G. DARBOUX

LES ORIGINES, LES MÉTHODES ET LES PROBLÈMES DE LA GÉOMÉTRIE INFINITÉSIMALE

Depuis une trentaine d'années, un changement profond s'est accompli sous nos yeux dans l'orientation des études mathématiques. La théorie des fonctions, puisqu'il faut l'appeler par son nom, attire aujourd'hui, avec une force irrésistible, les recherches des plus jeunes, des plus actifs, des plus inventifs parmi nous. Un esprit nouveau les anime: il nous a déja valu, et nous promet plus encore pour l'avenir, de belles et profondément originales découvertes. Si l'on compare les débuts du XX[e] siècle aux commencements de celui qui vient de finir, on est obligé de reconnaître qu'il s'est produit depuis 100 ans une transformation radicale dans les méthodes et dans les théories, dans les points de vue et dans les principes directeurs. Le XIX[e] siècle nous a laissé des écrits mémorables et des travaux de haute portée; mais, dans sa première moitié tout au moins, il s'est contenté de parfaire la tâche qui lui avait été léguée par les grands génies scientifiques des deux siècles qui l'avaient précédé. Celui qui s'ouvre devant nous offre, au contraire, des perspectives vraiment nouvelles, nous présente des champs de recherche entièrement inexplorés. Rien n'arrête les esprits ardents et curieux; ils ne craignent nullement de s'attaquer aux bases mêmes de l'édifice que tant de travaux, si longuement poursuivis, avaient paru établir sur des fondements inébranlables. Et non contents de cultiver notre science, de lui imprimer les directions qu'ils estiment les meilleures, ils ont la prétention, à laquelle j'applaudis pour ma part, d'apporter les contributions les plus originales et les plus précises à cette branche essentielle de la Philosophie qui a pour objet propre l'origine, la nature et la portée de nos connaissances.

En confiant à un homme qui suit ce mouvement avec sympathie, mais qui n'y a point pris part directement par ses écrits, le soin de faire une des conférences inscrites au programme, les organisateurs de notre Congrès lui ont fait un grand honneur, dont il tient à les remercier vivement, car il en sent tout le prix. Mais ils ont voulu montrer aussi, j'imagine, qu'ils n'entendent négliger aucune des branches du savoir mathématique. En science comme ailleurs, plus qu'ailleurs peut-être, parce que les chercheurs sont toujours passionnés, il y a des modes, des entrainements auxquels il convient de ne pas s'abandonner sans réserve. Malgré le nombre croissant des adeptes dé la science mathématique, les anciennes disciplines courent le risque d'être quelque peu délaissées. C'est le propre des réunions comme celle-ci d'opérer une œuvre de coordination, d'attirer en particulier l'attention sur les questions qui appellent des recherches, afin que notre science marche, d'un pas égal et ferme, sans interruptions ni à-coups, vers son but essentiel, qui est la recherche de la vérité.

Ceux qui sont appelés à retenir quelque temps votre attention ont sans doute pour premier devoir de ne choisir que des sujets dont ils puissent parler avec compétence et, si j'ose dire, de première main. En me conformant à cette règle si naturelle, je suis heureux de penser que les questions dont je vous entretiendrai sont au nombre de celles qui ont plus particulièrement attiré l'attention des géomètres de ce pays, et de rendre ainsi hommage au beau génie de l'Italie, où la Géométrie, sous toutes ses formes, a été cultivée, est cultivée aujourd'hui encore, par tant de maîtres éminents. Quelques-uns d'entre eux, Bellavitis, Brioschi, Cremona, Casorati ont été mes guides ou mes amis. Permettez-moi, avant d'entrer en matière, de donner un souvenir à l'un des plus grands et des plus aimables, à Eugenio Beltrami, avec qui j'ai entretenu les relations les plus affectueuses, et qui nous a laissé tant d'écrits où la science la plus profonde s'allie à l'élégance de la forme et à la limpidité de l'exposition.

I.

La théorie des cartes géographiques et les travaux de Gauss.

Comme bien d'autres branches du savoir humain, la Géométrie infinitésimale a pris naissance dans l'étude d'un problème posé par la pratique. Les anciens s'étaient déja préoccupés d'obtenir des représentations planes des différentes contrées de la Terre, et ils avaient adopté l'idée si naturelle de projeter sur un plan la surface de notre globe. Pendant très longtemps, on s'est attaché exclusivement à ces méthodes de projection, en se bornant simplement à étudier les meilleurs moyens de choisir, dans chaque cas, le point de vue et le plan de projection. C'est un géomètre des plus pénétrants, Lambert, le confrère très estimé de Lagrange à l'Académie de Berlin, qui, signalant pour la première fois une propriété commune aux cartes de Mercator, dites *cartes réduites*, et à celles que fournit la projection stéréographique, envisagea le premier la théorie des cartes géographiques sous un point de vue vraiment général, et proposa, avec toute son étendue, le problème de la représentation de la surface terrestre sur le plan avec similitude des éléments infiniment petits. Cette belle question, qui donna naissance à des recherches de Lambert lui-même, d'Euler et à deux très importants Mémoires de Lagrange, fut traitée pour la première fois par Gauss dans toute sa généralité. Le travail que le grand géomètre composa sur ce sujet, et qui fut couronné en 1822 par la Société royale des Sciences de Copenhague, fut suivi, en 1827, des célèbres *Disquisitiones generales circa superficies curvas*, dans lesquelles se trouvent exposés magistralement les premiers éléments d'une théorie qui devait recevoir de grands développements. Parmi les notions essentielles introduites par Gauss, il faut noter l'emploi systématique des coordonnées curvilignes sur une surface, l'idée de considérer une surface comme un tissu flexible et inextensible, qui a conduit le grand géomètre à son célèbre théorème sur l'invariabilité de la courbure totale, les belles propriétés des lignes géodésiques et de leurs trajectoires orthogonales, la généralisation du théorème d'Albert Girard sur l'aire du triangle sphérique, toutes ces vérités concrètes et définitives qui, comme bien d'autres résultats dus au génie du grand géomètre, sont destinées a conserver, à travers les âges, le nom et la mémoire de celui qui les a, le premier, dévoilées.

Entraîné par tant d'autres travaux, Gauss n'a pas développé les conséquences des principes qu'il avait introduits. Par exemple, l'équation aux dérivées partielles du premier ordre qu'il a donnée pour les familles des trajectoires orthogonales des lignes géodésiques contenait en germe les découvertes fondamentales que Jacobi a développées plus tard sur la Mécanique analytique. J'ai aussi montré, dans mes *Leçons*, qu'en combinant très simplement trois équations linéaires du second ordre qui se trouvent dans les *Disquisitiones* et auxquelles satisfont les coordonnées rectangulaires d'un point de la surface, on pouvait former avec toute la généralité possible l'équation aux dérivées partielles des surfaces qui admettent un élément linéaire donné, et obtenir ainsi la solution complète d'une question qui devait être proposée, 35 ans plus tard seulement, comme sujet de prix par l'Académie des Sciences de Paris. Mais Gauss avait en vue dès ses premiers travaux, et il le dit expressément dans la préface du Mémoire couronné par l'Académie de Copenhague, seulement la construction des cartes géographiques et les applications de la théorie générale à la Géodésie. Il est revenu sur ces sujets, dans deux Mémoires qui portent les dates de 1843 et 1846, et qui peuvent figurer sans désavantage à côté des *Disquisitiones*. Reprenant, avec plus de précision, une méthode que Prony avait publiée en 1808 pour remplacer notre globe elliptique par une sphère convenablement choisie, il fait connaître, pour la construction des cartes géographiques d'un grand pays, des méthodes simples et pratiques qui ont été fidèlement suivies en Allemagne et qui mériteraient à coup sûr d'être adoptées dans les autres pays. La belle publication des *Reliquia* de Gauss que nous devons à M. Félix Klein nous a appris d'ailleurs que le grand géomètre n'avait cessé de poursuivre ses études sur les surfaces en général, et qu'il avait obtenu notamment la notion si essentielle de ce que nous nommons aujourd'hui la *courbure géodésique*. On a aussi retrouvé un court fragment relatif à la détermination des surfaces applicables sur une surface donnée ; il semble pourtant que Gauss n'ait jamais porté son attention, d'une manière bien suivie, sur le problème que paraissaient suggérer ses premiers travaux: la détermination des surfaces qui admettent un élément linéaire donné.

II.

Les premiers travaux des géomètres français Monge, Dupin, Lamé, Jacobi.

A l'époque où GAUSS publiait en Allemagne les recherches dont nous venons de parler, la France était, pour ainsi dire, en pleine floraison géométrique. Par ses conceptions si originales sur la génération des surfaces et sa création de la géométrie descriptive, par la rénovation qu'il avait su imprimer aussi à la géométrie analytique, MONGE avait exercé une influence que LAGRANGE constatait avec quelque regret. On connaît le mot célèbre échappé à l'illustre géomètre, au sortir d'une leçon de MONGE à l'École Polytechnique: « Avec sa géométrie descriptive et ses générations de surfaces, ce diable d'homme se rendra immortel ». MONGE ne se contentait pas de faire des découvertes; il faisait aussi des élèves, ce qui vaut quelquefois mieux. L'un d'eux, le mieux doué peut-être, CHARLES DUPIN, sut compléter l'œuvre de son maître en le suivant dans toutes les directions, en mariant comme lui la géométrie analytique à la méthode infinitésimale; en introduisant, à côté de la notion des lignes de courbure due à MONGE, celles de l'indicatrice, des tangentes conjuguées et par suite des lignes asymptotiques, qui sont toutes *projectives* comme nous disons aujourd'hui, et par là ont acquis un rôle prépondérant dans les recherches les plus récentes. LAMÉ, de son côté, cet apôtre de la philosophie naturelle, s'élevait peu à peu à la notion des coordonnées curvilignes de l'espace, à celle des paramètres différentiels, qui lui avait été suggérée par ses études de Physique mathématique et qu'il développa d'une manière magistrale dans un Mémoire inséré en 1833 au Journal de l'École Polytechnique. Bientôt la belle découverte de JACOBI sur les lignes géodésiques de l'ellipsoïde à trois axes inégaux venait apporter un nouvel aliment aux recherches de géométrie. CHASLES, rappelant un de ses théorèmes les plus élégants d'après lequel deux surfaces homofocales du second degré paraissent se couper à angle droit, de quelque point de l'espace qu'on les regarde, montrait que ce théorème aurait pu lui donner, tout au moins, une intégrale première de l'équation différentielle du second ordre dont dépend la détermination des lignes géodésiques de l'ellipsoïde. Grâce à une fertilité de moyens qui n'a jamais été dépassée, il parvenait, avec les seules ressources de la Géométrie, à intégrer, non seulement l'équation différentielle des géodésiques, mais aussi ces systèmes de deux équations différentielles auxquelles JACOBI avait donné le nom d'équations *abéliennes*. Une foule de géomètres, parmi lesquels il faut comprendre LIOUVILLE, FRENET, PUISEUX, JOSEPH BERTRAND, ALFRED SERRET, MINDING, JOACHIMSTHAL, BOUQUET, PAUL SERRET, et plus particulièrement OSSIAN BONNET, à qui ses recherches assignent presque le rôle d'un créateur, prenaient part avec ardeur à ce travail d'élaboration, qui devait mettre sur pied une des branches les plus intéressantes et les plus élégantes de la Géométrie moderne. Tous ces maîtres devaient se préparer à eux-mêmes de dignes successeurs. J'aimerais à faire ici l'analyse de leurs principales découvertes; mais il convient que je me rappelle que le temps nous est mesuré à tous; il faut que je n'abuse pas de votre attention et que j'arrive le plus tôt possible aux recherches dont on s'occupe en ce moment; je ne puis donc que renvoyer ceux d'entre vous qui désireraient plus de détails sur la période un peu ancienne que je dois abandonner, à la conférence que j'ai eu l'honneur de faire devant le Congrés international de Saint-Louis des États-Unis d'Amérique, sous la présidence de l'astronome illustre qui est venu prendre part à nos travaux.

Dans le reste de cette causerie, je me bornerai donc à suivre l'exemple que nous donnait, il y a 8 ans, M. Hilbert à notre Congrès de Paris, et j'indiquerai, dans une revue rapide des principales branches de la géométrie infinitésimale, quels sont les problèmes dont la solution nous importe le plus, et qu'on peut espérer de résoudre dans un avenir plus ou moins prochain.

III.

Des méthodes en géométrie infinitésimale. Rôle de la méthode analytico-géométrique.

Un mot d'abord sur les méthodes qu'il convient de suivre dans l'étude des problèmes de géométrie infinitésimale. Ici, comme dans la géométrie des éléments finis, on a essayé de construire un corps de doctrine entièrement indépendant de l'Analyse. Jacobi avait donné l'exemple en faisant revivre les infiniment petits, proscrits par Lagrange; Joseph Bertrand et Ossian Bonnet l'ont suivi dans cette voie. Aujourd'hui on n'a guère le temps, semble-t-il, de suivre deux méthodes différentes pour étudier les mêmes questions; et l'on s'est attaché presque exclusivement, en géométrie infinitésimale, aux méthodes analytiques qui emploient les axes coordonnés; je suis loin pour ma part de le trouver mauvais, sous la réserve toutefois que la recherche sera vivifiée et inspirée sans cesse par l'esprit géométrique, qui ne doit jamais cesser d'être présent. Pour expliquer ce que je viens de dire, permettez-moi de vous faire part d'un de mes souvenirs les plus anciens et les plus précis. Il y a plus de 30 ans, un analyste des plus distingués m'apporta un travail, qu'il venait de terminer, sur la surface développable circonscrite à la fois à une sphère et à une surface du second degré. Ses formules étaient élégantes, symétriques et savamment déduites; elles l'avaient conduit à cette conclusion, qui l'avait beaucoup surpris, que l'arête de rebroussement de sa développable était rectifiable algébriquement. Je n'eus aucune peine à lui montrer, sans calcul, que la découverte dont il était si fier et qui d'ailleurs ne manquait pas d'intérêt, était évidente géométriquement, et pouvait même être étendue à toute développable circonscrite à une sphère; car elle avait son origine dans cette propriété qu'a l'arête de rebroussement d'être une des développées de la courbe de contact de la développable et de la sphère. C'est ce que mon ami analyste aurait reconnu de lui-même, s'il n'avait pas été trahi et abandonné, pour un court moment je l'espère, par le dieu de la Géométrie.

Suivons donc les méthodes analytiques, mais ne les suivons pas aveuglément. Comme les grandes routes, elle nous fournissent souvent les voies les plus sûres; mais les chemins de traverse ont bien leur charme, et ils nous éclairent beaucoup mieux sur les véritables connexions des lieux et des choses.

On reproche quelquefois aux méthodes analytiques leur longueur et leur obscurité; on a même soutenu que l'utilisation incessante des coordonnées avait quelque chose d'artificiel. L'emploi du trièdre mobile et de la méthode des mouvements relatifs, combiné avec un choix judicieux des coordonnées curvilignes, échappe le plus souvent à cette objection. Il met en évidence les relations étroites et fondamentales qui lient la Géométrie à la science du mouvement et fournit la signification mécanique, si essentielle à connaître, des éléments géométriques qui se présentent dans la recherche.

Il est un autre avantage encore que l'Analyse présente dans ces études. Quoi qu'en disent certaines personnes, plus ou moins étrangères à notre science, le mathématicien n'est nullement une machine à déduire ou à calculer. Ses travaux mettent en jeu *toutes* les facultés de son esprit. La finesse, l'esprit d'invention, l'imagination, lui sont peut-être plus nécessaires que l'ordre et la rectitude dans le raisonnement. Mais en créant lui-même, comme il arrive souvent en Géométrie, l'objet même de ses études, en introduisant des êtres et des éléments nouveaux, il doit se garder par-dessus tout de ces spéculations sans portée, dont le moindre inconvénient est de tenir une place qui pourrait être mieux occupée. C'est ici que l'Analyse intervient avec sa vertu propre. Elle n'a pas de signes, selon Fourier, pour les notions confuses; elle n'a pas non plus de méthodes pour les recherches oiseuses et sans avenir. Par contre, elle met entre nos mains, quand nous avons su trouver la bonne voie, tous les éléments qui nous sont nécessaires pour le développement de nos conceptions.

IV.

Nécessité d'introduire franchement et complètement les imaginaires en Géométrie. Exemples à l'appui.

J'ajouterai, et sur ce point j'ai été heureux de recueillir plus d'une fois l'avis conforme et l'adhésion de Sophus Lie, que le géomètre ne doit jamais reculer devant l'emploi franc et complet des éléments imaginaires. Avec Cauchy, les imaginaires ont imposé leur empreinte victorieuse sur toutes les parties de l'Analyse. Leur place, au même titre et plus encore qu'en Analyse, est marquée en Géométrie. Il m'est arrivé dans ma jeunesse de rencontrer quelques professeurs attardés qui levaient les bras au ciel quand on s'aventurait à leur parler du cercle imaginaire de l'infini.

Ces temps sont passés et personne ne conteste plus l'importance des notions sur les imaginaires introduites dans la géométrie des éléments finis; elles sont même devenues si banales qu'on ne songe plus à citer leur premier inventeur. Je me souviens que mon ami LAGUERRE, ayant commencé un de ses Mémoires par une phrase telle que celle-ci: « On sait que tous les cercles du plan peuvent être considérés comme passant par deux points à l'infini », se vit vertement reprendre par PONCELET. « On sait, oui l'on sait, disait l'illustre géomètre, mais vous auriez bien dû dire qui vous a appris cela ». En géométrie infinitésimale, comme dans la géométrie de PONCELET, l'emploi des imaginaires ne sera pas moins fécond qu'en Analyse. Mais il a tardé beaucoup plus à s'imposer. Pourquoi? Je l'ignore. Est-ce parce que, selon quelques-uns, la Géomètrie doit toujours avoir en vue des objets réels et aboutir à des constructions? Peut-être. En tous cas il y a beaucoup de progrès à faire à cet égard. MONGE nous avait pourtant donné l'exemple; sur ce point comme sur plusieurs autres, il a été en avance sur son époque, puisqu'il n'a pas hésité à consacrer tout un chapitre de son Ouvrage à la surface imaginaire dont les rayons de courbure sont égaux et de même signe. Ces imaginaires, devant lesquels il ne reculait pas, ont permis à ses successeurs d'interpréter et de vivifier cette intégration des surfaces minima, qui est une de ses plus belles découvertes, et de constituer ainsi le chapitre le plus attrayant et le plus parfait de la géométrie infinitésimale. N'est-ce pas aussi grâce aux imaginaires qu'on a pu déduire de deux théorèmes célèbres de M. WEINGARTEN, qui ne dépareraient pas le grand Mémoire de GAUSS, la détermination complète des surfaces applicables sur le paraboloïde de révolution?

Je veux encore indiquer un autre exemple dans lequel les imaginaires nous dévoilent la véritable origine de certaines propriétés, inattendues au premier abord. Vous savez que, par des procédés très variés, on a pu compléter certaines recherches de MONGE, et déterminer toutes les surfaces dans lesquelles les lignes de courbure de l'un des systèmes, ou des deux systèmes, sont planes ou sphériques. Considérons, pour plus de netteté, les surfaces à lignes de courbure planes dans un système. On constate des relations singulières entre les lignes de courbure planes d'une même surface. Si l'une d'elles seulement est algébrique, toutes les autres sont algébriques. Si l'une d'elles est un cercle, toutes les autres sont nécessairement des cercles. C'est en faisant intervenir les imaginaires qu'on remonte à la source de ces curieuses relations. Imaginons qu'on déforme la surface développable enveloppe des plans des lignes de courbure, en supposant que chaque plan tangent de cette développable entraîne avec lui la ligne de courbure qui y est contenue. Il est facile d'établir que, parmi toutes les déformations ainsi considérées, il y en aura une, *nécessairement imaginaire*, dans laquelle toutes les lignes de courbure viendront se placer sur une développable *isotrope*, c'est-à-dire circonscrite au cercle de l'infini. Par suite, si une des lignes de courbure de la surface nous est connue, toutes les autres seront nécessairement égales à des sections planes convenablement choisies de la développable isotrope qui contient cette première courbe. Cette remarque donne évidemment la clef des relations que nous avions signalées. Elle nous fournit en même temps la construction la plus simple des surfaces à lignes de courbure planes. On prendra deux développables (D), (Δ) dont la seconde soit isotrope, puis on supposera que (D) se déforme, ses plans tangents entraînant avec eux les sections qu'ils ont déterminées dans la développable ($\varDelta$). Les positions nouvelles de ces sections engendreront la surface cherchée.

V.

Quelques problèmes de Géométrie infinitésimale. Les courbes à torsion constante.

Des méthodes passons aux problèmes. Je commencerai par le suivant:

Les courbes à torsion constante se rencontrent dans un grand nombre de recherches. D'après un curieux théorème d'Enneper, les surfaces à courbure constante ont pour lignes asymptotiques des courbes à torsion constante. De même, les surfaces applicables sur le paraboloïde de révolution, dont nous avons déjà parlé, peuvent être dérivées, par une élégante construction géométrique, de courbes imaginaires dont la torsion est constante. Pour que la surface soit algébrique, il faut et il suffit que la courbe à torsion constante dont elle dérive soit algébrique. C'est également de la détermination des courbes algébriques à torsion constante que dépend la construction des surfaces minima algébriques circonscrites à une sphère.

Il y aurait donc un intérêt réel à obtenir, parmi ces courbes à torsion constante que J.-A. Serret nous a appris à déterminer par trois quadratures, celles qui sont algébriques ou, seulement, unicursales. Même bornée aux courbes unicursales, la recherche se présente sous la forme d'un problème d'Algèbre supérieure, bien digne de tenter un disciple de Lagrange et de Cauchy. Malheureusement, malgré des efforts partiels qui nous ont donné des résultats, assez étendus d'ailleurs, la solution complète et générale de cette belle et difficile question reste encore à trouver.

VI.

Les surfaces à courbure constante et leurs transformations.

Parmi les surfaces non développables du second degré, le paraboloïde de révolution et deux autres paraboloïdes imaginaires tangents au cercle de l'infini sont les seules dont nous sachions obtenir la déformation la plus générale. Lors du concours que l'Académie des Sciences de Paris institua en 1860 sur la déformation des surfaces, et qui réunit des concurrents tels quel Bour, Ossian Bonnet, M. Codazzi et un autre géomètre italien dont Beltrami m'a confié le nom, Bour avait annoncé qu'il avait pu, en appliquant la célèbre méthode de variation des constantes due à Lagrange, déterminer toutes les surfaces applicables sur une surface quelconque de révolution et, en particulier, sur la sphère. Bour est mort peu de temps après, sans avoir pu confirmer le beau résultat qu'il avait obtenu; et son Mémoire, conservé chez Joseph Bertrand, a péri dans les incendies de la Commune. C'est en vain que, reprenant la voie ouverte par Bour, on a essayé de reconstituer sa méthode. Mais les efforts effectués dans cette direction ont été loin d'être infructueux. Il nous ont fait connaître en particulier des procédés de transformation qui permettent de faire dériver, d'une surface applicable sur la sphère ou, ce qui est la même chose, d'une surface à courbure constante, une suite illimitée des surfaces de même définition. Ces méthodes de transformation des surfaces à courbure constante sont d'une simplicité et d'une élégance qui méritent de nous arrêter quelques instants.

Tous les pays ont pris part à leur élaboration progressive, depuis l'Italie, qui a commencé, jusqu'à l'extrême nord de l'Europe qui a donné le couronnement. On a réussi à faire dériver de toute surface à courbure constante donnée une nouvelle surface de même courbure constante, qui dépend de deux paramètres; de sorte que la répétition de la méthode fournit sans cesse des surfaces nouvelles, qui contiennent dans leur équation des paramètres en nombre aussi grand qu'on peut le désirer.

Analytiquement tout se réduit à la considération d'un système, pour ainsi dire, unique en Analyse. La détermination des surfaces à courbure constante dépend de l'intégration de l'équation

$$\text{(A)} \qquad \frac{\partial^2 2\omega}{\partial\alpha\,\partial\beta} = \sin 2\omega,$$

et il suffit de lui adjoindre le système suivant

$$\text{(B)} \qquad \left\{ \begin{aligned} \frac{\partial(\theta+\omega)}{\partial\alpha} &= a \sin(\theta-\omega), \\ \frac{\partial(\theta-\omega)}{\partial\alpha} &= \frac{1}{a}\sin(\theta+\omega), \end{aligned} \right.$$

où a désigne une constante quelconque, et qui ne peut avoir lieu *qu'entre deux solutions de l'équation* (A).

Si donc ω désigne une solution *quelconque* de l'équation (A), le système (B) en fournira une nouvelle solution θ, et cette solution nouvelle contiendra à la fois a et la constante introduite par l'intégration. Si on la porte dans le système (B) en considérant cette fois ω comme l'inconnue et changeant la valeur de a, on pourra recommencer, et l'on voit que l'application répétée de la méthode introduira deux constantes nouvelles à chaque opération. Comme m'écrivait Sophus Lie dans son langage pittoresque, on aura ∞^∞ surfaces. Et il a été établi depuis, par des méthodes élégantes, que, si l'on peut faire le premier pas et effectuer, *pour toute valeur de* a, la première application de la méthode, les intégrations suivantes ne présenteront plus aucune difficulté.

Lie était un géomètre trop inventif et trop original pour ne pas être frappé de la singularité et de l'intérêt de ces méthodes de transformation, qu'il avait contribué beaucoup à mettre sur pied. Il s'efforça, par une tentative hardie, d'en tirer parti pour la détermination des surfaces à courbure constante

Il aimait à me confier ses recherches et leurs résultats. Je reçus un jour de lui une carte postale où il m'annonçait qu'il avait intégré l'équation aux dérivées partielles des surfaces à courbure constante. Je m'empressai, tout joyeux, de le féliciter. Hélas! SOPHUS LIE avait été victime d'AMPÈRE.

Dans ses Mémoires fondamentaux sur les équations aux dérivées partielles, AMPÈRE s'est attaché à bien préciser les objets de ses recherches; et, à une époque où l'on n'avait sur les diverses espèces de solutions: solutions particulières, générales, complètes, singulières, que les notions un peu vagues dues à EULER et à LAGRANGE, il avait cru trouver une définition irréprochable de l'intégrale la plus générale dans le critère suivant: *De toutes les solutions de l'équation proposée, elle sera la seule qui ne satisfera à aucune autre équation aux dérivées partielles que celle proposée et toutes celles qu'on en déduit par différentiation.* Or LIE avait démontré, par quel procédé je ne m'en souviens plus, que l'ensemble des surfaces à courbure constante qu'on peut faire dériver d'une surface donnée, par l'emploi répété des transformations précédentes, satisfait à la condition posée par AMPÈRE. Il en concluait qu'il avait l'intégrale générale, et il avait peut-être raison. Malheureusement, c'est AMPÈRE qui avait tort.

Chez un géomètre tel que LIE, les méprises même sont fécondes. Il ne tarda pas à m'écrire, en me montrant par des exemples ingénieusement choisis, le vice de la définition d'AMPÈRE; et il prit sa revanche par une autre voie, en appliquant cette fois une méthode d'intégration que j'avais donnée autrefois, et qui doit fournir l'intégrale générale d'une équation aux dérivées partielles, toutes les fois que cette intégrale peut être exprimée en termes finis, ou plus exactement, toutes le fois qu'elle appartient à la première classe, suivant la définition d'AMPÈRE. Étudiant l'équation (A) et l'équation tout à fait équivalente

$$s^2 - rt = a^2(1 + p^2 + q^2)^2, \tag{C}$$

LIE montra que la méthode ne peut réussir. Ce résultat négatif est des plus précieux. Sans être décisif, il laisse peu d'espoir de voir confirmer un jour la découverte que BOUR, ce géomètre pourtant si profond, nous avait annoncée [1].

[1] L'étude que LIE avait faite au point de vue qui nous occupe de l'équation (A) a été étendue depuis, par un jeune géomètre, à l'équation plus générale

$$s = f(x, y, z).$$

Elle l'a été aussi à l'équation plus générale

$$s = f(x, y, z, p, q).$$

VII.

La notion de l'intégrale générale, telle qu'elle a été donnée par Cauchy.

Dans cette causerie, que je poursuis d'une manière quelque peu irrégulière, j'ai été amené à vous parler de l'intégrale générale telle qu'AMPÈRE avait été conduit à la concevoir. CAUCHY, qui s'est attaché lui aussi à introduire la précision, et quelquefois même une trop grande précision, dans l'étude des différents problèmes du Calcul intégral, a levé toutes les difficultés relatives à ce sujet, en assujettissant chaque intégrale à remplir certaines conditions qui achèvent de la déterminer, et permettent en quelque sorte de la distinguer de toutes les autres. Cette manière vraiment neuve de poser les problèmes de Calcul intégral a été la source d'immenses progrès. Les conditions initiales choisies par CAUCHY étaient peut-être un peu restrictives; mais, par de simples changements de variables, il a été facile de les élargir, et j'ai proposé de désigner sous le nom de *problème de CAUCHY*, qui a été unanimement adopté, celui qui consiste à déterminer et à caractériser l'intégrale qu'on cherche par des conditions initiales choisies d'une manière aussi large que possible. Par exemple, s'il s'agit d'une équation aux dérivées partielles à *deux* variables indépendantes, la surface intégrale sera assujettie à passer par une courbe donnée quelconque, quand l'équation sera de premier ordre; si l'équation est du second ordre, la surface intégrale devra en outre être inscrite le long de la courbe à une développable donnée; et ainsi de suite pour les ordres supérieurs. Ce nouveau point de vue devait conduire, de la manière la plus précise et dans tous les cas, à la notion des *caractéristiques*, qui était restée si vague dans les travaux de MONGE: *les caractéristiques sont les assemblages pour lesquels le problème de CAUCHY devient indéterminé.*

VIII.

Application aux surfaces minima. Le problème de Plateau.

Le problème de CAUCHY, tel que nous venons de le formuler, a été résolu pour les surfaces minima, à l'aide de formules élégantes qui portent le nom de leur auteur et sont universellement employées.

Il faut bien se garder de le confondre avec cette recherche d'une tout autre nature et qui a pour objet la détermination d'une surface minima *continue* passant par un contour fermé. Sur ce point, il faut le reconnaître, nous sommes moins avancés que les physiciens. Pour obtenir la surface cherchée, Plateau se contentait de réaliser matériellement le contour qu'il avait en vue, et de le plonger ensuite dans une dissolution du liquide glycérique. Les géomètres n'ont pu rivaliser encore avec ces réalisations expérimentales. Leurs efforts ingénieux et habiles leur ont valu une foule de succès partiels. Les progrès réalisés dans l'étude du calcul des variations, les perfectionnements apportés à l'analyse moderne et à la méthode si féconde des approximations successives, leur permettront bientôt, j'en ai le ferme espoir, de résoudre dans toute sa généralité le beau problème que leur a légué Plateau, et d'enregistrer ainsi à leur actif un nouveau et brillant succès.

IX.

Progrès et problèmes de la théorie des cartes géographiques. Représentation géodésique. Problème de Tchebychef.

Comme l'étude des surfaces minima, la théorie des cartes géographiques a vu naître bien des problèmes intéressants. On s'est proposé, par exemple, de rechercher si la correspondance établie par plans tangents parallèles entre deux surfaces quelconques peut donner une représentation conforme de l'une des surfaces sur l'autre; cette recherche a été étendue à la correspondance qui s'établit, entre deux surfaces quelconques, par les points de contact d'une sphère qui doit être tangente à l'une et à l'autre. En étudiant une propriété de la projection centrale, comme Lambert avait étudié une propriété de la projection stéréographique, Beltrami a été conduit à s'écarter du point de vue qui, entre les mains de Lagrange et de Gauss, avait donné des résultats si parfaits, et à rechercher s'il est possible de faire une carte d'une surface donnée, assujettie à cette unique condition que les géodésiques de la surface soient représentées par les droites du plan. Son élégante analyse lui a montré que ce mode de *représentation géodésique* ne pouvait intervenir que dans le cas des surfaces à courbure constante. A leur tour, les études et les résultats de Beltrami ont été étendus à la correspondance entre deux surfaces quelconques et nous ont valu des propriétés nouvelles de cette forme de l'élément linéaire qui porte les noms de Liouville et de Jacobi.

Un géomètre russe, Tchebychef, qui occupe une place à part dans le développement des Mathématiques modernes, nous a proposé un nouveau et curieux sujet de recherche qu'on peut présenter comme il suit, en le généralisant quelque peu. Imaginons un filet tel que ceux dans lesquels les dames enferment leur cheveux, ou tel encore qu'en portent les personnes qui se rendent au marché. Quelles que soient leurs formes et leurs dimensions, ces filets sont toujours composés de deux séries de fils rattachés en leurs points de rencontre, de telle manière que, pour chaque maille, les angles seuls des côtés puissent varier, mais non leurs longueurs. Imaginons qu'on pose un pareil filet sur une surface ou, ce qui revient au même, qu'on introduise un corps solide, terminé par une surface quelconque, à l'intérieur du filet, et proposons-nous de déterminer la forme que prendra le filet. Analytiquement, cela revient à mettre l'élément linéaire de la surface considérée sous la forme

$$ds^2 = A^2\, d\alpha^2 + C^2\, d\beta^2 + 2AC \cos\theta\, d\alpha\, d\beta,$$

où A et C désignent des fonctions données de α et de β et θ une fonction *inconnue*. Tchebychef s'est borné au cas où l'on a

$$A = C = 1$$

et, suivant sa coutume, il s'est contenté de rechercher des solutions approchées de son problème. Il n'avait pas remarqué que, dans le cas de la sphère, sa solution complète et générale peut être rattachée à la détermination des surfaces à courbure constante négative; en ce sens que chaque surface à courbure constante négative donne, par la représentation sphérique de ses lignes asymptotiques, une solution du problème de Tchebychef pour la sphère, et *vice versa.*

X.

Les surfaces à courbure constante négative et les formes quadratiques de différentielles. Géométrie non euclidienne.

Vous le voyez, mes chers Collègues, c'est en vain que nous voudrions échapper à ces surfaces à courbure constante, qui paraissent, au premier abord, si particulières. C'est le cas de répéter le vers du poète:

Je l'évite partout, partout il me poursuit.

Elles se présentent à nous, dans toutes les recherches que nous entreprenons, en vertu sans doute de ces propriétés d'invariance qui sont mises en évidence par le théorème de Gauss. Mais il faut le remarquer aussi, leur étude emprunte un intérêt exceptionnel aux relations si étroites qu'elle présente avec ces recherches sur les principes de la Géométrie qui ont été inaugurées par les travaux de Lobatschefsky, de Gauss, de Bolyai et de Riemann. Ce beau et vaste sujet, auquel s'attachent passionnément les géomètres modernes, mériterait à lui seul une étude spéciale. Je me bornerai, pour le moment, à remarquer que Riemann, en le rattachant à la considération d'une forme quadratique de différentielles, a introduit par cela même, en Géométrie infinitésimale, un élément d'étude et de coordination appelé à jouer dans toutes les recherches le rôle le plus essentiel.

Riemann et Beltrami avaient ouvert la voie: l'un en définissant, l'autre en étudiant, d'une manière détaillée, la notion des espaces *à courbure constante*, qui est, en quelque sorte, adéquate à la géométrie non euclidienne. Depuis, Lipschitz et Christoffel ont envisagé les formes quadratiques de différentielles dans toute leur généralité; et leurs savantes recherches, accueillies partout avec grande faveur, ont été poursuivies avec beaucoup de succès dans ce pays. Il faut s'en réjouir, car les formes quadratiques de différentielles interviennent pour ainsi dire partout. On sait le rôle capital qui leur a été assigné dans la mécanique analytique par les immortelles découvertes de LAGRANGE ; pour se borner à la Géométrie, on les obtient, non seulement en formant les éléments linéaires des surfaces et des espaces à un nombre quelconque de dimensions, mais aussi en calculant le moment de deux droites infiniment voisines, l'angle de deux sphères infiniment voisines, etc. Leur étude a été beaucoup avancée en ce qui concerne la partie différentielle et invariantive ; on a même rattaché à leur considération un nouveau genre de calcul qui forme une extension curieuse du calcul différentiel. On a commencé aussi à étudier dans toutes sa généralité le premier et le plus élémentaire des problèmes de cette théorie : je veux dire la recherche des conditions qui sont nécessaires et suffisantes pour que deux formes soient *applicables* l'une sur l'autre. Dans sa partie délicate et difficile, cette recherche se ramène évidemment à celle des formes quadratiques qu'on peut transformer en elles-mêmes par une suite continue de substitutions. Ici, les magistrales découvertes de LIE sur la théorie des groupes ont trouvé, et trouveront sans doute encore, un beau champ d'application.

XI.

Réduction des problèmes les uns aux autres. Procédés de récurrence. Surfaces isothermiques. Déformation des surfaces du second degré.

Les progrès récents de l'Analyse nous ont conduit à envisager sous un point de vue tout nouveau l'intégration des équations différentielles et aux dérivées partielles. Nous savons aujourd'hui qu'on doit le plus souvent renoncer à les intégrer dans le sens ancien du mot ; qu'il faudra les étudier directement, les classer, les ramener les unes aux autres, rechercher, s'il y a lieu, les transformations qui les reproduisent. Cette étude commence à peine, et elle exigera de longs efforts ; mais, dès à présent, il est permis d'affirmer que la géométrie infinitésimale offrira, le moment venu, à l'Analyse les applications les plus intéressantes, et surtout les exemples les plus précieux.

Nous avons déjà signalé les méthodes de transformation des surfaces à courbure constante. On pourrait presque dire que ces procédés de récurrence sont de règle en Géométrie, car on les retrouve partout.

Considérons, par exemple, les surfaces *isothermiques*, c'est-à-dire les surfaces dont les lignes de courbure forment un système isotherme. Leur détermination dépend d'une équation aux dérivées partielles du quatrième ordre, qu'on a reussi à écrire sous les formes les plus symétriques, mais dont l'intégration constitue peut-être le problème le plus difficile qu'on rencontre en Géométrie. On en connaît, il est vrai, de nombreuses intégrales particulières : les surfaces du second degré, les cyclides les plus générales, les surfaces de révolution, celles dont la courbure moyenne est constante, certaines surfaces à lignes de courbure planes dans un système, etc., sont des surfaces isothermiques; mais, en comparaison de l'intégrale générale qui, suivant la vieille terminologie, doit comprendre quatre fonctions arbitraires, ces solutions particulières ne comptent pour ainsi dire pas. Ici toutefois, comme dans la théorie des surfaces à courbure constante, certaines constructions géométriques des plus simples permettent de rattacher, par de simples quadratures, à chaque surface isothermique, toute une série de surfaces isothermiques nouvelles, dans la définition desquelles figurera un nombre de constantes de plus en plus grand. On pourrait donc être tenté de reprendre les efforts de Lie, pour déduire de cet ensemble de solutions l'intégrale générale elle-même, en s'appuyant, non plus sur les conceptions d'Ampère, mais sur la définition correcte de l'intégrale générale, telle qu'elle a été donnée par Cauchy. Permettez-moi d'ajourner ce genre de considérations, et de passer à un autre exemple d'un intérêt tout actuel, dans lequel il s'agit, non de la transformation d'une équation en elle-même, mais de la réduction d'un problème à un autre, différent et plus simple.

Il semble que, dans son développement, la Géométrie infinitésimale soit appelée à suivre les mêmes voies que l'analyse de Descartes. La déformation de la sphère avait d'abord occupé les géomètres; la marche naturelle de leurs études les a amenés à s'occuper de la déformation des surfaces générales du second degré. Deux voies différentes ont été suivies pour l'étude de cette belle question. Les uns se sont attachés, et ont réussi, à constituer des procédés de récurrence, des méthodes de transformation analogues à celles qu'on avait données pour les surfaces à courbure constante. Les autres ont essayé de rattacher le problème nouveau qui leur était posé au problème, plus simple dans son énoncé, de la déformation de la sphère, et ils y sont parvenus dans un assez grand nombre de cas: pour le paraboloïde quelconque, pour toutes les quadriques de révolution, et même pour la surface plus générale assujettie à l'unique condition d'être tangente *en un seul point* au cercle de l'infini. Ce résultat peut-il s'étendre encore à la surface quadrique la plus générale? La réponse à cette question, qu'elle soit affirmative ou négative, sera également intéressante dans les deux cas. Je crois bien qu'elle ne tardera pas à être donnée; mais pour le moment je suis réduit à dire, en parlant latin dans la Ville Eternelle,

Adhuc sub judice lis est.

XII.

Les équations linéaires aux dérivées partielles et leur rôle en Géométrie infinitésimale.

Il semble bien, d'après ce qui précède, que la Géométrie infinitésimale soit destinée à devenir en quelque sorte une illustration de cette partie du calcul infinitésimal qui traite des équations aux dérivées partielles. Et cependant je ne vous ai encore rien dit des relations étroites, presque surprenantes, qu'elle présente avec les équations *linéaires* aux dérivées partielles à deux variables indépendantes. Ces équations, qui se présentent aussi, mais sous une forme différente, en Physique mathématique, avaient été déjà considérées par LAPLACE, qui avait donné, pour les intégrer, une méthode vraiment originale. Leur étude analytique a été reprise par RIEMANN et MOUTARD. On a perfectionné leur théorie, constitué pour elles une théorie spéciale des invariants. En particulier, celles dont les invariants sont égaux forment un groupe d'un intérêt exceptionnel. MOUTARD avait indiqué, pour les intégrer quand cela est possible, une méthode qui laissait prise aux objections, mais qui s'est trouvée exacte. De sorte que les recherches géométriques ont contribué ici encore à perfectionner les théories analytiques.

Elles nous ont même posé des problèmes auxquels l'Analyse n'aurait pas songé d'elle-même. C'est ainsi que, parmi ces équations linéaires, se sont révélées comme particulièrement dignes d'être formées et étudiées celles qui possèdent un ou plusieurs groupes de solutions particulières liées par une équation quadratique. Par exemple, la recherche des surfaces à courbure constante se ramène à celle des équations de la forme

$$\text{(D)} \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial\alpha\,\partial\beta} = z\,K(\alpha, \beta),$$

qui possèdent trois solutions dont la somme des carrés est égale à l'unité. Celle des surfaces isothermiques se ramène également à celles des équations de même forme possédant cinq solutions pour lesquelles la somme des carrés est nulle, etc.

Parmi les questions dont la solution dépend exclusivement de l'intégration d'une équation linéaire, deux doivent être plus particulièrement mises en évidence: le problème de la représentation sphérique et le problème de la déformation infiniment petite. Il se ramènent l'un à l'autre, et leur solution peut aujourd'hui être considérée comme complètement achevée.

En particulier, la théorie de la déformation infiniment petite constitue la première application un peu étendue d'une méthode qui paraît appelée à un grand avenir.

XIII.

Le système auxiliaire en Géométrie. Déformation finie et déformation infiniment petite.

Étant donné un système d'équations différentielles ou aux dérivées partielles qui contient un certain nombre de fonctions inconnues, il y a lieu de lui adjoindre un système que nous avons appelé *auxiliaire* et qui détermine les solutions du système infiniment voisines d'un système quelconque, donné à l'avance, de solutions. Le système auxiliaire est évidemment linéaire. Son étude, relativement facile, fournit les renseignements les plus précieux sur le système primitif lui-même, et sur la possibilité d'en obtenir l'intégration. Par exemple, en ce qui concerne la déformation d'une surface, l'application des critères de LAPLACE à l'équation auxiliaire permettra de reconnaître s'il est possible d'intégrer l'équation aux dérivées partielles dont dépend la solution complète et générale du problème.

La considération de la déformation infiniment petite permet encore d'appliquer au problème de la déformation finie un théorème de CAUCHY qui, aujourd'hui encore, est à peine connu, mais qui excitait l'admiration de LIOUVILLE, ce juge si sévère et si difficile, surtout pour les travaux de CAUCHY.

Le grand géomètre a montré qu'on peut étendre aux équations aux dérivées partielles un théorème démontré depuis longtemps par LAGRANGE pour les équations linéaires aux dérivées ordinaires et intégrer, *par de simples quadratures*, tout système linéaire non homogène d'équations aux dérivées partielles, quand on a obtenu l'intégrale générale de ce même système, rendu homogène par la suppression des seconds membres des équations.

D'après cela, si l'on veut trouver les surfaces qui résultent de la déformation d'une surface donnée, on pourra, comme je l'ai montré dans mes *Leçons*, résoudre avec une approximation aussi grande qu'on le voudra, et par de simples quadratures, le problème de la déformation finie, toutes les fois qu'on aura intégré l'équation linéaire de la forme (D) dont dépend la solution complète du problème de la déformation infiniment petite.

XIV.

Élargissement des cadres de la Géométrie. Nécessité de méthodes générales et uniformes permettant les simplifications nécéssaires.

J'espère, mes chers Collègues, vous avoir montré que, même en nous bornant aux parties anciennes et déjà explorées, nous trouvons devant nous bien des questions qui peuvent tenter, et les géomètres, et les analystes. Mais que dire de cette partie presque intacte de la Géométrie qui nous a été léguée par les travaux de PLÜCKER, de SOPHUS LIE et de leurs successeurs. Il ne leur a pas suffi d'introduire le plan et de le considérer, au même titre que le point, comme un élément de l'espace. La théorie des polaires réciproques avait rompu les digues. Au point et au plan sont venus s'adjoindre successivement la ligne droite, la sphère, le cercle, puis les courbes et les surfaces accompagnées de leurs plans tangents; on a même réuni ces êtres déjà si complexes en assemblages, qu'on s'est plu à considérer eux-mêmes comme des éléments primordiaux. L'étude des relations infinitésimales est à peine commencée pour cette nouvelle Géométrie. C'est tout au plus si l'on a ébauché la théorie de la ligne droite et de la sphère, reliées l'une à l'autre par l'admirable transformation de SOPHUS LIE. Le cercle et l'hélice ont donné lieu à quelques recherches; on a, en quelque sorte, isolé et étudié certaines classes de congruences rectilignes, parmi lesquelles il faut signaler les congruences *isotropes* de RIBAUCOUR, qui jouent un rôle si élégant dans la théorie des surfaces minima; on a perfectionné en plusieurs points la théorie des systèmes de coordonnées curvilignes et, en particulier, des systèmes triples de surfaces orthogonales. Mais les progrès ultérieurs dépendront exclusivement de l'ordre, de l'uniformité et de la généralité qu'on parviendra à introduire dans les méthodes. C'est à ce prix seulement qu'on pourra réaliser, dans cette branche, les simplifications sans lesquelles tout progrès deviendrait impossible. J'ai confiance qu'ici comme ailleurs, l'extrême généralité des problèmes engendrera la simplicité des solutions.