SUR LES ÉQUATIONS AUX DIFFÉRENCES FINIES

PAR M. N.-E. NÖRLUND

(Lund.)

[**1**] Permettez-moi de vous dire quelques mots d'un sujet qui a été presque entièrement négligé par les géomètres modernes, savoir le calcul aux différences finies. Les grands géomètres qui ont été les fondateurs de l'Analyse, les Newton, les Taylor, les Euler, les Lagrange, les Laplace et les Cauchy se sont occupés à différentes reprises du calcul aux différences finies. Lacroix a consacré le troisième tome de son *Traité du Calcul différentiel et du Calcul intégral* à une exposition d'une grande partie de ces recherches. En Angleterre on cultiva surtout les méthodes symboliques. Boole les a exposées dans un petit ouvrage suggestif : *A Treatise on the Calculus of finite Differences.* Mais on ne peut pas dire que les résultats obtenus soient très considérables. Il s'agit surtout de transformations des séries dans le but d'augmenter la rapidité de la convergence et de relations formelles dont on n'a pas précisé le sens. Les ressources de l'Analyse ne suffisaient pas pour pénétrer dans le fond de ces problèmes. Ce n'est que tout récemment qu'on a commencé d'appliquer les méthodes de la théorie des fonctions à cette branche de l'Analyse.

Le premier problème important qui se pose dans le calcul aux différences finies, c'est l'étude des solutions de l'équation

$$F(x+1) - F(x) = \varphi(x), \tag{1}$$

$\varphi(x)$ étant une fonction donnée. Une étude approfondie de cette équation pourra faire réaliser des progrès considérables à plusieurs problèmes d'Analyse, mais la question n'est pas sans présenter quelques difficultés.

Euler et aussi Abel et Cauchy furent les ouvriers de la première heure. L'établissement de la formule sommatoire d'Euler et de Maclaurin a été un premier pas vers le but. La remarquable série divergente, qu'avait indiquée Euler, fut transformée en une intégrale définie par Plana et Abel à l'aide d'un raisonnement purement formel. Le résultat de ces auteurs a été rigoureusement établi pour la première fois par Cauchy. En faisant certaines hypothèses relativement à la fonction $\varphi(x)$, Cauchy démontre qu'on a

$$\int_0^\infty \frac{\varphi(1+ix)-\varphi(1-ix)-\varphi(ix)+\varphi(-ix)}{i(e^{2\pi x}-1)}dx = \frac{\varphi(1)+\varphi(0)}{2} - \int_0^1 \varphi(x)dx,$$

ce qui est sensiblement le même résultat qu'avait trouvé Plana et Abel. Parmi les travaux récents sur la formule sommatoire d'Euler, je veux mentionner ceux de M. Lindelöf.

M. Guichard a consacré un beau mémoire à la démonstration de l'existence des solutions de l'équation (1). M. Guichard envisage une intégrale de la forme

$$F(x) = \int_A^B \frac{\varphi(z)e^{2\pi iz}}{e^{2\pi iz}-e^{2\pi ix}}dz$$

prise le long d'un segment de l'axe imaginaire. Cette intégrale a des lignes de discontinuité ou coupures du genre de celles qui ont été considérées pour la première fois par Hermite. L'intégrale représente dans un certain rectangle une solution analytique de l'équation (1). Mais, même si $\varphi(x)$ est une fonction entière, cette solution est non uniforme et admet une infinité de points critiques logarithmiques. Pour remédier à cet inconvénient, M. Guichard fait tendre A et B vers l'infini. Il démontre ainsi que l'équation (1) admet toujours une solution entière, si $\varphi(x)$ est une fonction entière. Cette solution se représente dans la bande $0 < \mathfrak{R}(x) < 1$ par l'intégrale

$$F(x) = \int_{-i\infty}^{+i\infty} \frac{\varphi(z)e^{2\pi iz}E(x)}{E(z)(e^{2\pi iz}-e^{2\pi ix})}dz,$$

$E(x)$ étant une fonction entière *qu'on peut choisir d'une infinité de manières différentes*. Si $E(x) = 1$, cette intégrale ne diffère pas, au fond, de celle qu'avait considérée Abel.

M. Appell a attaqué le problème d'une autre manière. Si $\varphi(x)$ est un polynôme :

$$\varphi(x) = \sum_{n=0}^{m} a_n x^n,$$

on sait trouver un polynôme qui satisfait à l'équation (1). On a, en effet,

$$F(x) = \sum_{n=0}^{m} \frac{a_n}{n+1} B_{n+1}(x),$$

les $B_n(x)$ étant les polynômes de Bernoulli. Mais si $\varphi(x)$ est une fonction entière :

$$\varphi(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n,$$

la série

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} B_{n+1}(x)$$

ne sera pas convergente en général. M. Appell retranche du polynôme $B_n(x)$ les n premiers termes de son développement en série trigonométrique. En désignant par $\Psi_n(x)$ la fonction entière ainsi obtenue, il démontre que la série

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} \Psi_{n+1}(x)$$

converge uniformément et représente une fonction entière qui satisfait à l'équation (1). *On peut évidemment choisir les fonctions $\Psi_n(x)$ d'une infinité de manières différentes.*

Cette démonstration a été retrouvée par A. Hurwitz. Ce géomètre fait en outre remarquer qu'il y a toujours une solution méromorphe quand $\varphi(x)$ est une fonction méromorphe.

Un autre cas remarquable a été envisagé par M. É. Picard. Supposons que $\varphi(x)$ soit de la forme

$$\mu^x \varphi_1(x),$$

μ étant une constante, $\varphi_1(x)$ étant une fonction uniforme dans tout le plan, admettant la période $2\pi i$ et étant holomorphe dans une bande de largeur très petite comprenant l'axe imaginaire. M. Picard démontre l'existence d'une solution uniforme, ayant la période $2\pi i$ et étant holomorphe dans une bande limitée à gauche par l'axe imaginaire, et à droite par une parallèle à cet axe située à une distance de l'origine qui est un peu plus grande que *un*.

Le géomètre américain M. Carmichael a indiqué une nouvelle démonstration du théorème de M. Guichard. Cette démonstration repose sur la résolution d'un système doublement infini d'équations linéaires.

[**2**] Posons, pour abréger

$$\underset{\omega}{\Delta} F(x) = \frac{F(x+\omega) - F(x)}{\omega},$$

$$\underset{\omega}{\nabla} F(x) = \frac{F(x+\omega) + F(x)}{2}.$$

Il y a avantage à introduire dans l'équation (1) le paramètre ω et de l'écrire comme il suit :

$$(2) \qquad \underset{\omega}{\Delta} F(x) = \varphi(x).$$

Je considère en même temps cette autre équation

$$(3) \qquad \underset{\omega}{\nabla} G(x) = \varphi(x).$$

Résoudre l'équation (2) cela veut dire trouver une opération qui est inverse de l'opération $\underset{\omega}{\Delta}$. De même il s'agit de trouver une opération qui est inverse de $\underset{\omega}{\nabla}$. Évidemment ce problème n'est pas déterminé. En effet, on obtient la solution la plus générale de l'équation (2) en ajoutant à une solution particulière une fonction périodique arbitraire avec la période ω. De même, soit $p(x)$ une fonction quelconque qui satisfait à l'équation

$$p(x+\omega) = -p(x).$$

On obtient la solution la plus générale de l'équation (3) en ajoutant à une solution particulière la fonction $p(x)$. La présence de ces fonctions arbitraires est une difficulté sérieuse. Si l'on n'impose pas aux fonctions $F(x)$ et $G(x)$ d'autres conditions que celles que nous venons d'indiquer on ne sera conduit à rien de remarquable. Avant tout autre chose il faut chercher à se débarrasser des fonctions périodiques arbitraires. Trouver une solution quelconque des équations (2) et (3) cela ne fait pas la moindre difficulté, mais cette solution générale ne peut servir à rien. Pourtant ce n'est pas ainsi qu'il faut se poser le problème, car ce n'est pas toute solution qui convient. Parmi les solutions en nombre infini il y en a une qui se distingue des autres et qui est pour ainsi dire la plus simple. Je l'appelle *la solution principale*. Elle est déterminée à une constante arbitraire près. Cette solution distinguée possède un certain ensemble de propriétés remarquables qui n'appartiennent plus aux autres solutions.

Les voies ouvertes par MM. Guichard et Appell sont très remarquables, et elles conduisent entièrement au but que se sont proposé ces auteurs. Mais on peut reprocher à ces méthodes qu'on ne voit pas très bien quelles sont les propriétés des fonctions dont on démontre l'existence. On ne voit pas aisément comment choisir les fonctions, dans une certaine mesure arbitraires, qui entrent comme un élément essentiel dans la démonstration, pour arriver à la solution la plus simple. Par exemple, si $\varphi(x)$ est un polynôme, la solution principale est encore un polynôme; mais la solution définie par l'intégrale de M. Guichard est une transcendante.

Je voudrais attirer l'attention sur une autre méthode pour résoudre les équations (2) et (3), méthode qui me paraît présenter certains avantages.

Au sujet des solutions de ces équations il y a une observation curieuse à faire. Les développements en séries qui se présentent tout d'abord à l'esprit divergeront en général. On peut, il est vrai, en former d'autres qui convergent, mais néanmoins ce sont les développements divergents qui sont les mieux faits pour mettre en évidence les propriétés des solutions. Les belles recherches de M. Borel sur les séries divergentes ont fait voir que ces séries peuvent rendre des services considérables. Ces recherches de M. Borel ont été poursuivies par un grand nombre d'auteurs. Le calcul aux différences finies vient ajouter un nouveau chapitre à la théorie des séries divergentes.

Nous ferons successivement diverses hypothèses relativement à la fonction $\varphi(x)$. Supposons d'abord ω positif et x réel. Soit $\varphi(x)$ une fonction qui admet, pour $x \geqslant b$, une dérivée continue d'un certain ordre, soit d'ordre m, telle que le produit

$$x^{1+\varepsilon}\varphi^{(m)}(x), \qquad \varepsilon > 0 \tag{4}$$

tend vers zéro quand x augmente indéfiniment. Considérons la série

$$2\sum_{s=0}^{\infty}(-1)^s\varphi(x+s\omega). \tag{3 bis}$$

Cette série satisfait formellement à l'équation (3), mais elle diverge en général. On peut pourtant tirer parti de la série de la manière suivante. Considérons l'expression

$$2\sum_{s=0}^{\infty}(-1)^s\varphi(x+s\omega)e^{-\eta\lambda(x+s\omega)}. \tag{5}$$

On peut d'une infinité de manières choisir la fonction $\lambda(x)$ de sorte que cette série converge pour toute valeur positive de η. On peut par exemple prendre

$$\lambda(x) = x^p(\log x)^q,$$

p et q étant des nombres positifs quelconques. Quand le nombre positif η tend vers zéro la série (5) tend uniformément vers une limite *qui ne dépend pas de* λ. Cette limite sera par définition la solution principale de l'équation (3). Pour abréger, je désigne cette limite par le symbole suivant :

$$\mathop{\mathrm{S}}_{\omega} \varphi(x)\nabla x = \lim_{\eta=0} 2\sum_{s=0}^{\infty}(-1)^s \varphi(x+s\omega)e^{-\eta\lambda(x+s\omega)}. \tag{6}$$

Elle définit une fonction de x et de ω qui satisfait à l'équation (3). Je désigne aussi cette fonction par

$$G(x|\omega) = \mathop{\mathrm{S}}_{\omega} \varphi(x)\nabla x.$$

Cette solution est égale à la somme de la série (3 *bis*) dans le cas particulier où cette série converge.

De même, la série

$$-\omega\sum_{s=0}^{\infty}\varphi(x+s\omega) \tag{2 bis}$$

satisfait formellement à l'équation (2). Malheureusement elle diverge en général, mais considérons l'expression suivante :

$$\int_a^{\infty}\varphi(z)e^{-\eta\lambda(z)}dz - \omega\sum_{s=0}^{\infty}\varphi(x+s\omega)e^{-\eta\lambda(x+s\omega)}. \tag{7}$$

L'intégrale et la série convergent pour toute valeur positive de η. Quand η tend vers zéro, l'expression (7) tend uniformément vers une limite qui ne dépend pas de λ. Cette limite sera par définition *la solution principale de l'équation* (2). Je la désigne par le symbole suivant :

$$\mathop{\mathrm{S}}_{a}^{x} \varphi(z)\mathop{\Delta}_{\omega} z = \lim_{\eta=0}\left[\int_a^{\infty}\varphi(z)e^{-\eta\lambda(z)}dz - \omega\sum_{s=0}^{\infty}\varphi(x+s\omega)e^{-\eta\lambda(x+s\omega)}\right]. \tag{8}$$

Cette limite représente donc une solution de l'équation (2). Je la désigne aussi par

$$F(x|\omega) = \mathop{\mathrm{S}}_{a}^{x} \varphi(z)\mathop{\Delta}_{\omega} z. \tag{9}$$

Dans le cas particulier où la série (2 *bis*) converge, notre solution ne diffère de la somme de cette série que par une constante. La solution principale de l'équation (3) est ainsi uniquement déterminée, et la solution principale de l'équation (2) est déterminée à une constante additive près, car elle dépend de la constante arbitraire a.

[**3**] A l'aide de la formule sommatoire d'Euler, on peut transformer l'expression (8), puis, en effectuant deux fois de suite un passage à la limite, on arrive à l'équation suivante :

$$(10) \qquad F(x|\omega) = \int_a^x \varphi(z)\,dz + \sum_{\nu=1}^{m} \omega^\nu \frac{B_\nu}{\nu!} \varphi^{(\nu-1)}(x) + \frac{\omega^{m-1}}{m!} \int_0^\infty \dot{B}_m(-z)\varphi^{(m)}(x+\omega z)\,dz.$$

Ici les B_ν sont les nombres de Bernoulli, et $\dot{B}_m(z)$ est une fonction périodiuqe de z avec la période ω qui est égale au polynôme de Bernoulli $B_m(z)$ dans l'intervalle $0 \leqslant z < \omega$.

De même, en intégrant m fois par partie on peut transformer l'expression (5), et après quelques réductions on trouve

$$(11) \qquad G(x|\omega) = \sum_{\nu=0}^{m-1} \omega^\nu \frac{C_\nu}{2^\nu \nu!} \varphi^{(\nu)}(x) + \frac{\omega^m}{(m-1)!} \int_0^\infty \dot{E}_{m-1}(-z)\varphi^{(m)}(x+\omega z)\,dz,$$

Les C_ν sont certains entiers qui se rattachent aux nombres de Bernoulli. $\dot{E}_m(z)$ est une fonction périodique de z qui satisfait à l'équation

$$\dot{E}_m(z+\omega) = -\dot{E}_m(z)$$

et qui est égale au polynôme d'Euler $E_m(z)$ dans l'intervalle $0 \leqslant z < \omega$.

Vous voudrez bien remarquer que ces deux expressions nouvelles des solutions principales ne renferment pas la fonction $\lambda(x)$. On vérifie donc une seconde fois que les limites (6) et (8) sont indépendantes de λ.

Considérons un autre cas. Supposons que $\varphi(x)$ soit une fonction analytique, holomorphe à l'intérieur d'un petit angle entourant l'axe des nombres positifs et dont l'ouverture peut d'ailleurs être aussi petite que l'on veut. Admettons qu'on sache trouver deux constantes positives C et k telles que $\varphi(x)$ satisfasse à l'inégalité

$$(12) \qquad |\varphi(x)| < Ce^{(k+\varepsilon)|x|}$$

à l'intérieur de cet angle, ε étant un nombre positif aussi petit que l'on veut. En choisissant p plus grand que *un* ou bien en prenant p égal à *un* et q plus grand que zéro, les expressions (5) et (7) convergent pour toute valeur positive de η. En faisant tendre η vers zéro on démontre que ces deux expressions tendent uniformément vers des limites. En appliquant les théorèmes de Cauchy sur les résidus des intégrales complexes, on peut mettre l'expression (6) sous la forme suivante :

$$G(x|\omega) = i \int_l \varphi(x + \omega z) \frac{dz}{\sin \pi z}. \tag{13}$$

De même l'expression (8) peut se transformer et s'écrire sous la forme suivante :

$$F(x|\omega) = \frac{1}{2\pi i} \int_l f(x + \omega z) \left(\frac{\pi}{\sin \pi z}\right)^2 dz \tag{14}$$

où

$$f(x) = \int_a^x \varphi(z) dz,$$

l est un lacet formé de deux rayons vecteurs situés à l'intérieur de notre petit angle et d'un arc d'un petit cercle entourant l'origine. Les intégrales (13) et (14) convergent si la valeur absolue de ω est suffisamment petite. Mais dans ces deux intégrales λ ne figure plus. On vérifie donc une nouvelle fois que nos deux limites sont indépendantes de λ.

Les deux expressions à l'aide desquelles nous avons défini les solutions principales sont applicables dans un grand nombre de cas, et elles suffisent largement pour tous les cas dont nous allons parler aujourd'hui. Mais elles ne suffisent pas pour tous les besoins. On peut remplacer les expressions (5) et (7) par une infinité d'autres expressions qui leur sont équivalentes mais qui sont plus compliquées. On peut imaginer une infinité de méthodes différentes pour sommer les deux séries divergentes (2 *bis*) et (3 *bis*). Le premier pas à faire c'est de démontrer que toutes ces méthodes de sommation conduisent au même résultat, ce qui demande une Analyse un peu longue. Comme chez M. Guichard et chez M. Appell il entre donc ici encore un élément arbitraire : la méthode de sommation qu'on applique, en particulier la fonction λ. Mais on démontre que le résultat final ne dépend pas de λ, de sorte que notre définition est unique. C'est le point essentiel.

[**4**] Après avoir ainsi démontré l'existence des deux solutions principales, nous voulons maintenant étudier les propriétés de ces fonctions. Admettons que $\varphi(x)$ soit continue pour $x \geqslant b$ et que les expressions (6) et (8) tendent uniformément vers des limites. On voit immédiatement que la fonction $F(x|\omega)$ satisfait à l'équation (2) et que la fonction $G(x|\omega)$ satisfait à l'équation (3). Ces deux solutions sont continues

pour toute valeur de x qui est plus grande que b et pour toute valeur positive de ω. Qu'est-ce qui se passe quand le nombre positif ω tend vers zéro? La différence $\underset{\omega}{\Delta} F(x)$ tend vers la dérivée $F'(x)$. L'expression (8) définit une opération qui est l'inverse de l'opération $\underset{\omega}{\Delta}$. On devait donc s'attendre à ce que l'expression (8) tende vers une limite quand ω tend vers zéro. Et il en est bien ainsi. On démontre en effet que

$$\lim_{\omega=0} \mathop{\mathrm{S}}_{a}^{x} \varphi(z) \underset{\omega}{\Delta} z = \int_a^x \varphi(z)\,dz. \tag{15}$$

De même on démontre que

$$\lim_{\omega=0} \mathrm{S}\, \varphi(x) \underset{\omega}{\nabla} x = \varphi(x). \tag{16}$$

On suppose ici que ω tend vers zéro par des valeurs positives. Quand ω tend vers zéro d'une manière quelconque ces deux égalités cessent d'être vraies.

Les deux solutions principales satisfont aux trois relations suivantes :

$$\begin{aligned} &\sum_{s=0}^{m-1} F\left(x + \frac{s\omega}{m} \,|\, \omega\right) = mF\left(x \,|\, \frac{\omega}{m}\right), \\ &\sum_{s=0}^{m-1} (-1)^s F\left(x + \frac{s\omega}{m} \,|\, \omega\right) = -\frac{\omega}{2} G\left(x \,|\, \frac{\omega}{m}\right), \\ &\sum_{s=0}^{m-1} (-1)^s G\left(x + \frac{s\omega}{m} \,|\, \omega\right) = G\left(x \,|\, \frac{\omega}{m}\right). \end{aligned} \tag{17}$$

Dans la première équation, m est un entier positif quelconque. Dans la seconde équation, m est un entier positif pair, et dans la dernière équation, m est un entier positif impair quelconque. En faisant en particulier m égal à 2, on trouve les deux relations suivantes :

$$F(x|\omega) = \underset{\omega}{\nabla} F(x|2\omega), \qquad G(x|\omega) = \underset{\omega}{\Delta} F(x|2\omega).$$

Divisons les deux membres de l'équation (17) par m et faisons ensuite tendre l'entier m vers l'infini. En tenant compte de l'équation (15), on trouve l'égalité suivante :

$$\frac{1}{\omega} \int_x^{x+\omega} F(z|\omega)\,dz = \int_a^x \varphi(z)\,dz.$$

L'intégrale au premier membre est donc indépendante de ω et elle s'annule en particulier au point $x = a$. Par une analyse un peu plus difficile on démontre cette autre égalité

$$\frac{1}{\omega}\int_x^{x+\omega} F(z|2\omega)\,dz = \mathop{\mathrm{S}}\left(\int_a^x \varphi(x)\,dx\right)\underset{\omega}{\nabla} x.$$

En appliquant nos deux opérations de sommation aux fonctions G et F on trouve enfin ces deux relations

$$\mathop{\mathrm{S}}_a^x\left(\mathop{\mathrm{S}}\varphi(z)\underset{\omega}{\nabla} z\right)\underset{\omega}{\Delta} z = \mathop{\mathrm{S}}_a^x \varphi(z)\underset{2\omega}{\Delta} z - \frac{1}{\omega}\int_a^{a+\omega} F(z|2\omega)\,dz,$$

$$\mathop{\mathrm{S}}\left(\mathop{\mathrm{S}}_a^x\varphi(z)\underset{\omega}{\Delta} z\right)\underset{\omega}{\nabla} z = \mathop{\mathrm{S}}_a^x \varphi(z)\underset{2\omega}{\Delta} z.$$

[**5**] Toutes ces propriétés des solutions principales se déduisent presque sans aucun calcul, et ce n'est pas là un des moindres avantages de la définition que nous avons adoptée pour ces fonctions. Mais il y a d'autres propriétés qui sont plus cachées et que nous allons maintenant mettre en évidence en faisant des hypothèses plus particulières relativement à la fonction $\varphi(x)$. Supposons que cette fonction admette, pour $x \geqslant b$, une dérivée continue d'ordre m telle que l'expression (4) tende vers zéro quand x augmente indéfiniment. Nous avons vu que les deux solutions principales F et G peuvent se développer suivant les puissances de ω. Quand m augmente indéfiniment, les séries (10) et (11) divergent en général pour toute valeur de ω qui est différente de zéro, mais elles peuvent pourtant nous donner des renseignements précieux. D'abord, donnons à x une valeur fixe et plus grande que b et considérons ω comme la variable. Les deux séries représentent les fonctions au premier membre asymptotiquement, au sens de Poincaré, pour les valeurs positives et très petites de ω. Les séries nous donnent donc un renseignement très précis sur la manière dont se comportent nos solutions quand ω tend vers zéro. Si l'on fait en particulier $\varphi(x)$ égale à $\log x$ la série (10) se réduit à la série de Stirling. Nos deux séries générales possèdent la même propriété que la série de Stirling : Quand on s'arrête à un certain terme, le reste est en valeur absolue plus petit que le premier des termes qu'on a supprimés et il admet le même signe que ce terme.

D'autre part, laissons ω fixe et positif et faisons tendre x vers l'infini. On démontre que le reste tend vers zéro. Les deux séries nous indiquent donc comment se comportent nos solutions asymptotiquement pour les valeurs positives et très grandes de x. Désignons les m premiers termes de la série (11) par $P(x)$.

$$P(x) = \sum_{\nu=0}^{m-1} \left(\frac{\omega}{2}\right)^\nu \frac{C_\nu}{\nu!} \varphi^{(\nu)}(x)$$

et les $m + 1$ premiers termes de la série (10) par $Q(x)$:

$$Q(x) = \int_a^x \varphi(z)\,dz + \sum_{\nu=1}^{m} \omega^\nu \frac{B_\nu}{\nu!} \varphi^{(\nu-1)}(x).$$

De ce que nous venons de dire il résulte que

$$\lim_{x=\infty} [G(x|\omega) - P(x)] = 0, \tag{18}$$

$$\lim_{x=\infty} [F(x|\omega) - Q(x)] = 0. \tag{19}$$

Nous avons obtenu les fonctions G et F en appliquant un certain procédé de sommation aux deux séries divergentes (2 *bis*) et (3 *bis*). Mais il est intéressant de remarquer que, dans le cas actuel, on peut trouver des développements convergents d'une forme assez simple. Des égalités (18) et (19) on conclut en effet que nos solutions principales se représentent par les deux séries suivantes :

$$G(x|\omega) = P(x) + 2\sum_{s=0}^{\infty} (-1)^s [\varphi(x+s\omega) - \underset{\omega}{\nabla} P(x+s\omega)], \tag{20}$$

$$F(x|\omega) = Q(x) - \omega \sum_{s=0}^{\infty} [\varphi(x+s\omega) - \underset{\omega}{\Delta} Q(x+s\omega)]. \tag{21}$$

Ces séries convergent uniformément dans l'intervalle $x \geqslant b$.

Dans toutes ces relations on peut évidemment choisir l'entier m comme le plus petit entier tel que

$$\lim_{x=\infty} \varphi^{(m)}(x) = 0.$$

En déterminant m ainsi on donne aux séries la forme la plus simple. Comme nous l'avons dit, les séries (20) et (21) convergent uniformément; mais il convient de remarquer que rien ne permet d'affirmer la convergence absolue de ces séries. En augmentant la valeur de m on augmente souvent la rapidité de la convergence, et il arrive que les séries convergent absolument pour toutes les valeurs de m qui surpassent un certain nombre. Il est d'ailleurs facile d'en préciser les conditions, mais je ne m'y arrête pas.

[6] Reprenons les deux équations (10) et (11). En dérivant par rapport à x on démontre que

$$(22)\qquad \frac{d}{dx}\mathop{\mathrm{S}}_{a}^{x}\varphi(x)\underset{\omega}{\Delta}x=\mathop{\mathrm{S}}_{a}^{x}\varphi'(x)\underset{\omega}{\Delta}x+\varphi(a),$$

$$\frac{d}{dx}\mathop{\mathrm{S}}\varphi(x)\underset{\omega}{\nabla}x=\mathop{\mathrm{S}}\varphi'(x)\underset{\omega}{\nabla}x.$$

En dérivant m fois par rapport à x on démontre le théorème important suivant : La fonction $F(x|\omega)$ admet, pour $x \geqslant b$, une dérivée continue d'ordre m qui tend vers une limite finie quand x augmente indéfiniment, et la fonction $G(x|\omega)$ admet, elle aussi, une dérivée continue d'ordre m qui tend vers zéro quand x augmente indéfiniment. Cette propriété caractérise les solutions principales, car une fonction périodique qui possède la propriété que nous venons d'énoncer est égale à une constante. Il n'y a donc aucune autre solution qui possède cette propriété. Par conséquent, dans le cas actuel on peut *définir* la solution principale comme il suit. C'est la solution qui admet une dérivée continue d'un certain ordre qui tend vers une limite finie quand x augmente indéfiniment.

De ce que nous venons de dire il résulte que si l'on applique aux fonctions $F(x|\omega)$ et $G(x|\omega)$ un nombre quelconque de fois nos deux opérations de sommation, on arrive toujours à des expressions convergentes. Ces deux opérations donnent ainsi naissance à deux suites infinies de transcendantes nouvelles. En particulier, les deux limites suivantes

$$\mathop{\mathrm{S}}G(x\,|\,\omega)\underset{\omega}{\nabla}x,$$

$$\mathop{\mathrm{S}}_{a}^{x}F(x\,|\,\omega)\underset{\omega}{\Delta}x$$

existent. Cette propriété distingue, elle aussi, les solutions principales des autres solutions. Car ces deux limites cessent d'exister si l'on remplace G ou F par une solution différente de la solution principale. Ce fait devient très important quand il s'agit d'appliquer la méthode des approximations successives à la résolution d'une équation aux différences finies. On voit que c'est bien vers la solution principale qu'il faut diriger son attention si l'on veut que les approximations convergent.

Arrêtons-nous un moment à un cas particulier. Considérons la fonction gamma. On connaît très bien les propriétés de cette fonction, mais il me paraît qu'on n'a pas donné jusqu'ici une *définition* satisfaisante de la fonction gamma. Euler et Legendre ont défini cette fonction par une intégrale définie; Gauss l'a définie par un produit ou par une autre intégrale. Enfin Weierstrass a défini la fonction gamma à l'aide de sa valeur asymptotique. Je voudrais proposer une définition un peu différente. On a

$$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x),$$

par conséquent

$$\Delta \log \Gamma(x) = \log x. \tag{23}$$

Je définis la fonction $\log \Gamma(x)$ comme la solution principale de cette équation qui s'annule dans le point $x = 1$. Cette définition peut aussi s'énoncer comme il suit : La fonction $\log \Gamma(x)$ est la solution de l'équation (23) qui admet, pour les valeurs positives de x, une dérivée continue du second ordre qui tend vers zéro quand x augmente indéfiniment. En partant de cette définition, on peut déduire très aisément les diverses expressions analytiques connues de la fonction gamma et plusieurs expressions nouvelles.

On peut aussi procéder comme il suit. En prenant la dérivée logarithmique et en posant

$$\Psi(x) = \frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)},$$

on trouve

$$\Psi(x+1) - \Psi(x) = \frac{1}{x}. \tag{24}$$

La fonction $\Psi(x)$ est un peu plus simple que la fonction $\Gamma(x)$, et il paraît naturel de rapporter la fonction Γ à la fonction Ψ.

La fonction $\Psi(x)$ sera par définition la solution principale de l'équation (24), c'est-à-dire que

$$\Psi(x) = \mathop{\mathrm{S}}_{1}^{x} \frac{\Delta x}{x}.$$

D'autre part, on a par définition

$$\log \Gamma(x) = \underset{1}{\overset{x}{\mathrm{S}}} \log x \Delta x + c,$$

c étant une constante. En dérivant par rapport à x et en tenant compte de l'équation (22) on trouvera

$$D_x \log \Gamma(x) = \underset{1}{\overset{x}{\mathrm{S}}} \frac{\Delta x}{x} = \Psi(x).$$

En intégrant et en se rappelant que la fonction $\log \Gamma(x)$, par définition, s'annule dans le point $x = 1$, on trouvera

$$\log \Gamma(x) = \int_1^x \Psi(x) dx.$$

A l'aide de cette équation on peut déduire les propriétés de la fonction $\Gamma(x)$ de celles de la fonction $\Psi(x)$.

[**7**] Revenons au cas général. Nous avons défini les fonctions F et G en supposant ω positif. Nous allons maintenant donner à ω des valeurs complexes et chercher les prolongements analytiques de nos fonctions. Supposons que $\varphi(x)$ soit une fonction analytique holomorphe dans le demi-plan $\Re(x) \geqslant b$ et qui satisfasse à l'inégalité (12) pour toute valeur de x dans ce demi-plan, quelque petit qu'on se donne le nombre positif ε. Dans ces conditions on démontre que $F(x|\omega)$ et $G(x|\omega)$ sont des fonctions analytiques de x et de ω qui se représentent par les deux intégrales suivantes :

$$G(x|\omega) = i \int_{\alpha - i\infty}^{\alpha + i\infty} \varphi(x + \omega z) \frac{dz}{\sin \pi z}, \qquad \left(0 < \omega < \frac{\pi}{k}\right) \tag{25}$$

$$F(x|\omega) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\alpha - i\infty}^{\alpha + i\infty} f(x + \omega z) \left(\frac{\pi}{\sin \pi z}\right)^2 dz, \qquad \left(0 < \omega < \frac{2\pi}{k}\right). \tag{26}$$

Ici α est un nombre quelconque entre 0 et -1, et l'on suppose que $\Re(x) > b$. On voit sur ces intégrales que la fonction $F(x|\omega)$ est holomorphe pour les valeurs de x qui sont à l'intérieur du demi-plan $\Re(x) > b$ et pour les valeurs de ω qui sont à l'intérieur d'un cercle de rayon $\frac{\pi}{k}$ dont le centre est $\frac{\pi}{k}$. La fonction $G(x|\omega)$ est holomorphe pour les mêmes valeurs de x et pour les valeurs de ω qui sont à l'intérieur du cercle

$$\left|\omega - \frac{\pi}{2k}\right| = \frac{\pi}{2k}.$$

Quand les variables sortent de ces deux domaines il arrive que les fonctions cessent d'exister.

Des intégrales (25) et (26) on peut tirer une inégalité importante. En effet, en tenant compte de l'inégalité (12), on voit qu'on sait trouver une constante C_1 telle que

$$(27) \qquad |G(x|\omega)| < C_1 e^{(k+\varepsilon)|x|} \qquad \mathfrak{R}(x) \geqslant b$$

pour toute valeur fixe de ω dans l'intervalle $0 < \omega < \frac{\pi}{k}$. La fonction $F(x|\omega)$ satisfait à une inégalité de la même forme pour toute valeur fixe de ω dans l'intervalle $0 < \omega < \frac{2\pi}{k}$.

Ces inégalités caractérisent les solutions principales. On démontre qu'il n'y a aucune autre solution qui satisfait à ces inégalités. On peut donc, dans le cas actuel, définir la solution principale de la manière suivante. Cette solution est holomorphe dans la bande

$$b \leqslant \mathfrak{R}(x) \leqslant b + \omega$$

et elle y satisfait à l'inégalité (27) pour toute valeur fixe de ω dans l'intervalle $0 < \omega < \frac{\pi}{k}$.

Parmi toutes les solutions holomorphes, les solutions principales sont donc celles qui sont de la plus petite croissance.

[**8**] Nous allons maintenant étudier les solutions dans tout le voisinage du point singulier essentiel $\omega = 0$. Pour abréger, nous ferons une hypothèse assez restrictive relativement à la fonction $\varphi(x)$. Nous supposerons que cette fonction est uniforme dans tout le plan, qu'elle admet un nombre fini de points singuliers $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n$, et qu'elle satisfait à l'inégalité (12) pour toutes les valeurs de x dont le module est suffisamment grand. On démontre que $F(x|\omega)$ et $G(x|\omega)$ sont des fonctions uniformes de x admettant les points singuliers

$$x = \beta_\nu,\ \beta_\nu - \omega,\ \beta_\nu - 2\omega,\ \ldots \qquad \nu = 1, 2, \ldots, n,$$

et étant d'ailleurs holomorphes. $G(x|\omega)$ est encore une fonction uniforme de ω, mais $F(x|\omega)$ est une fonction non uniforme de ω au voisinage du point $\omega = 0$. On démontre que F est de la forme

$$F(x|\omega) = -B\log\omega + \text{fonc. uniforme de } \omega,$$

B étant le résidu de la fonction $\varphi(x)$ au point à l'infini. Comme fonction de ω, F et G admettent au voisinage du point $\omega = 0$ une infinité de points singuliers. Ces points singuliers sont tous situés sur n rayons vecteurs que j'appelle les vecteurs singuliers.

Si

$$\mathfrak{R}(x - \beta_\nu) > 0, \qquad \nu = 1, 2, \ldots, n$$

tous les vecteurs singuliers sont situés à gauche de l'axe imaginaire. On peut maintenant réduire l'étude du cas où la partie réelle de ω est négative à celui où la partie réelle de ω est positive. En effet, on démontre que G et F satisfont aux relations suivantes

$$G(x|\omega) - G(x-\omega|-\omega) = p(x), \tag{28}$$

$$F(x|\omega) - F(x-\omega|-\omega) = \Pi(x). \tag{29}$$

qui jouent un rôle important dans l'étude de ces fonctions. $p(x)$ et $\Pi(x)$ sont des fonctions périodiques de x. Dans le cas particulier où $\varphi(x)$ est méromorphe, $p(x)$ et $\Pi(x)$ sont des fonctions rationnelles de

$$e^{\frac{\pi i x}{\omega}}$$

Dans le cas général on a

$$p(x) = \frac{2\pi}{\omega}\sum \frac{[\varphi(z)]}{\sin\frac{\pi}{\omega}(x-z)},$$

$$\Pi(x) = -\pi i B + \sum[\varphi(z)]\pi\cot\frac{\pi}{\omega}(z-x),$$

la sommation étant étendue à tous les points singuliers β_ν. A la fonction $\varphi(x)$ il appartient ainsi deux fonctions périodiques. Ces fonctions s'expriment explicitement par la fonction $\varphi(x)$ de la manière suivante :

$$p(x) = 2\lim_{\eta=0}\sum_{s=-\infty}^{s=+\infty}(-1)^s\varphi(x+s\omega)e^{-\eta(x+s\omega)^2},$$

$$\Pi(x) = \lim_{\eta=0}\left[\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(z)e^{-\eta z^2}dz - \omega\sum_{s=-\infty}^{s=+\infty}\varphi(x+s\omega)e^{-\eta(x+s\omega)^2}\right].$$

En particulier on a

$$p(x) = 2 \sum_{s=-\infty}^{s=+\infty} (-1)^s \varphi(x + s\omega),$$

$$\Pi(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(z)\,dz - \omega \sum_{s=-\infty}^{s=+\infty} \varphi(x + s\omega),$$

si les séries et l'intégrale convergent. On peut donner plusieurs autres expressions très remarquables de ces fonctions, mais je ne m'y arrête pas.

Puisque les β_ν sont en nombre fini, on sait trouver deux nombres réels b_1 et b tels que

$$b_1 \leqslant \mathfrak{R}(\beta_\nu) \leqslant b, \qquad \nu = 1, 2, \ldots, n.$$

Reprenons les séries (10) et (11) et faisons tendre m vers l'infini. Les séries divergent toujours, puisque $\omega = 0$ est un point singulier essentiel. Mais on démontre qu'elles représentent asymptotiquement les fonctions au premier membre si $\mathfrak{R}(x) > b$ et $\mathfrak{R}(\omega) > 0$. Cela est vrai encore si $\mathfrak{R}(x) < b_1$ et $\mathfrak{R}(\omega) < 0$.

Mais la série (11) représente $G(x|\omega) - p(x)$ et la série (10) représente asymptotiquement $F(x|\omega) - \Pi(x)$ si $\mathfrak{R}(x) < b_1$ et $\mathfrak{R}(\omega) > 0$, ou encore si $\mathfrak{R}(x) > b$ et $\mathfrak{R}(\omega) < 0$. On en conclut en particulier que

$$\lim_{\omega=0} G(x|\omega) = \varphi(x), \tag{30}$$

ω tendant vers zéro le long d'un rayon vecteur quelconque différent des vecteurs singuliers. De même on conclut de ce que nous venons de dire qu'on a uniformément à l'intérieur d'un certain angle

$$\lim_{\omega=0} F(x|\omega) = \int_a^x \varphi(z)\,dz. \tag{31}$$

Mais quand ω sort de cet angle, cette égalité cesse d'être vraie.

Quand ω franchit un des vecteurs singuliers, la valeur asymptotique de $F(x|\omega)$ fait un saut brusque qui est égal à une des périodes de l'intégrale

$$\int_a^x \varphi(z)\,dz.$$

On peut donc encore dire que l'égalité (31) a lieu le long de tout rayon vecteur différent des vecteurs singuliers. Mais la détermination qu'il faut choisir pour l'intégrale au second membre change avec l'argument de ω.

Quand x varie, les vecteurs singuliers dans le plan des ω tournent. Quand x décrit un petit cercle autour d'un des points β_ν, un des vecteurs singuliers fait une rotation complète.

Les diverses séries à l'aide desquelles nous avons étudié les fonctions F et G ont été divergentes. Il va sans dire qu'on peut aussi former des séries convergentes, mais elles sont moins maniables que celles dont nous venons de parler. Parmi les développements convergents je veux en signaler un seul :

$$G(x|\omega) = \sum_{s=0}^{\infty} (-1)^s \left(\frac{\omega}{2}\right)^s \underset{\omega}{\Delta^s} \varphi(x).$$

Cette série converge pour toute valeur de x qui n'est pas un point singulier de la fonction $G(x|\omega)$. La fonction $F(x|\omega)$ n'admet pas de développement avec des conditions de convergence aussi favorables. Mais elle se représente par la série suivante

$$F(x|\omega) = \sum_{s=0}^{\infty} (-1)^s \frac{\omega^s}{s+1} \underset{\omega}{\Delta^s} f(x),$$

où

$$f(x) = \int_a^x \varphi(x)\,dx.$$

Cette série converge dans le demi-plan $\Re(x) > b$.

[**9**] On peut étendre les résultats précédents à des équations d'ordre quelconque. Soient $\omega_1, \omega_2, \ldots \omega_n$ des nombres positifs quelconques. La différence d'ordre n sera par définition

$$\underset{\omega_1 \cdots \omega_n}{\Delta^n} F(x) = \underset{\omega_n}{\Delta}\Big(\underset{\omega_1 \cdots \omega_{n-1}}{\Delta^{n-1}} F(x)\Big);$$

posons de même

$$\underset{\omega_1 \cdots \omega_n}{\nabla^n} F(x) = \underset{\omega_n}{\nabla}\Big(\underset{\omega_1 \cdots \omega_{n-1}}{\nabla^{n-1}} F(x)\Big).$$

Considérons les deux équations suivantes :

$$\underset{\omega_1 \cdots \omega_n}{\Delta^n} F(x) = \varphi(x), \tag{32}$$

$$\underset{\omega_1 \cdots \omega_n}{\nabla^n} G(x) = \varphi(x). \tag{33}$$

Soit, pour abréger,

$$\Omega = s_1\omega_1 + s_2\omega_2 \ldots + s_n\omega_n$$

et envisageons les séries suivantes

$$(32\,bis) \qquad (-1)^n \omega_1\omega_2 \ldots \omega_n \sum \varphi(x+\Omega),$$

$$(33\,bis) \qquad 2^n \sum (-1)^{s_1+s_2\ldots+s_n} \varphi(x+\Omega),$$

où la sommation est étendue à toutes les valeurs entières, positives ou nulles de $s_1, s_2, \ldots s_n$. En appliquant à la série (33 *bis*) un certain procédé de sommation on démontre qu'elle détermine uniquement une fonction, soit

$$G_n(x|\omega_1, \omega_2, \ldots \omega_n)$$

qui est une solution de l'équation (33). De même on peut à la série (32 *bis*) associer une certaine fonction, soit

$$F_n(x|\omega_1, \omega_2, \ldots \omega_n)$$

qui satisfait à l'équation (32).

Si $\varphi(x)$ est une fonction méromorphe de x, les solutions $G_n(x)$ et $F_n(x)$ sont encore des fonctions méromorphes de x. Si $\varphi(x)$ admet les points singuliers β_ν, les fonctions $G_n(x)$ et $F_n(x)$ admettent les points singuliers $\beta_\nu - \Omega$, et elles sont holomorphes en tout autre point.

Les fonctions F_n et G_n satisfont aux trois relations suivantes :

$$(34) \quad \sum_{s_n=0}^{m_n-1} \ldots \sum_{s_1=0}^{m_1-1} F_n\left(x + \frac{s_1\omega_1}{m_1} + \frac{s_2\omega_2}{m_2} \ldots + \frac{s_n\omega_n}{m_n} \middle| \omega_1, \omega_2, \ldots \omega_n\right)$$
$$= m_1 m_2 \ldots m_n F_n\left(x \middle| \frac{\omega_1}{m_1}, \frac{\omega_2}{m_2}, \ldots \frac{\omega_n}{m_n}\right),$$

$$\sum_{s_n=0}^{m_n-1} \ldots \sum_{s_1=0}^{m_1-1} (-1)^{s_1+s_2\ldots+s_n} G_n\left(x + \frac{s_1\omega_1}{m_1} + \frac{s_2\omega_2}{m_2} \ldots + \frac{s_n\omega_n}{m_n} \middle| \omega_1, \omega_2, \ldots \omega_n\right)$$
$$= G_n\left(x \middle| \frac{\omega_1}{m_1}, \frac{\omega_2}{m_2}, \ldots \frac{\omega_n}{m_n}\right),$$

$$\sum_{s_n=0}^{m_n-1} \ldots \sum_{s_1=0}^{m_1-1} (-1)^{s_1+s_2\ldots+s_n} F_n\left(x + \frac{s_1\omega_1}{m_1} + \frac{s_2\omega_2}{m_2} \ldots + \frac{s_n\omega_n}{m_n} \middle| \omega_1, \omega_2, \ldots \omega_n\right)$$
$$= \left(-\frac{1}{2}\right)^n \omega_1\omega_2 \ldots \omega_n G_n\left(x \middle| \frac{\omega_1}{m_1}, \frac{\omega_2}{m_2}, \ldots \frac{\omega_n}{m_n}\right).$$

Dans la première équation les m_i sont des entiers positifs quelconques; dans la deuxième équation les m_i sont des entiers positifs impairs, et dans la troisième équation les m_i désignent des entiers positifs pairs quelconques.

Si l'on fait tendre ω_n vers zéro on trouve

$$\lim_{\omega_n=0} G_n(x|\omega_1, \omega_2, \ldots \omega_n) = G_{n-1}(x|\omega_1, \omega_2, \ldots \omega_{n-1}).$$

Quand tous les ω_i tendent vers zéro on trouve en particulier

$$\lim_{\omega_1\ldots\omega_n=0} F_n(x|\omega_1, \omega_2, \ldots \omega_n) = \int_0^x \frac{(x-z)^{n-1}}{(n-1)!}\varphi(z)dz.$$

En divisant les deux membres de l'équation (34) par $m_1 m_2 \ldots m_n$ et en faisant tendre les m_i vers l'infini, on aura

$$\int_0^1 dt_n \ldots \int_0^1 dt_2 \int_0^1 F_n(x+\omega_1 t_1 + \omega_2 t_2 \ldots + \omega_n t_n) dt_1 = f(x)$$

où

$$f(x) = \int_0^x \frac{(x-z)^{n-1}}{(n-1)!}\varphi(z)dz.$$

On peut donner pour les séries multiples une formule de transformation qui est analogue à la formule sommatoire d'Euler. En appliquant cette transformation aux séries (33 *bis*) et (32 *bis*) et en effectuant plusieurs passages à la limite, on démontre que nos deux solutions G_n et F_n se développent de la manière suivante :

$$G_n(x+h) = \sum_{\nu=0}^{m} \frac{E_\nu^{(n)}(h)}{\nu!}\varphi^{(\nu)}(x) + \int_0^\infty \frac{\dot{E}_m^{(n)}(h-t)}{m!}\varphi^{(m+1)}(x+t)dt.$$

$$F_n(x+h) = \sum_{\nu=0}^{m+n} \frac{B_\nu^{(n)}(h)}{\nu!}f^{(\nu)}(x) + \int_0^\infty \frac{\dot{B}_{m+n}^{(n)}(h-t)}{(m+n)!}\varphi^{(m+1)}(x+t)dt.$$

Ici h est un nombre quelconque dans l'intervalle

$$0 \leqslant h < \omega_1 + \omega_2 \ldots + \omega_n.$$

Les $B_\nu^{(n)}(h)$ et les $E_\nu^{(n)}(h)$ sont les polynômes de Bernoulli et les polynômes d'Euler d'ordre n. Ce que nous avons dit au sujet de ces deux séries dans le cas $n=1$ peut s'étendre au cas général où n est un entier quelconque. En particulier, les séries représentent les fonctions au premier membre asymptotiquement pour les valeurs positives et très petites des ω_i.

En donnant à n les valeurs 1, 2, 3, ... on trouve ainsi deux suites de transcendantes nouvelles G_n et F_n. Il y a un grand nombre de relations entre ces fonctions qui me paraissent fort remarquables. Parmi toutes ces relations je veux signaler une seule qui joue un rôle capital dans l'étude de ces fonctions. Si les arguments des ω_i satisfont à certaines inégalités, on démontre que nos deux solutions satisfont à des relations de la forme

$$F_n(x|\omega_1, \omega_2, \dots \omega_n) - F_n(x - \omega_1 - \omega_2 \dots - \omega_n | -\omega_1, -\omega_2, \dots, -\omega_n) = \Pi_n(x),$$

$$G_n(x|\omega_1, \omega_2, \dots \omega_n) - G_n(x - \omega_1 - \omega_2 \dots - \omega_n | -\omega_1, -\omega_2, \dots, -\omega_n) = p_n(x).$$

Les fonctions au second membre satisfont aux équations suivantes :

$$\underset{\omega_1 \dots \omega_n}{\Delta^n} \Pi_n(x) = 0,$$

$$\underset{\omega_1 \dots \omega_n}{\nabla^n} p_n(x) = 0.$$

Ces fonctions nouvelles $\Pi_n(x)$ et $p_n(x)$ sont dignes d'intérêt. Nous avons déjà vu que, dans le cas $n=1$, $\Pi(x)$ était une fonction périodique, c'est-à-dire une fonction qui satisfait à l'équation

$$\underset{\omega}{\Delta} \Pi(x) = 0.$$

Une fonction doublement périodique est une fonction qui satisfait à deux équations de cette forme :

$$\underset{\omega_1}{\Delta} \Pi(x) = 0, \qquad \underset{\omega_2}{\Delta} \Pi(x) = 0.$$

Ces deux équations entraînent que

$$\underset{\omega_1 \omega_2}{\Delta^2} \Pi(x) = 0;$$

Mais l'inverse n'a pas lieu, de sorte que les fonctions qui satisfont à cette équation sont plus générales que les fonctions doublement périodiques. Nous rencontrons ici une extension de la notion de périodicité qui a l'avantage de pouvoir s'étendre à un nombre quelconque de périodes. Ce ne sont pas là des fonctions artificielles, mais ce sont des fonctions dont l'étude s'impose dans cette théorie. On remplirait tout un mémoire à énumérer les propriétés de ces fonctions.

[**10**] Après avoir fait l'étude complète des équations dont nous venons de parler, on peut aborder avec fruit la théorie générale des équations aux différences finies. Un cas particulier remarquable a déjà été envisagé par M. Picard. Soit donnée une transformation birationnelle

$$z_i = R_i(y_1, y_2, \ldots, y_m) \qquad (i = 1, 2, \ldots, m)$$

relative à m lettres $y_1, y_2, \ldots y_n$ et admettant le point double

$$y_1 = y_2 = \ldots = y_m = 0.$$

M. Picard a démontré l'existence d'un système de solutions $f_i(x)$ des équations aux différences finies

$$f_i(x + \omega) = R_i[f_i(x), f_2(x), \ldots, f_m(x)], \qquad i = 1, 2, \ldots, m,$$

ω étant un nombre positif. Ces solutions admettent, en outre, la période $2\pi i$ et elles sont uniformes et méromorphes dans tout le plan. L'étude de M. Picard repose sur sa belle méthode des approximations successives; sa démonstration peut, avec des modifications convenables, s'étendre à bien d'autres cas. M. Picard suppose que les R_i sont certaines fonctions rationnelles des m lettres y_i à coefficients constants. On peut encore supposer que les coefficients dépendent de la variable x. J'ai envisagé les équations aux différences finies les plus générales de la forme

$$(35) \qquad f_i(x + \omega) = R_i[f_1(x), f_2(x), \ldots, f_m(x), x], \qquad i = 1, 2, \ldots, m,$$

les R_i étant des fonctions uniformes qui dépendent des m lettres $f_1, f_2, \ldots f_m$ et de la variable x. Pour résoudre ces équations on a besoin d'une méthode générale pour résoudre l'équation (2). Ce point établi, on n'a qu'à reprendre le raisonnement de M. Picard. Dans chaque approximation on effectue une sommation telle que celle définie par l'expression (8). On démontre que les approximations successives convergent vers une limite qui est une solution uniforme des équations (35).

MÉMOIRES

PREMIÈRE SECTION