SUR LES FONCTIONS A VARIATION BORNÉE

ET LES QUESTIONS QUI S'Y RATTACHENT

PAR M. C. DE LA VALLÉE-POUSSIN

(Louvain.)

1. Considérations préliminaires.

La définition des fonctions à variation bornée est due à M. C. JORDAN. On la trouve pour la première fois dans une courte Note des *Comptes rendus de l'Académie des Sciences de Paris*, séance du 31 janvier 1881. Elle a pour titre : *Sur la série de Fourier*. Le titre et le contenu de cette Note ne laissent aucun doute sur la manière dont l'illustre mathématicien français a été conduit à la notion qui nous intéresse.

Tout le monde connaît l'admirable mémoire de Dirichlet sur la convergence des Séries de Fourier. La démonstration s'applique aux fonctions bornées qui n'ont qu'un nombre limité d'extrémés et de discontinuités : ce sont les conditions dites de Dirichlet. La condition relative aux points de discontinuité est superflue. Mais, même après cette suppression, la condition de Dirichlet ne paraît pas s'*adapter* naturellement au problème, parce que la démonstration subsiste pour une somme de fonctions satisfaisant à cette condition, tandis que cette condition elle-même ne subsiste pas toujours. C'est cette anomalie que M. C. Jordan s'est proposé de faire disparaître.

Les fonctions à variation bornée sont celles qui peuvent se décomposer en une somme de deux autres satisfaisant aux conditions de Dirichlet restreintes, ou, ce qui revient au même, celles qui sont *la différence de deux fonctions bornées et non décroissantes*. Il est clair que les fonctions de cette nature constituent une famille bien définie et fermée, dans laquelle on peut effectuer les opérations fondamentales, addition, soustraction, multiplication et division, sans altérer le caractère précédent, pour autant qu'une fonction prise comme diviseur ne puisse pas tendre vers zéro.

Dans cette Note des *Comptes rendus*, M. C. Jordan pose déjà les premiers fondements de l'étude intrinsèque des fonctions à variation bornée. Il donne, exactement comme nous le ferions aujourd'hui, le moyen de reconnaître si une fonction donnée $f(x)$ est à variation bornée dans un intervalle (a, b) et il définit sa *variation positive*, sa *variation négative* et sa *variation totale* dans cet intervalle. Il montre que les fonctions à variation bornée sont *intégrables* au sens de Riemann et que les intégrales indéfinies de fonctions bornées sont des fonctions à variation bornée.

M. C. Jordan est revenu sur les fonctions à variation bornée dans les deux éditions successives de son *Cours d'Analyse* (1881 et 1893) et il en a fait deux applications fondamentales, l'une à la détermination d'une *intégrale singulière*, l'autre à la *rectification des courbes*.

Il peut paraître étonnant que cette application à la rectification des courbes n'apparaisse que la seconde, alors que cette application est si naturelle qu'il semblerait que la notion de fonction à variation bornée eût dû être imaginée exprès pour cela. La condition pour qu'une ligne continue

$$x = \varphi(t), \qquad y = \psi(t)$$

soit rectifiable est que les deux fonctions φ et ψ soient à variation bornée, et cette solution du problème de la rectification peut être considérée comme parfaite. Cette solution en appelait une autre, c'est celle de la *complanation des surfaces courbes*. A l'heure qu'il est, nous ne saurions encore rien dire de bien satisfaisant sur les conditions pour qu'une surface courbe

$$x = \varphi(u, v), \qquad y = \psi(u, v), \qquad z = \varpi(u, v)$$

soit quarrable, et nous ne serions guère plus avancés qu'à l'époque des recherches précédentes de M. C. Jordan, sans celles toutes récentes de M. W.-H. Young (1).

Par contre, les recherches de M. C. Jordan sur les intégrales singulières et sur la série de Fourier ont été l'origine d'une foule de travaux ultérieurs. Ce serait trop long de les énumérer tous, et je ne signalerai ici que les plus importants.

M. H. Lebesgue a publié *sur les intégrales singulières* (2) un travail considérable, où l'usage de la notion de fonction à variation bornée dans la détermination des conditions de convergence est discuté du point de vue le plus général. Mais c'est surtout M. W.-H. Young qui mérite d'être cité comme ayant poursuivi l'étude des séries de Fourier dans la voie ouverte par M. C. Jordan. C'est à lui que l'on doit les criteriums de convergence les plus précis, les plus généraux, et j'ajouterai aussi les démonstrations les plus simples et les plus élégantes (3). C'est à lui que l'on doit presque tout

(1) Voir sa Communication à la première Section du présent Congrès.

(2) *Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse*, 1910.

(3) *Konvergenzbedingungen für die verwandte Reihe einer Fourier'schen Reihe. Sitzungsberichte der Königl. Bayer. Ac. der Wiss.* (Math. phys. Klasse. Sitzung vom 10 Juni 1911).

ce que l'on sait sur la convergence de la série conjuguée (1). C'est encore à lui que l'on doit le seul travail un peu général sur les séries de Fourier de plusieurs variables et sur ce qu'il appelle les séries de Fourier restreintes. Dans tous ces Mémoires, c'est la notion de fonction à variation bornée qui est le ressort principal des démonstrations.

Cependant ce n'est point de ces travaux que j'ai l'intention de vous entretenir aujourd'hui. En vous en parlant avec plus de détails, je me disperserais beaucoup trop. La question dont je désire vous entretenir forme un ensemble d'une très grande unité, dont l'objet est complètement différent des précédents. Et en effet, le développement de la théorie des fonctions à variation bornée s'est fait dans un sens complètement inattendu et que l'inventeur de ces fonctions ne pouvait certainement pas prévoir, car ce développement n'est devenu possible qu'après les travaux de M. Lebesgue sur les intégrales définies.

Les recherches récentes sur les fonctions de variables réelles se divisent en deux grandes catégories : celles qui concernent l'intégration des équations linéaires aux dérivées partielles et qui constituent sans aucun doute un des plus beaux chapitres de la science mathématique moderne ; ensuite celles qui se rattachent à la *Théorie générale des fonctions de variables réelles*, si l'on peut donner justement ce nom à la théorie fondée au début de ce siècle par MM. Baire, Borel et Lebesgue. Or l'étude des fonctions à variation bornée forme encore aujourd'hui, et de beaucoup, la partie la plus importante de cette nouvelle théorie.

Cette théorie a permis de pousser extrêmement loin l'étude intrinsèque des fonctions à variations bornées, de les disséquer en quelque sorte, de manière à faire apercevoir leurs parties constitutives distinctes. Elle a fait apparaître une partie principale : *l'intégrale indéfinie*, et, à côté de celle-ci, certaines parties *singulières ;* elle a montré l'identité des fonctions de point à variation bornée avec les *fonctions additives d'ensemble*. Elle a dévoilé l'importance des fonctions à variation bornée dans les questions les plus importantes du *calcul fonctionnel ;* elle a ramené l'expression de toute *fonctionnelle linéaire* à une *intégrale de Stieltjes*. Elle a donné ainsi à l'intégrale de Stieltjes une importance inattendue : elle lui assigne, en effet, un rôle fondamental dans la différentiation des fonctionnelles, puisque, d'après M. Hadamard, toute différentielle d'une fonctionnelle est une fonctionnelle linéaire.

---

(1) *On the convergence of a Fourier series and of its allied series* (Proc. of the London Math. Soc., Ser. 2, Vol. 10, Part. 4, 1911).

On the Fourier Constants of a Function (Proc. of the Royal Society, A, Vol. 85, 1911).

On Fourier Series and Functions of Bounded Variation (Id., Vol. 87, 1913).

Sur la convergence des séries de Fourier (Comptes rendus de l'Ac. des Sciences de Paris, 21 août 1916).

Sur les conditions de convergence des séries de Fourier (Id , 26 déc. 1916).

Telles sont les diverses questions dont je veux vous entretenir, et tel est, en somme, le résumé de cette conférence :

1° L'intégrale de Lebesgue;
2° Les fonctions d'ensemble;
3° L'intégrale de Stieltjes;
4° Les fonctionnelles linéaires.

J'aurai donc avoir l'honneur de vous communiquer quelques réflexions d'un ordre extrêmement général sur ces diverses questions. Je n'ai d'autre prétention que d'exposer quelques-unes des idées qui me paraissent particulièrement importantes ou intéressantes, et je me résigne à être très incomplet. Je prie les auteurs dont je ne citerai pas les noms de bien vouloir me pardonner (1).

2. La définition de l'intégrale de Lebesgue.

La question concernant l'*Intégrale de Lebesgue* qui a certainement préoccupé le plus grand nombre de mathématiciens, c'est celle de *sa définition*.

Les résultats contenus dans la thèse de M. Lebesgue (1902) ont paru si beaux et si utiles et, d'autre part, la route suivie par l'auteur pour y arriver si longue et si difficile, qu'on s'est proposé d'en trouver une plus simple et de remplacer la définition primitive par d'autres définitions rivales, permettant de faire entrer, si possible, la nouvelle théorie dans l'enseignement classique.

Je vais donc avoir à vous parler de ces diverses définitions et à vous soumettre quelques-unes des réflexions qu'elles me suggèrent, n'ayant d'ailleurs en aucune manière la prétention de me poser en arbitre de leur valeur respective.

Pour faire apprécier à sa valeur l'importance et la portée de l'intégrale de Lebesgue, il convient de la mettre en rapport avec la *classification des fonctions* qui a été proposée quelques années auparavant par M. Baire (2) et que voici :

Les fonctions continues sont de classe 0;

Les fonctions limites de fonctions continues et qui ne sont pas de classe 0, sont de classe 1;

Les fonctions qui sont limites de fonctions de classe 1 et qui ne sont ni de classe 0 ni de classe 1, sont de classe 2, et ainsi de suite.

En même temps qu'une classification, nous apercevons ici un *procédé de cons-*

---

(1) On lira avec profit les deux études d'ensemble : G.-A. Bliss, *Integrals of Lebesgue* (Bull. Americ. Math. Soc., vol. 14, 1917); T.-H. Hildebrand, *On Integrals related to and extensions of the Lebesgue Integral* (Idem).

(2) Thèse, *Sur les fonctions de variables réelles* (Annali di Mathematica, 1900).

truction successive de fonctions de plus en plus compliquées, et l'on admettra volontiers que ce sont les seules auxquelles conduisent naturellement les calculs de l'analyse. Nous appellerons ces fonctions les *fonctions de Baire*. C'est l'étude des propriétés de ces fonctions qui constitue ce que nous avons appelé tout à l'heure la *théorie générale des fonctions de variables réelles*. L'importance de ces fonctions a été surtout mise en lumière par les travaux de M. Lebesgue.

Les fonctions continues et bornées s'intègrent par les méthodes élémentaires. Mais les fonctions des classes suivantes ne le peuvent plus, en général, même avec la définition de Riemann. Au contraire, toutes les fonctions de Baire deviennent intégrables, quelle qu'en soit la classe, avec la définition de Lebesgue, pourvu qu'elles soient bornées.

D'où vient donc la puissance de cette définition et quel est le théorème qui en manifeste le mieux la supériorité ?

Ce qui fait la généralité de la définition nouvelle, c'est qu'elle repose sur une propriété des fonctions, qui se conserve dans le passage à la limite. Le théorème qui manifeste le plus clairement cette supériorité, c'est celui de l'*intégration terme à terme* (ou du passage à la limite sous le signe d'intégration). Ce théorème est le suivant :

Si une suite de fonctions $f_1, f_2, \dots f_n, \dots$ bornées dans leur ensemble converge vers une limite f, on a

$$\lim_{n=\infty} \int f_n dx = \int f dx. \tag{1}$$

On peut considérer ce théorème fondamental comme la conclusion et le couronnement de la théorie telle que M. Lebesgue l'a exposée dans sa Thèse (1902).

Avant Lebesgue, personne n'avait encore énoncé une propriété métrique des fonctions se conservant à la limite[1]. Après lui, on en a trouvé autant qu'on en a voulu.

Avant lui, l'intégration terme à terme était considérée comme une opération délicate, exigeant de grandes précautions. Après lui, il peut paraître tout simple de prendre cette propriété comme définition même de l'intégrale.

Remarquons, en effet, que la propriété exprimée par l'équation (1), à supposer seulement qu'elle ne soit pas contradictoire, suffit à elle seule pour définir l'intégrale de Lebesgue et que, tout au moins en apparence, elle en donne une *définition constructive*.

En effet, par l'équation (1), nous pouvons définir l'intégrale d'une fonction f de classe 1 comme la limite de celle d'une fonction f_n de classe 0 ; de même, l'intégrale d'une fonction de classe 2 comme limite de celle d'une fonction de classe 1, et ainsi

---

[1] Seul M. Baire avait énoncé une propriété descriptive jouissant de ce privilège et elle paraissait devoir rester stérile. Thèse citée (1900).

de suite. Nous obtenons ainsi une définition par récurrence qui semble suivre pas à pas le procédé même de construction des fonctions de Baire.

Que faudrait-il faire pour justifier cette définition?

Il suffirait de prouver l'*existence* et l'*unicité* de la limite écrite au premier membre de l'équation (1) et cela, de proche en proche, pour les fonctions de classe 0, de classe 1, ... Mais, si deux suites différentes de fonctions f_n tendent vers f, leur différence tend vers 0. Tout revient donc à démontrer que, si une suite de fonctions de la même classe $\varphi_1, \varphi_2, \dots \varphi_n \dots$ tend vers 0, on a aussi

$$\lim \int \varphi_n dx = 0. \tag{2}$$

La justification de l'équation (2) pour la classe d'ordre (k) revient ainsi à la définition de l'intégrale des fonctions de la classe suivante ($k+1$) par l'équation (1).

Chose bien remarquable, cinq ans avant la thèse de M. Lebesgue, cette justification avait été faite par M. Osgood pour les fonctions continues. Donc la définition de l'intégrale des fonctions de la première classe de Baire en résultait. Personne ne s'en est aperçu. Rien ne prouve plus péremptoirement qu'il était bien difficile sinon impossible d'entrer dans cette voie avant les découvertes de M. Lebesgue.

Mais il y a une autre observation qui s'impose.

La *méthode constructive* dont nous venons d'esquisser la marche est illusoire. Le parallélisme qu'elle établit entre la construction des fonctions et celle de leurs intégrales est trompeur et ne repose sur aucune réalité. On s'en apercevrait, si l'on essayait de démontrer l'équation (2) pour les classes suivantes. Il n'y a pas, il ne peut pas y avoir, à mon sens, de méthode constructive pour définir l'intégrale de Lebesgue, parce que toute fonction de Baire est comprise entre deux fonctions de classe 2, qui ont la même intégrale. Les fonctions des classes supérieures à la deuxième ne se distinguent l'une de l'autre que par des propriétés descriptives, elles ne se distinguent pas par des propriétés métriques. La méthode constructive s'arrête à la deuxième classe, pour l'excellente raison qu'après cela, il ne reste plus rien de neuf à construire.

Ces réflexions préliminaires nous ont arrêtés quelques instants, mais elles ne seront pas inutiles. Elles vont nous permettre de situer à leur vraie place les définitions de M. Lebesgue et celles de ses successeurs, parmi lesquels je ne citerai que M. Borel et M. W.-H. Young.

Seule la définition de M. Lebesgue est complètement indépendante du théorème de l'intégration terme à terme et se rattache directement aux définitions antérieures de Canchy et de Riemann. Toutes les autres définitions se rattachent, au contraire, au théorème de Lebesgue sur l'intégration terme à terme, ou tout au moins au procédé que M. Lebesgue a employé pour le démontrer. Elles se rattachent à la méthode constructive que je viens de discuter mais avec les différences profondes que comporte la nature même des choses.

La définition de Lebesgue se relie directement aux anciennes, parce qu'elle est, comme celles-ci, une définition *par le théorème de la moyenne*. Le théorème de la moyenne a toujours été considéré comme la propriété la plus immédiate, la propriété primordiale de l'intégrale. L'intégrale de Riemann est définie par la condition de vérifier le théorème de la moyenne sur les intervalles. L'intégrale de Lebesgue est définie par la condition de vérifier le théorème de la moyenne sur les ensembles de points, dont les intervalles ne sont que le cas particulier le plus simple. Mais ceci suppose que l'on sache mesurer les ensembles, tout comme les intervalles, et c'est pour cela que la *Théorie de la mesure des ensembles* a précédé celle de l'intégration.

Dans ce qu'elle a de plus original et de plus essentiel, cette théorie de la mesure est due à M. E. Borel. C'est lui qui a fait, pour la première fois, la somme des mesures d'une infinité dénombrable d'intervalles et c'est le ressort dont dépend assurément tout le reste de la théorie. M. Borel lui a consacré quelques lignes dans ses *Leçons sur la théorie des fonctions de variables réelles* (1908). Ces lignes contiennent une *définition constructive* de la mesure, complète en principe et géniale, mais qui est à la définition actuelle, exactement, ce que la méthode constructive de définition de l'intégrale que je critiquais tout à l'heure, est aux définitions d'aujourd'hui. Elle appelait donc la même revision. Celle-ci a été faite par M. Lebesgue dans sa Thèse. C'est lui qui a exposé les véritables fondements de la théorie, en a aperçu la généralité et dévoilé la fécondité.

Pour l'instant, il est inutile de nous arrêter davantage aux méthodes de M. Lebesgue, sur lesquelles nous reviendrons encore brièvement. Nous allons nous occuper des autres définitions et, suivant en cela l'ordre historique, nous commencerons par celles de M. Borel.

M. Borel s'est proposé de débarrasser la théorie de l'intégration de celle de la mesure des ensembles et de réduire au minimum toute considération relative aux ensembles. Ses définitions se rattachent plus ou moins directement au théorème de l'intégration sous le signe et reviennent explicitement ou implicitement à définir l'intégrale d'une fonction de Baire comme la limite de celle d'une fonction continue [1].

Si l'on examine la démonstration du théorème de l'intégration terme à terme, telle que M. Lebesgue l'a exposée dans sa Thèse, on en déduit aisément qu'une fonction f_n qui converge vers une limite finie f converge uniformément, pour tous les points qui sont extérieurs à une infinité dénombrable d'intervalles dont la somme des mesures est aussi petite que l'on veut. C'est le principe qui est à la base des définitions de M. Borel.

---

[1] Une idée analogue avait été développée par M. Fr. Riesz. *Sur quelques points de la théorie des fonctions sommables* (Comptes rendus, 4, 1912).

M. Borel en a déduit une propriété extrêmement remarquable des fonctions de Baire. Le principe précédent prouve aisément que cette propriété se conserve à la limite et appartient, par conséquent, aux fonctions de toutes les classes successives. Voici cette propriété :

Toute fonction de Baire est continue quand on fait abstraction des points contenus dans une infinité dénombrable d'intervalles dont la somme des mesures est aussi petite que l'on veut.

Si l'on fait abstraction de ces intervalles gênants, on peut définir l'intégrale d'une fonction de Baire par des limites de sommes tout analogues à celles de Riemann, et c'est une première définition de M. Borel (1).

Une seconde définition (2) a été développée plus longuement, et paraît avoir les préférences de M. Borel, soit à cause de son caractère particulièrement élémentaire, soit parce qu'il est permis d'y voir un procédé effectif de calcul. Si l'on fait abstraction des intervalles gênants, toute fonction de Baire est la limite d'une suite uniformément convergente de polynomes. L'intégrale de cette fonction de Baire sera donc, par définition, la limite de celle d'un polynome.

Les définitions de M. Borel ont l'avantage de la concision et de la simplicité. Ce sont probablement celles qui conduisent à la notion de l'intégrale avec le minimum d'efforts. Mais elles ne sont pas complètement indépendantes de la théorie des ensembles et, en particulier, des concepts nouveaux sur la mesure introduits par M. Borel dans ses *Leçons* de 1898. Bien au contraire, M. Borel s'était proposé formellement de les y rattacher.

M. W.-H. Young (3) est allé beaucoup plus loin. Il s'est proposé de débarrasser la théorie de l'intégration de tout emprunt à celle des ensembles; et, passant par dessus toutes les recherches précédentes, aussi bien celles de M. Borel que celles de M. Lebesgue, de rattacher directement la définition de l'intégrale aux conceptions de M. Baire.

La tâche était assurément difficile, et si M. Young y a réussi, cela fait grand honneur à son habileté. Son procédé de démonstration tire toute sa force de la considération des suites monotones de fonctions. La convergence de ces suites présente des caractères particulièrement simples, qui ont été déjà signalés et utilisés à main-

(1) *Sur une condition nouvelle d'intégrabilité* (Comptes rendus, t. CL, p. 208).

(2) *Sur le calcul des intégrales définies* (Journal de Math. pures et appliquées, 6e série, t. VIII, 1912).

(3) *On the new method in the theory of integration* (Proc. of the London mathem. Society, 1910).

On the new theory of integration (Proc. of the royal Society, 1913).

On the integration with report to a function of bunded variation (Proc. of the London math. Soc., 1913).

Sur les fondements de la théorie de l'intégration (C. R. Ac. des Sc. de Paris, 13 juin 1916).

tes reprises. Mais je crois que jamais personne n'a su en tirer un meilleur parti que M. H. Young.

Tout passage à la limite sur une suite de fonctions revient à deux passages à la limite consécutifs sur des suites monotones. De la sorte, toutes les fonctions de Baire peuvent être engendrées par des passages à la limite répétés sur des suites monotones. Il en résulte donc comme un dédoublement de la classification de M. Baire. C'est ce principe qui est à la base des idées de M. Young.

Voici maintenant comment on peut résumer sa définition.

Les fonctions limites de suites monotones de fonctions continues sont les fonctions semi-continues, soit par au-dessus, soit par au-dessous. On pourrait aisément définir les intégrales des fonctions semi-continues comme limites d'intégrales de fonctions continues, mais M. Young préfère les définir suivant le cas, soit comme intégrale supérieure, soit comme intégrale inférieure de Jordan, ce qui revient au même.

Les intégrales des autres fonctions se définissent à partir des précédentes par un passage à la limite. M. Young démontre que toute fonction de Baire est comprise entre deux fonctions semi-continues dont les intégrales diffèrent aussi peu que l'on veut. Il observe à cet effet que c'est là une propriété qui se conserve à la limite. L'intégrale d'une fonction de Baire sera donc, par définition, la limite commune des intégrales de deux fonctions semi-continues qui comprennent la fonction considérée.

M. Young remarque que sa méthode s'applique aussi bien aux intégrales de Stieltjes, et il est, semble-t-il, le premier qui ait donné une définition générale de ces intégrales. Nous aurons à revenir sur cette question tout à l'heure.

Les définitions de MM. Borel et Young sont intéressantes et instructives. On peut les préférer à celles de M. Lebesgue pour leur simplicité. Pour ma part, mes préférences sont toujours restées à la définition de M. Lebesgue; je crois que c'est la plus naturelle et celle qui va le plus au fond des choses, et puis, surtout, c'est celle qui prépare le mieux à l'étude de l'intégrale comme *fonction d'ensemble*. Or c'est là un de ses caractères les plus essentiels, et nous allons bientôt y revenir.

Mais avant de quitter la présente question, il faut encore compléter la définition précédente qui ne s'applique qu'aux fonctions bornées, et introduire avec M. Lebesque la définition des *fonctions sommables*.

Considérons d'abord une fonction positive et non bornée $f(x)$. Son intégrale est, par définition, la limite de celle d'une fonction bornée qui tend vers $f(x)$ en croissant. Cette limite peut être infinie, mais, si elle est finie, on dit que $f(x)$ est *sommable* et a cette limite pour intégrale.

Si la fonction non bornée $f(x)$ change de signe, elle est la différence de deux fonctions non négatives. Si ces deux fonctions sont sommables, $f(x)$ et $|f(x)|$ le sont aussi. L'intégrale de $f(x)$ est alors bien déterminée et égale à la différence des intégrales des deux termes de cette différence.

Jusqu'ici, il n'a pas été question de fonction à variation bornée et j'ai peut-être paru oublier mon sujet. J'y reviens enfin avec la notion fondamentale de *l'intégrale indéfinie*.

Considérons l'intégrale d'une fonction sommable $f(x)$ étendue à un intervalle *variable* (a, x), à savoir :

$$F(x) = \int_a^x f(x)\, dx.$$

Cette fonction de x est une *intégrale indéfinie* ou tout simplement une *intégrale*. C'est une fonction à variation bornée et sa variation totale dans l'intervalle (a, x) a pour valeur

$$\int_a^x |f(x)|\, dx.$$

Mais, comme nous aurons l'occasion d'y insister plus loin, la réciproque n'est pas vraie : Une fonction à variation bornée n'est pas toujours une intégrale.

Les propriétés de l'intégrale indéfinie ont été étudiées par M. Lebesgue dans ses *Leçons sur l'intégration et la recherche des fonctions primitives* (1904).

Il donne d'abord, à la suite de M. Vitali, la condition nécessaire et suffisante pour qu'une fonction $\varphi(x)$ soit une intégrale indéfinie. Il faut pour cela que la somme des variations $|\varphi(\beta) - \varphi(\alpha)|$ de $\varphi(x)$ sur un nombre quelconque d'intervalles (α, β) non empiétants soit aussi petite que l'on veut avec la somme des longueurs des intervalles. On dit aujourd'hui, d'après M. Vitali, qu'une fonction qui vérifie cette condition est *absolument continue*.

C'est dans ces mêmes *Leçons* que M. Lebesgue a abordé l'étude de la *dérivation* des intégrales indéfinies et il a établi le résultat absolument fondamental que voici :

Une fonction absolument continue $f(x)$ a une dérivée finie et déterminée $f'(x)$ presque partout, c'est-à-dire sauf aux points d'un ensemble de mesure nulle et elle est l'intégrale de cette dérivée considérée là où elle existe. On a par conséquent, dans ce cas,

$$f(x) - f(a) = \int_a^x f'(x)\, dx.$$

Par définition, un *ensemble de mesure nulle* est un ensemble de points qui peut être enfermé dans une infinité dénombrable d'intervalles dont la somme des longueurs peut être supposée aussi petite que l'on veut. *De tels ensembles peuvent être négligés dans l'intégration.* C'est là un principe fondamental, dont nous venons de rencontrer une des plus intéressantes applications.

3. Fonctions d'ensemble.

L'intégrale telle que nous venons de la définir est une *fonction* de point ou, si l'on veut, *une fonction de l'intervalle d'intégration* (a, x). Mais on peut aussi définir l'intégrale comme *fonction d'ensemble* et il est même nécessaire de se placer de ce point de vue pour en apercevoir quelques-unes des propriétés les plus essentielles.

Définir une fonction d'ensemble F, et il s'agit exclusivement ici d'ensemble de points, c'est établir une correspondance entre un ensemble E et un nombre F(E). Ce nombre, c'est la valeur de la fonction sur l'ensemble.

Quand on procède comme M. Lebesgue, l'intégrale se définit tout aussi immédiatement comme fonction d'ensemble que comme fonction d'intervalle. Nous savons, en effet, que dans cette méthode, l'intégrale est précisement définie par la condition de vérifier le théorème de la moyenne sur les ensembles. Nous y reviendrons plus loin à l'occasion de l'intégrale de Stieltjes.

Dans tous les cas, l'intégrale de $f(x)$ sur un ensemble E se ramène à une intégrale sur un intervalle (a, b) contenant E par un artifice très simple que nous allons indiquer et qui nous sera encore utile ailleurs.

Appelons *fonction caractéristique* de l'ensemble E, une fonction $\theta(x)$ égale à 1 en chaque point de E et à zéro partout ailleurs. Si cette fonction est une fonction de Baire, l'ensemble E est *mesurable* (B), c'est-à-dire au sens de M. Borel. Nous ne considérons pas d'autres ensembles pour le moment.

L'intégrale de $f(x)$ sur E est, par définition,

$$F(E) = \int_a^b \theta(x) f(x)\, dx = \int_E f(x)\, dx\,.$$

Sous cette forme, il apparait immédiatement que si E est la somme d'un nombre fini ou d'une infinité dénombrable d'ensembles $E_1, E_2, \ldots$, non empiétants, *l'intégrale sur l'ensemble somme* $E_1 + E_2 + \ldots$ *est la somme des intégrales sur chaque partie.*

M. Lebesgue a exprimé cette propriété en disant que l'intégrale est une *fonction additive* d'ensemble. J'ai dit moi-même que c'est une fonction *complètement additive*, en voulant souligner par là que la propriété s'étend à *un nombre infini* de parties. Ceci ne serait pas vrai pour l'intégrale de Riemann, qui n'est additive que pour la décomposition en un nombre fini d'intervalles.

La propriété additive correspond à la propriété *distributive* de la théorie générale des opérations. On regrettera peut-être l'abandon de ce terme. Il y a cependant lieu d'observer que le terme normal comporterait une restriction dans le cas actuel : la loi additive ne s'applique, en effet, à une somme d'ensembles que si ces ensembles sont *sans point commun* deux à deux ou non empiétants.

Considérée comme fonction d'un ensemble variable, l'intégrale prend, avec un sens un peu plus général que tout à l'heure, le nom *d'intégrale indéfinie*.

Nous venons de voir que cette intégrale est une fonction additive d'ensemble. Elle est aussi une fonction *absolument continue*. Cette propriété s'exprime maintenant sous une forme plus simple. Une fonction d'ensemble est absolument continue si elle est infiniment petite sur tout ensemble de mesure infiniment petite, c'est-à-dire contenu dans une somme d'intervalles dont la somme des mesures est infiniment petite.

Ces deux propriétés des fonctions d'ensemble : *additivité* et *absolue continuité*, caractérisent les intégrales indéfinies. Ce résultat essentiel est dû à M. Lebesgue, qui l'a énoncé dans un mémoire de l'École normale (1910) (1). Ce théorème prouve combien il est utile d'envisager l'intégrale comme fonction d'ensemble pour se rendre compte de sa véritable nature et de ses propriétés distinctives.

Tant que l'on se borne, comme nous le faisons en ce moment, aux ensembles linéaires et aux fonctions d'une seule variable, la *dérivée* de l'intégrale considérée comme fonction d'ensemble ne présente rien de nouveau et se ramène tout simplement à celle d'une fonction de point.

Par définition, la dérivée en un point x de la fonction d'ensemble

$$\int_E f(x)\,dx$$

est celle de la fonction de point

$$\int_a^x f(x)\,dx$$

au point x. Si la dérivée n'existait pas, il y aurait toujours des *nombres dérivés, supérieurs* et *inférieurs, à droite et à gauche,* et ils seraient définis de la même façon pour la fonction d'ensemble que pour la fonction de point.

Les intégrales définies sont les plus simples et les plus importantes des fonctions additives d'ensemble, mais ce ne sont point les seules. Si l'on appelle *continue* une fonction d'ensemble qui est infiniment petite sur tout ensemble de diamètre infiniment petit, cette continuité au sens large n'entraîne pas l'absolue continuité; et, par conséquent, il peut exister des fonctions additives d'ensemble, même continues, qui ne soient pas des intégrales indéfinies.

Ce sont ces fonctions additives d'ensemble, considérées dans toute leur généralité, dont je vais maintenant m'occuper. Elles présentent à notre point de vue un intérêt capital, car nous montrerons tout à l'heure l'identité de ces fonctions d'ensemble avec les fonctions à variation bornée. Il en résultera que le problème de la *décompo-*

---

(1) *Sur l'intégration des fonctions discontinues.*

sition des fonctions à variation bornée en leurs parties constitutives revient au même problème pour les fonctions d'ensemble. Mais cette décomposition est bien plus claire et bien plus instructive sur les fonctions d'ensemble. C'est pourquoi c'est sur celle-ci que nous allons d'abord l'effectuer.

Cette importante question a été traitée tout d'abord par M. Lebesgue dans son Mémoire, déjà cité, publié dans les Annales de l'École Normale. Je suis revenu longuement sur cette question dans mon *Cours d'Analyse*, dans mon Mémoire de l'*Américan Journal* (1915) et dans mes *Leçons* faites au Collège de France (1916). Voici le résumé de ce que nous en savons aujourd'hui.

Toute fonction additive d'ensemble F(E) est la différence de deux fonctions non négatives, $F_1(E)$ et $F_2(E)$, de même nature et bornées. Cette propriété correspond exactement à la propriété d'une fonction de point à variation bornée d'être la différence de deux fonctions bornées et non décroissantes. On dira donc tout naturellement qu'une fonction additive d'ensemble est à variation bornée et que les trois fonctions

$$F_1(E), \qquad -F_2(E), \qquad F_1(E)+F_2(E)$$

soit respectivement sa *variation positive*, sa *variation négative* et sa *variation totale* sur l'ensemble E.

Mais la décomposition de la fonction d'ensemble peut se faire d'un tout autre point de vue, et cette nouvelle décomposition fait pénétrer bien plus profondément que la précédente dans la structure de ces fonctions, donc aussi dans celle des fonctions à variation bornée.

Dans le cas le plus général, une fonction additive d'ensemble, F(E) est la somme de trois autres fonctions analogues, jouissant de propriétés qui les caractérisent.

1° Une fonction des sauts, qui est essentiellement discontinue;
2° Une fonction singulière qui est continue, mais non absolument;
3° Une intégrale indéfinie, qui est absolument continue.

La *fonction des sauts* est formée de toutes les discontinuités de la fonction F(E). Elle est attachée à un ensemble *dénombrable* D : celui des points de discontinuité de cette fonction. Une notation commode permet de définir la fonction des sauts au moyen du même symbole F que la fonction initiale. Désignons par le produit DE la partie commune à l'ensemble fixe D et à l'ensemble variable E, la fonction des sauts peut se représenter par F(DE).

La *fonction singulière* est attachée à un *ensemble singulier* S *de mesure nulle* et, avec la même convention que dans le cas précédent, on peut la représenter par F(SE).

La troisième partie est une *intégrale indéfinie*. Pour en reconnaître la nature et en obtenir l'expression, il convient de définir la *dérivée d'une fonction d'ensemble* au point x. Ce sera la dérivée de la fonction de point $f(x)$, obtenue en considérant la fonction d'ensemble F sur l'intervalle (a, x) tout comme dans le cas de l'intégrale indéfinie.

Avec cette définition, la fonction des sauts et la fonction singulière ont des dérivées nulles presque partout (sauf dans un ensemble de mesure nulle); la fonction F(E) a presque partout une dérivée $f'(x)$ et l'intégrale définie qui constitue la troisième partie de F est l'intégrale de cette dérivée.

La décomposition de F(E) en ses trois éléments distincts se fait donc par la formule :

$$F(E) = F(DE) + F(SE) + \int_E f'(x)\,dx.$$

Ces trois termes sont bien réellement distincts, puisque l'intégrale est nulle sur tout ensemble de mesure nulle et la fonction singulière, nulle sur tout ensemble dénombrable.

Mais pour effectuer cette décomposition, il faut savoir déterminer les ensembles D et S.

La détermination de l'ensemble dénombrable D ne donne lieu à aucune difficulté. Elle est en quelque sorte immédiate, puisque l'ensemble D est celui des points de discontinuité de F(E), c'est-à-dire celui des points sur chacun desquels F a une valeur non nulle; et F(D) est la somme des valeurs de F en chacun des points de D : c'est précisément ce qui prouve que D est dénombrable.

Par contre, la détermination précise de l'ensemble singulier S est plus difficile et je me suis beaucoup occupé de la préciser dans les publications que j'ai mentionnées plus haut. J'ai montré que S est l'ensemble des points où F(E) a une dérivée unique infinie (de signe déterminé). J'ai encore montré que la décomposition de S en la somme des deux ensembles S_1 et S_2 sur lesquels la dérivée est positive ou négative, fournit, en même temps, la décomposition de la fonction singulière en ses variations positive et négative par la formule

$$F(SE) = F(S_1E) + F(S_2E).$$

Comme je l'ai déjà dit, ce qui donne à ces décompositions tout leur intérêt au point de vue qui nous occupe, c'est qu'elles s'appliquent aux fonctions à variation bornée. Il y a, en effet, *identité* entre les fonctions additives d'ensemble et les fonctions de point à variation bornée. J'ai mis cette identité en évidence dans les mémoires que je rappelais encore il y a un instant. Le moment est venu de montrer comment ces deux sortes de fonctions se ramènent l'une à l'autre.

Il est immédiat qu'une fonction additive d'ensemble F(E) définit une fonction de point $f(x)$ qui est à variation bornée. Il suffit en effet, d'attribuer à $f(x)$ la valeur de F(E) sur l'intervalle variable (a, x). Le problème délicat est le problème inverse : *Étant donnée une fonction de point à variation bornée, $f(x)$, définit-elle une fonction additive d'ensemble mesurable* (B)?

La réponse est affirmative. M. Radon l'a prouvé dès 1913(1). Je l'ai montré aussi dans mon Mémoire de l'*Américan Journal* de 1915 et dans mes *Leçons* de 1916. *Le problème de construire la fonction d'ensemble* F(E) *quand la fonction à variation bornée $f(x)$ est donnée, est une simple généralisation du problème de la mesure tel qu'il a été posé et résolu par MM. Borel et Lebesgue.* La définition de F(E) à partir de $f(x)$ est donc un problème qui contient la définition de la mesure comme cas particulier. Mais, chose extrêmement remarquable et sur laquelle j'insiste, le problème particulier de la mesure ne comporte, relativement au problème général, aucune espèce de simplification.

Voici quelques indications sur le raisonnement que j'ai employé. Il suffit évidemment de construire la fonction d'ensemble F(E) pour une fonction de point $f(x)$ à variation bornée et *non décroissante.* D'abord la fonction de point $f(x)$ définit une fonction additive d'intervalles. Soit, en effet, ω l'intervalle (α, β); cette fonction de l'intervalle ω sera définie par la formule

$$F(\omega) = f(\beta) - f(\alpha) = \Delta f;$$

elle est donc *non-négative.*

Il s'agit alors de montrer que la correspondance ainsi établie entre F et les intervalles s'étend à tous les ensembles mesurables (B). Or le raisonnement à faire est absolument identique à celui dont M. Lebesgue s'est servi pour définir la mesure de ces mêmes ensembles; et le problème de la mesure est bien un cas particulier du précédent : celui où l'on prend $f(x) = x$, auquel cas $\Delta f = \beta - \alpha$, est précisément la mesure de l'intervalle ω. Il est tout aussi simple de traiter le cas général que celui de la mesure. J'y ai déjà insisté.

La solution du problème précédent prouve *l'identité des fonctions de point à variation bornée et des fonctions additives d'ensemble.*

A vrai dire, lorsque M. Radon et moi avons cherché la solution directe du problème précédent, ce problème était implicitement, mais indirectement résolu par les recherches antérieures de M. Lebesgue sur l'intégrale de Stieltjes, au moins pour les fonctions d'une seule variable. Je ne m'en étais pas aperçu et j'aurai l'occasion d'y revenir tout à l'heure.

---

(1) J. Radon, *Théorie und Anwendungen der absolut. Mengenfunktionen* (Sitzungsber. d. Kön. Ak. d. Wiss. in Wien, Math. Naturwiss. Klasse; Bd. CXXII, Abt. II a, Juli 1913).

4. Extension à un nombre quelconque de variables.

Pour simplifier mon exposition, je n'ai considéré jusqu'ici que les fonctions d'une seule variable et les fonctions d'ensemble à une seule dimension. Mais les théories précédentes s'étendent à l'espace et à l'hyperespace. Certaines d'entre elles ont même été exposées de prime abord dans l'hypothèse la plus générale.

Les définitions de la mesure des ensembles, de l'intégrale de Lebesgue, de l'intégrale indéfinie, des fonctions additives d'ensemble, s'étendent si naturellement à un nombre quelconque de dimensions qu'il nous suffira de constater que cette extension est immédiate. Par contre, la dérivation des fonctions d'ensemble et la définition des fonctions de points à variation bornée soulèvent dans le cas de plusieurs dimensions des difficultés qui leur sont propres. Pour généraliser les théorèmes relatifs à la dérivation des intégrales indéfinies, il faut introduire dans la définition de la dérivée certaines restrictions qui ont été indiquées par MM. Vitali (1) et Lebesgue. Comme l'a montré M. Lebesgue dans son Mémoire de l'École Normale de 1910, tous les théorèmes sur la dérivation des intégrales indéfinies peuvent alors être étendus au cas général. M. Lebesgue caractérise la restriction à introduire en spécifiant que la dérivation doit se faire au moyen de ce qu'il appelle des *familles régulières* d'ensembles.

Par contre, la définition de la dérivée utilisée par MM. Vitali et Lebesgue est insuffisante pour généraliser les théorèmes relatifs à la dérivation des fonctions d'ensemble qui ne sont pas absolument continues. Je me suis particulièrement occupé de cette question dans mon mémoire de l'*American Journal* (1915), et j'ai montré que l'on arrive au but en particularisant davantage encore la définition de la dérivée et en utilisant ce que j'ai appelé la *dérivation sur un réseau*. La définition des fonctions de point à variation bornée a été donnée par M. Vitali (1) pour le cas de plusieurs variables. L'identité de ces fonctions avec les fonctions additives d'ensemble a été établie par les recherches de M. Radon et les miennes. Ainsi toutes les questions posées et résolues précédemment, pour le cas d'une seule variable, sont également résolues pour le cas général.

J'ai attiré tout à l'heure votre attention sur l'importante généralisation de la mesure des ensembles qui conduit à définir une fonction d'ensemble en partant d'une fonction d'intervalle. L'intégrale de Lebesgue est susceptible d'une extension qui correspond point pour point à cette extension de la notion de la mesure et conduit à l'*intégrale généralisée de Stieltjes*. C'est de celle-ci qu'il convient maintenant de nous occuper.

---

(1) *Sull' integrazione per serie* [Rendiconti del Circ. Mat. di Palermo, 1907]. *Sui gruppi di Punti e sulle funzioni di variabili reali* [Rendic. della R. Accad. delle Sc. di Torino, 1908].

5. L'intégrale généralisée de Stieltjes.

STIELTJES est le premier qui ait défini l'intégration d'une fonction continue par rapport à une fonction à variation bornée (1). On a donné son nom à l'intégrale ainsi construite. L'intégrale de Stieltjes a pu passer jusque dans ces derniers temps pour une construction assez artificielle. Mais son importance a été mise en lumière par plusieurs géomètres dans des travaux récents. Bien plus, comme nous allons le voir bientôt, elle se présente naturellement comme solution de la question la plus importante du calcul fonctionnel.

Voici d'abord la définition de Stieltjes.

Soient $f(x)$ une fonction continue est $\alpha(x)$ une fonction à variation bornée (continue ou non) dans l'intervalle (a, b). On partage cet intervalle en intervalles élémentaires (x_i, x_{i+1}) comme d'habitude, on prend arbitrairement ξ_i dans (x_i, x_{i+1}) et on fait la somme, étendue à tous les intervalles élémentaires,

$$\Sigma f(\xi_i)[\alpha(x_{i+1}) - \alpha(x_i)].$$

Cette somme a une limite quand tous les intervalles tendent vers zéro. Cette limite est l'*intégrale de Stieltjes*. Elle se représente par la notation

$$\int_a^b f(x)\, d\alpha(x).$$

La définition de Stieltjes suppose essentiellement la fonction $f(x)$ continue. La question se pose de savoir si l'on peut étendre la définition à un champ fonctionnel plus vaste et, en particulier, à celui des fonctions de Baire.

M. Lebesgue, qui a posé cette question, en a donné la solution dans un article les *Comptes rendus de l'Académie des sciences, 1910* (2). L'extension se fait en ramenant l'intégrale de Stieltjes à une intégrale de Lebesgue par un changement de variables. Ce procédé mérite de nous arrêter un instant et nous allons le présenter en le réduisant à sa forme la plus simple. Remarquons que, si $\alpha(x)$ est la somme de deux fonctions à variation bornée, l'intégrale relative à $\alpha(x)$ est la somme des intégrales relatives à chaque terme. Il suffit donc de faire la réduction pour une fonction $\alpha(x)$ *croissante* dans tout intervalle, car toute fonction à variation bornée est la différence de deux fonctions telles. Dans ce cas particulier, auquel revient le cas général, le

(1) *Recherches sur les fractions continues* (Ann. de la Faculté des sciences de Toulouse, 1894, vol. 8, pp. 1-122).

(2) *Les intégrales de Stieljes*, vol. 150, pp. 86-88. Je rappelle, en passant, que j'ai utilisé dans mon *Cours d'Analyse*, dès 1903, le même artifice pour ramener une intégrale curviligne à une intégrale ordinaire.

procédé de M. Lebesgue consiste à prendre $\alpha(x)$ comme variable d'intégration. Alors x est une fonction uniforme de α et l'intégrale de Stieltjes se transforme dans l'intégrale de Lebesgue.

$$\int_{\alpha(a)}^{\alpha(b)} f[x(\alpha)]\,d\alpha.$$

Ainsi se trouve faite, sans aucun calcul, l'extension de la définition à toutes les fonctions $f(x)$ de Baire. Cette transformation étend, par le fait même, aux intégrales de Stieltjes la propriété fondamentale de l'intégrale de Lebesgue relative à l'intégration terme à terme.

L'analyse des fonctions à variation bornée qui a été résumée précédemment permet de faire une décomposition intéressante de l'intégrale de Stieltjes, décomposition qui a été indiquée par M. Maurice Fréchet au *Congrès des Sociétés savantes* de 1913 (1). Nous savons que toute fonction $\alpha(x)$ à variation bornée est la somme de trois fonctions

$$\beta(x) + \gamma(x) + \delta(x),$$

dont la première est une intégrale, la seconde la fonction singulière, la troisième la fonction des sauts. Cette décomposition entraîne donc celle de l'intégrale de Stieljès en trois intégrales correspondantes qui sont chacune d'un type essentiellement différent et irréductibles l'une à l'autre.

J'ai déjà signalé précédemment qu'il y a une relation entre l'intégrale de Stieljès et le problème de déterminer la fonction d'ensemble définie par une fonction de point, $\alpha(x)$, à variation bornée. Constatons, en passant, que les résultats obtenus, dès 1910, par M. Lebesgue permettaient, au moins dans le cas d'une seule variable, de résoudre ce problème. En effet, la valeur de cette fonction α sur l'ensemble E, contenu dans (a, b), sera définie par intégrale de Stieltjes :

$$\alpha(E) = \int_a^b \theta(x)\,d\alpha(x)$$

où $\theta(x)$ est la fonction caractéristique de l'ensemble E.

Quel que soit leur intérêt et leur valeur, les recherches de M. Lebesgue sur l'intégrale de Stieltjes n'avaient point un caractère définitif. D'abord cette méthode de M. Lebesgue ne s'étend pas aisément aux fonctions de plusieurs variables (2). D'autre part, la réduction de l'intégrale de Stieljes à une intégrale de Lebesgue peut être considérée comme inutile, car de même que la valeur d'une fonction à variation bornée

(1) *Sur les fonctionnelles linéaires et l'intégrale de Stieltjes*, Paris, Imprimerie Nationale, 1914.

(2) L'extension est cependant possible, comme on le verra plus loin.

sur un ensemble E se définit ni plus ni moins facilement que la mesure de E, de même, l'intégrale de Stieltjes n'est pas plus difficile à définir directement que celle de Lebesgue. C'est ce que M. W.-H. Young a montré. La méthode de M. Young pour définir l'intégrale de Lebesgue s'applique ni plus ni moins simplement à la définition de l'intégrale de Stieltjes et l'extension au cas d'un nombre quelconque de dimensions est immédiate(1).

L'avantage de s'appliquer à l'intégrale de Stieltjes n'est pas exclusivement propre à la méthode de M. Young. La méthode primitive de M. Lebesgue pour définir son intégrale possède le même avantage et l'on peut arriver à l'intégrale de Stieltjes, dans le cas le plus général, en suivant pas à pas la voie ouvérte par M. Lebesgue dans sa Thèse. La solution du problème est complètement fournie par la théorie des fonctions d'ensemble. C'est ce que nous allons montrer en considérant, pour fixer les idées, des fonctions d'une seule variable.

Soient $f(x)$ une fonction de Baire supposée bornée, et $\alpha(x)$ une fonction à variation bornée dans un intervalle (a, b). Celle-ci définit une fonction d'ensemble que nous représenterons par $\alpha(E)$ et dont la détermination correspond exactement, comme nous le savons, au problème de la mesure des ensembles.

Ceci posé, pour définir l'intégrale de Lebesgue, que je considère pour commencer,

$$\int_a^b f(x)\,dx,$$

on désigne par l et L deux bornes comprenant $f(x)$, égalité exclue; on construit une échelle de nombres $l_1 = l,\ l_2,\ l_3,\ \ldots\ l_i,\ l_{i+1},\ \ldots\ l_n,\ l_{n+1} = L$; on désigne par E_i l'ensemble des points de (a, b) où $f(x)$ vérifie la condition

$$l_i \overline{\overline{<}} f < l_{i+1}$$

et l'on construit les deux sommes;

$$\Sigma l_i (mE_i), \qquad \Sigma l_{i+1} (mE_i),$$

où mE_i est la mesure de E_i. L'intégrale de Lebesgue est la limite commune de ces deux sommes, quand les degrés de l'échelle tendent vers zéro.

L'intégrale de Stieltjes, relative à la fonction $\alpha(x)$ à variation bornée,

$$\int_a^b f(x)\,d\alpha(x),$$

(1) La définition de l'intégrale de Stieltjes, au cas de plusieurs variables dans l'hypothèse restreinte de la continuité, a été faite tout d'abord par M. Maurice Fréchet [Nouvelles Annales de Mathématiques, 4e série, t. IX, 1909, pp. 1-17]. Comparer avec la définition générale du même auteur dans son article *Sur les fonctionnelles bilinéaires* (Trans. of the Americ. Journal of Math. July 1915).

se définit exactement de la même manière que celle de Lebesgue, sauf que l'on remplace la mesure de E_i par la valeur de la fonction $\alpha(E_i)$ sur cet ensemble. L'intégrale de Stieljès est donc la limite commune des deux sommes[1]

$$\Sigma l_i \alpha(E_i), \qquad \Sigma l_{i-1} \alpha(E_i),$$

Toute la théorie de l'intégrale de Lebesgue s'étend à celle de Stieltjes. Ainsi, on peut aussi bien définir l'intégrale de Stieltjes sur un ensemble E que sur un intervalle. C'est une fonction additive d'ensemble, mais qui, en général, n'est pas absolument continue. On voit enfin que, sous cette forme, l'extension à un nombre quelconque de variables est immédiate.

6. Opérations fonctionnelles.

J'arrive à la dernière partie de mon exposé.

On peut rattacher les fonctions d'ensemble que nous avons considérées jusqu'ici à des considérations d'un ordre plus général.

Une fonction d'ensemble établit une correspondance entre un certain ensemble E et un nombre. Une telle correspondance s'appelle une *opération fonctionnelle*, ou tout simplement une fonctionnelle. L'étude des propriétés de cette correspondance est le *Calcul fonctionnel*. On peut trouver les premiers exemples du Calcul fonctionnel dans les recherches déjà anciennes de M. Volterra sur les fonctions de ligne (1887), mais on doit à M. M. Fréchet le premier essai d'une théorie générale de ce calcul[2].

Les fonctions additives d'ensemble se rattachent à des fonctionnelles particulières sur lesquels M. Hadamard a attiré l'attention et auxquelles il a donné le nom de *fonctionnelles linéaires*[3]. Il considère le cas où la valeur V de la fonctionnelle dépend, non pas comme précédemment d'un ensemble E, mais de la forme d'une fonction $f(x)$ continue dans un intervalle (a, b). Nous désignerons cette correspondance par $V(f)$.

La fonctionnelle est *linéaire* si elle possède les deux propriétés suivantes :

---

(1) Sous cette forme, la définition a été donnée d'abord par M. Radon, *Theorie und Anwendungen der absolut additiven Mengenfunktionen.* Sitzungsbericht d. Kais. Ak. d. Wiss. in Wien. Bd. CXXII, Abt, II a, Juli 1913, pp. 28-33.

Il faut aussi signaler dans le même ordre d'idées M. Fréchet, *Sur l'intégrale d'une fonctionnelle étendue à un ensemble abstrait* (Bulletin de la Société Mathématique de France; 1915, pp. 148-265).

(2) *Rendiconti di Palermo*, 1906.

(3) *Calcul fonctionnel* (Enseignem. Mathém., 1911).

1° Elle est *distributive*, c'est-à-dire que l'on a

$$V(f_1 + f_2) = Vf_1 + Vf_2;$$

2° Elle est *bornée*, c'est-à-dire que l'on peut assigner deux nombres positifs A et λ tels que

$$\text{si} \qquad |f| < A, \qquad \text{on ait} \qquad V(f) < \lambda A.$$

On s'assure aisément que si cette condition est réalisée pour les deux nombres A et λ, elle subsiste, en vertu de la propriété distributive, pour toutes les autres valeurs positives de A, et cela avec la même valeur de λ.

Une fonction additive d'ensemble, F(E), établit une correspondance qui se ramène à la précédente par un artifice. Il suffit de remplacer l'ensemble E par sa fonction caractéristique $\theta(x)$. On définit la fonctionnelle $V(\theta)$ en lui attribuant la valeur F(E). Avec cette définition, il est vrai, la fonctionnelle $V(\theta)$ n'est distributive que pour les fonctions caractéristiques d'ensembles *sans point commun*. Mais cette restriction n'empêche pas la théorie des fonctions additives de rentrer entièrement dans celles des ensembles linéaires. Il est facile de s'en assurer.

C'est, sans doute, M. Fr. Riesz qui a fait faire à la théorie des fonctionnelles linéaires son progrès le plus important. Il(¹) a démontré en effet que toute *fonctionnelle linéaire peut être mise sous la forme d'une intégrale de Stieltjes*

$$V(f) = \int_a^b f(x)\, d\alpha(x),$$

ce qui ramène l'étude des fonctionnelles linéaires aux théories précédentes.

Ce résultat serait presque immédiat si le champ des fonctions f comprenait, outre les fonctions continues, les fonctions qui ne prennent que les seules valeurs o et 1 et n'ont qu'un nombre limité de points de discontinuité. En effet, posons *a priori* la formule précédente; elle montre que, si $f(x)$ est la fonction caractéristique de l'intervalle (a, x), la fonctionnelle se réduit à $\alpha(x)$. Cette remarque permet de calculer la fonction inconnue $\alpha(x)$ et l'on vérifie *a posteriori* que la formule ainsi posée satisfait à toutes les conditions du problème.

La seule difficulté est donc de montrer que le champ fonctionnel peut être étendu à ces fonctions caractéristiques. C'est un problème tout à fait analogue à celui d'étendre l'intégrale de Stieltjes aux fonctions discontinues. Il a eté résolu par M. Riesz(²) en utilisant très habilement les passages à la limite sur les suites mono-

(¹) *C.-R.*, 29 nov. 1909 et *Ann. Éc. Norm.*, 1914. Ce résultat était préparé par M. Hadamard (*Calcul des variations*, p. 299).

(²) *Ann. Éc. norm.*, 1914.

tones de fonctions. Il est à peine besoin de signaler le parallélisme entre les procédés de M. Riesz pour traiter cette question et ceux qui ont été exposés par M. Young dans la théorie de l'intégrale de Stieltjes.

L'expression d'une fonctionnelle linéaire au moyen de l'intégrale de Stieljès conduit à des conséquences extrêmement intéressantes. Elle montre, en particulier :

1° Que *toute fonctionnelle linéaire de fonctions continues* s'etend d'elle-même à toutes les fonctions de Baire;

2° Que, si *l'on envisage une fonctionnelle linéaire* $V(f)$ *dans un champ de fonctions bornées, le passage à la limite sous le signe* Vy *est permis sans aucune restriction, que la convergence soit uniforme ou ne le soit pas*. Le théorème de Lebesgue sur l'intégration terme à terme n'est qu'un cas particulier de celui-ci.

Plus généralement, nous pourrions considérer l'ensemble des fonctions $f(x, y)$ de deux variables dans le rectangle R limité aux intervalles $(0, 1)$ des variables x et y. Une fonctionnelle linéaire de telles fonctions serait encore représentée par une intégrale de Stieljès généralisée pour deux variables

$$V(f) = \int\int_R f(x, y) d_x d_y \alpha(x, y),$$

où $\alpha(x, y)$ est à variation bornée, et il est clair que ces conclusions s'étendent à un nombre quelconque de dimensions.

Mais il est intéressant de remarquer, et cela n'a peut-être pas encore été fait, que *le cas de plusieurs variables se ramène au cas d'une seule* par un artifice dont M. Lebesgue s'est servi à diverses reprises dans les questions analogues. Cet artifice fait intervenir la courbe de Peano

$$x = \varphi(t), \qquad y = \psi(t),$$

qui passe par tous les points du carré R quand t varie de 0 à 1 et établit une correspondance univoque entre les points du carré et de l'intervalle, sauf pour une infinité dénombrable d'entre eux. Cette courbe établit donc une correspondance entre les deux fonctions

$$f(x, y) \quad \text{et} \quad f(\varphi, \psi) = f(t).$$

Par conséquent, la fonctionnelle $V\,f(x, y)$ définit une fonctionnelle de même valeur $Vf(t)$ et l'on a, par le théorème de Riesz,

$$Vf(x, y) = Vf(t) = \int_0^1 f(t) d\beta(t)$$

où $\beta(t)$ est à variation bornée. La réduction est faite. Mais on peut tirer de là une autre conséquence intéressante.

Comparons les deux expressions précédentes de la même fonctionnelle $V(f)$; nous obtenons la formule suivante

$$\int\int_R f(x, y)\, d_x d_y \alpha(x, y) = \int_0^1 f(t)\, d\beta(t),$$

qui ramène toute intégrale double de Stieltjes à une intégrale simple de même nature.

C'est probablement la première fois que cette réduction est signalée pour l'intégrale de Stieltjes. Mais j'ai déjà effectué cette réduction en 1910 (1) pour l'intégrale de Lebesgue. Cette réduction se fait alors par la formule plus simple :

$$\int\int_R f(x, y)\, dx\, dy = \int_0^1 f(\varphi, \psi)\, dt.$$

On pourrait assurément établir la formule de réduction d'une intégrale double de Stieltjes à une intégrale simple de même nature, sans passer par l'intermédiaire des fonctionnelles. On aurait ainsi un procédé permettant d'étendre à un nombre quelconque de variables les méthodes introduites tout d'abord par M. Lebesgue pour généraliser la définition de l'intégrale de Stieltjes dans le cas d'une seule variable.

Les fonctionnelles linéaires ont une importance à part, parce qu'elles s'introduisent tout naturellement dans l'une des questions les plus importantes que l'on puisse se poser sur les fonctionnelles, à savoir celle de leur *différentiation*. La question de la différentiation des fonctionnelles au point de vue qui nous intéresse ici est encore toute récente. Presque tout ce que nous en savons se trouve contenu dans deux Mémoires fondamentaux publiés en 1913 (2) et 1914 (3) par M. Maurice Fréchet.

Le premier essai pour appliquer aux fonctionnelles les procédés du calcul différentiel est déjà ancien; il est dû à M. Volterra, qui s'est occupé de la différentiation des fonctions de lignes. La méthode de M. Volterra consiste à opérer avec la *variation* de la fonctionnelle au sens où l'on entend ce mot dans le calcul des variations et cette méthode conduit déjà à des résultats fondamentaux (4). Mais M. Fréchet prend son point de départ dans une définition proposée par M. Hadamard (5) et qui consiste à considérer comme différentiable toute fonctionnelle dont la variation est

---

(1) *Annales de la Société scientifique de Bruxelles.*

(2) *Sur la notion de différentielle et le calcul fonctionnel* (Extrait des Comptes Rendus du Congrès des Sociétés savantes en 1912, Sciences).

(3) *Sur la notion de différentielle d'une fonction de ligne* (Transact. ot the Amer. Mathemat. Soc., 1914).

(4) *Sopra le funzioni chi dependono da altre funzioni* (Rendiconti della reale Accademia dei Lincei, volume III (1887), nota I, II, III).

(5) *Le calcul fonctionnel* (Enseignement Mathématique).

une *fonctionnelle linéaire* par rapport à l'accroissement de l'argument. Cette définition s'étend sans aucune difficulté aux fonctionnelles qui dépendent de plusieurs arguments et on obtient des généralisations extrêmement intéressantes des théorèmes fondamentaux du calcul différentiel.

J'ai malheureusement trop abusé de votre temps et de votre bienveillante attention pour en dire davantage sur cette intéressante question.

Conclusion.

Il est temps de conclure cette trop longue conférence.

Quel peut être dans l'avenir le développement des applications des fonctions à variation bornée? Je vais risquer un mot de réponse à cette question.

Dans la voie ouverte par M. C. Jordan, c'est-à-dire dans la recherche des conditions de convergence, il semble que le domaine des applications soit illimité. Chaque fois que la question de convergence se présentera dans la représentation d'une fonction par un mode nouveau, l'hypothèse que la variation est bornée sera l'une des premières qui viendra à l'esprit, et elle conduira presque toujours à des résultats utiles.

J'ai indiqué, d'autre part, les questions que posent les relations des intégrales de Lebesgue avec les fonctions à variation bornée. Il semble que toutes ces questions soient résolues d'une manière satisfaisante. Les nouvelles extensions de la notion d'intégrale se détachent de ces fonctions, et l'intégrale de Denjoy, en particulier, qui est la plus importante, cesse d'être une fonction à variation bornée.

Par contre, les problèmes relatifs à la théorie et la différentiation des fonctionnelles sont moins avancés. Espérons que la théorie des fonctions à variation bornée, qui a pris racine sur le sol de France avec les travaux de M. Jordan, continuera de se développer à l'Université de Strasbourg redevenue française, et particulièrement entre les mains de M. Maurice Fréchet; ses derniers travaux appellent de nouvelles recherches et font naître de légitimes espérances.