Riemanns Vorlesungen über die hypergeometrische Reihe und ihre Bedeutung.

Vortrag, gehalten in der 3. allgemeinen Sitzung am 13 August

von

W. Wirtinger aus Wien.

Wenn ich es heute unternehme, vor Ihnen über eine Vorlesung zu sprechen, die nun bald vor 50 Jahren gehalten wurde und noch dazu über einen sehr speziellen Gegenstand, so muß ich fast fürchten in ihren Augen rückständig zu erscheinen. Aber Sie werden vielleicht milder urteilen, wenn ich vorausschicke, daß es sich dabei um die ersten Mitteilungen über Methoden handelt, welche in einem wichtigen und noch lange nicht ausgebauten Teile der heutigen Funktionentheorie erst viel später zur vollen Geltung gekommen sind und deren Tragweite noch nicht erschöpft scheint. Auch handelt es sich dabei nicht so sehr darum, Ausblicke in weite noch unberührte Gebiete zu gewinnen, sondern in ihrer allgemeinen Natur wohlerkannte Erscheinungen im konkreten Fall ins Auge zu fassen und so vielleicht den Zugang zu neuen Problemen zu eröffnen.

Als Riemann an seine Untersuchungen über die hypergeometrische Reihe herantrat, fand er einen großen Vorrat von Beziehungen und Entwicklungen vor, welche bereits Gauß aus der formellen Gestalt der Reihe durch Rechnung entwickelt hatte.

Dieser hatte mit der ihm eigenen Sicherheit des mathematischen Taktes gerade diejenigen Beziehungen und Gesichtspunkte herausgegriffen, welche in der Tat für die Folge maßgebend geworden sind, und ist, wie der zweite, erst nach seinem Tode veröffentlichte Teil seiner Untersuchungen lehrte, dabei von dem Gedanken geleitet worden, mit Hilfe der Differentialgleichung zweiter Ordnung, welcher diese Reihe genügt, sich von der Beschränkung freizumachen, welche die Konvergenz eben dieser Reihe den Formeln des ersten Teiles auferlegte.

E. E. Kummer hatte sodann die Transformationen dieser Reihe gerade von der Differentialgleichung aus einer ungemein eingehenden

Untersuchung unterzogen und eine große Reihe von speziellen Beziehungen zu den elliptischen Integralen und Funktionen dargelegt. Seine Methode stützte sich bereits auf die für die spätere Entwicklung fundamentale Tatsache, daß der Quotient zweier partikulärer Integrale einer linearen Differentialgleichung zweiter Ordnung seinerseits einer nicht mehr linearen Differentialgleichung dritter Ordnung genügt. Im speziellen Fall der Perioden des elliptischen Integrals erster Gattung hatte bereits Jacobi in der Theorie der Modulargleichungen davon Gebrauch gemacht, und diese Differentialgleichung dritter Ordnung für die Legendresche lineare Differentialgleichung der Perioden des elliptischen Integrals erster Gattung aufgestellt. Historisch interessant ist es aber, daß bereits Lagrange bei einer Aufgabe der Kartenprojektion, der konformen Abbildung, auf den einen Teil dieser Formel, den Differentialausdruck, gestoßen war.

Die schöne Abhandlung Jacobis über die Integration der Differentialgleichung der hypergeometrischen Reihe durch bestimmte Integrale wurde erst 1859 nach dessen Tode herausgegeben. Für Riemann und Jacobi erscheint daher als gemeinsame Quelle der Anregung der zweite Band der Institutiones calculi integralis von Euler, sowie einige andere Abhandlungen dieses in seiner Fruchtbarkeit unvergleichlichen Mannes. Nehmen wir dazu noch zwei Arbeiten, eine von Pfaff und eine von Gudermann, welche spezielle Probleme der Transformation dieser Reihen behandeln, so haben wir damit so ziemlich den Vorrat von Methoden und Resultaten charakterisiert, welchen Riemann auf diesem Gebiet vorfand.

Dazu brachte er nun den ihm eigentümlichen Gedanken mit, die Funktionen nicht durch einen bestimmten Ausdruck festzulegen, sondern durch ihre Unstetigkeiten und die Art ihrer Vieldeutigkeit oder, wie wir heute sagen würden, durch Relationen zwischen den verschiedenen analytischen Fortsetzungen, welche derselben Stelle des Gebietes angehören, in welchem die Funktion definiert werden soll. Daß endlich auch die Beschaffenheit des Gebietes selbst nach seinem einfachen oder mehrfachen Zusammenhang, also nach den verschiedenen Arten geschlossener Wege, welche auf demselben möglich sind, wesentlich in Betracht kommt, hatte er schon in seiner Dissertation erkannt. Auch hier hatte er schon angedeutet, daß eine Funktion einer komplexen Veränderlichen nicht gerade durch die Werte an der Begrenzung eines Gebietes, sondern auch durch Relationen zwischen dem reellen und imaginären Teil, ja sogar durch Relationen zwischen diesen Werten an verschiedenen Stellen der Begrenzung ganz oder teilweise bestimmt sein könne.

Dies sind ungefähr die allgemeinen Gedanken und die speziellen Resultate, welche Riemann vorfand, als er im Wintersemester 1856/57 seine erste Vorlesung über diesen Gegenstand unter dem Titel: Die Funktionen einer veränderlichen komplexen Größe, insbesondere hypergeometrische Reihen und verwandte Transzendenten, — drei Stunden wöchentlich — ankündigte und auch hielt.

Erhalten ist uns diese Vorlesung im Umriß durch eine Nachschrift von E. Schering. Daraus entstand dann die Abhandlung von 1857: Beiträge zur Theorie der durch die Gaußsche Reihe $F(\alpha, \beta, \gamma, x)$ darstellbaren Funktionen.

Schon der äußere Anblick unterscheidet diese Arbeit wesentlich von denen seiner Vorgänger. An Stelle der langen und mühsamen Rechnung erscheint hier die Überlegung, allerdings oft nicht weniger schwierig, welche von Resultat zu Resultat führt. An Stelle der Formel mit zunächst beschränktem Geltungsgebiet tritt die Definition einer ganzen Funktionsklasse durch die Forderung an drei Stellen je durch zwei Zweige von bestimmtem Verhalten darstellbar zu sein, und außerdem sollen je drei ihrer Zweige durch eine homogene lineare Relation verbunden sein. Aus dieser Definition fließt dann fast unmittelbar die ganze Kette von Relationen und Transformationen, welche bisher durch Rechnung gefunden waren, und eine Reihe neuer, überdies aber eine tiefere Einsicht in die Natur der untersuchten Funktionsklasse, Dinge, die in einer Versammlung von Mathematikern ausführlich zu beschreiben heute bereits überflüssig sein dürfte. Während nun in der Abhandlung die bestimmten Integrale nur gestreift werden, geht die Vorlesung ausführlich auf sie ein, doch noch immer unter Benützung der Reihenentwicklung als vermittelnden Gliedes. Die Kettenbruchentwicklungen, welche bereits Gauß gegeben hatte, erfahren hier eine neue Darstellung, und der Ansatz zum Konvergenzbeweise derselben wird mit Hilfe asymptotischer Entwicklungen auf Grund eines Gedankens, den Riemann auch in seiner Habilitationsschrift über die trigonometrischen Reihen benützt, unternommen. Die Darlegungen desselben beschließen die Scheringschen Aufzeichnungen auch äußerlich, sie sind auf der innern Seite des Einbandes des Heftes geschrieben und unvollendet. Der wesentliche Inhalt dieser letzten Untersuchung ist in das Fragment XXII der gesammelten Werke übergegangen nach einer späteren Aufzeichnung von 1863. Ihrer Entstehung nach aber reichen diese Ansätze, wie das Scheringsche Heft zeigt, in jene erste Vorlesung über die hypergeometrische Reihe zurück.

Weder die Abhandlung noch diese erste Vorlesung greifen aber die Untersuchung der bestimmten Integrale als Funktionen der außer der Integrationsveränderlichen auftretenden Variablen, oder genauer als Funktionen der singulären Stellen des Integranden, direkt an.

Ferner tritt nirgends die durch den Integralquotienten vermittelte konforme Abbildung auf; es wird noch nicht untersucht, in welcher Beziehung die Gebiete der unabhängigen Variablen und des Quotienten zweier partikulären Integrale zueinander stehen, und damit entfällt auch das Studium dieser Abhängigkeit in der Weise, daß nun die Variable der Differentialgleichung als Funktion des Integralquotienten betrachtet wird.

Alle diese wesentlichen und neuen Gedanken sind erst in der zweiten Vorlesung hinzugekommen, welche Riemann unter demselben Titel im Wintersemester 1858/59, vier Stunden wöchentlich, hielt. Da er selbst darüber nichts publiziert hat, so wären diese Ansätze als Riemann eigentümlich nicht mehr nachzuweisen, wenn nicht ein glücklicher Zufall und die Pietät eines der wenigen noch überlebenden Hörer dieser Vorlesungen uns dieselben aufbewahrt hätte. Allerdings kamen sie erst zu einer Zeit wieder zum Vorschein, wo die Resultate und Probleme längst von anderer Seite wiedergefunden waren. Um so interessanter aber ist es zu sehen, wie die Wissenschaft von selbst in stetiger Entwicklung alle die Methoden und Probleme wieder stellte und ausbildete, welche Jahrzehnte vorher Riemann mit der ihm eigenen schlichten Selbstverständlichkeit seinen Hörern vorgelegt und entwickelt hatte, von denen aber zu dieser Zeit kaum einer in der Lage war, diese Ansätze nach ihrer Bedeutung zu würdigen, geschweige denn sie selbständig weiter zu bilden.

Herr Professor Wilhelm von Bezold, zur Zeit Direktor des kgl. preußischen meteorologischen Institutes in Berlin, hatte diese Vorlesung besucht und aus Achtung vor dem Rufe und Ansehen Riemanns an der Universität sorgfältig in Gabelsbergerscher Stenographie aufgezeichnet, deren Kenntnis er aus seiner Heimat, München, mitbrachte. Dort hatte ja auch deren Erfinder gewirkt. Da er damals am Beginn seiner Studien stand, so konnte er die Tragweite der neuen Gedanken Riemanns nicht sogleich beurteilen — und wie viele Mathematiker hätten es damals gekonnt? Später widmete er sich der Physik und Meteorologie und so geriet denn auch jene Aufzeichnung in Vergessenheit. Erst nach Jahrzehnten, etwa im Anfang der Neunziger Jahre des vorigen Jahrhunderts, kamen ihm diese wieder durch einen Zufall in Erinnerung, und er brachte sie zunächst zur Kenntnis seiner Berliner Kollegen. Besonders Fuchs interessierte sich so sehr für den Inhalt, daß er im Jahre 1894 für seinen eigenen Gebrauch eine Übertragung in Kurrentschrift anfertigen ließ. Die Einordnung und Übertragung des gesamten Riemannschen Nachlasses an die Göttinger Universitätsbibliothek veranlaßte sodann Herrn v. Bezold, diese Aufzeichnungen ebenfalls dorthin zu überweisen. Als dann Herr Nöther den Plan faßte, zu Riemanns Werken Nachträge herauszugeben, wurden auch diejenigen Teile dieser Vorlesung mit einbezogen, welche ihrem Inhalt nach nicht schon anderweitig als dem Riemannschen Gedankenkreise angehörig nachgewiesen waren.

Was nun die Vorlesung selbst betrifft, so beginnt sie mit einer Einleitung in die seither längst zum Gemeingut der Mathematiker gewordene Riemannsche Auffassung des Funktionsbegriffes, geht sodann über auf eine kurze Erläuterung der Verzweigung der algebraischen Funktionen und setzt hierauf sogleich mit den allgemeinen Gedanken des nachgelassenen Fragmentes über lineare Differentialgleichungen ein. Es werden die Elemente der Determinantentheorie, der Zusammensetzung und Reduktion linearer Substitutionen in aller Kürze entwickelt und nun Systeme von Funktionen definiert, welche bei Umläufen um gewisse singuläre Punkte gegebene Substitutionen erleiden. Riemann stellte also seine Hörer ohne jede Rücksicht auf die historische Kontinuität, ohne irgend welche induktive Vorbereitung gleich in den ersten Vorlesungen vor ein Problem von großer Allgemeinheit, welches irgend einen Zusammenhang mit der damals geläufigen Auffassung einer Differentialgleichung durchaus nicht unmittelbar zeigte. Aber noch mehr. Daß überhaupt dieses Problem auch nur in den einfachsten Fällen eine Lösung zuläßt, ist durchaus nicht von vornherein einzusehen, und es brauchte lange Zeit, bis die Schwierigkeiten, welche sich aus einer genaueren Fassung dieses Problems ergeben, erkannt waren. Riemann selbst hatte sie erst teilweise erledigt, soweit wir nach seinem Nachlaß urteilen können. Es bedurfte der ganzen Reihe von Untersuchungen und Entdeckungen auf dem Gebiete der linearen Differentialgleichungen, wie sie an die Namen Fuchs, Klein, Poincaré geknüpft sind, um schließlich die Hilfsmittel bereit zu stellen, mit denen in der letzten Zeit Herr Schlesinger wenigstens einen Teil dieser Fragestellung hat erledigen können. Freilich, sollte es den Bemühungen der Mathematiker gelingen, auf den von Herrn Hilbert betretenen neuen Wegen das Dirichletsche Prinzip nicht nur in dem alten Glanze seiner heuristischen Kraft — denn diesen hat es niemals verloren — sondern auch als Beweismittel im Sinne der heutigen, durch so viele analytischen Erfahrungen bereicherten und darum verschärften Analysis wieder erstehen zu lassen, so ließe sich ein großer, vielleicht der wichtigste Teil der in Betracht kommenden Fälle erledigen.

Für die übrigen Fälle kann vielleicht eine weitere Ausbildung jener Methoden, welche an die Fredholmsche Integralgleichung anknüpfen und die ja ebenfalls mit den alten Aufgaben des Dirichletschen Prinzipes enge zusammenhängen, einst die volle Erledigung bringen. Es ist aber auch kaum ein Zweifel, daß bei dieser Gelegenheit noch manche verborgene Schwierigkeit und manches Problem noch für kommende Geschlechter übrig bleiben wird.

Vor diese Auffassung nun stellte Riemann seine Hörer. Zunächst führte er ihnen ein so definiertes Funktionssystem für nur zwei Verzweigungspunkte vor, um dann sofort in den Inhalt seiner Abhandlung über die hypergeometrische Reihe einzugehen. Schon in den einleitenden Worten zu dieser hatte Riemann eine Behandlung dieser Funktionen von der Darstellung derselben durch bestimmte Integrale ausgehend als gleichberechtigt mit der auf Grundlage der Differentialgleichung entwickelten hingestellt und seine Methode diesen beiden als eine neue gegenübergestellt. Ob die schon erwähnte, von Heine im gleichen Jahr publizierte, nachgelassene Abhandlung Jacobis noch im Laufe der Vorlesung zur Kenntnis Riemanns gekommen ist, kann ich nicht entscheiden. Wohl aber ist zu betonen, daß er bereits in seinen Vorlesungen aus dem Jahre 1855 die Behandlung der Eulerschen Integrale erster und zweiter Art auf Grund von geschlossenen und schleifenförmigen Integrationswegen in den Hauptzügen durchgeführt hatte, in ähnlicher Weise, wie sie später von Hankel unter Berufung auf Riemann in seiner Dissertation gegeben worden ist.

Bisher war es aber nur die Umgestaltung des Integrals durch Abänderung des Integrationsweges zur Vermeidung solcher Stellen, an denen die zu integrierende Funktion eine Integration überhaupt nicht gestattete. Auch wurde gerade dieses Hilfsmittel nicht nach seiner ganzen Tragweite von ihm nachweislich ausgebildet, obgleich einzelne Spuren und Andeutungen nach dieser Richtung hin vorhanden sind. Erst die Herren Camille Jordan, Pochhammer, Nekrassoff haben durch Einführung des Doppelumlaufintegrals den letzten Schritt in dieser Richtung getan, so weit wenigstens als Funktionen von ähnlichem Verhalten in Betracht kommen, wie der Integrand des hypergeometrischen Integrals. Jetzt aber, in der Vorlesung, werden die hypergeometrischen Integrale geradezu daraufhin untersucht, wie sie sich bei geschlossenen Umläufen des Parameters verhalten, und daraus, sowie aus den in sehr durchsichtiger Weise entwickelten linearen Relationen zwischen ihnen — sie ergeben sich einfach durch zwei Randintegrationen — wird gezeigt, daß sie den allgemeinen an eine P-Funktion zu stellenden Forderungen in bestimmter Weise entsprechen. Dieser Gedankengang findet sich später erst bei Fuchs gelegentlich der Untersuchung der

Perioden eines hyperelliptischen Integrals erster Gattung als Funktion eines Verzweigungspunktes und etwas später in dem Werke von Herrn Camille Jordan über Substitutionentheorie und ist an der zuletzt genannten Stelle ohne nähere Angabe Herrn Mathieu zugeschrieben.

Nicht unerwähnt darf ich dabei auch lassen, daß sich im Nachlasse Riemanns ein Blatt vorgefunden hat, welches unter anderm die Figur des Doppelumlaufes zeigt. Doch wäre es nicht unmöglich, daß dieses Blatt erst später hineingekommen ist, da sich keinerlei die Datierung nur einigermaßen ermöglichenden Angaben darauf befinden. Dagegen ist ein anderes Blatt wohl mit Sicherheit Riemann zuzuschreiben, auf welchem die Schreibweise des hypergeometrischen Integrals derart modifiziert ist, daß dasselbe als absolute Invariante, als bloße Funktion des Doppelverhältnisses der vier singulären Stellen des Integranden erscheint.

Die Entwicklungen des folgenden Abschnittes gruppieren sich um den Begriff der Kettenbrüche und deren Beziehungen zur Theorie der benachbarten Funktionen, sind jedoch nicht so gut erhalten, daß es hier, wo es nicht bloß auf allgemeine Fragestellung, sondern auf konkrete Führung der Rechnung ankommt, möglich wäre, den Gedankengang mit voller Sicherheit festzustellen. Eine Untersuchung der Konvergenzverhältnisse und der zur wirklichen Berechnung der Funktion geeigneten Reihen beschließt die allgemeine Theorie, welche nun durch Anwendungen auf elliptische Integrale, Kugelfunktionen und ähnliches erläutert wird.

Interessant ist, daß Riemann die Arbeiten Heines über dessen Verallgemeinerung der hypergeometrischen Reihe in der Vorlesung zwar wiedergegeben hat, jedoch ohne irgendwie zu versuchen, diese Reihe seinem allgemeinen Programm einzuordnen. Dies ist erst später von Thomae geschehen.

Während nun die bisherigen Entwicklungen für die Verfolgung der aus der Abhandlung bekannten Ansätze neue Hilfsmittel geben und dadurch die weitere Entwicklung der Theorie fördern, treten nun für die damalige Zeit ganz neue Fragestellungen ein. An erster Stelle steht die einfache Bemerkung, daß die Integrale einer Differentialgleichung mit analytischen Koeffizienten sich linear und homogen substituieren, wenn die unabhängige Variable einen geschlossenen Weg allgemeiner Art durchläuft, und daß daher umgekehrt die unabhängige Variable als Funktion des Integralquotienten aufgefaßt bei gewissen linear gebrochenen Substitutionen ungeändert bleibt. Die hier so schlicht gebotene Fragestellung ist sogleich in ganzer Allgemeinheit aufgefaßt, ohne Beschränkung auf etwa mögliche eindeutige Umkehrung des

Integralquotienten, eine Beschränkung, welche bei dem ersten Aufwerfen dieser Frage in der Tat nicht nötig erscheint, wenn man sich von vornherein auf den Standpunkt stellt, den Riemann in der Theorie der Abelschen Integrale eingenommen hat, als er die Umkehrung eines einzelnen Integrals erster Gattung unter dem Gesichtspunkt der konformen Abbildung einer Verzweigungsfläche auf ein System von p Parallelogrammen in Betracht zog, und damit die Schwierigkeit vollständig überwand, welche Jacobi dazu veranlaßt hatte, solche Umkehrungsfunktionen für unmöglich zu erklären.

In der Tat ist in der späteren Literatur, und zwar sowohl in den von den Herren H. A. Schwarz und F. Schottky behandelten spezielleren Fällen, als auch in den glänzenden und weitreichenden Abhandlungen des Herrn Poincaré, immer der Fall eindeutiger Umkehrbarkeit besonders in den Vordergrund getreten. Erst der von Herrn Klein eingeführte Begriff des Fundamentalbereiches bringt die Frage wieder auf die allgemeinste Fassung, ein Begriff, den Klein unter ausdrücklicher Bezugnahme auf die von Riemann in der Theorie der Abelschen Funktionen betrachtete Figur von p Parallelogrammen mit $2p-2$ Verzweigungspunkten aufgestellt und diskutiert hat. Seither waren ja namentlich die Bemühungen des letztgenannten Forschers besonders in Vorlesungen dahin gerichtet, die Stellung der eindeutigen Funktionen unter den allgemeinen zu erforschen, eine Frage, die Poincaré von anderer Seite her bearbeitet hatte und die gerade zu den schwierigsten und wichtigsten in der Theorie der automorphen Funktionen gehört. Jene klassische Figur aber von p Parallelogrammen und ihren Wiederholungen ist von Riemann selbst sehr viel eingehender studiert worden, als seine Veröffentlichungen zeigen.

Die Art und Weise, wie wir davon Kenntnis erhalten, zeigt aber auch die persönliche Liebenswürdigkeit Riemanns in schönem Lichte.

Als er nämlich im Frühjahr 1865 bereits schwer krank in Pisa Erholung suchte, befragte ihn Herr Prym über einen speziellen Fall dieser Figur. Riemann, dem das Sprechen damals bereits schwer fiel, versprach schriftliche Antwort. Aber er begnügte sich nicht mit einigen flüchtigen Zeilen, sondern wir fanden in seinem Nachlaß einen sorgfältigen Entwurf der Antwort, kannten aber den Anlaß nicht. Als nun das Manuskript unserer Nachträge vor der Drucklegung an Herrn Prym ging, erfuhren wir erst, daß auch die Reinschrift dieses Schreibens noch erhalten sei und im Besitze des genannten Herrn sich befinde. Auch in seinen letzten Untersuchungen über die allgemeinen Thetafunktionen hat Riemann von dieser Figur ausgedehnten Gebrauch gemacht. Am Schlusse der eben erwähnten Mitteilung macht er die Bemerkung, daß eine bestimmt ausgewählte Gestalt dieser Figur bei der Untersuchung der Differentialgleichungen, welchen die Perioden der Abelschen Integrale genügen, gute Dienste leiste. Untersuchungen in dieser Richtung liegen seither weder von Riemann selbst noch von anderer Seite vor, und es ist vorläufig nicht im einzelnen zu sehen, welches etwa der Gedankengang Riemanns hier gewesen sein mag. Man darf es aber wohl als gewiß hinstellen, daß eine Untersuchung dieser Figur und der ihr im Sinne der linearen Periodentransformation äquivalenten, insbesondere die Aufsuchung einer reduzierten Normalform oder Scharen von solchen, welche durch lineare Transformation immer erreichbar sind, unsere Kenntnis von der Natur der transzendenten Moduln eines algebraischen Gebildes und ihres Zusammenhanges mit den algebraischen wesentlich erweitern würde, und die Frage nach den Beziehungen des algebraischen Gebildes zu den Perioden eines bestimmten, passend ausgewählten Integrals erster Gattung der Lösung näher bringen würde, in ähnlicher Weise, wie die auf Dirichlet und seine Theorie der quadratischen Formen zurückgehende Heranziehung des reduzierten Parallelogrammes fast unmittelbar zum Fundamentalbereich der elliptischen Modulfunktionen führt.

Nach dieser Abschweifung lassen Sie mich wieder zum eigentlichen Gegenstande des Vortrages zurückkehren und noch hervorheben, daß auch die unter dem Namen des Schwarzschen Differentialparameters bekannte Differentialinvariante, dieselbe, welcher wir bereits bei Kummer gedachten, gleich zu Beginn der Untersuchung eintritt. Riemann hat ja von diesem Differentialparameter außer in dem hinterlassenen Fragment über die Abbildung eines von Kreisen begrenzten Gebietes auf die Halbebene auch in dem 1860 entstandenen, von Hattendorf bearbeiteten Aufsatz über Minimalflächen Gebrauch gemacht und ihn auf ein Problem angewendet, welches mit den Fragen, worüber hier zu berichten ist, aufs engste zusammenhängt, nämlich auf die konforme Abbildung eines von Bogen größter Kreise auf der Kugel begrenzten Flächenstückes auf die Halbebene. Überhaupt scheinen die Entwicklungen dieses nachgelassenen Stückes in einem gewissen innern Zusammenhang mit der Vorlesung über die hypergeometrische Reihe zu stehen, eine Ansicht, welche sowohl durch innere Gründe, wie Verwendung ähnlicher Hilfsmittel, ja sogar direkt derselben Funktionen, als auch durch den äußeren Umstand gestützt wird, daß das Manuskript in dem der Vorlesung unmittelbar folgenden Jahre entstanden ist.

Eben diese Untersuchung der Umkehrung eines Quotienten zweier partikulärer Integrale der Differentialgleichung unternimmt nun Riemann in der Vorlesung unter der Einschränkung, daß die charakteristischen Exponenten der einzelnen Zweige der P-Funktion reell und so beschaffen sind, daß der Integralquotient an den singulären Stellen endlich bleibt, ferner, daß die Winkel des bei der Abbildung entstehenden Kreisbogendreieckes sämtlich kleiner als π sind. Er zeigt, daß unter diesen Umständen das Gebiet der komplexen Größen mit positivem imaginären Teil auf ein Kreisbogendreieck ohne Verzweigungspunkt im Innern abgebildet wird, welches sich nirgends selbst überdeckt, so daß also die Umkehrungsfunktion innerhalb dieses Gebietes eindeutig ist. Er setzt aber ausdrücklich hinzu, daß bei komplizierteren Differentialgleichungen im allgemeinen dieses Resultat sich nicht ergeben werde.

Auch verweist er ausdrücklich auf das Vorbild der elliptischen Funktionen, wo ja ebenfalls der Quotient zweier Perioden als unabhängige Variable von Jacobi eingeführt worden sei.

Nun wird eine kurze Darstellung der Übertragung der komplexen Variablen durch stereographische Projektion auf die Kugel eingeschaltet, eine Sache, auf welche sich Herr C. Neumann in der ersten Auflage seiner Vorlesungen über die Abelschen Integrale als aus Riemanns Vorlesungen herrührend bezieht. Dadurch wird dann die Untersuchung der Umkehrungsfunktion mit der Geometrie von Kreisbogendreiecken auf der Kugelfläche in Verbindung gesetzt. Es wäre nun hier naheliegend, eine Andeutung zu machen über jene bedeutungsvolle Scheidung der Kreisbogendreiecke in drei Klassen, je nachdem der Schnittpunkt der Ebenen der drei Begrenzungskreise im Innern der Kugel, auf der Kugel oder außerhalb derselben liegt. Diese Unterscheidung, welche erst von Herrn H. A. Schwarz durchgeführt wurde, wird in der Vorlesung nicht ausdrücklich erwähnt, sondern nur der Fall in Betracht gezogen, daß das ebene Kreisbogendreieck sich auf ein sphärisches Dreieck im engeren Sinn des Wortes, also ein von größten Kreisen begrenztes abbilden lasse. Jedoch läßt sich aus der vorliegenden Nachschrift nicht mit Sicherheit entnehmen, daß Riemann diesen Fall als einen speziellen ausdrücklich bezeichnet hätte. Daß ihm jedoch der Sachverhalt nicht gänzlich verborgen sein konnte, geht aus dem später ausführlicher zu besprechenden Fall der elliptischen Modulfunktionen hervor, welchen er genauer ausführte, sowie auch aus der Bemerkung, man müsse ebene Figuren heranziehen, wenn einer der Winkel des Kreisbogendreieckes gleich Null sei. Man wird also nur sagen können, Riemann habe im Falle der Umkehrung des Integralquotienten der hypergeometrischen Reihe die Unterscheidung der elliptischen, hyperbolischen und parabolischen Gruppen wohl implicite gestreift, ohne sie jedoch ausdrücklich zu formulieren.

Damit habe ich auch bereits dadurch, daß ich den Begriff der Gruppe herangezogen habe, angedeutet, daß in demselben Abschnitt Riemann sich die analytische Fortsetzung der Abbildung durch symmetrische Wiederholung des ersten Kreisbogendreieckes vollzogen gedacht hat. Eben dieses Prinzip der Symmetrie findet sich auch in der vorhin erwähnten Abhandlung über Minimalflächen und darauf nimmt auch Herr H. A. Schwarz in seiner Abhandlung Bezug.

So kurz nun auch das Symmetrieprinzip an der erwähnten Stelle der Vorlesungen auseinandergesetzt ist, so wird es doch sogleich für die Beantwortung einer wichtigen Frage verwertet, nämlich: wann zwischen den Umkehrungsfunktionen zweier solcher Integralquotienten eine algebraische Relation bestehe. Die Antwort wird durch die Bemerkung gegeben, daß dann eine und dieselbe sphärische Figur sich auf zwei Arten aus einer geraden Anzahl abwechselnd kongruenter und symmetrischer Dreiecke zusammensetzen lassen muß. Damit ist nicht nur für den vorliegenden speziellen Fall, sondern auch für den ganzen Kreis der in dem Gebiete der automorphen Funktionen auftretenden Transformationsfragen ein Prinzip erkannt, welches nur der Durchführung bedurfte, um in den Hauptzügen die Transformationstheorie dieser Funktionen ebenso übersichtlich zu gestalten wie die der elliptischen Funktionen.

Die spezielle Inbetrachtnahme der vorliegenden Funktionen liefert aber nun Riemann nicht nur die bereits aus der Abhandlung bekannten, zum Teil schon von Kummer gefundenen Transformationen, sondern auch die Einsicht, daß außer diesen auch noch die regulären Körper solche Transformationen liefern müssen, und damit war sowohl die Frage nach den algebraischen Funktionen mit linearen Transformationen in sich, als auch nach den algebraisch integrierbaren Fällen der hypergeometrischen Differentialgleichung und überhaupt nach allen mit den endlichen Gruppen linear gebrochener Substitutionen einer Veränderlichen wenigstens im Keime aufgeworfen und auch die Mittel zu ihrer Lösung gegeben. Man weiß, daß alle diese schönen und fruchtbaren Probleme brach lagen, bis sie von H. A. Schwarz, Fuchs, Camille Jordan, Klein von analytischer, geometrischer und gruppentheoretischer Seite aus nach und nach wieder aufgefunden und erledigt wurden. Daß die in der Riemannschen Vorlesung gebotene Anregung im Gegensatze zur Theorie der Abelschen Funktionen so wenig unmittelbare Wirkung hatte, dürfte in erster Linie daran gelegen sein, daß der Gruppenbegriff damals noch nicht allgemein jene beherrschende und verbindende Stellung einnahm, wie er sie später und wohl unter wesentlicher Mitwirkung des Eindrucks eben der hier genannten Probleme erreichte.

Speziell für die hypergeometrischen Funktionen wurden diese Untersuchungen erst von den Herrn E. Goursat und E. Papperitz wieder aufgenommen, wobei die leitenden Gedanken eben jene Riemannschen waren, ohne daß natürlich ein solcher Zusammenhang stattgefunden hat.

Nach Aufstellung und Erläuterung des eben besprochenen Transformationsproblems wendet sich nun Riemann in einer Einschaltung den nicht homogenen linearen Differentialgleichungen zu, und leitet nach Lagrange die adjungierte Differentialgleichung ab, deren geeignet spezialisierte Lösung dann zur Integration der nicht homogenen Gleichung verwendet wird.

Hieran knüpft Riemann die Bemerkung, daß die Integrale einer nicht homogenen Differentialgleichung bei Umläufen der unabhängigen Variablen um singuläre Stellen sich im allgemeinen bis auf ein lineares Aggregat der Integrale der homogenen Gleichung reproduzieren.

Er stellt nun die nicht homogene Differentialgleichung für das Integral eines hypergeometrischen Differentialausdruckes mit veränderlicher oberer Grenze wirklich auf. Sodann wird die Methode der Eulerschen Integration durch bestimmte Integrale für eine homogene Gleichung zweiter Ordnung auseinandergesetzt, und darauf hingewiesen, daß man so eine nicht homogene Differentialgleichung erhalte, wenn man bei der Integration eine der Grenzen veränderlich läßt. Dieser Sachverhalt wird nun an den elliptischen Integralen erster Gattung erläutert, und gezeigt, wie man die Differentialgleichung für die vollständigen elliptischen Integrale aus der nicht homogenen Differentialgleichung für das Integral erster Gattung erhalten kann.

Dadurch wird Riemann auf einen Gedanken geführt, der, soviel ich weiß, in der Literatur bisher nicht hervorgetreten ist. Er setzt nämlich die Lösung der nicht homogenen Differentialgleichung in Analogie zu dem gewöhnlichen elliptischen Integral und die Lösungen der homogenen Gleichung analog den Perioden des elliptischen Integrals erster Gattung. So, wie sehr viele Eigenschaften der vollständigen elliptischen Integrale erst aus der Betrachtung des unbestimmten Integrals als Funktion der obern Grenze gefunden worden seien, da eben dieses eine sehr einfache Funktion der obern Grenze sei, ebenso sei zu erwarten, daß viele Eigenschaften der vollständigen hypergeometrischen Integrale erst aus der Untersuchung des unbestimmten Integrals eines hypergeometrischen Differentials als Funktion der obern Grenze gefunden werden würden, welches ja in der Tat eine viel einfachere Funktion der obern Grenze sei, als die vollständigen hypergeometrischen Integrale von der unabhängigen Variablen der Differentialgleichung.

Dieser Gedanke wird dann übertragen auf Differentialgleichungen, welche durch bestimmte Integrale sich lösen lassen, und dann weiterhin auf noch allgemeinere Differentialgleichungen, indem sich Riemann in den Differentialausdruck eine passende Funktion der unabhängigen Veränderlichen und eines Parameters eingesetzt denkt, und nun postuliert, die allgemeine Lösung der durch Gleichsetzung des Differentialausdruckes und des Substitutionsresultates erhaltenen nicht homogenen Gleichung als Funktion des Parameters zu untersuchen, wodurch bei passender Wahl der substituierten Funktion dann auch die vollständige Lösung der homogenen Differentialgleichung werde erhalten werden können. Er schließt diese Auseinandersetzung mit der Bemerkung, daß diese Transzendenten eine sehr wichtige Rolle für die Theorie der Differentialgleichungen spielen, und er mag dabei außer an die hypergeometrischen Integrale an die Perioden der Abelschen Integrale gedacht haben, mit deren Differentialgleichungen er sich ja eingehender beschäftigt hatte, wie außer aus dem schon früher erwähnten Schreiben an Herrn Prym und aus der Abhandlung über Abelsche Funktionen auch aus einem nachgelassenen Blatte hervorgeht, auf welchem er die Änderung der Perioden eines hyperelliptischen Integrals erster Gattung als Funktion der Verzweigungspunkte beim Durchlaufen geschlossener Wege seitens der letzteren eingehender untersucht.

Den Schluß der Vorlesung bildet eine Betrachtung der ganzen elliptischen Integrale als Funktionen des Moduls und insbesondere die wirkliche Durchführung der konformen Abbildung des Gebietes für den Modul k^2 durch das Verhältnis der beiden Perioden des elliptischen Integrals erster Gattung. Er gelangt dabei zu jener seither so wohl bekannt gewordenen und so viel studierten Figur des Kreibogenvierecks, welches in der heutigen Ausdrucksweise den Fundamentalbereich für k^2 und der daraus entspringenden Einteilung des Gebietes der komplexen Zahlen mit positivem imaginären Teil bildet. Es ist interessant, zu bemerken, daß in dem gleichen Jahre (1859) die erste ausführlichere Untersuchung der von Jacobi bereits aufgefundenen Ausdrücke für den Legendreschen Modul durch das Periodenverhältnis von Hermite durchgeführt wurde.

Aber Riemann versäumt auch nicht, aus dem Umstand, daß die singulären Werte Null, Eins, Unendlich des Moduls nur an der Grenze des Gebietes des Periodenverhältnisses auftreten, sowie daraus, daß die einzelnen bei analytischer Fortsetzung entstehenden Gebiete des Periodenverhältnisses die Halbebene gerade einfach überdecken, den Schluß zu ziehen, daß jede Funktion, welche nur an den Stellen Null, Eins, Unendlich unstetig oder vieldeutig wird, in eine eindeutige Funktion des Periodenverhältnisses übergeht, wenn die ursprüngliche unabhängige

Variable als das Doppelverhältnis der vier Verzweigungspunkte eines elliptischen Gebildes aufgefaßt wird. Erst zwanzig Jahre später ist Herr Klein bei seinen Untersuchungen über elliptische Modulfunktionen wieder auf diesen Satz geführt worden und hat ihn mit besonderer Betonung der allgemeinen hypergeometrischen Funktion neuerdings ausgesprochen.

Damit also war zum erstenmal an das Problem der eindeutigen Parameterdarstellung herangetreten, welches später Herr Poincaré in so allgemeiner Weise und gerade auf Grund Riemannscher Prinzipien gelöst hat.

Wir sind am Ende der Riemannschen Vorlesung angelangt. Den allgemeinen Gedankengang und die wichtigsten Beziehungen zu den heutigen Fragen haben wir nun besprochen; werfen wir noch einen Blick auf die Methode der Bearbeitung und Darstellung.

Von den allgemeinsten Umrissen einer neuen Funktionsklasse ausgehend, werden die einzelnen Darstellungen einer sehr speziellen Funktion und deren Eigenschaften einer eingehenden Diskussion unterworfen und gerade daraus neue Problemstellungen gewonnen. Im ersten Teile sind es die bestimmten Integrale, welche dem allgemeinen Schema der P-Funktionen eingeordnet werden, im zweiten Teil werden die elliptischen Modulfunktionen und die Integralquotienten der hypergeometrischen Reihe dem allgemeineren Problem der Umkehrung von Integralquotienten linearer Differentialgleichungen zweiter Ordnung eingefügt, und eben dabei ergibt sich einerseits Vertiefung durch Heranziehung der konformen Abbildung, andrerseits der Ausblick auf die Theorie der nicht homogenen Differentialgleichungen, sowie die Möglichkeit der eindeutigen Darstellung weit allgemeinerer Funktionen. Es ist ein beständiges Zusammenwirken von Induktion und Abstraktion, gleich als wenn der am einzelnen geschärfte Blick nun auch im weiteren Gebiete sich zurechtfindet, weil von vornherein die Aufmerksamkeit eine bestimmte Richtung empfangen hat. So tragen namentlich die letzten Abschnitte der Vorlesung das Gepräge unmittelbarer Wiedergabe des soeben Gefundenen, ohne Rücksicht auf die verhältnismäßig geringe Durchbildung der Einzelheiten. Sie zeigen uns Riemann unmittelbar an der Arbeit, ein Beispiel, welches für die großen Mathematiker um die Mitte des 19. Jahrhunderts gewiß nicht häufig ist.

Damit lassen Sie mich den Boden des historischen Berichtes verlassen und zu der Frage übergehen, in welcher Richtung ein weiterer Ausbau der Riemannschen Ideen auf diesem Gebiete etwa noch erfolgen könnte. Es ist ja bekannt, daß schon Kummer am Schlusse seiner Abhandlung eine Reihe erwähnt, welche als Verallgemeinerung der Gaußschen Reihe angesehen werden kann. Herr Thomae hat in verschiedener Richtung die Riemannschen Methoden auf analoge Transzendente angewendet und die Herrn Appell und Goursat haben Funktionen mehrerer Variablen eingeführt, welche schon früher Herr Pochhammer als bestimmte Integrale untersucht hatte, und welche im wesentlichen bestimmte Integrale zwischen Verzweigungspunkten von Funktionen sind, die sich von denen des gewöhnlichen hypergeometrischen Integrals nur durch die größere Anzahl der Faktoren unterscheiden. Solche Reihen hat dann besonders Herr Picard benutzt, um seine allgemeine Theorie der automorphen Funktionen mehrerer Variablen zu erläutern. Er hat bei diesen die Frage nach der eindeutigen Umkehrbarkeit gestellt und erledigt und ist dabei zur Verallgemeinerung der Schwarzschen Resultate bei der Gaußschen Reihe gekommen. Ausführlich hat dann diese letzten Untersuchungen Herr Levavasseur dargestellt. In der allerletzten Zeit hat noch Herr Hilbert den elliptischen Modulfunktionen allgemeinere an die Seite gestellt, welche für Zahlkörper, die mit allen ihren konjugierten reell sind, eine ähnliche Rolle spielen, wie die elliptischen Modulfunktionen für den Körper der ganzen Zahlen.

Aber nicht von diesen weiteren Verallgemeinerungen, von denen manche weit über das Gebiet einer Variablen hinausgreifen, will ich ausführlicher sprechen, sondern von einer andern, welche zwar im engern Kreise sich bewegt, mir aber doch der Aufmerksamkeit wert erscheint, weil sie geeignet ist, die Verbindung herzustellen zwischen den hier berichteten Gedanken Riemanns und jenen, welche aus der Theorie der Abelschen Funktionen stammen, den ausgezeichneten Stellen des algebraischen Gebildes, seinen algebraischen Moduln und den Moduln der zugehörigen Θ-Funktionen.

Zunächst wird man versuchen, die hypergeometrische Funktion dadurch auf das elliptische Gebilde zu übertragen, daß man Integrale von Funktionen betrachtet, welche sich beim Umlauf um singuläre Punkte des Integranden und längs der Querschnitte mit konstanten Faktoren multiplizieren. In der Tat scheint Riemann, wie eine flüchtige Notiz aus seinem Nachlaß berichtet, an eine derartige Verallgemeinerung gedacht zu haben. Will man aber nun diese Integrale, in ähnlicher Weise wie die hypergeometrischen, als Funktionen der einzelnen singulären Stellen des Integranden untersuchen, so stößt man, abgesehen von andern Umständen, vor allem auf die Schwierigkeit, daß diese singulären Stellen nicht unabhängig voneinander veränderlich sind, sondern sowohl untereinander als mit den Multiplikatoren durch gewisse Relationen verknüpft sind. Eben diese Schwierigkeit stellt sich in erhöhtem Maße ein, wenn man statt eines elliptischen Gebildes solche höheren Geschlechtes heranzieht. Aus dieser Schwierigkeit weist nun eine einfache Bemerkung den Ausweg, welche zugleich die wirkliche Darstellung der hypergeometrischen Funktion in dem Gebiete der elliptischen Modulfunktionen leistet. Eine solche Darstellung ist ja bereits von Herrn Papperitz im Anschluß an die Differentialgleichung gegeben worden. Einfacher aber und zur weiteren Verwertung geeigneter erhält man sie aus dem hypergeometrischen Integral, wenn man das durch die vier Verzweigungspunkte des Integranden bestimmte elliptische Gebilde heranzieht. Bei Einführung des zugehörigen Integrals erster Gattung als Integrationsvariable verwandelt sich nämlich das Integral in ein zwischen zwei Halbperioden erstrecktes Integral über ein Produkt von Potenzen der vier gewöhnlichen Jacobischen Θ-Funktionen. In dieser Gestalt ist nun der Satz, mit welchem Riemann seine Vorlesung schloß, in seiner Anwendung auf die hypergeometrische Reihe auch durch eine bestimmte und leicht zu handhabende Formel realisiert, und die ganze Theorie der hypergeometrischen Funktion läßt sich auf Grund des wohlbekannten und durchsichtigen Verhaltens der Θ-Funktionen leicht entwickeln.

Aber dieser einfache Ansatz führt naturgemäß weiter zu allgemeineren Integralen auf dem elliptischen Gebilde. So, wie uns hier Θ, deren Nullstellen Halbperioden sind, entgegentreten und die Integration gerade zwischen Halbperioden geführt wird, so kann man jetzt Integrale über Produkte von Potenzen solcher Θ-Funktionen der Integration zugrunde legen, welche an den n^2 Stellen verschwinden, denen durch n geteilte Perioden entsprechen, also Θ mit $n$tel Charakteristiken, und die Integration selbst wieder zwischen singulären Stellen des Integranden, also $n$tel Perioden, erstrecken.

Die so gewonnenen Integrale lassen sich dann wieder unter zwei Gesichtspunkten betrachten. Einmal erscheinen sie im wesentlichen als eindeutige Funktionen des Periodenverhältnisses am elliptischen Gebilde, also im Bereiche der elliptischen Modulfunktionen, das andere Mal aber als polymorphe Formenschar in ihrer Abhängigkeit von den algebraischen Modulfunktionen, nämlich als Integrale linearer Differentialgleichungen von der Ordnung n^2 mit Koeffizienten, welche Modulfunktionen der Stufe n sind, also bei der Hauptkongruenzuntergruppe modulo n ungeändert bleiben.

Diese Funktionen zeigen in vielen Beziehungen ein der gewöhnlichen hypergeometrischen Reihe analoges Verhalten und erweitern die bei dieser bekannten, merkwürdigen Eigenschaften in eigentümlicher Weise. Um nur eine einzelne derartige Analogie weiter auszuführen, sei daran erinnert, daß die hypergeometrische Funktion bis auf Vertauschungen der Exponenten im wesentlichen ungeändert bleibt, wenn für die unabhängige Variable der Reihe nach die sechs verschiedenen Werte gesetzt werden, welche das Doppelverhältnis von vier Punkten annehmen kann. Bei unsern allgemeineren Funktionen ist nun der Sachverhalt der, daß diese im wesentlichen bis auf Exponentenvertauschungen ungeändert bleiben, wenn auf das zur $n$ten Stufe gehörige algebraische Gebilde eine seiner Transformationen in sich ausgeübt wird. Für die niedersten Stufen, $n = 3$ und $n = 5$, erhält man so Funktionen, für welche die linearen Substitutionen der Tetraeder- und der Ikosaedergruppe dieselbe Bedeutung haben, wie jene erstwähnten einfacheren linearen Substitutionen der Gruppe, welche die Werte eines Doppelverhältnisses ineinander überführen.

Es ist als sicher zu betrachten, daß eine vollständige Theorie der hier angeführten Funktionen nach Art derjenigen, wie wir sie für die hypergeometrische Funktion besitzen, insbesondere die Untersuchung derjenigen Fälle, in welchen diese Funktionen wieder selbst auf algebraische zurückgeführt werden können, von großem Interesse sein würde, schon deshalb, weil wir an der Hand der eindeutigen Darstellung im Gebiete der elliptischen Modulfunktionen alle Erscheinungen bequem verfolgen und mit den bekannten algebraischen und gruppentheoretischen Verhältnissen in Verbindung bringen können.

Aber unser Ansatz reicht auch noch über das Gebiet der elliptischen Funktionen hinaus, freilich nicht mehr in so ausgedehnter Weise, daß zu jedem algebraischen Gebilde eine ins Unendliche fortlaufende Reihe von derartigen Funktionen, den verschiedenen Werten der Zahl n entsprechend, existiert. In der Tat, wollte man die im vorigen betrachteten Integrale auf dem elliptischen Gebilde in seiner algebraischen Gestalt aufstellen, so würde man sogleich erkennen, daß sie wesentlich an das Vorhandensein von solchen elliptischen Funktionen gebunden sind, deren $n$te Wurzeln am elliptischen Gebilde unverzweigt sind. Solche Funktionen aber gibt es für ein Geschlecht größer als eins nur in ganz speziellen Fällen als wohlcharakterisierte Einzelwesen. Nur wenn $n = 2$ genommen wird, hat man in den von Riemann als Abelsche Funktionen bezeichneten Funktionen ein solches System immer zur Verfügung. Deren Quadrate sind ja nach Riemanns Erklärung proportional denjenigen Differentialen erster Gattung, deren Nullstellen paarweise zusammenfallen, und aufs engste mit den Θ-Funktionen von ungerader Charakteristik verknüpft. Am einfachsten und übersichtlichsten erhält man nun diejenigen Bildungen, welche unseren Ansatz verallgemeinern, wenn man sich homogener Variabler bedient und geradezu die Formen erster Gattung als solche einführt, ein Vorgehen, dessen Vorteile ja Herr Klein schon in so vielen über das algebraische Gebiet hinausliegenden Problemen betont hat. Die in Rede stehenden Bildungen werden dann bestimmte Integrale, bezw. Doppelumlaufintegrale zwischen zwei Nullstellen einer oder zweier verschiedener Abelscher Formen über einen Integranden, welcher ein Produkt von Potenzen der einzelnen Abelschen Formen ist, deren Exponenten zur Summe 1 haben. Als Differential ist dabei die von Klein mit $d\omega$ bezeichnete überall endliche Differentialform von der Dimension -1 zu verwenden.

Die Gesamtheit dieser Integrale mit gleichen Exponentensystemen der Integranden muß nun wieder durch eine endliche Anzahl linearunabhängiger darstellbar sein und eine ganze Reihe analoger Erscheinungen zeigen wie diejenigen, welche wir auf dem elliptischen Gebilde konstatiert haben, wenn man sie als Funktionen der Moduln des algebraischen Gebildes auffaßt. Insbesondere läßt sich erwarten, daß die Beziehungen zu den Moduln der zugehörigen Θ-Funktionen und derjenigen linearen Periodentransformationen, welche die Charakteristiken der Θ-Funktionen ungeändert lassen, von besonderem Interesse sein werden.

Diese Erwartung erscheint um so berechtigter, als schon der nächstliegende Fall, welcher dem Geschlechte 2 entspricht, in dieser Richtung ein bemerkenswertes Verhalten aufweist. Hier nämlich sind die zu betrachtenden Integrale nicht verschieden von denen, die bei der Integration der Tissot-Pochhammerschen Differentialgleichung auftreten. Es sind Integrale zwischen den Verzweigungspunkten eines Produktes von Potenzen von sechs linearen Faktoren. Jeder einzelne solcher verschwindet an einer Verzweigungsstelle des hyperelliptischen Gebildes. Und nun zeigt sich bei genauerer Untersuchung, daß diese Integrale ebenso eindeutige Funktionen der zum hyperelliptischen Gebilde gehörigen drei Thetamoduln sind, wie die gewöhnliche hypergeometrische Funktion eindeutige Funktion des zum elliptischen Gebilde gehörigen Thetamoduls ist. Diese Darstellung läßt sich allerdings nicht so unmittelbar auch formell in Evidenz setzen, wie bei der gewöhnlichen hypergeometrischen Funktion, aber gerade die notwendige Einzeluntersuchung führt auf interessante Eigenheiten der Monodromiegruppe der hyperelliptischen Funktionen, worauf ich jedoch hier ohne weitläufig zu werden nicht eingehen kann.

Aber auch mit den Riemannschen Gedanken über nicht homogene Differentialgleichungen lassen sich diese Ansätze in Beziehung bringen, wenn man statt der bestimmten Integrale die zugehörigen unbestimmten

Integrationen ins Auge faßt. Endlich wird es bereits im elliptischen Fall von Interesse sein, auch die durch die hier betrachteten Integrale vermittelte konforme Abbildung zu studieren.

Mit dem Hinweis auf diese weiteren Probleme lassen Sie mich schließen. Wenn auch die Bearbeitung dieser Funktionen fürs erste dem Gebiete der Einzelforschung angehört, so dürfen wir doch nicht vergessen — und die größten Meister der Wissenschaft haben oft und mit Nachdruck darauf hingewiesen —, daß gerade die Verfolgung der erst nur interessant erscheinenden Einzelfälle unsere Kräfte stärkt, die Durchbildung unserer Methoden erzwingt und dadurch uns erst zu wirklichem Fortschritt ins Allgemeine befähigt. Denn trotz der deduktiven Gestalt, welche wir unsern Resultaten geben, können wir auf den induktiven Weg auf die Dauer so wenig verzichten, wie alle andere menschliche Wissenschaft.