# LA GÉOMÉTRIE ALGÉBRIQUE

PAR M. FRANCESCO SEVERI,
*Recteur de l'Université de Rome, Rome, Italie.*

Je vais vous parler aujourd'hui de la géométrie algébrique, une des branches caractéristiques de la mathématique italienne.

Je me bornerai à un aperçu des progrès réalisés dans les vingt dernières années et des problèmes les plus importants qui se rapportent à cette branche et qui demeurent toujours en suspens.

Il faut d'abord que je rappelle la distinction des surfaces algébriques en régulières et irrégulières, qui se présente lorsqu'on étend aux surfaces la notion de *genre* des courbes.

Soit une courbe algébrique plane, d'ordre $n$, ayant seulement des points doubles, ce qui n'est pas restrictif au point de vue des transformations birationnelles. Il est alors bien connu que les courbes d'ordre $n-3$, passant par les points doubles de la courbe donnée, sont invariantes vis-à-vis des transformations birationnelles. Leur nombre est, d'après Clebsch, le genre $p$ de la courbe, que Riemann avait auparavant considéré comme un caractère de connexion de la riemannienne correspondante.

Pour calculer $p$, on n'a qu'à faire la différence entre le nombre des paramètres dont dépend une courbe d'ordre $n-3$ et le nombre des conditions de passage par les $d$ points doubles. On trouve que ce dernier nombre est exactement $d$, c'est-à-dire que les conditions susdites sont indépendantes.

Eh bien, le concept de genre peut se transporter aux surfaces, d'après Clebsch et Noether, de la façon suivante:

Soit $F$ une surface algébrique d'ordre $n$, de l'espace à trois dimensions, douée de singularités ordinaires (ligne double et points triples); ce qui n'est point restrictif. Les surfaces d'ordre $n-4$ passant par la courbe double de $F$ sont invariantes vis-à-vis des transformations birationnelles et leur nombre est le genre de la surface.

Mais une différence inattendue se présente ici, dans la comparaison avec le genre des courbes.

Lorsqu'on va calculer le genre de la surface, il faut, en premier lieu, chercher le nombre des conditions imposées par la ligne double aux surfaces d'un ordre $l$ donné, qui doivent la contenir. C'est la formule de postulation relative à cette ligne double. Malheureusement, la formule n'est valable que pour des valeurs suffisamment grandes de l'ordre $l$, et il peut se faire que la limite de validité soit plus grande que $n-4$.

Lorsque cette limite ne dépasse pas $n-4$, le genre de la surface est donné par la valeur purement arithmétique calculée avec la formule de postulation; dans le cas opposé, on trouve que le genre est supérieur à cette valeur. Toutefois, dans chacun des deux cas, cette valeur est elle-même invariante vis-à-vis des transformations birationnelles. On l'appelle pourtant le *genre arithmétique* $p_a$ de la surface, tandis qu'on appelle *genre géométrique* $p_g$ le genre défini auparavant.

Les surfaces régulières sont celles pour lesquelles les deux genres sont égaux; les surfaces irrégulières les autres. La différence, non négative, $p_g - p_a$ s'appelle l'irrégularité de la surface. Cette irrégularité peut-elle même se considérer, à un certain point de vue, comme analogue au genre des courbes.

Rappelons-nous en effet que le genre d'une courbe peut être envisagé soit comme le nombre des intégrales abéliennes de première espèce attachées à la courbe, soit comme la dimension maxima d'un système continu de séries linéaires complètes ayant un ordre donné. Une série linéaire complète sur la courbe est constituée par tous les groupes de niveau de la fonction rationnelle la plus générale qui a un groupe donné de pôles. Si $n$ est le nombre des pôles (compté chacun avec son ordre) le système continu de tous les groupes de $n$ points de la courbe, se partage en plusieurs séries linéaires distinctes, dépendant d'un nombre de paramètres qui, pour $n \geqq p$, atteint le maximum $p$.

Or, lorsqu'on cherche à étendre aux surfaces ces propriétés des courbes, on trouve des difficultés très sérieuses.

L'extension, plus aisée, des intégrales abéliennes de première espèce, conduit aux intégrales doubles partout finies sur la surface. C'est l'extension donnée depuis longtemps par Clebsch. Le nombre de ces intégrales est égal au genre géométrique $p_g$.

Mais il y a une autre extension possible, qui est bien plus cachée: c'est l'extension donnée par M. Picard. Il s'agit, là, des intégrales de différentielles totales ou intégrales simples, partout finies sur la surface.

Dès 1884, dans la théorie des fonctions algébriques de deux variables, la question de caractériser les surfaces possédant des intégrales finies de Picard était à l'ordre du jour. Pendant la période de 1884 à 1904, la théorie des intégrales simples de première, deuxième et troisième espèce, s'était perfectionnée, surtout par les travaux de MM. Picard, Poincaré et Humbert. Pendant la même période, les géomètres italiens avaient cherché à pénétrer au fond de la distinction entre les surfaces régulières et les surfaces irrégulières. On avait ainsi trouvé, d'après Castelnuovo, Enriques et moi-même, des exemples de surfaces irrégulières contenant des systèmes continus non linéaires de courbes, c'est-à-dire des systèmes ne pouvant pas être regardés comme des systèmes de courbes de niveau d'une fonction rationnelle, et M. Enriques avait aussi démontré que tout système continu complet sur une surface régulière est linéaire. On possédait enfin des exemples de surfaces irrégulières admettant des intégrales simples de première espèce.

Tout cela amenait à la prévision que les surfaces irrégulières, les surfaces possédant des intégrales picardiennes de première espèce et celles qui possèdent des systèmes continus non linéaires étaient une seule et même classe.

C'est ce qu'on a démontré en 1904-1905. On a alors trouvé que le nombre des intégrales simples de première espèce est égal à l'irrégularité de la surface et au maximum du nombre des paramètres dont peut dépendre un système linéaire variable dans un système continu. Mais pour dépasser les difficultés qui avaient arrêté la théorie à ce point, il y fallaient des éléments conceptuels nouveaux.

J'ai ouvert la succession très rapide des travaux qui ont conduit au théorème fondamental, en introduisant, en 1904, le concept de série caractéristique d'un système continu (série coupée sur une courbe du système par les courbes infiniment voisines) et le concept de fonction rationnelle résidue, définie par une intégrale abélienne de seconde espèce dépendant rationnellement d'un paramètre.

En conséquence, j'ai pu démontrer, en premier lieu, que les surfaces possédant des intégrales simples de première espèce sont irrégulières. Tout de suite, M. Enriques avait pu, à son tour, en déduire* que la série caractéristique d'un système continu complet est complète, d'où découlait immédiatement la réciproque de mon théorème. Ensuite, en 1905, M. Castelnuovo et moi, nous sommes arrivés, indépendamment l'un de l'autre†, aux parties ultérieures du théorème fondamental. Un peu plus tard, M. Picard considérait les mêmes questions à l'aide d'une certaine équation différentielle à points critiques fixes et présentait tout cela sous un jour nouveau. Et, plus tard encore, en 1910, M. Poincaré reprenait le problème *ab imis* et il en donnait une nouvelle solution dans de profonds travaux qui sont parmi les derniers écrits par le grand mathématicien.

Du théorème fondamental, combiné avec un ancien résultat de M. Picard, découle que le double de l'irrégularité est égal, soit au nombre des intégrales simples de seconde espèce, soit au nombre des cycles linéaires indépendants qu'on peut tracer sur la variété riemannienne à quatre dimensions, attachée à la surface.

A côté des questions se rapportant aux intégrales simples de première et de seconde espèce, il y en a d'extrêmement intéressantes relatives aux intégrales simples de troisième espèce. Le théorème fondamental est dû ici à M. Picard qui a démontré, en 1901, l'existence d'un certain entier $\rho$ attaché à la surface $F$, tel que si l'on prend sur $F$, $\rho$ courbes irréductibles, on ne peut pas trouver une intégrale simple de troisième espèce ayant ces courbes seules comme courbes logarithmiques, tandis qu'on peut toujours construire une intégrale de troisième espèce devenant infinie logarithmiquement le long des courbes susdites et d'une courbe ultérieure arbitrairement choisie.

*Avec une démonstration qui a toujours besoin d'être complétée. Toutefois, on peut certainement affirmer que toute surface contient des systèmes continus ayant la série caractéristique complète, et cela suffit au but. Voir ma note dans les Rendiconti dei Lincei, t. XXX (1921), p. 297.

†Cependant M. Castelnuovo fait usage, dans un point essentiel de sa démonstration, du théorème que j'avais donné comme fondement de la mienne.

En 1905, j'ai trouvé la signification géométrique de ce théorème en introduisant la notion de courbes algébriquement liées. On dit que deux courbes de $F$ sont algébriquement équivalentes lorsqu'elles appartiennent à un même système continu,* et que plusieurs courbes de $F$ sont algébriquement dépendantes lorsqu'une combinaison linéaire à coefficients entiers positifs de certaines d'entre elles est équivalente à une combinaison semblable des courbes restantes.

Eh bien, j'ai démontré que la condition nécessaire et suffisante pour que plusieurs courbes de $F$ soient algébriquement dépendantes, est qu'elles puissent être envisagées, par elles seules, comme des courbes logarithmiques d'une intégrale simple de troisième espèce. Ce résultat combiné avec le théorème de M. Picard, améne à la résolution générale du *problème de la base* pour les courbes de $F$, problème que j'avais déjà posé et résolu pour des classes particulières de surfaces.

Sur $F$, on peut donc fixer $\rho$ courbes algébriquement indépendantes, de sorte que toute autre courbe de $F$ dépende des courbes fixées. L'ensemble de ces courbes constitue une base des courbes de $F$. M. Poincaré est parvenu, plus tard, de son côté, au même résultat et il a appelées primitives les courbes d'une base.

Il serait très bon de construire cette théorie par des méthodes purement algébrico-géométriques, qui lui sont plus propres. Il faudra démontrer tout d'abord que les fonctions rationnelles d'un ordre donné, rationnellement déterminées sur une courbe renfermant un paramètre rationnel, se distribuent en un nombre fini de systèmes continus.

La considération de la base m'a permis soit de prouver que toute intégrale simple attachée à une surface régulière se réduit à une combinaison algébrico-logarithmique, soit de construire une sorte d'algèbre ayant pour éléments les courbes de $F$. J'ai développé cette algèbre dans plusieurs travaux. Avant tout, en considérant les intersections des courbes de la base deux à deux, on forme avec les $\rho^2$ entiers ainsi obtenus, un déterminant d'ordre $\rho$ qui s'appelle le discriminant. Pour que $\rho$ courbes forment une base, il faut et il suffit que le discriminant soit différent de zéro. Les discriminants des différentes bases ont le même signe; et les bases qui correspondent à la plus petite valeur absolue du discriminant sont des bases intermédiaires, par lesquelles il faut passer pour arriver à une base minima, c'est-à-dire à une base dont on déduit toute courbe de $F$, avec les seules opérations rationnelles d'addition et de soustraction.

Une base minima contient généralement plus que $\rho$ courbes. Pour l'avoir, il faut en effet ajouter à une base intermédiaire un certain nombre $\sigma-1$ de courbes, $\sigma$ étant un nouveau caractère de la surface, qui est le maximum du nombre des courbes algébriquement distinctes que l'on peut obtenir par l'opération de division d'une courbe par un entier.

M. Lefschetz a donné dans ces dernières années des interprétations singulièrement intéressantes de la théorie de la base en établissant des liens très étroits entre cette théorie et les résultats de Poincaré sur l'Analysis situs.

*Quelquefois, pour que la définition ne soit pas fictive, il faut d'abord ajouter aux deux courbes une même courbe convenable.

A la division d'une courbe par un entier et au groupe fini abélien d'opérations qui s'y rattache, correspond la notion de torsion des cycles des différentes dimensions tracés sur la riemannienne $V$ attachée à $F$ et celle de groupe de torsion.

L'équivalence algébrique de deux courbes algébriques tracées sur $F$ revient à une homologie entre les cycles à deux dimensions images des deux courbes, de sorte que l'existence d'une base sur $F$, découle de l'existence d'un ordre fini de connexion à deux dimensions de la riemannienne $V$.

Je ne puis pas m'arrêter sur les belles propriétés des intégrales doubles et surtout des intégrales doubles de seconde espèce, introduites par M. Picard, ainsi que sur leurs rapports avec la base. Tout cela se trouve exposé d'une façon suggestive dans le petit Traité que M. Lefschetz a fait paraître cette année. Je me bornerai à rappeler le remarquable théorème de M. Lefschetz, suivant lequel les cycles à deux dimensions de la riemannienne $V$, qui correspondent aux courbes algébriques de la surface $F$, sont caractérisés par la propriété que la période de toute intégrale double de première espèce le long d'un tel cycle est nulle.

Quant aux intégrales doubles de première espèce qui sont nulles sur tout cycle à deux dimensions de $V$, je croyais avoir démontré qu'elles se réduisent à des constantes; mais cette démonstration a besoin d'être achevée. Dans ce champ, on se meut très péniblement à cause de la non maturité de la théorie des fonctions analytiques de deux variables. Des connaissances plus profondes d'Analysis situs sont aussi nécessaires. Peut-être serait-il bon de chercher à tirer quelque parti de la considération des intégrales comme fonctions de lignes ou de surfaces. Mais il faudrait auparavant développer la théorie des fonctions de lignes dans le champ complexe.

J'aurais maintenant à m'arrêter sur quelques autres chapitres les plus importants de géométrie algébrique, mais comme je ne dois pas abuser de votre amabilité, je me bornerai à donner très rapidement une liste de problèmes qui attendent leur solution et que j'estime essentiels pour le progrès de cette branche de géométrie.

*Au sujet des intégrales de première espèce:* Interprétation géométrique directe de l'identité par laquelle M. Picard exprime la condition d'existence des différentielles totales de 1ère espèce.

*Au sujet des intégrales simples de deuxième espèce:* Interprétation de la condition analytique pour qu'une intégrale de deuxième espèce se réduise à une fonction rationnelle. Conséquences relatives au théorème de Riemann-Roch sur une surface. Il s'agit là du nombre des paramètres renfermés dans la fonction rationnelle la plus générale ayant une courbe polaire donnée. Dans ce théorème énoncé par Noether, démontré par M. Castelnuovo et perfectionné par moi, on considère une valeur virtuelle et une valeur effective de ce nombre. La valeur effective n'est jamais plus petite que la valeur virtuelle, et dans le cas général, les deux valeurs coïncident.

On doit chercher une signification de leur différence, valable en tous cas. C'est une question très importante.

*Au sujet des intégrales simples de troisième espèce:* Etant donnée sur la surface une courbe $C$ variable dans un système continu, construire toutes les intégrales de troisième espèce qui deviennent infinies logarithmiquement le long de $C$ et d'une autre courbe indéterminée de même ordre. Cela revient à donner une construction transcendante du système continu complet déterminé par $C$.

*Au sujet des systèmes continus de courbes algébriques dans l'espace:* Donner les conditions pour qu'une courbe réductible soit la limite d'une courbe irréductible. J'ai résolu récemment la question analogue pour les courbes planes et pour certains cas de dégénérescence des courbes de l'espace.

J'en ai déduit aussi une démonstration algébrique très simple du théorème d'existence de Riemann qu'on faisait découler du problème de Dirichlet. C'est une question fondamentale pour la classification des courbes.

*Au sujet des conditions de rationalité des involutions d'un espace linéaire.* C'est à M. Castelnuovo qu'on doit le remarquable théorème concernant la rationalité des involutions planes. Il y a ici une anomalie des plus frappantes, qui ne sont pas rares dans le domaine de l'algèbre. En effet, les involutions algébriques sont toujours rationnelles sur la droite (Lüroth) et dans le plan; non plus dans l'espace. M. Enriques a donné le premier exemple d'une involution irrationnelle de l'espace.

On demande les conditions de rationalité des involutions spatiales. La question est aussi liée au problème de la rationalité de la variété générale à trois dimensions de l'espace à quatre dimensions. A première vue, on est tenté de regarder ce problème comme très aisé. C'est une apparence bien trompeuse!

*Au sujet des variétés à plusieurs dimensions.* Démontrer l'invariance du genre arithmétique vis-à-vis des transformations birationnelles et trouver la relation entre ce genre et les nombres des intégrales de première espèce, simples, doubles, triples . . . , attachées à la variété. J'ai résolu ces questions pour les variétés à trois dimensions et j'ai donné par induction, la relation générale qu'on doit démontrer.

Tout ce que j'ai dit jusqu'ici, malheureusement, ne peut que donner une idée assez imparfaite de l'esprit qui domine notre géométrie: esprit largement synthétique, loin de tout exclusivisme de méthodes si dangereux dans la science. On tient toujours en vue le but principal, qui est d'éclaircir la théorie des fonctions par l'intuition géométrique et de viser les propriétés fonctionnelles audessus du symbolisme qui, quoique instrument nécessaire de nos recherches, ne doit jamais constituer leur but final.

Nous avons abandonné le purisme des géomètres de la première moitié du XIX$^e$ siècle et nous sommes ainsi très loin du jour où Steiner demandait à Weierstrass de l'aider à écrire l'équation de sa célèbre surface!

Nous devons cet esprit à nos maitres italiens Cremona, Betti, Bertini, Veronese, Segre, aux savants allemands Riemann, Clebsch, Klein, Brill et Noether, au danois Zeuthen, aux anglais Cayley, Sylvester et Salmon, et aux travaux, si profondément géométriques dans leur esprit, des analystes français, de Galois à Poincaré, à Picard, à Painlevé, à Humbert.

Comme le peu que j'ai pu faire dans la science est le fruit de l'enseignement savant et passionné de mon maitre direct, Corrado Segre, que la mort nous a prématurément ravi, le 18 mai dernier, qu'il me soit permis d'envoyer à son souvenir les hommages du disciple affectionné et reconnaissant et ceux, bien plus hauts, du Congrès.