorèmes généraux qui valent pour toutes. D'autres principes ou méthodes s'appliquent différemment selon les différents types dans lesquels on peut classer les équations. De même on peut se persuader de la remarquable économie obtenue par le plan de l'ouvrage. En même temps les analogies analytiques font prévoir des analogies cachées d'une portée beaucoup plus grande et qui dépassent le domaine de l'analyse.

Mais avant de quitter cette partie préliminaire il me faut dire quelques mots sur une question que j'ai passé sous silence jusqu'ici. Peut-être sera-t-on surpris que je n'en aie pas encore parlé, car beaucoup y attachent une grande importance. Et ceux qui m'ont suivi jusqu'ici ont probablement l'envie de me demander : Ferez-vous usage des vecteurs, ou ne vous en servirez-vous pas? J'espère ne pas trop choquer en disant que je donne un intérêt secondaire à ce sujet. Je pense qu'il est à peu près indifférent pour les théories générales et l'explication des méthodes d'intégration d'employer la méthode des vecteurs, ou celle des coordonnées, ou les deux simultanément. En considérant les vecteurs eux-mêmes au lieu de les définir constamment par leurs composantes on n'acquiert pas une puissance analytique nouvelle. Je pense que si j'écrivais mon traité en faisant usage de coordonnées, il n'y aurait pas plus de difficultés à le traduire dans le langage des vecteurs ou vice versa qu'à le traduire en anglais.

Toujours est-il que le langage des vecteurs offre des avantages formels et conceptuels considérables. Il est d'abord plus simple et plus concis. Des opérations quelquefois très longues se réalisent par les vecteurs en un trait de plume. Ce qui est plus important encore, on n'abandonne jamais l'entité même que l'on calcule. Mais il est évidemment inutile de continuer cette discussion. L'usage des vecteurs s'est maintenant répandu, et je n'hésiterai pas à les employer dès le début.

Je crois nécessaire de faire ici une autre remarque fondamentale. Dans les questions dont nous venons de parler, on peut se passer des hypothèses moléculaires ou atomiques et supposer dès le premier abord que les phénomènes se passent dans un milieu continu. Ce n'est qu'une première approximation que l'on fait, mais qui rend compte d'un grand nombre de phénomènes.

La physique mathématique ainsi conçue peut être nommée physique du continu. Cette observation amène à donner une importance spéciale à la forme du domaine et de ses frontières, c'est pourquoi c'est au moment même où se termine la première partie du cours que trouveraient place les considérations topologiques. Elles seront appliquées et employées plus tard.

Ayant tout ramené à des équations linéaires à trois ou à quatre variables indépendantes, il faut commencer par classer ces équations.

A mon avis il n'y a qu'un moyen pour obtenir leur classification logique; c'est d'envisager leurs caractéristiques.

On tombe ainsi sur les trois types fondamentaux elliptique, hyperbolique et parabolique, c'est-à-dire sur les types à caractéristiques, réelles, imaginaires ou multiples.

La classification en types des équations conduit à la classification des problèmes que l'on doit se poser, car sans même aborder la questions des théorèmes d'existence, on réussit facilement à établir quels éléments peuvent servir à déterminer les solutions, et en outre dans quelles régions de l'espace et pour quelles valeurs du temps; elles sont ainsi définies. Des questions concernant le passé ou l'avenir que M. Appell a si bien discuté trouveraient place ici. La classification de ces problèmes, mise en relation avec les questions physiques d'où proviennent les équations, porte une nouvelle lumière sur celle-ci.

Nous avons tous entendu avec le plus grand plaisir la belle conférence de Sir Joseph Larmor. Il s'est élevé aux plus hautes conceptions philosophiques. On avait l'impression que tout l'ensemble de nos considérations analytiques se matérialisaient et venaient à acquérir une sorte de réalité qui les rendaient intuitives. Pendant qu'il prononçait sa conférence, je traduisais ses paroles dans un autre langage. Ne croyez pas que je traduisais en italien ce qu'il disait en anglais, mais je traduisais dans le langage des caractéristiques ce qu'il nous représentait par des images si frappantes, qui nous faisaient saisir la manière de se produire des phénomènes.

Mais il faut étudier la classification des types de problèmes avec le soin le plus attentif, car il faut se méfier d'un parallélisme trop parfait entre ceux-ci et les types des équations différentielles. On court le risque de se tromper si l'on classe exclusivement d'après le type des équations différentielles correspondantes les problèmes envisagés. Sans entrer dans les détails, ce qui nous entraînerait trop loin, il suffit de considérer des exemples qui sont très frappants.

Nous avons appris ces jours-ci par une profonde conférence de M. Hadamard que des problèmes se rattachant à des équations de type hyperbolique peuvent se présenter d'une manière analogue à ceux qu'on trouve en étudiant l'équation de Laplace. Les travaux sur ce sujet sont classiques et je n'ajouterai rien à ce qu'il nous a exposé si bien. Mais je me permets seulement d'illustrer ce que j'ai dit tout à l'heure par un autre exemple.

Prenons le problème des seiches dans les lacs. Il dépend de l'équation de Laplace, cependant il admet des solutions périodiques dont les périodes sont les racines d'une équation transcendante. Comment se fait-il qu'un problème dépendant de l'équation fondamentale elliptique donne lieu à des solutions analogues à celles des questions de vibrations qui dépendent des équations hyperboliques?

Il suffit d'examiner les conditions à la surface libre du liquide pour reconnaître que le type de solution, loin de se rattacher à l'équation différentielle indéfinie, découle des conditions au contour. Le problème plus compliqué des marées donne lieu à des considérations analogues.

On voit donc que les types des solutions sont la conséquence d'un complexe de circonstances où les équations différentielles indéfinies ne jouent pas toujours le rôle principal.

Je crois aussi qu'une distinction importante entre les différentes équations différentielles peut s'obtenir en envisageant leurs relations et leur dépendance des problèmes du calcul des variations. On n'insistera jamais assez sur l'intérêt qu'on doit attacher au développement de ce point.

Je voudrais à ce propos revenir encore une fois sur la conférence de Sir Joseph Larmor. Il nous a montré la liaison entre le principe de Hamilton et les actions à distance. Les paroles si profondes qu'il a prononcées sur ce sujet nous ouvrent de nouveaux horizons sur les liaisons entre le calcul des variations et les équations de la physique mathématique.

Dès qu'on aborde la question des caractéristiques on est amené d'une manière fort naturelle à considérer des espaces à quatre dimensions. En effet, dans le cas des corps à une seule dimension, les caractéristiques sont des lignes. Elles sont des surfaces pour les corps à deux dimensions et des espaces à trois dimensions faisant partie d'un espace à quatre dimensions, lorsqu'on considère des corps à trois dimensions, car il faut envisager, outre les trois coordonnées, une quatrième coordonnée : le temps qui joue un rôle analogue aux trois premières. Le passage d'un type d'équation à un autre s'obtient d'ailleurs d'une manière immédiate, en considérant des valeurs imaginaires du temps. Ici l'introduction des vecteurs à quatre dimensions, ainsi que l'extension des opérations fondamentales des vecteursà l'hyperespace devient une nécessité et en même temps elle est facile et intuitive.

Les changements de coordonnées, les transformations de Lorentz, la cinématique einsteinienne se présentent ainsi d'une manière si naturelle que quelques-unes des difficultés de la théorie de la relativité (au moins de la première relativité) sont complètement supprimées. On peut aussi ajouter que tout ce chapitre subsiste indépendamment du substratum philosophique de la relativité, et si par hasard cette théorie devait être abandonnée, ce chapitre resterait dans toute son intégrité.

Comme on a établi une classification des équations différentielles et des problèmes fondamentaux, il faut établir une classification des procédés d'intégrations.

Ils peuvent à mon avis être distribués en trois catégories. La méthode de Green, celle des caractéristiques et celle des solutions simples de Fourier. Pour éviter tout malentendu je préciserai tout de suite que l'on doit considérer les trois méthodes que je viens de nommer, comme des procédés typiques, mais que dans les questions particulières on peut employer des méthodes mixtes qui tiennent des trois types à la fois.

En introduisant la phrase : méthode de Green, nous en élargissons l'acception ordinaire, car non seulement nous entendons par là la méthode d'intégration de l'équation de Laplace pour différentes conditions au contour, mais aussi les méthodes analogues d'intégrations des équations de type elliptique (comme par exemple celle de Betti pour les équations de l'élasticité) et même celles des équations de type hyperbolique et parabolique, où l'on n'emploie explicitement les caractéristiques. Aussi les formules relatives aux vibrations qui se rattachent à celle de Kirchhoff rentreraient-elles dans le domaine des méthodes de Green. Au fond, la méthode de Green se rapporte à l'usage des solutions fondamentales, dans tous les cas où l'on n'emploie pas explicitement les caractéristiques.

La méthode des caractéristiques n'est réellement qu'une modification de celle de Green, mais, à mon avis, il est utile de distinguer les deux procédés l'un de l'autre. L'intérêt de la notion des caractéristiques est tellement grande, elles jouent un rôle tellement important dans l'intégration des équations, qu'une séparation s'impose qui n'est pas artificielle, mais qui correspond à quelque chose de substantiel.

Enfin la méthode de Fourier comprend toutes celles où l'on fait usage de solutions simples, et l'on obtient la solution générale moyennant de séries de ces solutions.

Les différentes méthodes étant ainsi classées, on peut procéder à leur développement. Il faut d'abord, pour employer les méthodes de Green et des caractéristiques, chercher un théorème de réciprocité. Il n'y a pas de difficulté à l'obtenir en général et à éclaircir la signification qu'il prend dans les différentes branches de la physique, ce qui éclaire l'ensemble de la théorie.

Je prends la permission, à ce propos, de rappeler un résultat récent qui se rapporte au phénomène de Hall. C'est justement un théorème de réciprocité qui, interprété dans cette théorie, nous révèle une propriété remarquable des courants produits dans une lame de bismuth assujettie à l'action d'un champ magnétique. Supposons qu'on fasse entrer le courant par un point A et sortir par un point B et que l'on détermine la différence de potentiel en deux points C et D. Intervertissons et faisons entrer le courant par C et sortir par D. Pour que l'on trouve la même différence de potentiel en A et B qu'auparavant, il faut invertir le champ magnétique. Ce théorème a servi à M. Corbino pour obtenir beaucoup de résultats pratiques se rapportant aux actions des champs magnétiques sur les courants.

Puisque je parle de ce problème, il est intéressant de remarquer que dans ce cas se présentent des problèmes mixtes par rapport aux conditions au contour, que l'on peut résoudre par une méthode que j'ai donnée depuis plusieurs années. Elle ne s'étend pas au delà des domaines à deux dimensions. Mais par une méthode très ingénieuse fondée sur des principes différents, M. Brillouin a donné la solution générale dans le cas des espaces à un nombre de dimensions quelconque.

Mais la partie la plus difficile et la plus délicate de l'intégration consiste dans la recherche des solutions fondamentales. Leur calcul et la détermination de leurs propriétés, leur classification, les types différents qu'on peut obtenir, mis en comparaison avec les différents types d'équations différentielles, et les différents types de problèmes auxquels ils se rapportent, ainsi que leurs significations physiques, tout cela constitue un ensemble de notions d'un intérêt très grand et l'exposition d'un champ de recherches assez vaste et qui a donné lieu à de grandes difficultés analytiques.

Depuis la simple expression de l'inverse de la distance entre deux points, qui constitue l'intégrale fondamentale de l'équation de Laplace, jusqu'à l'intégrale fondamentale pour la double réfraction, donnée, il y a peu d'années, par M. Zeilon, il y a un grand chemin parcouru, où les difficultés se rencontrent à chaque pas.

Je serais tenté d'entrer dans quelques détails sur ce sujet, mais le temps me manque. Je noterai seulement qu'on ne peut se dispenser de parler des différentes sortes de singularités que l'on rencontre dans les intégrales fondamentales, car ce n'est que par un usage très avisé de toutes leurs singularités que l'on réussit à tirer tout le parti possible de leur emploi.

Je citerai à propos des solutions polydromes celles de la double refraction; et pour le cas des équations de type parabolique, la solution fondamentale de l'équation de la propagation de la chaleur

Il faut quelquefois savoir rejeter celles dont la polydromie rend impossible l'usage et les remplacer par d'autres adroitement trouvées, tandis que dans d'autres cas, c'est leur polydromie qui est la source des résultats les plus cachés et les plus féconds.

A mon avis, l'étude des solutions fondamentales est bien loin d'être épuisée; au contraire, quoique on les ait employés à tout instant, on ne les a pas considérées suffisamment dans leur ensemble et on n'a pas encore assez systématisé leur étude générale.

Cela tient, bien probablement, comme je l'ai dit ailleurs, à la méthode qu'on a suivi la plupart du temps en physique mathématique, d'en étudier séparément les différentes branches, sans les envisager les unes à côté des autres dans leur ensemble, comme un corps de doctrines.

D'autre part, des recherches purement analytiques s'éloignent trop souvent des applications qu'il faut avoir en vue. En perdant le contact avec la réalité on n'est plus alimenté par la source la plus riche de découvertes.

Les solutions fondamentales étant trouvées, il faut les employer en tenant compte des théorèmes de réciprocité. On tombe ainsi sur des formules générales qui ont un grand intérêt au point de vue physique. Au point de vue analytique elles ne résolvent pas complètement les problèmes posés, mais elles amènent à d'autres questions, qu'on peut classer comme un autre type de problèmes de la physique, et où il faut faire intervenir un nouvel instrument : les équations intégrales ou même des équations d'un type plus compliqué. Je suis d'avis qu'on doit réserver peu à peu en chemin les questions qui appartiennent au nouveau domaine, au delà des équations différentielles et consacrer ensuite une partie du cours à leur étude.

Je serai bref sur le développement de la méthode des caractéristiques. Comme elle se rattache étroitement à la méthode de Green, beaucoup de ce que nous avons déjà exposé s'y rapporte.

Je rappellerai à ce propos la première solution donnée par M. Picard de l'équation des télégraphistes en employant la méthode des caractéristiques. Elle a été le point de départ d'un grand nombre de recherches et elle a eu et conserve un grand intérêt au point de vue théorique et des applications.

Il ne faut pas séparer la méthode des caractéristiques de quelques procédés particuliers qui constituent un des côtés les plus élégants de la physique mathématique. On peut citer comme type la méthode des images. Elle fut découverte par Lord Kelvin pour donner une forme simple et intuitive à la solution du problème de Poisson de l'induction électrique des sphères, mais Sir George Gabriel Stokes la fit passer bientôt en hydrodynamique. Ensuite elle s'introduisit dans la théorie du magnétisme, et, plus tard dans la théorie des vibrations.

C'est peut-être un des exemples les plus concluants de l'utilité de considérer simultanément les trois types d'équations. On y voit d'une manière extrêmement frappante les modifications que doit subir une même idée fondamentale pour se plier aux nécessités analytiques des différents cas. Les particularités et le rôle des caractéristiques y apparaît très clairement. C'est aussi un exercice très instructif sur la métrique des espaces hyperboliques, qui est si étroitement rattachée aux considérations aboutissant à la relativité.

Dans le même ordre de considérations rentrent les transformations des équations en elles-mêmes. Celle par rayons vecteurs réciproques n'est pas applicable seulement au cas de l'équation de Laplace, mais aussi à d'autres équation elliptiques, et à des équations hyperboliques. Pour celles-ci on a des transformations où interviennent le temps et l'espace, comme dans la transformation de Lorentz, et jouant un rôle qui n'est pas encore exploité.

En arrivant enfin à la méthode des solutions simples nous avons un vaste domaine à envisager, car depuis la série de Fourier jusqu'aux nouvelles séries de fonctions orthogonales, bien des théories parmi les plus modernes y rentrent. Il suffit de rappeler les recherches de Poincaré sur les équations de la physique mathématique, et les résultats fondamentaux, obtenus par M. Picard, qui se rattachent étroitement à la théorie des équations intégrales.

Je crois que la deuxième partie du cours doit se borner à ce que nous venons de résumer rapidement. Nous avons laissé de côté tous les détails, c'est pourquoi nous n'avons pas parlé d'une foule de questions d'un très grand intérêt. C'est ainsi que nous n'avons pas parlé des distinctions à faire dans les différents problèmes suivant la connexion des domaines envisagés. Néanmoins je crois que le caractère de cette seconde partie du cours résulte assez clairement de ce qui précède.

Si dans la première partie, en prenant comme point de départ les problèmes physiques, nous avons obtenu les équations différentielles, dans la seconde partie nous avons classéces équations et exposé les méthodes générales d'intégration. En les envisageant toutes en même temps nous avons pu synthétiser, ce qui a simplifié l'exposition et a donné une organicité à un ensemble de doctrines dont l'unité doit toujours être relevée.

Mais au point où nous sommes arrivés bien des problèmes physiques ne sont pas encore résolus complètement, et bien des questions restent posées; l'analyse qui a été développée n'est pas suffisante à elle seule pour les résoudre tous. Elle ne peut pas être séparée d'une analyse qui la complète et l'intègre et qui s'impose dès le premier abord. Et il s'agit bien réellement ici non point d'une méthode mais d'une analyse nouvelle.

Les théorèmes d'existence, la résolution définitive des problèmes par les conditions au contour et un grand nombre d'autres questions du même genre, nécessitent un calcul où l'on envisage à la fois toutes les valeurs de certaines fonctions dans un certain domaine; d'autres problèmes dépendent de la forme du domaine que l'on considère, ou de sa frontière. Toutes ces questions ainsi que celles réservées dans la deuxième partie du cours et qui dépendent de la résolution des équations intégrales devraient être étudiées dans la troisième partie.

Le concept directeur serait donc la notion de fonctions dépendant de toutes les valeurs d'autres fonctions. Au fond, les intégrales des équations aux dérivées partielles dépendent d'une part des variables indépendantes, mais elles dépendent d'autre part de fonctions arbitraires. Et, en effet, dès que l'on a eu besoin dans l'analyse d'envisager les intégrales des équations aux dérivées partielles, on a rencontré les fonctions arbitraires. Quel rôle jouent les valeurs des fonctions arbitraires? Ne sont-elles pas un nombre infini et continu de variables indépendantes, dont dépendent les intégrales? C'est d'une manière inconsciente qu'ils ont joué ce rôle, jusqu'au jour où l'on a vu qu'il fallait créer une analyse spéciale, propre à ce genre de questions. Permettez-moi de rappeler les paroles suivantes par lesquelles j'ai débuté en 1887 mes recherches sur les fonctions qui dépendent d'autres fonctions ou les fonctions de lignes : « Dans beaucoup de questions de physique et de mécanique et dans l'intégration des équations aux dérivées partielles, il faut considérer des quantités qui dépendent de toutes les valeurs d'une ou de plusieurs fonctions d'une variable. C'est ainsi, par exemple, que la température dans un point d'une plaque conductrice dépend de toutes les valeurs de la température au contour, le déplacement infiniment petit d'une surface flexible et inextensible dépend des projections sur une certaine direction des déplacements des points du contour. »

D'autre part, puisque la physique mathématique que nous développons est justement celle du continu, et puisque ce continu est variable il est évident que l'on ne peut pas se passer de considérer un continu comme élément variable. On pourrait objecter que la séparation de la seconde et de la troisième partie de notre cours n'est pas philosophique, parce qu'il ne faudrait pas séparer, les uns des autres, les différents types de fonctions et qu'il serait utile d'attaquer directement les questions par la nouvelle analyse; mais la même objection pourrait s'élever contre la distinction entre le calcul différentiel et le calcul intégral, distinction qui toutefois se perpétue à cause des avantages bien connus qu'elle porte.

Tout en n'étant pas un traité sur les fonctions qui dépendent d'autres fonctions, mais un chapitre consacré à leurs applications à la physique analytique, la troisième partie devrait, à mon avis, commencer par en exposer les conceptions fondamentales. On passerait ensuite au procédé général de passage du fini à l'infini dans cet ordre de questions. Il se réduit pratiquement à deux règles fondamentales qui consistent d'abord à remplacer un nombre fini d'indices par une ou plusieurs variables continues, en second lieu à remplacer les sommes faites par rapport à ces indices par des intégrales.

Rien de plus simple que ces règles qui amènent de tout problème ordinaire de l'algèbre et du calcul différentiel et intégral à des problèmes de plus en plus difficiles et qui conduisent aussi des solutions des problèmes ordinaires aux solutions des nouveaux problèmes, ainsi que de théorèmes ou propriétés connues à des principes nouveaux. On peut ainsi passer des équations algébriques aux équations intégrales du type le plus général qui se distinguent par l'existence ou non de points exceptionnels, d'où leur classification indiquée par M. Picard en équations de première, de seconde et de troisième espèce à limites fixes et variables.

Les équations différentielles ordinaires amènent par le même procédé d'extension aux équations intégro-différentielles ordinaires, tandis que les équations aux dérivées partielles peuvent se généraliser en trois directions en conduisant, soit à des équations intégro-différentielles aux dérivées partielles, soit à des équations aux dérivées fonctionnelles du type des équations aux différentielles totales, soit à des équations aux dérivées fonctionnelles proprement dites.

Les applications des équations intégrales linéaires aux théorèmes d'existence et à la résolution définitive des problèmes posés par les méthodes de Green et des caractéristiques, ainsi que leur emploi dans les développements en série et dans la théorie des solutions simples sont tellement classiques qu'il n'est pas nécessaire d'y insister ici.

D'autre part, les études sur les équations aux dérivées fonctionnelles développées par MM. Hadamard et Paul Lévy et qui se rapportent aux fonctions de Green sont parmi les résultats modernes qui ont le plus frappé et intéressé.

C'est aussi dans cette dernière partie que trouverait place l'étude des modifications qu'il faut apporter aux théories classiques si l'on veut en corriger les solutions, en tenant compte de l'hérédité.

Mais je crois pouvoir me dispenser d'insister sur ces recherches ici, surtout dans l'Université de Strasbourg où elles sont si bien représentées par MM. Fréchet et Pérès.

La troisième partie du cours pourrait être limitée à ce que je viens de dire. Elle serait la dernière partie du cours. Il est bien facile maintenant de faire l'énumération des branches de la physique mathématique qui n'ont pas été comprises dans notre étude; il est aussi facile, après ce que nous avons dit, de comprendre les raisons par lesquelles elles sont restées en dehors.

La Thermodynamique pure se développe sans qu'on ait besoin d'approfondir la théorie des équations aux dérivées partielles; aussi ne rentre-t-elle pas dans la physique analytique; la capillarité qui est une branche assez limitée de la physique emploie des méthodes particulières. Mais il y a un domaine extrêmement vaste qui embrasse les théories les plus modernes et les plus intéressantes et qui reste aussi en dehors du cadre que nous avons esquissé. On pourrait l'appeler la physique de la probabilité. Ses méthodes, qui ont été créées par Maxwell, sont bien des méthodes analytiques de la plus haute portée et de la plus grande difficulté; mais ce sont des méthodes très différentes de celles que nous avons considérées précédemment. Elle ne rentre pas dans la physique du continu, c'est pourquoi, par l'esprit qui l'anime et par les procédés qu'elle emploie, elle constitue un organisme distinct de celui dont nous avons étudié les méthodes. Il suffit de lire les ouvrages que M. Borel et M. Langevin lui ont consacré, pour s'en persuader.

La constitution systématique d'une physique de la probabilité marque une profonde transformation dans la philosophie naturelle car elle fait découler l'ordre du désordre, et les lois ne dérivent que du défaut de lois. La physique de la probabilité bouleverse toutes les méthodes de la physique analytique et elle entre dans certains cas bien plus intimement dans l'essence même de la matière et des phénomènes en donnant des résultats plus rapprochés de la réalité.

La physique analytique tout en n'étant pas vieillie, et tout en étant bien loin d'être une des branches sèches du grand arbre des mathématiques, n'est pourtant plus jeune. C'est justement à cause de cela qu'elle est mûre pour sa systématisation et son unification. Avant les derniers progrès il n'aurait pas été possible d'atteindre ce but faute de pouvoir, par exemple, dénombrer et préciser les postulats qu'elle implique, ou démontrer exactement certaines propositions nécessaires, ou affirmer avec précision jusqu'à quel point elle représente la réalité et quelles sont ses limites. La voie que nous avons adoptée amène à ces résultats, qui ont un intérêt philosophique considérable.

Même en consacrant tous les efforts pour s'approprier et faire avancer la physique de la probabilité, il est indispensable que les physiciens, les mathématiciens, les ingénieurs connaissent les principes fondamentaux de la physique analytique. Comment porter à la connaissance d'un public si nombreux un ensemble si vaste de notions? Il faut bien distinguer ici un cours qu'on livre au public comme ouvrage imprimé et un cours qu'on expose oralement. Dans un cours constituant un traité, on pourrait développer avec tous les détails, le programme que je viens d'exposer rapidement; dans un cours professé, il vaudrait mieux se borner aux points essentiels.

Il faut un art très fin pour atteindre ces deux buts. Pour écrire un traité (comme pour professer un cours) ne suffit pas la connaissance scientifique du sujet, mais il faut aussi un certain sens artistique. Les livres qui ont traversé les siècles sont des œuvres d'art autant que des œuvres de sciences.

Euclide qui a systématisé et unifié la géométrie créée par ses devanciers, était un savant, mais il possédait le même goût artistique qui a rendu célèbres Homère et Phidias.