S. NEWCOMB

LA THÉORIE DU MOUVEMENT DE LA LUNE

SON HISTOIRE ET SON ÉTAT ACTUEL

Parmi les problèmes de la mécanique céleste, celui du mouvement de la lune occupe un haut rang, à cause de sa difficulté, et du nombre des questions intéressantes auxquelles il a donné naissance. Il nous offre un bon exemple de ces méthodes générales de la science par lesquelles nous prédisons les phénomènes de la nature. Pour atteindre ce but il faut, d'abord, découvrir par des observations les lois de la nature, — ensuite s'informer des conditions actuelles sous lesquelles ces lois s'agitent, et plus tard, au moyen des méthodes de raisonnement, prédire par déduction les résultats de leur action. Mais nous ne cessons jamais d'être en cours de recherche. Après avoir fait nos prédictions il faut, par de nouvelles observations, déterminer si ces prédictions sont exactes. Si une divergence se manifeste entre les résultats observés, et ceux que nous avons prédits par la théorie, il faut corriger, ou la forme des lois, ou les données que nous avons acceptées comme base de la prédiction.

C'est dans la mécanique céleste que ces méthodes de recherche ont leur plus complète manifestation. La loi fondamentale est celle de la gravitation universelle suivant la formule de NEWTON; les faits, — on peut dire en ce cas les données, — sont les éléments des orbites des planètes, leurs masses, et toute condition qui peut modifier leurs mouvements. Depuis l'énoncé de la loi de NEWTON une succession de grands géomètres, tels que D'ALEMBERT, CLAIRAUT, LAPLACE, LAGRANGE, EULER, PLANA, DAMOISEAU, HANSEN, — je ne nomme pas les vivants — ont développé et perfectionné les méthodes de déduction, tandis que les maîtres de l'astronomie théorique ont corrigé sans cesse les éléments astronomiques au moyen des observations. Comme résultat général de tous ces travaux on peut dire que, sauf deux exceptions, l'accord des observations avec la théorie est aujourd'hui parfait. Les petites différences qui existent encore entre les observations et les conclusions de la théorie seront sans doute annullées par de légères corrections des éléments.

Les exceptions dont il s'agit sont le mouvement de la planète Mercure et celui de la lune. Dans le cas de Mercure il ne faut, pour expliquer la différence, qu'admettre l'existence des masses encore inconnues entre Mercure et le soleil. La question de l'existence de ces masses n'appartient pas à notre sujet. Dans le cas de la lune nous nous trouvons en face d'une véritable énigme, d'un phénomène qui semble accuser l'action d'une cause inconnue, assez puissante pour changer — ou le mouvement de la lune — ou la rotation de la terre autour de son axe. Pour donner une idée de la difficulté et de l'importance des questions soulevées par la divergence entre le mouvement théorique et le mouvement observé de la lune, il faut esquisser sommairement la nature générale, et l'état actuel, de la théorie du mouvement de notre satellite.

Le but de toute théorie des mouvements célestes est la construction des formules algébriques, qui doivent exprimer les coordonnées d'un corps en fonction du temps. Au moyen de ces formules on parvient à calculer les dites coordonnées à un moment donné quelconque. La loi générale est celle de la gravitation universelle, dont l'expression est mise sous la forme de trois équations différentielles, dans lesquelles le temps s'introduit comme variable indépendante. Le cours de déduction est compris dans l'intégration de ces équations, qui conduit à l'expression des trois coordonnées d'un corps en fonction du temps, et de six constantes arbitraires. Ces dernières sont les éléments de l'orbite parcourue par le corps. Elles ne sont pas données *a priori*, il faut les déterminer de manière à représenter les observations.

L'intégration complète n'est pas possible, sauf dans le cas où le nombre des corps n'est que deux, dont l'un est pris comme centre du mouvement, tandis que l'autre est celui dont on désire exprimer les coordonnées. Alors la solution prend la forme du mouvement dans une ellipse suivant les lois de Kepler. Quand on ajoute un troisième corps, il faut adopter la méthode des approximations successives.

Dans le cas de la lune, le corps principal auquel le mouvement est rapporté, est la terre, dont le centre est l'origine des coordonnées. Si aucune force perturbatrice n'agissait inégalement sur la lune et sur la terre, l'orbite de la lune serait une ellipse Keplérienne. Mais l'action perturbatrice du soleil est tellement grande et le problème de déterminer les résultats de son action sur la position de la lune, tellement compliqué et difficile, que le génie de tous les grands géomètres du passé n'a pu suffire a en trouver une solution assez précise pour satisfaire aux besoins de l'astronomie moderne. Pour apprécier les solutions qui ont été effectuées, on remarque qu'elles sont de deux classes: l'une algébrique et l'autre numérique. Dans la première, les coordonnées sont exprimées comme fonctions explicites des éléments ; dans l'autre, les valeurs numériques des éléments sont introduites avant l'intégration.

La solution algébrique et générale en termes finies n'existe pas; mais la petitesse de certains des éléments, permet le développement d'une solution applicable au cas de la lune, dans une série infinie de termes ordonnée selon les puissances et les produits de ces petits éléments. Pour ces éléments on peut prendre:

e, e', les eccentricités des deux orbites;
$\gamma = \sin {}^1/_2\, I$, où I est l'inclinaison de l'orbite de la lune sur l'écliptique;
m, rapport de la période de la terre à celle de la lune.

Les coefficients de cette série sont des fonctions périodiques du temps, et le problème est résolu quand nous avons calculé ces coefficients avec une exactitude suffisante. Parmi les geomètres du passé qui se sont occupés du problème, on peut nommer

LAPLACE, EULER, PLANA, DE PONTÉCOULANT, LUBBOCK, DELAUNAY. Aucun d'entre eux n'a réussi entièrement, parce qu'il est à peine possible, pendant le cours de la vie d'un homme, de calculer tous les coefficients de la série avec la précision demandée par notre astronomie.

Parmi les travaux de ces savants, ceux de DELAUNAY méritent notre attention particulière. Sa méthode est une extension de celle de la variation des constantes arbitraires, imaginée par LAGRANGE. Elle peut être décrite comme une transformation des équations différentielles du mouvement, dans laquelle les constantes arbitraires de la première intégration, c'est à dire les éléments elliptiques, deviennent de nouvelles variables. Les premières dérivées de ces variables par rapport au temps, sont développées en séries infinies de termes, dont chacun est fonction des variables elles-mêmes et du temps. La théorie de ce développement, et de l'intégration des équations différentielles par des approximations successives, est bien connue depuis l'époque de LAGRANGE. Mais quoique cette méthode soit applicable au cas des planètes, on rencontre des difficultés en l'appliquant au cas de la lune, à cause du nombre des approximations qui seraient nécessaires.

Pour donner une idée de la méthode de DELAUNAY, soit a un élément quelconque du mouvement elliptique de la lune. Une force perturbatrice agissant sur la lune produit une variation de cet élément que l'on peut développer dans la forme

$$\frac{da}{dt} = P_0 + P_1 + P_2 + \dots \tag{1}$$

où les P sont des fonctions des éléments et du temps, sauf P_0, qui ne contient pas le temps explicitement. L'idée de DELAUNAY est de prendre d'abord deux termes de cette série, le terme constant, P_0, et un des plus importants des termes variables, disons P_1, et d'effectuer une intégration rigoureuse en omettant tous les autres termes. Ainsi notre élément, a, devient fonction de six nouvelles constantes arbitraires a_1, b_1, $c_1, \dots$ et du temps t:

$$a = f(a_1, b_1, c_1, \dots t). \tag{2}$$

Pour tenir compte des autres termes, DELAUNAY prend les constantes arbitraires $a_1, b_1, \dots$ comme de nouvelles variables, dont les premières dérivées par rapport au temps, deviennent fonctions de la forme (1), mais sans le terme P_1. Une nouvelle intégration, dans laquelle on tient compte des termes P_0 et P_2 seulement, sert à exprimer $a_1, b_1, \dots$ en fonction de t et de six nouvelles arbitraires $a_2, b_2 \dots$ Ces dernières deviennent variables à leur tour, et ainsi de suite à tel point que les termes qui restent sont si petits que leurs carrés et leurs produits deviennent négligeables. Alors, l'intégration pour les termes qui restent se fait par une simple quadrature.

De cette manière le problème est réduit à l'exécution d'une série d'opérations algébriques, comprenant des substitutions repétées sans fin, mais toujours se rapprochant de plus en plus des valeurs exactes des variables.

On ne peut qu'admirer le génie qui a conçu cette extension de la méthode féconde de LAGRANGE. Son application n'est pas bornée à la théorie de la lune, mais, comme l'ont montré TISSERAND, HILL, et d'autres, elle peut servir à faire faire un pas important à la théorie des planètes.

Le grand ouvrage de DELAUNAY, *Théorie du mouvement de la lune*, est un monument de calcul algébrique et numérique, si merveilleux qu'il semble extraordinaire qu'un seul homme ait pu l'ériger. Mais quoique les résultats de DELAUNAY dépassent en précision tous les autres développements algébriques de la théorie de la lune, ils ne suffisent pas aux besoins de l'astronomie moderne. Dans la solution chaque coefficient d'un terme est lui même la somme d'une série infinie dont les termes sont ordonnés selon les puissances et produits des petits nombres e, e', γ et m, que j'ai déjà définis. Cette série est assez convergente quant à e, e', et γ. Mais la convergence des termes en m est souvent si lente, à cause des grands coefficients numériques, qu'il est presque impossible de calculer tous les termes de la série qui peuvent devenir sensibles. Il est même douteux que le développement suivant les puissances de m soit convergent pour quelques uns des termes. Quoiqu'il en soit, il est certain que la théorie de DELAUNAY n'est pas développée assez loin en puissances de m pour servir à nos besoins actuels.

Les méthodes dont j'ai parlé jusqu'ici sont purement algébriques et générales; le problème est d'exprimer les coordonnées de la lune en fonctions explicites des éléments. Pour calculer les coordonnées il suffit de substituer, dans leurs expressions algébriques, les valeurs numériques des éléments, comme elles sont données par les observations. Mais vu les difficultés des développements algébriques que j'ai signalées, on a cherché à construire des formules pour le mouvement de la lune actuelle, en substituant, comme je l'ai dit, les valeurs numériques des éléments avant l'intégration. Alors, on trouve une solution particulière des équations du mouvement, au lieu de la solution générale. DAMOISEAU est, je le crois, le premier qui ait appliqué cette méthode. Mais la plus importante théorie numérique est celle de HANSEN, sur laquelle sont basées les tables de la lune dont on a fait usage pendant un demi-siècle. En principe la méthode numérique de HANSEN est assez simple. Dans les deuxièmes membres des équations différentielles du mouvement, on substitue des expressions numériques approximatives; et on trouve par l'intégration des valeurs des éléments et des coordonnées qui, on le peut croire, doivent être plus exactes que celles qui nous ont servi au début. On peut répéter le procédé aussi souvent qu'on voudra, ou bien jusqu'à ce que le résultat ne soit pas changé par la répétition. C'est ainsi que HANSEN, après avoir calculé les valeurs des inégalités dont il a fait usage dans ses *Tables de la Lune*, a repris les calculs, et est arrivé à des valeurs de quelques-uns des termes legèrement différentes de celles des tables. Mais l'exactitude des résultats obtenus par cette méthode n'est pas à l'abri de toute objection. D'ailleurs, la méthode purement numérique ne suffit pas à tous les besoins de la théorie, parce que les dérivées des coordonnées par rapport aux éléments ne peuvent être calculées par de telles expressions. Par conséquent, on ne peut regarder ni la méthode de DELAUNAY, ni celle de HANSEN, comme tout à fait satisfaisante.

Je passe maintenant à une série de recherches qui, je le crois, nous conduisent à des résultats ayant toute l'exactitude demandée par l'astronomie de notre temps. Cette série commence avec l'ouvrage de LEONHARD EULER, *Theoria Motuum*

Lunae, Nova Methodo Pertractata. C'est un fait assez remarquable dans l'histoire de notre science qu'un siècle entier se soit écoulé sans qu'aucun géomètre n'ait observé la supériorité de la méthode esquissée dans cet ouvrage d'EULER. Sa publication eut lieu en 1772; c'est en 1878 que M. GEORGE W. HILL publia le premier de ses mémoires sur le mouvement de la lune, alors qu'on suppose nulles l'inclinaison et les excentricités, dont l'idée fondamentale est basée sur l'ouvrage d'EULER ([1]). Voici quelle est cette idée. En regardant les mouvements moyens de la terre autour du soleil, et de la lune autour de la terre comme donnés, l'expression de chaque coordonnée de la lune peut être développée en série ordonnée selon les puissances et les produits des excentricités e et e' des deux orbites, et de γ, sinus de leur demi-inclinaison. Soit y une telle coordonnée. Alors

$$y = P_0 + eP_1 + e'P_2 + \gamma P_3 + e\gamma P_4 + \ldots \tag{3}$$

où les P sont des fonctions périodiques de la forme

$$P = \sum h \begin{smallmatrix}\sin\\ \cos\end{smallmatrix} (A + Bt). \tag{4}$$

Les coefficients h sont des fonctions de m, le rapport des mouvements moyens du soleil et de la lune; les A sont des combinaisons linéaires des longitudes moyennes du soleil, de la lune, du périgée, et du nœud, et les B sont des fonctions de m, e, e', et γ.

Maintenant, EULER a cherché à développer séparément les valeurs des P. Mais il a rencontré une difficulté dans l'introduction de m, e, e', et γ dans les B. Par conséquent, il a dû regarder les mouvements des arguments comme des données d'observation. Ce que HILL a fait cent ans plus tard peut être résumé ainsi:

1° Il a conçu une méthode générale pour développer les termes de P_0, en fonction des mouvements moyens, avec toute l'exactitude que l'on voudra; et dans le Mémoire de 1878 il a porté le développement bien au delà de tous les besoins de l'astronomie.

2° Dans un Mémoire célèbre qui a paru en 1888 ([2]) il a développé une méthode nouvelle pour traiter la partie du mouvement du périgée qui est indépendante de e, e', et γ.

Ce que HILL a fait pour le périgée, ADAMS et COWELL l'ont fait pour le mouvement du nœud.

Naturellement, les idées et les méthodes de HILL sont applicables à la forme plus générale du problème dans laquelle e, e', et γ sont compris. Mais voici une difficulté qui se présente lorsqu'on cherche de déterminer les coefficients P_1, P_2, etc., des puissances et produits des e, e', et γ dans la série. Dans la forme ordinaire d'un tel développement en série infinie, les coefficients ne contiennent pas ces éléments. Mais, comme je l'ai remarqué, nos éléments e, e', et γ entrent dans les valeurs de B et, par conséquent, dans les P. La difficulté est de développer les B,

([1]) American Journal of Mathematics, vol. I.

([2]) Ce Mémoire a été réimprimé dans les Acta Mathematica, tome VIII.

c'est-à-dire les mouvements du périgée, et du nœud, en puissances et produits de ces quantités.

C'est ERNEST W. BROWN (1) qui a abordé le problème ainsi présenté, et qui vient d'en vaincre les difficultés et d'en compléter la solution. Les points principaux de la méthode appliquée par BROWN peuvent être résumés comme il suit:

1° Au lieu de développer les coefficients h en puissances de m, le rapport des mouvements moyens, il emploie la valeur numérique de m *ab initio*. Sa méthode est donc une combinaison des méthodes algébriques et numériques déjà décrites.

2° Il a découvert une méthode pour former les dérivées par rapport à m, au moyen des dérivées par rapport aux autres éléments.

3° Il a aussi développé une méthode générale pour faire dépendre chacune des fonctions périodiques P_1, P_2, etc., de la solution d'une équation différentielle de deuxième ordre. Cette solution peut être obtenue avec toute l'exactitude qu'on désire par la solution d'un système d'équations linéaires.

4° A chaque pas il détermine ceux des termes du mouvement du périgée et du nœud qui sont nécessaires à la solution.

5° Il a exécuté les calculs numériques de la théorie de manière à trouver chacun des coefficients pour la longitude, la latitude et la parallaxe de la lune avec une erreur moindre que $\pm 0''.01$.

6° Il a inventé des formules de vérification pour découvrir des erreurs quelconques dans les calculs numériques des termes.

Ce degré d'exactitude suffit pour toutes les applications pratiques de la théorie. La comparaison des coefficients de HANSEN et de DELAUNAY avec ceux de BROWN nous porte aussi à croire que les résultats de BROWN sont aussi exactes qu'on peut le désirer.

Je dois signaler les travaux d'un autre savant qui a contribué à cette théorie moderne. Les coordonnées employées par EULER, HILL et BROWN sont rectangulaires, et, après les avoir formées, il faut les transformer en des coordonnées polaires. M. H. ANDOYER a proposé une méthode pour développer immédiatement les coordonnées polaires dans la même forme. Cette méthode me semble digne de l'attention des géomètres qui s'intéressent à la théorie dont il s'agit.

Jusqu'ici j'ai parlé seulement de l'action du soleil comme force perturbatrice modifiant le mouvement elliptique de la lune autour de la terre. Tant que l'orbite de la terre ne change pas, les inégalités dans le mouvement de la lune produites par l'action du soleil sont purement périodiques. Le mouvement moyen de la lune, de son périgée et de son nœud, serait uniforme de siècle en siècle, et les inégalités lunaires reprendraient leurs valeurs initiales toutes les fois que lune, périgée et nœud retournent à leurs positions originales. Mais l'action des planètes doit aussi produire de petits changements dans le mouvement de la lune, et cela de deux manières; l'une, par la différence de leur action directe sur les deux corps, lune et terre, et

(1) Les recherches de BROWN se trouvent *in extenso* dans les Memoirs of the Royal Astronomical Society, vols. LIII, LIV et LVII, 1897-1905. Il a développé plusieurs points de la théorie dans l'American Journal of Math., vol. XII, et Transactions of the American Mathematical Society, vol. IV, etc.

l'autre, en modifiant le mouvement de la terre autour du soleil, ce qui change l'action du soleil sur la lune. En général l'action des planètes est moindre que celle du soleil dans le même rapport que leurs masses, et par conséquent, on peut la croire négligeable. Mais l'observation et la théorie ont, toutes les deux, montré que l'effet de cette action est important. D'abord, la comparaison des observations modernes avec les éclipses de lune rapportées par PTOLÉMÉE a montré à HALLEY que le mouvement moyen de la lune avait été accéléré depuis l'époque de PTOLÉMÉE. Plus tard, on a estimé la quantité de l'accélération comme 10″ par siècle. La cause de ce phénomène fut découverte par LAPLACE; c'est la diminution séculaire de l'excentricité de l'orbite de la terre, produite par l'action des planètes. Les calculs de LAPLACE donnèrent 10″ comme valeur de l'accélération séculaire, de manière que l'accord de la théorie avec l'observation semblait complète. Vers 1850 HANSEN reprit le calcul pour ses Tables de la lune, avec le résultat 12″.18. Ses calculs ultérieurs, publiés dans son *Darlegung*, donnèrent un résultat encore plus grand de 0″.35, c'est-à-dire 12″.53. Il a essayé de justifier ce nombre, non seulement par la théorie, mais aussi par l'observation, en discutant plusieures éclipses totales de soleil rapportées par les anciens historiens. Mais cet accord a été détruit par les recherches profondes de J. C. ADAMS, qui trouva que, en poussant plus loins les approximations, la valeur théorique de l'accélération n'était que presque la moitié de la valeur calculée par HANSEN. Ce résultat a été de suite confirmé par DELAUNAY. En effet HANSEN, comme LAPLACE et les autres géomètres qui avaient abordé le problème, s'est borné à des termes de premier ordre par rapport à l'action perturbatrice du soleil; tandis que les termes d'ordre plus élevé produisent des résultats bien sensibles. Les derniers calculs du Professeur BROWN le conduisent à une valeur de 5″.81, résultat que nous pouvons accepter comme exact en théorie à quelques centièmes d'une seconde près.

Il y avait, donc, un désaccord bien marqué entre la théorie et l'observation, dont une *vera causa* a été trouvée par WILLIAM FERREL, et plus tard par DELAUNAY, dans l'action de la lune sur les marées. A cause du frottement, les marées ne sont pas symmétriques par rapport à la direction de la lune; il en résulte un couple dans l'action de la lune sur la mer, qui tend toujours à retarder la révolution de la terre autour de son axe, et à produire un petit accroissement dans la durée de notre jour, ce qui fait que notre mesure de temps est toujours en retard de siècle en siècle. Il faut un retard de 12 secondes seulement pour produire une accélération apparente de 6″ dans le mouvement moyen de la lune. Des recherches ultérieures donnent une valeur apparente de l'accélération de 8″ seulement, de manière que le désaccord entre la valeur théorique et la valeur observée de cette quantité n'est que de 2″ par siècle.

Un fait intéressant est que le retardement de la rotation de la terre produit par les marées a été soutenu par KANT, quoique sa démonstration de l'effet ne fût pas correcte. LAPLACE a montré que l'action supposée par KANT n'existe pas; mais sa conclusion qu'il n'y a pas de ralentissement, n'est pas bien fondée.

LAPLACE montra, par une comparaison du mouvement de la lune avec les tables de LALANDE, l'existence de quelques inégalités de longue période dans ce mouvement.

Hansen est le premier qui ait pu montrer l'existence d'une telle inégalité dans la théorie. Dans ses *Tables de la lune* il a introduit deux inégalités dues à l'action de Venus, dont l'une a une période de 273 ans, et l'autre de 239 ans. La première de ces inégalités existe actuellement dans la théorie, mais l'autre est bien petite, 0″.24 seulement, ainsi que l'ont démontré Delaunay et Radau. La valeur adoptée par Hansen est presque cent fois trop grande, et, ce qui est pis, ni la valeur de Hansen, ni la vraie valeur théorique, ne représentent les observations. C'est à ce désaccord énigmatique que je consacrerai la fin de mon discours.

Prenons d'abord le terme théorique de notre comparaison. Je ne puis imaginer que trois actions perturbatrices du mouvement de la lune. Ce sont celles du soleil, des planètes, et de la déviation de la terre de la forme sphérique. Cette dernière ne peut produire aucune inégalité de période plus longue que celle du nœud de l'orbite lunaire, parce que, par sa rotation diurne, l'action de toute inégalité longitudinale dans la figure de la terre s'annule dans la période d'un jour. L'action du soleil est bien déterminée. Il ne reste donc que celle des planètes.

Le problème de l'action des planètes sur la lune est le plus compliqué de tous les problèmes bien définis de la mécanique céleste. Mais depuis l'époque de Hansen les méthodes pour calculer cette action ont été tellement perfectionnées par les recherches profondes de Delaunay, de Radau, de Hill et de Brown, que leurs résultats semblent hors de doute. La première inégalité de Hansen est la seule de longue période avec une amplitude importante, qui existe dans la théorie.

C'est un caractère important de ces déviations observées qu'elles semblent être irrégulières plutôt que périodiques. Pour parler plus exactement; elles ne peuvent se représenter par un ou même par deux termes périodiques. Il est vrai pourtant, qu'en admettant un terme dont la période est de 250 ans environ, on peut représenter la plus grande partie de la déviation; ce qui reste semblant tout à fait irrégulier. Les fluctuations les plus rémarquables ont eu lieu depuis 1850. Vers cette époque le mouvement moyen était accéléré, et l'accélération paraissait continuer jusqu'à 1864. Alors, le mouvement était subitement retardé de sorte que, pendant la période de 1864 à 1874, le mouvement annuel en longitude était plus petit de 0″.5 qu'il n'était pendant la période de 1850 à 1863-4. Transporté à la lune, la vitesse de ce corps s'est changée de un ou deux kilomètres par an. Depuis 1890 environ, la direction de ce mouvement est renversée.

On peut imaginer deux hypothèses pour expliquer ces changements. Ou ils sont réels, ou il ne sont qu'apparents, étant produits par des changements dans la rotation de la terre, de la même manière qu'un ralentissement de cette rotation produit un accroissement apparent de l'accélération séculaire. Pour décider entre ces hypothèses il nous faut une épreuve indépendante de l'uniformité de notre mesure de temps. Malheureusement nous n'avons aucune preuve précise. La meilleure en est fournie par le mouvement de Mercure. Les passages de cette planète sur le disque du soleil, observés depuis 1677, jusqu'à 1907 accusent de semblables changements, mais leur quantité est inférieure à la moitié de celle qui est nécessaire pour expliquer le phénomène dont il s'agit. Il semble donc qu'une partie du changement est réelle, et qu'une autre partie est due à des changements dans la rotation de la terre. N'est ce donc pas que l'action de la lune sur les marées soit variable, et que la combinaison de cette action avec la réaction des marées sur la lune puissent complètement expliquer le phénomène? Mais, au contraire, cette réaction doit retarder, plutôt qu'accélérer, le mouvement actuel de la lune. Je vais exposer brièvement la théorie de cette action et réaction:

1° En faisant abstraction de l'action du soleil, le mouvement des marées est produit par l'action de la lune.

2° Ce mouvement est nécessairement accompagné de frottement.

3° Ce frottement entraine une diminution de l'énergie totale, kinétique et potentielle, du système terre-lune.

4° Le moment du mouvement de ce système reste invariable. Il se divise en deux parties distinctes, celle de la terre, et celle de la lune, due à sa révolution autour de la terre.

5° Le moment de la rotation de la terre ne peut être changé par aucune action mutuelle entre ses parties, même par le frottement. Pour qu'un changement se produise, l'action d'un couple, due à la lune, est nécessaire, ce qui n'est possible que dans le cas où les marées sont assymétriques par rapport au rayon vecteur de la lune.

6° Le même couple réagit sur la lune, de sorte que l'accroissement de son moment est égal à la diminution du moment de la terre.

7° Par la même réaction, la distance moyenne et le mouvement moyen de la lune seront changés, de manière que, tout en conservant leurs relations fixes, la somme de l'énergie kinétique et de l'énergie potentielle du système se trouvera diminuée d'une quantité égale au frottement.

8° Le résultat de ces relations doit être, selon Sir George Darwin, un retardissement de 3.″6 environ de notre mesure de temps pour chaque 1″ d'accélération apparente du mouvement moyen de la lune, et *vice versa.*

Ces conclusions théoriques appliquées à notre problème ne représentent point les changements observés. C'est à dire: pour expliquer les variations du mouvement moyen de la lune par l'action des marées, il faut supposer des variations de presque une minute dans notre mesure de temps pendant les deux siècles depuis 1700. Mais les passages de Mercure semblent montrer que ces variations ne peuvent pas dépasser quelques secondes.

Toute reflexion faite, il me semble que l'explication de l'énigme ainsi présentée est aujourd'hui le problème le plus important et le plus intéressant de la mécanique céleste. Mais la question appartient au domaine de la physique céleste plutôt qu'à celui de la mathématique; et je me retiens de la discuter.