АНАЛИТИЧЕСКИЕ ПРОБЛЕМЫ И РЕЗУЛЬТАТЫ ТЕОРИИ ЛИНЕЙНЫХ ОПЕРАТОРОВ В ГИЛЬБЕРТОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

М. Г. КРЕЙН

В этом году исполняется шестьдесят лет с момента, когда в Göttingen Nachrichten появилось четвертое сообщение Давида Гильберта. В этом сообщении Гильберт подвел итог своим исследованиям по теории квадратичных форм с бесконечным числом переменных и по сути впервые получил для любого ограниченного самосопряженного оператора спектральное разложение.

Работа Гильберта определила развитие теории операторов на многие годы; это был один из тех могучих толчков, которыми современная математика обязана великому ученому.

Исследования Гильберта тотчас же привлекли внимание многих выдающихся математиков мира; вместе с тем лишь к концу 20-х годов Дж. Нейман и М. Стоун выработали точное понятие неограниченного самосопряженного оператора и в обобщение результата Гильберта получили для такого оператора спектральное разложение. Одновременно Дж. Нейман построил удивительно прозрачную теорию расширений эрмитовых операторов.

К этому моменту уже свершилось нечто непредвиденное и невероятное. Когда механики и физики прошлых времен при описании каких-либо явлений прибегали к линейным дифференциальным уравнениям, они делали это в глубоком убеждении, что истинные-то уравнения нелинейны, а их исследования являются исследованиями в первом приближении.

И вдруг новая механика — квантовая механика объявила: линейность операторов, описывающих явления микромира, есть закон природы. Более того, этими операторами оказались именно операторы, действующие в гильбертовом пространстве, — пространстве состояний микрообъекта.

Отныне к усилиям математического ума присоединилась физическая интуиция с ее смелостью и прозрением. Это не замедлило сказаться. В связи с различными вопросами квантовой статистики и теории квантованных полей в теории возмущений линейных операторов накопилось к настоящему времени множество с математической точки зрения полуфабрикатов, и трудно хотя бы приблизительно себе представить, во что переплавятся они в математическом горниле. В этой связи я укажу, например, на понятие S-матрицы Гейзенберга, которое как бы повторно рождается в математике. Это понятие обрело четкие математические контуры в теории возмущения самосопряженных операторов: S-матрицу обнаруживают в классических вопросах математической физики, в вопросах, связанных с теорией стационарных случайных процессов, и самое удивительное — в различных вопросах теории несамосопряженных операторов.

Весьма значительные результаты в теории гильбертовых пространств получены в процессе встречного чисто внутреннего развития этой теории. В настоящее время мы наблюдаем, как на арене гильбертовых пространств разыгрываются события, свидетельствующие о том, что теория операторов в этих пространствах полна жизни и устремлена к новым крупным проблемам.

Я смогу рассказать здесь лишь об одной цепочке этих событий. Не знаю, удастся ли это передать, но все они принадлежат некоему связному множеству — некоему массиву, который имеет совершенно своеобразную архитектуру, свой особый аналитический аппарат и, можно даже сказать, свое особое исчисление. Сюда относятся различные вопросы теории эрмитовых, самосопряженных и несамосопряженных операторов, теории возмущений, теории рассеяния, разнообразные вопросы теории пространств с индефинитной метрикой, теория прямых и обратных спектральных задач для канонических уравнений, различные аналитические проблемы и многое другое.

1. Некоторые положения теории возмущений

Условимся относительно некоторых обозначений и терминологии. Через $\mathfrak{R} = \mathfrak{R}(\mathfrak{H})$ обозначим банахову алгебру всех линейных ограниченных операторов, действующих в сепарабельном гильбертовом пространстве $\mathfrak{H}$, а через $\mathfrak{S}_\infty$ — замкнутый идеал кольца $\mathfrak{R}$, состоящий из всех вполне непрерывных операторов.

Каждому оператору $A \in \mathfrak{S}_\infty$ соответствует последовательность s-чисел $\{s_j(A)\}_1^\infty$, которая определяется как последовательность всех собственных чисел неотрицательного оператора $|A| = (A^*A)^{1/2} \geqslant 0$, занумерованных с учетом их кратности в порядке убывания.

Через $\mathfrak{S}_p$ обозначаются идеалы Неймана — Шаттена:

$$\mathfrak{S}_p = \{A\colon A \in \mathfrak{S}_\infty, \ \sum s_j^p(A) < \infty\}.$$

Особую роль играет идеал $\mathfrak{S}_1$ — идеал ядерных операторов. Ядерный оператор A среди других операторов из $\mathfrak{R}$ характеризуется тем, что в любом ортонормированном базисе $\{e_j\}_1^\infty$ у него существует абсолютно сходящийся матричный след, иными словами, ряд $\sum\limits_{j=1}^{\infty} (Ae_j, e_j)$ абсолютно сходится. Этот матричный след, по теоэме В. Б. Лидского, совпадает со спектральным следом, е. с суммой собственных чисел оператора A:

$$\operatorname{sp} A = \sum (Ae_j, e_j) = \sum \lambda_j(A).$$

Для ядерных операторов A имеет смысл определитель

$$\det(I-A) = \lim \det \| \delta_{jk} - (Ae_j, e_k) \|_1^n = \prod_j (1-\lambda_j(A)).$$

Известно, что в теории возмущений ядерные операторы выделяютı среди прочих вполне непрерывных операторов своим сравниэльно спокойным характером. Имеется в виду следующее: пусть $_0$ и H_1 — два самосопряженных оператора, отличающиеся на церный $H_1 = H_0 + V$ $(V \in \mathfrak{S}_1)$. Тогда всегда абсолютно непреывный спектр операторов H_0 и H_1 один и тот же; более того, абсоютно непрерывные части этих операторов унитарно эквивалентны. то выяснилось в результате работ Розенблюма и Като. По поводу гих работ, как и ряда других предшествующих и последующих ажных исследований М. Ш. Бирмана, Т. Като, Дж. Кука, С. Куоды, О. А. Ладыженской, К. Меллера, П. А. Рейто, Л. Д. Фадеева, К. О. Фридрихса (основоположных), Я. М. Яуха и др. я огу лишь отослать к двум книгам по теории возмущений — к ниге К. О. Фридрихса [1] и к книге Т. Като [2].

Как было установлено Г. Вейлем, Дж. Нейманом и С. Куродой, эзмущениями V из идеалов более широких, чем $\mathfrak{S}_1$, можно всегда эбиться того, чтобы непрерывный спектр превратился в точечый. Вместе с тем мы укажем сейчас идеал вполне непрерывных ператоров, который содержит в себе все идеалы $\mathfrak{S}_p$, и все же операторы из этого идеала оказываются вполне благонадежными в друих вопросах теории возмущений. Этот замечательный идеал $\mathfrak{S}_\omega$ ыл введен В. И. Мацаевым; его определение следующее:

$$\mathfrak{S}_\omega = \left\{ A\colon\ A \in \mathfrak{S}_\infty,\ \sum \frac{1}{n} s_n(A) < \infty \right\}.$$

Оказывается, многие окончательные формулировки в спектральом анализе несамосопряженных операторов могут быть даны олько с помощью этого идеала.

Приведем в качестве примера следующую теорему В. И. Мааева [3а]:

Пусть оператор $H = H^*$ имеет дискретный спектр (т. е. лектр, состоящий из собственных чисел конечной кратности с единтвенной точкой сгущения на бесконечности). Тогда, каков бы ни был ператор $V \in \mathfrak{S}_\omega$, система корневых векторов оператора $A = H + V$ олна в $\mathfrak{H}$.

Если же вполне непрерывный оператор V не входит в $\mathfrak{S}_\omega$, то айдется самосопряженный оператор H с дискретным спектром, акой, что у оператора $A = H + V$ спектра не будет вовсе.

Первая часть этого утверждения допускает более сильную формулировку, дополняющую известную теорему М. В. Келдыша [4] о полноте.

Вообще вопросы полноты системы корневых векторов линейных операторов, как таковые, не входят в план доклада. В частности вне его останутся многочисленные исследования (в основном советских) математиков, отправляющихся от основоположной работы М. В. Келдыша [4]. Некоторое представление об имеющихся здесь возможностях и достижениях можно получить из первой книги Гокра [6а], а также из обзорного доклада М. В. Келдыша и В. Б. Лидского [5].

При изучении спектральных свойств операторов со сложным спектром вопрос о полноте заменяется вопросом о существовании у оператора достаточно полного набора инвариантных подпространств.

Здесь также исключительная роль принадлежит операторам мацаевского класса.

Соответствующую теорему снова можно было бы сформулировать как теорему о несамосопряженных возмущениях самосопряженного оператора. Однако мы выиграем в общности и законченности, если перейдем от самосопряженных операторов к унитарным.

Пусть U — произвольный унитарный оператор, $V \in \mathfrak{S}_\omega$, и пусть весь спектр оператора $T = U + V$ находится на единичной окружности. Тогда каждой дуге единичной окружности

$$\delta_{\alpha,\beta} = \{e^{i\theta}\colon \alpha \leqslant \theta \leqslant \beta\}$$

отвечает инвариантное подпространство $\mathfrak{L}_{\alpha,\beta}$ оператора T со следующими свойствами:

1. *$\mathfrak{L}_{\alpha,\beta}$ является максимальным инвариантным подпространством оператора T, в котором спектр оператора T лежит на дуге $\delta_{\alpha,\beta}$.*
2. *Если конечная система $\{\delta\}$ открытых дуг δ покрывает единичную окружность, то алгебраическая сумма соответствующих подпространств $\{\mathfrak{L}_\delta\}$ плотна в $\mathfrak{H}$.*

Для оператора T, удовлетворяющего условиям теоремы, как показал В. И. Мацаев [3б], выполняется «билогарифмическое условие»:

$$\int_{1-\varepsilon}^{1+\varepsilon} \ln^+ \ln^+ M_T(\rho)\, d\rho < \infty \qquad (\varepsilon > 0), \qquad (1)$$

где

$$M_T(\rho) = \max_{|\zeta|=\rho} \|(T - \zeta I)^{-1}\| \qquad (\rho \neq 1).$$

Условие (1), согласно исследованию Ю. И. Любича и В. И. Мацаева, уже обеспечивает указанные в теореме свойства оператора

T. Из исследований этих же двух авторов следует, что билогарифмическое условие (1) эквивалентно условию

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\ln^{+} \| T^n \|}{1+n^2} < \infty. \qquad (2)$$

Последнее условие в несколько усложненной форме впервые рассматривал Дж. Уэрмер.

Необходимо отметить, что к работе Ю. И. Любича и В. И. Мацаева [7] тесно примыкают выполненная параллельно работа Е. Бишопа, работа Ч. Фойяша, предшествующие работы Дж. Уэрмера и Ф. Вольфа, а также недавняя работа Л. де Бранжа [8a]. В работах В. И. Мацаева и де Бранжа доказывается точность этой теоремы. Для формулировки этого предложения заметим, что для обратимого оператора T условие $D_T = I - T^*T \in \mathfrak{S}_\omega$ эквивалентно возможности представления T в виде $T = U + V$, где U — унитарный оператор, а $V \in \mathfrak{S}_\omega$.

Пусть оператор $D \in \mathfrak{S}_\infty \setminus \mathfrak{S}_\omega$, тогда при некоторых ограничениях на размерность ядра оператора D можно построить обратимый оператор $T\,(\in \mathfrak{R})$, такой, что $D_T = D$, и в каждом инвариантном относительно T и T^{-1} подпространстве спектр оператора T совпадает со всей окружностью.

2. Диссипативные операторы и операторы сжатия

Всякая линеаризованная механическая система, в которой имеется диссипация энергии, описывается линейным оператором A, плотно определенным в $\mathfrak{H}$, со значениями формы (Af, f) в левой полуплоскости:

$$\operatorname{Re}(Af, f) \leqslant 0 \quad (f \in \mathfrak{D}_A).$$

В квантовой механике диссипация энергии характеризуется тем, что форма линейного оператора, описывающего физическую систему, лежит в верхней полуплоскости, т. е.

$$\operatorname{Im}(Af, f) \geqslant 0 \quad (f \in \mathfrak{D}_A).$$

Для определенности, говоря о диссипативных операторах, мы будем иметь в виду операторы последнего типа, т. е. диссипативные операторы квантовой механики.

Диссипативный оператор называется *максимальным*, если его нельзя расширить с сохранением свойства диссипативности. По теореме Ральфа Филлипса, для того чтобы диссипативный оператор был максимальным, достаточно, чтобы он имел хотя бы одну регулярную точку внутри нижней полуплоскости, и необходимо, чтобы все внутренние точки этой полуплоскости были регулярными.

Р. Филлипс показал также, что всякий диссипативный операто
допускает расширение до максимального.

Как и в теории Неймана расширения эрмитовых операторов
в исследованиях Р. Филлипса существенную роль играет преобра
зование Кэли

$$T=(A-iI)(A+iI)^{-1}.$$

Если оператор A является максимальным диссипативным, то в это
и только этом случае преобразование Кэли будет давать оператор
определенный на всем $\mathfrak{H}$ с нормой $\|T\|\leqslant 1$. Такие операторы име
нуются *сжатиями*. Как правило, всякий вопрос, касающийся ма
ксимальных диссипативных операторов, можно переформулироват
как некоторый вопрос, относящийся к сжатиям.

Мы преимущественно будем говорить о сжатиях, посколь
понятие оператора сжатия является более элементарным.

Сжатие называется простым, если ни на каком из своих инва
риантных подпространств оно не индуцирует унитарного оператора
По теореме Г. К. Лангера — Б. С. Надя — Ч. Фойяша, всяко
сжатие распадается в ортогональную сумму унитарного оператор
и простого сжатия.

В наших целях достаточно ограничиться только простыми сжа
тиями и соответственно только простыми диссипативными операто
рами, которые определяются аналогично.

Сжатие T будем называть *слабым*, если выполняются два усло
вия:

а) оператор T обратим: $T^{-1}\in\mathfrak{R}$;

б) оператор отклонения D_T $(=I-T^*T)$ оператора T от унитар
ного является ядерным.

Условие а) можно было бы заменить более общим, а именно
у оператора T существует хотя бы одна регулярная точка внутр
единичного круга.

Хотя условие б) является весьма стеснительным, все же пр
переходе от слабых сжатий к соответствующим диссипативны
операторам получается класс операторов, содержащий, в частности
операторы, порождаемые радиальным уравнением Шредингер
с комплексным потенциалом достаточного общего типа.

В исследованиях по теории линейных операторов общего тип
задача о построении континуального аналога теории элементарны
делителей, подобно синей птице, всегда оставалось неуловимой
Именно в поисках этой птицы И. М. Гельфанд пришел к теории ком
мутативных нормированных колец — одному из самых красивы
творений современного анализа.

Эти же стремления привели Н. Данфорда, Дж. Шварца и и
последователей к развитию известной теории спектральных опера
торов.

Однако после всего до недавнего времени трудно было указать сколько-нибудь общий класс операторов, для которого был бы построен некоторый аналог теории элементарных делителей. В настоящее время можно уже говорить о некоторых достижениях в этом направлении. А если речь идет о слабых сжатиях, то со всей категоричностью можно утверждать, что здесь мы уже достигли Мыса Доброй Надежды.

Прежде всего укажем, что для слабых сжатий можно построить некоторый эрзац векового определителя, а именно

$$d_T(\zeta) = \det(T^*(T-\zeta I)(I-\zeta T^*)^{-1}).$$

Легко показывается, что под знаком определителя стоит выражение типа $I + A$, где $A \in \mathfrak{S}_1$. Этот определитель допускает следующее представление:

$$d_T(\zeta) = \sqrt{\det(T^*T)}\, B_T(\zeta) \exp\left\{-\int_0^{2\pi} \frac{e^{it}+\zeta}{e^{it}-\zeta}\, d\omega(t)\right\}, \tag{3}$$

где $B_T(\zeta)$ — произведение Бляшке:

$$B_T(\zeta) = \prod_j \frac{\lambda_j - \zeta}{1-\bar{\lambda}_j\zeta} \cdot \frac{|\lambda_j|}{\lambda_j},$$

а $\omega(t)$ — неубывающая функция, нормированная условием $\omega(0) = \omega(+0) = 0$.

Все элементы в этом представлении допускают операторно-спектральное истолкование.

В частности, числа $\{\lambda_j\}$ суть собственные числа сжатия T, причем каждое из них фигурирует столько раз, какова его алгебраическая кратность (т. е. какова размерность соответствующего корневого подпространства).

Если в равенстве (3) положить $\zeta = 0$, то получим

$$\sqrt{\det(T^*T)} = \prod |\lambda_j| \exp\left\{-\int_0^{2\pi} d\omega(t)\right\}.$$

Имеет место следующая группа утверждений:

I. *Пространство $\mathfrak{H}$ единственным образом распадается в квазипрямую сумму двух инвариантных относительно T и T^{-1} подпространств $\mathfrak{E}$ и $\mathfrak{H}_0$:*

$$\mathfrak{H} = \mathfrak{E} \dot{+} \mathfrak{H}_0 \quad (\mathfrak{E} \cap \mathfrak{H}_0 = \{0\};\ \overline{\mathfrak{E} + \mathfrak{H}_0} = \mathfrak{H}),$$

где $\mathfrak{E}$ — замкнутая линейная оболочка всех корневых подпространств оператора T. Спектр оператора T в $\mathfrak{H}_0$ лежит на единичной окружности.

Система корневых векторов T будет полной, т. е. $\mathfrak{H} = \mathfrak{E}$, в том и только том случае, когда $d_T(\zeta) = B_T(\zeta)$, т. е. $\det(T^*T) = \prod |\lambda_j|^2$. Таким образом, следующие три утверждения эквивалентны:

$$\mathfrak{H} = \mathfrak{E} \Leftrightarrow d_T(\zeta) = B_T(\zeta) \Leftrightarrow \det(T^*T) = \prod |\lambda_j|^2.$$

Обозначим через T_0 сужение сжатия T на $\mathfrak{H}_0$. Пусть $\mathfrak{L}_t$ — максимальное инвариантное подпространство оператора T_0, в котором его спектр лежит на дуге $e^{i\theta}$ $(0 \leqslant \theta \leqslant t)$. Тогда

$$\omega(t+0) = -\frac{1}{2} \ln \det (I + P_t D_T P_t), \tag{4}$$

где P_t — ортопроектор, проектирующий $\mathfrak{H}$ на $\mathfrak{L}_T$, а $D_T = I - T^*T$.

Оператор $A \in \mathfrak{R}$ называется *одноклеточным*, если множество всех его инвариантных подпространств упорядочено по вложению. Для оператора в n-мерном пространстве одноклеточность означает, что оператор состоит из одной жордановой клетки.

Если у одноклеточного оператора T $(\in \mathfrak{R})$ оператор отклонения D_T принадлежит мацаевскому классу, то, как легко заключить из предыдущего, спектр оператора T состоит из одной точки, лежащей на единичной окружности.

У одноклеточного оператора в n-мерном пространстве спектр также состоит из одной точки. Но это еще его не характеризует полностью. Одна из полных характеристик такого оператора заключается в том, что его резольвента имеет полюс n-го (максимального возможного) порядка. Оказывается, что среди слабых сжатий одноклеточные также вполне характеризуются наивысшим порядком роста резольвенты. Точно теорема формулируется следующим образом:

II. *Для того чтобы простое слабое сжатие T было одноклеточным, необходимо и достаточно, чтобы* 1) *оператор T не имел собственных чисел внутри единичного круга и* 2) *выполнялось равенство*

$$\varlimsup_{\rho \uparrow 1} \{(1-\rho) \ln M_T(\rho)\} = -\frac{1}{2} \ln \det (T^*T), \tag{5}$$

где, как и выше,

$$M_T(\rho) = \max_{|\zeta|=\rho} \|(T - \zeta I)^{-1}\| \qquad (\rho \neq 1).$$

Если выполняется первое условие, но оператор T не является одноклеточным, то в (5) *имеет место знак* $<$.

В таком виде теорема приведена во второй книге Гокра [66]. Она представляет собой некоторую переработку с уточнением критерия Бродского — Кисилевского одноклеточности вольтеррова оператора. Оператор A называется *вольтерровым*, если он вполне непрерывен и весь его спектр сосредоточен в нуле.

Не прибегая пока к понятию характеристической функции, тео-)ему Бродского — Кисилевского [9] можно сформулировать следую-щим образом:

II'. *Пусть A — вольтерров диссипативный оператор с ядерной мнимой компонентой, т. е.*

$$A \in \mathfrak{S}_\infty, \quad \sigma(A) = \{0\}, \quad A_J = \frac{1}{2i}(A - A^*) \geqslant 0, \quad \operatorname{sp} A_J < \infty.$$

Тогда оператор A одноклеточен в том и только том случае, когда

$$\lim_{r \downarrow 0} r \ln \|(A - irI)^{-1}\| = 2 \operatorname{sp} A_J.$$

В линейной алгебре линейный оператор A одноклеточен в том и только том случае, когда он имеет единственную точку спектра и цикличен, т. е. существует такой вектор f, что система $f, Af, \ldots, A^{n-1}f$ составляет базис пространства. Легко показывается, что всякий ограниченный одноклеточный оператор является циклическим, т. е. существует такой вектор f, что

$$\bigvee_{n=1}^{\infty} A^n f = \mathfrak{H}.$$

Однако в бесконечномерном гильбертовом пространстве, даже если ограничиться вольтерровыми операторами, цикличность оператора, вообще говоря, не влечет его одноклеточности. Вместе с тем, как недавно показал Г. Э. Кисилевский, всякий циклический простой диссипативный вольтерров оператор с ядерной мнимой компонентой одноклеточен.

Всякий линейный оператор, действующий в конечномерном пространстве, либо одноклеточен, либо распадается в прямую сумму одноклеточных. Г. Э. Кисилевский [10] распространил это предложение на диссипативные вольтерровы операторы, действующие в гильбертовом пространстве.

III. *Всякий простой вольтерров диссипативный оператор с ядерной мнимой компонентой либо одноклеточен, либо имеет место следующее:*

а) *пространство $\mathfrak{H}$ распадается в квазипрямую сумму подпространств $\mathfrak{L}_k$ $(k = 1, 2, \ldots, \omega \leqslant \infty)$, инвариантных относительно A:*

$$\mathfrak{H} = \Sigma \dotplus \mathfrak{L}_k, \quad A\mathfrak{L}_k \subseteq \mathfrak{L}_k;$$

б) *сужение оператора A на $\mathfrak{L}_k$ $(k = 1, 2, \ldots)$ является одноклеточным оператором.*

Кардинальное число ω и положительные числа

$$\tau_k = \operatorname{sp}(A \mid \mathfrak{L}_k)$$

суть инварианты оператора A.

Таким образом, для простых диссипативных вольтерровых операторов с ядерной мнимой компонентой установлены аналоги многих основных предложений линейной алгебры. Однако следует особо подчеркнуть одно поразительное обстоятельство. Все эти аналоги установлены для операторов, для которых **нет никакого аналога** в линейной алгебре. Действительно, если в линейной алгебре $\sigma(A) = \{0\}$, то

$$\operatorname{sp} A = \operatorname{sp} A_R + i \operatorname{sp} A_J = 0,$$

следовательно, $\operatorname{sp} A_J = 0$, а так как $A_J \geqslant 0$, то $A_J = 0$. Таким образом, оператор A самосопряжен, т. е. в конечномерном пространстве не существует простых диссипативных вольтерровых операторов.

Аналогичным образом показывается, что в линейной алгебре абсурдно понятие простого сжатия со спектром на единичной окружности.

Вместе с тем наиболее замечательные факты в теории сжатий относятся к простым сжатиям со спектром на единичной окружности.

Мы не исчерпали всех результатов, полученных для одноклеточных операторов. Отметим, что родственные, иногда эквивалентные, иногда дополняющие результаты для сжатий были недавно получены Б.С.-Надем и Ч. Фойяшем в их замечательной серии работ по сжатиям[1]).

В алгебраическом случае при исследовании спектральных свойств оператора невозможно обойтись одним вековым определителем. Тем более невозможно обойтись его суррогатом в бесконечномерном случае. В предыдущих утверждениях нам неоднократно приходилось обращаться к резольвенте оператора. Оказывается, имеется объект, который определяется значительно сложнее, чем резольвента, но который хранит в себе ключи к решению многих вопросов теории несамосопряженных операторов. В частности, значительная часть предыдущих утверждений была получена с помощью этого объекта.

Таким объектом является *характеристическая функция* несамосопряженного оператора. В настоящее время имеются разнообразные определения характеристической функции — этого спутника несамосопряженного оператора. Можно различать два типа характеристических функций. Функции первого типа характеризуют отклонение оператора от унитарного, а второго типа — от самосопряженного. Характеристическая функция $\theta_T(\zeta)$ первого типа

[1]) Эта серия публикуется в журнале *Acta Math. Szeged* начиная с 1953 г. и в настоящее время насчитывает 13 работ; в дальнейшем цитируются только некоторые из этих работ. (См. примечание, добавленное при корректуре, на стр. 209.)

оператора T определяется равенством

$$\theta_T(\zeta) = [\,|I - TT^*|^{-1/2}(T - \zeta I)(I - \zeta T^*)^{-1}|I - T^*T|^{1/2}]\,|\,\overline{D_T\mathfrak{H}},$$

где через $|A|$ обозначается операторный модуль самосопряженного оператора A, т. е. неотрицательный оператор, квадрат которого равен A^2, а через $A \mid \mathfrak{L}$ — сужение оператора A на подпространство $\mathfrak{L}$.

При каждом ζ, для которого $(I - \zeta T^*)^{-1} \in \mathfrak{R}$, значение $\theta_T(\zeta)$ является линейным ограниченным оператором, действующим из подпространства $\overline{D_T\mathfrak{H}}$ в подпространство $\overline{D_{T^*}\mathfrak{H}}$.

При весьма общих условиях характеристическая оператор-функция задает простой оператор с точностью до унитарной эквивалентности.

Впервые эта функция была введена в докторской диссертации М. С. Лившица в 1944 г. для случая, когда

$$\dim D_T\mathfrak{H} = 1.$$

В этом случае $\theta_T(\zeta)$ является, в сущности, скалярной функцией, а сам оператор T будет либо растяжением, либо сжатием. Вообще в случае, когда оператор отклонения D_T конечномерен, функцию $\theta_T(\zeta)$ можно рассматривать как матрицу-функцию. Для этого случая она по существу была получена в 1950 году М. С. Лившицем и В. П. Потаповым [13]. К сожалению, недостаток времени не позволяет изложить эволюцию этого важнейшего понятия — эволюцию, которая продолжалась в течение двадцати лет под влиянием и при участии автора понятия и которая продолжается в настоящее время.

В частности, я не имею возможности остановиться на характеристической функции второго типа, также впервые введенной М. С. Лившицем и получившей существенное развитие в работах М. С. Бродского [14, 15a].

С совершенно новых позиций к характеристической функции для сжатий пришли в 1963 г. Б. С.-Надь и Ч. Фойяш [11a]. В работах этих авторов она впервые изучалась без предположения полной непрерывности операторов отклонения D_T и D_{T^*}.

В случае сжатия T определение функции $\theta_T(\zeta)$ упрощается:

$$\theta_T(\zeta) = [T - \zeta D_{T^*}^{1/2}(I - \zeta T^*)^{-1} D_T^{1/2}]\,|\,\overline{D_T\mathfrak{H}}.$$

В этом случае оператор-функция $\theta_T(\zeta)$ голоморфна внутри единичного круга, причем

$$\|\theta_T(\zeta)\| \leqslant 1 \qquad (|\zeta| \leqslant 1).$$

Умножая произвольный линейный ограниченный оператор на достаточно малую константу, можно превратить его в сжатие со сколь угодно малой нормой. Затем для полученного сжатия можно составить характеристическую функцию. Однако вряд ли можно рассчитывать на то, что характеристическая функция доставит в этом случае какую-либо новую ценную информацию. По-видимому, эта функция оказывается полезной, лишь когда оператор в каком-то смысле близок к унитарному. До недавнего времени в работах советских математиков мерилом такой близости служило условие полной непрерывности операторов отклонения D_T и D_{T^*}. Но возможна близость другого рода, а именно подобие оператора T унитарному, означающее существование ограниченного и обратимого S ($S^{-1} \in \mathfrak{R}$), такого, что

$$T = S^{-1}US, \tag{6}$$

где U — унитарный оператор. Сравнительно давно было обнаружено, что простое сжатие может быть подобно унитарному оператору. В алгебраическом случае всякое сжатие, подобное унитарному оператору, само является унитарным оператором. Большое достижение теории Надя — Фойяша составляет следующий общий критерий подобия сжатия унитарному оператору.

IV. *Сжатие T подобно унитарному оператору в том и только том случае, когда при любом ζ ($|\zeta| < 1$) оператор $\theta_T(\zeta)$ взаимно однозначно отображает подпространство $\overline{D_T\mathfrak{H}}$ на $\overline{D_{T^*}\mathfrak{H}}$ и*

$$\sup_{|\zeta|<1} \| \theta_T^{-1}(\zeta) \| < \infty.$$

Легко видеть, что если некоторый оператор T (не обязательно сжатие) подобен унитарному, то он обладает следующими двумя свойствами:

$$\alpha) \quad \sigma(T) \subset \{e^{i\varphi}:\ 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi\}$$

и

$$\beta) \quad \sup_{|\zeta| \neq 1} (1 - |\zeta|) \| (T - \zeta I)^{-1} \| < \infty.$$

Как следствие критерия Надя — Фойяша получается, что в случае сжатия T *эти условия являются не только необходимыми, но и достаточными для подобия T унитарному оператору*; см. [6г].

Как заметил А. С. Маркус, можно построить операторы с наперед заданным спектром на единичной окружности, удовлетворяющие условиям α) и β) и не подобные никакому унитарному. Разумеется, всякий такой оператор уже не будет сжатием.

Критерий Надя — Фойяша для слабых сжатий дает следующий достаточный признак:

Слабое сжатие T со спектром на единичной окружности подобно унитарному оператору, коль скоро его функция спектрального сдвига $\omega(t)$ принадлежит классу Lip_1 (0, 2π).

Если операторы отклонения конечномерны, то этот признак является также достаточным. Можно указать и другой случай, когда этот признак является достаточным. Для его получения требуется точный анализ структуры инвариантных подпространств оператора.

Если сжатие T подобно унитарному оператору, то

$$T=\int_0^{2\pi} e^{it}\,dF(t),$$

где $F(t)$ — некоторое *косое* разложение единицы, нормированное, например, условием $F(t-0)=F(t)$ $(0<t\leqslant 2\pi,\ F(0)=0,\ F(2\pi)=I)$. Обозначим через $P(t)$ ортопроектор, проектирующий все пространство $\mathfrak{H}$ на подпространство $F(t)\mathfrak{H}$ $(0\leqslant t\leqslant 2\pi)$. Разложение единицы $P(t)$ $(0\leqslant t\leqslant 2\pi)$ называется *спрямленной* спектральной функцией оператора T. Имеет место следующая теорема.

Пусть заданы неотрицательный оператор H с $\|H\|<1$ и некоторое ортогональное разложение единицы $P(t)$ $(0\leqslant t\leqslant 2\pi)$.

Для того чтобы существовало сжатие T, подобное унитарному оператору, с отклонением $D_T=H$ и со спрямленной спектральной функцией $P(t)$ $(0\leqslant t\leqslant 2\pi)$, необходимо и достаточно, чтобы оператор-функция $H^{1/2}P(t)\,H^{1/2}$ удовлетворяла условию Липшица

$$\|H^{1/2}(P(t)-P(s))\,H^{1/2}\|\leqslant \mathrm{const}\,|t-s|.$$

При выполнении этого условия оператор $T=U(I-V)^{-1}$, где

$$U=\int_0^{2\pi} e^{it}\,dP(t)$$

и

$$V=\int_0^{2\pi}(I-P(t)HP(t))^{-1}P(t)H\,dP(t), \tag{7}$$

является единственным сжатием со свойствами:

1) *спектр T лежит на единичной окружности,*

2) $P(t+0)\mathfrak{H}$ $(0<t<2\pi)$ *является максимальным инвариантным подпространством оператора T, в котором его спектр лежит на дуге $e^{i\varphi}$ $(0\leqslant\varphi\leqslant t)$.*

Здесь опускается формулировка аналогичной теоремы, дающей описание диссипативных операторов, подобных самосопряженным.

В качестве примера рассмотрим в пространстве n-мерных вектор-функций $L_2^{(n)}(0,1)$ оператор сжатия следующего вида:

$$(Tf)(t)=e^{i\alpha(t)}f(t)+\int_t^1 K(t,s)\,f(s)\,ds,$$

где $K(t, s)$ $(0 \leqslant t,\ s \leqslant 1)$ — (для простоты) непрерывное эрмитово матричное ядро, порождающее ядерный оператор. Тогда функция $\omega(t)$ вычисляется по формуле

$$\omega(t) = \int\limits_{0 \leqslant \alpha(s) \leqslant t} \operatorname{sp} K(s, s)\, ds.$$

Принадлежность функции $\omega(t)$ классу Lip_1 является необходимым и достаточным условием подобия оператора T унитарному.

Это же условие $(\omega \in \mathrm{Lip}_1)$ для диссипативного оператора

$$(Af)(t) = \alpha(t) f(t) + 2i \int\limits_t^1 K(t, s) f(s)\, ds \quad (f \in L_2(0, 1)),$$

где $K(t, s)$ — произвольное непрерывное эрмитово положительное ядро, является необходимым и достаточным для подобия оператора A самосопряженному оператору.

Последний результат для случая $n = 1$ и $K(t, s) \equiv 1$ был получен ранее в статье [11в]. При $\alpha(t) = t$ оператор A всегда будет подобен самосопряженному (см. [16б]).

3. Треугольное представление операторов и мультипликативные представления оператор-функций

Сформулированная выше теорема, дающая полное описание сжатий, подобных унитарным, была получена Гокром [6 г] с использованием упоминавшихся результатов Надя — Фойяша, а также новых средств, связанных с теорией абстрактных треугольных и мультипликативных интегралов. В самой формулировке теоремы уже фигурирует треугольный интеграл (правая часть (7)).

Приведем ряд определений. Замкнутое (в смысле сильной сходимости) множество ортогональных проекторов $\mathfrak{P} = \{P\}$ называется *цепочкой*, если оно упорядочено (естественным образом) и содержит проекторы 0 и I. Пара проекторов (P^-, P^+) $(P^- < P^+;\ P^\pm \in \mathfrak{P})$ называется *разрывом* цепочки $\mathfrak{P}$, если в $\mathfrak{P}$ нет ни одного проектора, расположенного между P^- и P^+. Цепочка, не имеющая ни одного разрыва, называется *непрерывной*.

Цепочка $\mathfrak{P}$ называется *максимальной*, если она не является правильной частью никакой другой цепочки. Цепочка $\mathfrak{P}$ называется *собственной* цепочкой данного оператора A $(\in \mathfrak{R})$, если все подпространства $P\mathfrak{H}$ инвариантны относительно A, т. е. если $AP = PAP$ $(P \in \mathfrak{P})$.

Согласно теореме Гильберта, всякий линейный самосопряженный ограниченный оператор H допускает представление

$$H = \int_a^b \lambda\, dE_\lambda,$$

где E_λ — разложение единицы, порождаемое оператором H. Пусть $\mathfrak{P}$ — произвольная собственная цепочка оператора H, содержащая цепочку $\{E_\lambda\}_{a<\lambda<b}$. Тогда последний интеграл можно переписать в виде

$$H = \int_{\mathfrak{P}} \lambda(P)\, dP = \int_{\mathfrak{P}} \lambda(P)\, P\, dP,$$

где $\lambda(P)$ — верхняя грань спектра оператора H в инвариантном подпространстве $P\mathfrak{H}$. Этот интеграл можно было бы назвать *диагональным интегралом* вдоль цепочки. Он является частным случаем *треугольного* интеграла вдоль цепочки, имеющего вид

$$J = \int_{\mathfrak{P}} F(P)\, dP, \tag{8}$$

где $F(P)$ — функция на цепочке с операторными значениями.

Интеграл (8) понимается в смысле сходимости по норме операторов соответствующих частных сумм, причем предел понимается по направленному множеству всех разбиений цепочки $\mathfrak{P}$.

Если выполнено условие

$$F(P) = PF(P),$$

то интеграл (8) называется *треугольным*. В этом случае цепочка $\mathfrak{P}$ будет собственной для оператора J.

В конечномерном случае треугольный интеграл в базисе, расширяющемся вместе с цепочкой $\mathfrak{P}$, будет изображаться треугольной матрицей.

Простейшим треугольным интегралом, естественно, является интеграл

$$\int_{\mathfrak{P}} PC\, dP, \tag{9}$$

где C — вполне непрерывный оператор. Этот интеграл впервые появился в 1958 г. в работе М. С. Бродского в результате некоторой переработки треугольной модели несамосопряженного оператора, предложенной М. С. Лившицем. М. С. Бродский показал, что для всякого вольтеррова оператора A имеет место представление

$$A = \int_{\mathfrak{P}} PC\,dP,$$

где $\mathfrak{P}$ — какая-либо собственная максимальная цепочка оператора A, а $C = 2iA_J$ (существование такой цепочки вытекает из результатов Неймана — Ароншайна — Смита [17]).

Этим представлением, однако, не решался следующий вопрос: пусть наперед задан оператор C и цепочка $\mathfrak{P}$; при каких условиях существует интеграл (9), а если он существует, то какому классу операторов принадлежит этот интеграл, когда оператор C принадлежит тому или иному классу? В связи с этим вопросом были обнаружены весьма неожиданные связи между спектрами эрмитовых компонент вольтерровых операторов. Мацаевский класс операторов оказался и здесь исключительным по своей роли. Выяснилось, что интеграл (9) сходится вдоль любой непрерывной цепочки $\mathfrak{P}$ в том и только том случае, когда оператор $C \in \mathfrak{S}_\omega$. Самая трудная часть этой теоремы — достаточность — была доказана В. И. Мацаевым.

Теорию треугольного интеграла (9), вместе с ее приложениями к самосопряженным краевым задачам для канонических систем дифференциальных уравнений, можно найти во второй книге Гокра [6б]. Там же можно найти приложения теории этого интеграла в вопросах устойчивости решений канонических систем дифференциальных уравнений с периодическим гамильтонианом.

Мы не имеем возможности остановиться здесь на более общих треугольных представлениях операторов — представлениях, содержащих еще и диагональную часть операторов.

В основе теории треугольного интеграла лежит идея существования неких континуальных аналогов элементарной теоремы И. Шура о возможности приведения любой матрицы к треугольному виду с помощью унитарного преобразования.

Лагранж за целое столетие до Шура предложил метод приведения квадратичной формы к сумме квадратов. На языке теории матриц этот метод давал, в частности, решение задачи о представлении положительно определенной матрицы в виде

$$G = A^*A, \qquad (10)$$

где A — треугольная матрица. Континуальный аналог этой задачи в общем виде был рассмотрен Гокром [6].

В операторном случае задача формулируется следующим образом: пусть, для простоты, G — положительно определенный оператор, а $\mathfrak{P}$ — некоторая цепочка; требуется представить оператор G

в виде (10), где A ($\in \mathfrak{R}$) — некоторый оператор с собственной цепочкой $\mathfrak{P}$: $PAP = AP$ ($P \in \mathfrak{P}$). Будем называть эту задачу задачей о факторизации оператора G вдоль цепочки $\mathfrak{P}$.

Если эта задача допускает решение, то оператор A определяется, очевидно, с точностью до правого унитарного множителя, коммутирующего с проекторами $P \in \mathfrak{P}$. Однако если оператор G имеет вид $G = I + H$, где $H \in \mathfrak{S}_\infty$, а множитель A разыскивается в таком же виде $A = I + X$, $X \in \mathfrak{S}_\infty$, то в факторизации (10), если она существует, оператор A определяется единственным образом.

Оператор A выражается через оператор H и цепочку $\mathfrak{P}$ треугольным интегралом

$$(A-I)^{-1} = I + \int_{\mathfrak{P}} (I - PHP)^{-1} PH\, dP \tag{11}$$

или мультипликативным [1]) интегралом

$$A = \overset{\curvearrowleft}{\int_{\mathfrak{P}}} \exp\left(dPHP\,(I-PHP)^{-1}\right).$$

Оказывается, что принадлежность H мацаевскому классу обеспечивает сходимость рассматриваемых интегралов вдоль любой непрерывной цепочки $\mathfrak{P}$. Если, однако, в случае простейшего треугольного интеграла (9) Гокру удалось показать, что условие $C \in \mathfrak{S}_\omega$ является также необходимым, то здесь аналогичный вопрос остается открытым.

Следует подчеркнуть, что для фиксированной непрерывной цепочки $\mathfrak{P}$ интеграл (9) (или (11)) может сходиться даже и в том случае, когда оператор C (соответственно H) не вполне непрерывен. Это будет, например, иметь место, если цепочка $\mathfrak{P}$ является достаточно гладкой по отношению к оператору $C(H)$. Именно с таким случаем мы и встретились в интеграле (7).

Не вдаваясь ни в какие детали, укажем лишь, что та факторизация, которая встречается в теории уравнений типа Винера — Хоп-

---

[1]) Отметим вообще, что при широких условиях треугольный интеграл

$$J = \int_{\mathfrak{P}} F(P)\, dP$$

связан с мультипликативным следующим равенством:

$$(J+I)^{-1} = \overset{\curvearrowleft}{\int_{\mathfrak{P}}} \exp\left(dPF(P)\right).$$

Последний интеграл понимается как предел по норме соответствующих частных произведений по направленному множеству разбиений цепочки.

фа, укладывается в приведенную общую схему абстрактной задачи факторизации вдоль цепочки.

В исследованиях Гокра задача факторизации не была самоцелью. Она возникла как некий промежуточный этап, необходимый для построения теории треугольных представлений операторов, близких к унитарным. Решение этой задачи сыграло важную роль при получении мультипликативного представления характеристической оператор-функции операторов, близких к унитарным. Ограничимся, для простоты, случаем сжатия T без спектра внутри единичного круга. Такое представление можно записать в следующем виде:

$$T^*\theta_T(\zeta) = |T| \overset{\curvearrowleft}{\int\limits_{\mathfrak{P}}} \exp\left(-\frac{e^{i\varphi(P)}-\zeta}{e^{i\varphi(P)}+\zeta}\right) \mathfrak{R}^*(P)\, dP\, \mathfrak{R}(P), \tag{12}$$

где $\mathfrak{P}$ — собственная максимальная цепочка оператора T, содержащая цепочку P_t, которая уже определялась, а $\mathfrak{R}(P)$ — некоторая оператор-функция на цепочке $\mathfrak{P}$, вычисляемая по вполне определенным правилам. В случае слабого сжатия или сжатия, подобного унитарному, интеграл определяется обычным способом. В других случаях, например, когда $D_T \in \mathfrak{S}_\omega$ — а в этом случае представление (12) всегда имеет место,— интеграл надо, вообще говоря, определять специальным образом.

Отметим, что в этих исследованиях Гокра принимал участие В. М. Бродский (младший). Они проводились под влиянием предшествовавших исследований М. С. Бродского [15а, б], которому удалось впервые получить мултипликативное представление характеристической функции (второго типа) для ограниченного оператора с вполне непрерывной мнимой компонентой как следствие треугольного представления операторов.

Отметим, что поскольку собственная цепочка $\mathfrak{P}_T$, вообще говоря, не определяется однозначно по оператору, то и представление (12) его характеристической функции не определяется единственным образом.

Аналитические проблемы, связанные с описанием и классификацией всех мультипликативных представлений характеристической оператор-функции данного оператора, по-видимому, и должны составить ту теорию, которая заменит теорию элементарных делителей при переходе от конечномерного случая к бесконечномерному.

Изложенным чисто операторным исследованиям предшествовали фундаментальные исследования В. П. Потапова [18] и его ученика Ю. П. Гинзбурга [19] о мультипликативном представлении аналитических матриц- и оператор-функций. Сформулируем теорему В. П. Потапова для так называемого дефинитного случая.

Пусть $\theta(\zeta)$ — *голоморфная внутри единичного круга матрица-функция, значениями которой являются сжатия. Тогда* $\theta(\zeta)$ *допускает следующее представление*:

$$\theta(\zeta)=U\overset{\curvearrowleft}{\int_a^b}\exp\left\{-\frac{e^{i\varphi(t)}+\zeta}{e^{i\varphi(t)}-\zeta}\,dF(t)\right\}B(\zeta), \qquad (13)$$

где

$$B(\zeta)=\overset{\curvearrowleft}{\prod_k}\left(\frac{\zeta_k-\zeta}{1-\bar{\zeta}_k\zeta}\cdot\frac{|\zeta_k|}{\zeta_k}P_k+Q_k\right),$$

U — *постоянный унитарный оператор*, $\varphi(t)$ — *неубывающая функция* $(0\leqslant\varphi(t)\leqslant2\pi$ *при* $a\leqslant t\leqslant b)$, $F(t)$ — *монотонная эрмитовозначная матрица-функция*, P_k — *ортопроекторы*, $Q_k=I-P_k$.

Эта теорема обобщает соответствующую теорему о мультипликативном представлении голоморфной внутри круга скалярной ограниченной функции. Последнюю мы, в сущности, использовали при записи мультипликативного представления определителя $d_T(\zeta)$ для слабого сжатия. Более общим классом скалярных функций является класс, введенный Р. Неванлинной,— так называемый класс функций ограниченного вида. Его известными подклассами являются классы Ф. Рисса, М. Рисса, Харди и др. Ю. П. Гинзбургу удалось определить матричные и операторные аналоги этих классов и получить для них мультипликативные представления.

Возникает вопрос, как связаны теоремы В. П. Потапова и Ю. П. Гинзбурга с теоремами о мультипликативном представлении характеристической оператор-функции? Связь самая тесная, хотя в настоящее время эти результаты не перекрывают друг друга. Дело в том, что всякая голоморфная внутри круга функция $\theta(\zeta)$, значениями которой служат сжатия в некотором пространстве $\mathfrak{N}$, допускает следующее представление:

$$\theta(\zeta)=V\theta_T(\zeta)\oplus U, \qquad (14)$$

где V, U — некоторые постоянные унитарные операторы, а $\theta_T(\zeta)$ — характеристическая функция некоторого простого сжатия T. Последнее восстанавливается с точностью до унитарной эквивалентности и действует в некотором новом пространстве $\mathfrak{H}$.

Представление (14) даже в случае скалярной функции $\theta(\zeta)$, когда $U=0$, а V — число, равное по модулю единице, уже составляло некоторое открытие, сделанное М. С. Лившицем в упоминавшейся работе 1944 г. (см. [12а]). Впоследствии оно обобщалось этим автором, его учениками и сотрудниками. Наконец, в самом общем виде это представление было установлено в работах Надя и Фойяша. Ряд результатов и общая идея связи между мультипликативным представлением матрицы-функции или оператор-функции и структурой инвариантных подпространств некоторого несамосопряженного оператора также принадлежит М. С. Лившицу.

Большим успехом явились установленные Ю. П. Гинзбургом теоремы единственности мультипликативных представлений (13) сжимающих матриц-функций, которые он распространил на так называемый ядерный случай. Характерно, что для получения определенной части этих результатов пришлось воспользоваться связью с теорией характеристических функций операторов и теоремами об одноклеточности слабых сжатий. Отметим, наконец, что В. П. Потапов получил также мультипликативное представление для матриц-функций, мероморфных внутри единичного круга, значениями которых являются операторы сжатия по отношению к некоторой индефинитной метрике. Эти результаты, а тем более последующие обобщения Ю. П. Гинзбурга до сих пор не удалось в полном объеме получить чисто операторными методами.

Следует надеяться, что в ближайшие годы будет ликвидировано расхождение между тем, что дают чисто аналитические методы в проблеме мультипликативного представления, с одной стороны, и операторные методы, опирающиеся на треугольные представления и теорию характеристических функций, с другой стороны.

Это расхождение в значительной мере объясняется тем, что для операторов, близких к унитарным и отличных от сжатий или растяжений, по-видимому, все еще не получено достаточно общего определения характеристической оператор-функции. Дело в том, что при имеющихся определениях этой функции в индефинитном случае нет разложения, аналогичного разложению (14).

Разумеется, когда речь идет о мультипликативном представлении оператор-функций, разделение методов на чисто аналитические и чисто операторные весьма условно. Ведь объект, подлежащий рассмотрению,— некий гибрид: это аналитическая функция, но ее значениями служат операторы.

В частности, этот гибрид имеет особо сложную операторную природу в индефинитном случае. Мы не имеем никакой возможности останавливаться на трудностях, порожденных индефинитностью. Они доставили много неприятностей даже в конечномерном случае.

В теории интеграла Стильтьеса — Коши играют важную роль формулы Сохоцкого — Племеля. В весьма широких предположениях аналоги этих формул для мультипликативных интегралов получил Л. А. Сахнович [16а, б]. Эти формулы позволили ему при достаточно общих предположениях о характере диссипативных возмущений построить теорию рассеяния, сходную во многом с теорией рассеяния Розенблюма — Като для самосопряженных операторов. Отмечу также перекрывающуюся с этими результатами недавнюю работу Тосио Като по теории уравнений Шредингера с комплексным потенциалом [2]. Я до сих пор ни разу не отметил, что отправным пунктом исследований Секефальви-Надя — Фойяша служит теорема Б. Секефальви-Надя о существовании у каждого сжатия унитарного растяжения. Последовательное развитие теории растяжения сжатий выявило ее связи с задачей о рассеянии и теорией прогнозирования стационарных случайных процессов.

В результате выяснилось, что характеристическую функцию сжатия всегда можно трактовать как гейзенберговскую S-матрицу соответствующим образом сформулированной задачи рассеяния.

Все это обнаружилось, когда П. Лакс и Р. Филлипс построили новую теорию рассеяния акустических волн на препятствиях. Эта изящная теория замечательна единством методов классической математической физики, абстрактной теории операторов и идей, заимствованных из квантовой механики и теории прогнозирования стационарных случайных процессов. В этой теории и была предложена новая абстрактная схема задачи о рассеянии, которая сразу сблизила исследования этих авторов с исследованиями Надя — Фойяша. Связь между двумя теориями четко разъяснена в недавних работах двух молодых математиков: В. М. Адамяна и Д. З. Арова. В этих работах часть исследований четырех авторов, о которых шла речь, обобщена (в направлении дальнейшего их сближения с исследованиями по прогнозированию) в виде своеобразной теории сцеплений полуунитарных операторов [25 а, б, в, г].

Насколько мне известно, в самом недалеком будущем мы будем иметь удовольствие ознакомиться в деталях с теориями Надя — Фойяша и Филлипса — Лакса по книгам этих авторов [1]).

Здесь же укажу на недавнюю книгу М. С. Лившица [12 в], в которой изложены применения характеристической матрицы-функции в разнообразных задачах теории электрических сетей, волноводов и задачах ядерной физики.

4. Целые эрмитовы операторы и теория канонических представлений операторов

Все предыдущие рассуждения носили сугубо несамосопряженный характер. Вместе с тем, часть изложенного имеет кардинальное значение и в тех исследованиях по теории самосопряженных операторов, которые можно объединить под названием «Теория канонических представлений самосопряженных операторов».

К концу 30-х годов после работ Т. Карлемана, Дж. Неймана, М. Стоуна и М. А. Наймарка теория эрмитовых и самосопряженных операторов казалась завершенной; создавалось впечатление, что

[1]) Во время подготовки настоящего издания указанные книги вышли в свет [21, 26].

на долю последующих исследователей и поколений остается лишь внедрение законченной теории в смежные области математики и физики. На самом деле, впереди лежали трудные вопросы, требующие большого нового аналитического аппарата.

Чтобы дать первое представление об одной из столь поздно замеченных проблем, напомним следующий элементарный факт из линейной алгебры. Как известно, для всякого эрмитова оператора с простым спектром, действующего в конечномерном пространстве, существует бесконечное число ортонормированных базисов, в которых оператор изображается якобиевой (т. е. трехдиагональной) эрмитовой матрицей.

Этот результат непосредственно переносится на ограниченные операторы. Пусть G ($\in \mathfrak{R}$) — самосопряженный оператор с простым спектром. Простота спектра означает цикличность оператора G, т. е. наличие вектора $u \in \mathfrak{H}$, для которого последовательность $u, Gu, G^2u, \ldots$ полна в $\mathfrak{H}$. Если эту последовательность ортогонализовать по Шмидту, то в полученном базисе оператору G будет отвечать якобиева матрица

$$G \sim \begin{Vmatrix} a_1 & b_1 & 0 & & \\ \bar{b}_1 & a_2 & b_2 & 0 & \\ 0 & \bar{b}_2 & a_3 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \ddots & \ddots \end{Vmatrix}.$$

Это представление, разумеется, не единственно и определяется выбором производящего вектора u.

А что произойдет, если наш оператор $G = H$ неограничен? Заведомо известно, что не для всякого оператора с простым спектром существует ортонормированный базис, в котором оператор будет изображаться якобиевой матрицей.

С другой стороны, давно известно, что дифференциальные операторы второго порядка следует рассматривать как континуальные аналоги операторов, задаваемых якобиевыми матрицами. Спрашивается, достаточен ли запас дифференциальных операторов для получения изображения произвольного самосопряженного оператора H по любому наперед заданному его производящему элементу u? Этот запас оказывается, вообще говоря, недостаточным, если даже допускать в качестве коэффициентов у дифференциального оператора обобщенные функции. Мы получим нужный нам класс, если введем в рассмотрение канонические дифференциальные операторы. С помощью этих дифференциальных операторов уже можно описывать любые самосопряженные операторы, причем со спектром любой кратности. Центральным в этой теории является понятие *целого эрмитова оператора*.

Приведем определение целого оператора, точнее $\mathfrak{L}$-*целого эрмитова оператора*. Пусть H — некоторый простой замкнутый эрмитов оператор с плотной областью определения $\mathfrak{D}(H)$. Обозначим через $\mathfrak{M}_z$ множество значений оператора $H - zI$:

$$\mathfrak{M}_z = (H - zI)\,\mathfrak{D}(H).$$

Пусть $\mathfrak{L}$ — некоторое подпространство в $\mathfrak{H}$. Данный простой эрмитов оператор H называется $\mathfrak{L}$-целым, если для любого z

$$1)\ \mathfrak{M}_z = \overline{\mathfrak{M}_z} \quad \text{и} \quad 2)\ \mathfrak{M}_z \dot{+} \mathfrak{L} = \mathfrak{H}.$$

Отметим, что уже из первого условия следует, что дефектные числа оператора H равны, т. е. $\dim(\mathfrak{H} \ominus \mathfrak{M}_z) = \dim \mathfrak{L}$. Обозначим через $\mathfrak{E}(z)$ косой проектор, проектирующий пространство $\mathfrak{H}$ на $\mathfrak{L}$ параллельно $\mathfrak{M}_z$. Если оператор H является $\mathfrak{L}$-целым, то $\mathfrak{E}(z)$ оказывается целой оператор-функцией. Это означает, что отображение $f \to f_{\mathfrak{L}}(z) = \mathfrak{E}(z)f$ относит каждому вектору $f \in \mathfrak{H}$ целую функцию от z со значениями в $\mathfrak{L}$. Это отображение является одно-однозначным. При этом отображении оператор H переходит в оператор умножения на z, т. е. если $g = Hf$, то $g_{\mathfrak{L}}(z) = zf_{\mathfrak{L}}(z)$. Этим и объясняется название «$\mathfrak{L}$-целый оператор».

В полученном представлении скалярное произведение будет записываться следующим образом:

$$(f, g) = \int_{-\infty}^{\infty} g_{\mathfrak{L}}^{*}(\lambda)\, d\sigma(\lambda)\, f_{\mathfrak{L}}(\lambda) \qquad (f, g \in \mathfrak{H}), \tag{15}$$

где $\sigma(\lambda) = \sigma(\lambda - 0)$ $(\sigma(-\infty) = 0)$ — неубывающая ограниченная оператор-функция, значениями которой служат неотрицательные операторы, действующие в $\mathfrak{L}$. Если $\mathfrak{L}$ одномерно, то все стоящие здесь функции можно рассматривать как скалярные. Для придания правой части более изящного вида использовано следующее обозначение для скалярного произведения векторов из $\mathfrak{L}$:

$$(a, b) = b^{*}a \qquad (a, b \in \mathfrak{L}).$$

Формулой

$$\sigma(\lambda) = P_{\mathfrak{L}} E(\lambda) P_{\mathfrak{L}},$$

где $E(\lambda)$ — какая-либо обобщенная спектральная функция оператора H, а $P_{\mathfrak{L}}$ — ортогональный проектор на $\mathfrak{L}$, описывается множество $\Sigma(H; \mathfrak{L})$ всех спектральных функций $\sigma(\lambda)$, дающих представление (15). Существует чисто аналитическое описание множества $\Sigma(H, \mathfrak{L})$; оно получается с помощью так называемой резольвентной матрицы $W(z)$ второго порядка, элементы которой суть операторы, действующие в $\mathfrak{L}$. В недавней работе докладчика и Ш. Н. Саакяна

[23] было получено следующее компактное представление этой матрицы:

$$W(z)=\begin{pmatrix} I-zF(z)\mathscr{E}^*(0) & -zF(z)F^*(0) \\ z\mathscr{E}(z)\mathscr{E}^*(0) & I+z\mathscr{E}(z)F^*(0) \end{pmatrix}, \tag{16}$$

где $F(z)$ — целая оператор-функция, *союзная* с функцией $\mathscr{E}(z)$; она определяется равенством

$$F(z)=P_{\mathfrak{L}}(H-zI)^{-1}(1-\mathscr{E}(z)).$$

С помощью этой матрицы-функции $W(z)$ находится общий вид интеграла

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{d\sigma(\lambda)}{\lambda-z} \qquad \left(\sigma(\lambda)\in\Sigma(H;\mathfrak{L})\right).$$

Получаемый при этом результат следует рассматривать как обобщение классического результата Рольфа Неванлинны, дающего описание всех решений неопределенной проблемы моментов. В некотором отношении это не является неожиданным. На спектральную функцию $\sigma(\lambda)$ можно смотреть как на решение обобщенной проблемы моментов. В самом деле, в равенстве (15) в левой части стоит известная величина для любых f и $g\in\mathfrak{H}$, известными являются также функции $f_{\mathfrak{L}}(z)$ и $g_{\mathfrak{L}}(z)$. Этот результат примыкает к старым исследованиям М. А. Наймарка и докладчика по описанию обобщенных резольвент и последующим работам А. В. Штрауса и его учеников.

Неожиданным оказалось, что при весьма общих условиях $W\left(\frac{1}{z}\right)$ является характеристической функцией (в смысле М. С. Бродского) некоторого вольтеррова оператора. Поэтому на основании результатов В. П. Потапова и М. С. Бродского эта функция допускает мультипликативное представление

$$W(z)=\int\limits_{0}^{\overset{\curvearrowleft}{l}}\exp(-zJ\mathscr{H}(t)\,dt),$$

где $\mathscr{H}(t)$ — функция, значениями которой являются ограниченные эрмитовы операторы, действующие в ортогональной сумме двух копий пространства $\mathfrak{L}$: $\mathfrak{L}\oplus\mathfrak{L}$, а J — вещественный квадратный корень из $-I$:

$$J=\begin{pmatrix} 0 & I_{\mathfrak{L}} \\ -I_{\mathfrak{L}} & 0 \end{pmatrix}.$$

Этому представлению отвечает каноническое дифференциальное уравнение

$$J\frac{d\varphi}{dt}=\lambda\mathscr{H}(t)\varphi \qquad (0\leqslant t\leqslant l).$$

Эказывается, что множество Σ (H; $\mathfrak{L}$) спектральных функций σ (λ) совпадает с множеством спектральных функций неполной краевой задачи для приведенного канонического уравнения. Неполнота означает, что граничное условие задается только на левом конце. При этом сами функции $f_{\mathfrak{L}}(z)$ можно интерпретировать как обобщенные преобразования Фурье соответствующих функций из $L_2(0, l; \mathfrak{L})$ с помощью определенным образом нормированной фундаментальной функции $\varphi(t; \lambda)$.

Пусть теперь H — произвольный самосопряженный оператор,

$$H=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\lambda\, dE(\lambda)$$

— его спектральное разложение, а $\mathfrak{L}$ — некоторое минимальное воспроизводящее подпространство, т. е.

$$\bigvee_{-\infty<\lambda<\infty}\{E(\lambda)\,\mathfrak{L}\}=\mathfrak{H}.$$

Оказывается, оператор H можно рассматривать как предел расширяющейся системы $\mathfrak{L}$-целых операторов. Иначе это означает, что ему можно сопоставить каноническое уравнение типа (15), однако уже на полуоси, которое будет иметь в качестве своей единственной спектральной функции функцию $\sigma(\lambda) = P_{\mathfrak{L}}E(\lambda)P_{\mathfrak{L}}$.

Мы видим, что нам удалось обойтись уравнениями первого порядка, однако фазовая размерность этих уравнений равна удвоенной размерности $\mathfrak{L}$ (если $\mathfrak{L}$ конечномерно). Если оператор H положителен и имеет простой спектр, то отвечающее ему каноническое уравнение можно преобразовать в уравнение струны с произвольным распределением масс. К сожалению, гамильтониан $\mathscr{H}(t)$, вообще говоря, определяется неоднозначно. По-видимому, вопрос о том, какие дополнительные условия следует налагать на гамильтониан $\mathscr{H}(t)$, чтобы он определялся однозначно, является вопросом огромной трудности, и вряд ли можно надеяться, что он будет решен в ближайшие несколько лет.

Для случая $n = \dim\mathfrak{L} = 1$, когда спектральная функция $\sigma(\lambda)$ — скалярная неубывающая функция, ей всегда можно сопоставить каноническую систему с вещественным гамильтонианом $\mathscr{H}(t)$ (со следом $= 1$). Около пятнадцати лет тому назад я пришел к предположению, что при такой нормировке в этом случае гамильтониан будет определяться однозначно. В ряде важных случаев оно мною было подтверждено. Полное доказательство этого предположения недавно получил Луи де Бранж [8б] в его исследованиях по гильбертовым пространствам целых функций. Тем самым было доказано и второе мое предположение [24] о том, что *всякий вещественный простой вольтерров оператор с двумерной кососимметрической компонентой является вещественно одноклеточным.*

Я не имею возможности сформулировать различные предположения и проблемы, возникшие в теории канонических представлений самосопряженных операторов. Для развития этой теории весьма существенно распространить ее на тот случай, когда в качестве $\mathfrak{L}$ выбирается пространство обобщенных элементов первого порядка сингулярности относительно оператора H. Для случая конечномерного $\mathfrak{L}$ соответствующее обобщение получается без труда. В случае бесконечномерного $\mathfrak{L}$ здесь не выработана еще точная постановка проблемы. Вероятно, с этим связано, что до сих пор еще не построены целые эрмитовы операторы, изображаемые дифференциальными операторами в частных производных.

Заканчивая свой доклад, я хотел бы подчеркнуть, что исполнял обязанности не архитектора, а скорее гида, показывающего отдельные достопримечательности большого нового центра. Иногда мы шли медленнее, иногда мчались, пролетая стремглав целые магистрали. Естественно, за предоставленный короткий срок я не мог не огорчить руководителей целых районов, территории которых мы проскочили или даже обошли стороной. Приношу им мои извинения [1]).

Одесский инженерно-строительный институт, СССР

ЛИТЕРАТУРА

[1] Friedrichs K. O., Perturbation of spectra in Hilbert space, AMS, 1965.

[2] Kato T., Perturbation theory, Springer Verlag, 1966.

[3] Мацаев В. И., а) Теоретико-функциональные методы в некоторых вопросах теории линейных самосопряженных операторов, Докторская диссертация, Москва, 1966.

б) Об одном классе вполне непрерывных операторов, *ДАН СССР*, **139**, № 4 (1961), 810-814.

[4] Келдыш М. В., О собственных значениях и собственных функциях некоторых классов несамосопряженных уравнений, *ДАН СССР*, **74**, № 1 (1951), 11-14.

[5] Келдыш М. В., Лидский В. Б., Вопросы спектральной теории несамосопряженных операторов, Труды IV Всесоюзного математического съезда, т. 1, 1963, стр. 101-120.

[6] Гохберг И. Ц., Крейн М. Г., а) Введение в теорию линейных несамосопряженных операторов, изд-во «Наука», 1965.

б) Теория вольтерровых операторов в гильбертовом пространстве и ее приложения, изд-во «Наука», 1967.

[1]) Выражаю глубокую благодарность И. Ц. Гохбергу за неоценимую помощь, оказанную при подготовке доклада.

в) О факторизации операторов в гильбертовом пространстве, *Acta Sci. Math. Szeged*, **25**, 1—2 (1964), 90-123.

г) Об одном описании операторов сжатия, подобных унитарным операторам, *Функциональный анализ и его приложения*, **1**, 1 (1967).

[7] Любич Ю. И., Мацаев В. И., Об операторах с отделимым спектром, *Матем. сб.*, **56**, 4 (1962), 433-468.

[8] De Branges L., a) Some Hilbert spaces of analytic functions, II, III, *J. Math. Analysis and Applications*, **11** (1965), 44-72; **12** (1965), 149-186.

б) Some Hilbert spaces of entire functions, I—IV, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **10** (1959), 840-846; **99** (1961), 118-152; **100** (1961), 73-115; **105** (1962), 43-83.

[9] Бродский М. С., Кисилевский Г. Э., Критерий одноклеточности вольтерровых операторов с ядерными мнимыми компонентами, *Изв. АН СССР*, сер. матем. **30**, № 6 (1966), 1213-1228.

10] Кисилевский Г. Э., Инвариантные подпространства вольтерровых диссипативных операторов с ядерными мнимыми компонентами, *Изв. АН СССР*, сер. матем. (в печати).

11] Sz.-Nagy B., Foiaş, C., a) Sur les contractions de l'espace de Hilbert, VIII. Fonctions caracteristiques, Modèles fonctionnels, *Acta Sci. Math. Szeged*, **25**, 1—2 (1964), 38-71.

б) Sur les contractions de l'espace de Hilbert, IX. Factorisations de la fonction caractéristique. Sous-espaces invariants, *Acta Sci. Math. Szeged*, **25**, 3—4 (1964), 283-316.

в) Sur les contractions de l'espace de Hilbert, X. Contractions similaires a des transformations unitaires, *Acta Sci. Math. Szeged*, **26**, 1—2 (1965), 79-91.

г) Sur les contractions de l'espace de Hilbert, XI. Transformations unicellulaires, *Acta Sci. Math. Szeged*, **26**, 3—4 (1965), 301-324.

12] Лившиц М. С., а) Об одном классе линейных операторов в гильбертовом пространстве, *Матем. сб.*, **19** (1946), 236-260.

б) О спектральном разложении линейных несамосопряженных операторов, *Матем. сб.*, **34** (1954), 145-198.

в) Операторы, колебания, волны, изд-во «Наука», 1966.

13] Лившиц М. С., Потапов В. П., Теорема умножения характеристических матриц-функций, *ДАН СССР*, **72** (1950), 625-628.

14] Бродский М. С., Лившиц М. С., Спектральный анализ несамосопряженных операторов и промежуточные системы, *УМН*, **13**, 1 (1958), 3-85.

15] Бродский М. С., а) Спектральный анализ линейных ограниченных операторов с вполне непрерывной мнимой компонентой, Докторская диссертация, Одесса, 1962.

б) О мультипликативном представлении некоторых аналитических оператор-функций, *ДАН СССР*, **138**, № 4 (1961).

16] Сахнович Л. А., а) О приведении несамосопряженных операторов к треугольному виду, *Изв. высших учебных заведений*, матем., **4** (11) (1959), 141-149.

б) О диссипативных операторах с абсолютно непрерывным спектром, *ДАН СССР*, **167**, № 4 (1966), 760-763.

17] Aronszajn N., Smith R. J., Invariant subspaces of completely continuous operators, *Ann. Math.*, **60** (1954), 316-320 (имеется русский перевод: *Математика*, **2**, № 1 (1958)).

18] Потапов В. П., Мультипликативная структура J-нерастягивающих матриц-функций, Труды Моск. матем. о-ва, № 4 (1955), 125-236.

19] Гинзбург Ю. П., О J-нерастягивающих оператор-функциях, *ДАН СССР*, **117**, № 2 (1957).

[20] Sz.-Nagy B., а) Sur les contractions de l'espace de Hilbert, *Acta Sci. Math. Szeged*, **15** (1953), 87-92.
б) Sur les contractions de l'espace de Hilbert, II, *Acta. Sci. Math. Szeged*, **18**, 1—2 (1957), 1-14.
[21] Lax P. D., Phillips R. S., Scattering Theory, Academic Press, 1967.
[22] Крейн М. Г., а) Об одном замечательном классе эрмитовых операторов, *ДАН СССР*, **44** (1944), 191-195.
б) Основные положения теории представления эрмитовых операторов с индексом дефекта (m, m), *Укр. матем. журнал*, **1**, 2 (1949), 3-66.
[23] Крейн М. Г., Саакян Ш. Н., О некоторых новых результатах в теории резольвент эрмитовых операторов, *ДАН СССР*, **169**, № 6 (1966), 1269-1272.
[24] Бродский М. С., Гохберг И. Ц., Крейн М. Г., Мацаев В. И., О некоторых новых исследованиях по теории несамосопряженных операторов, Труды IV всесоюзного матем. съезда, т. II, 1964.
[25] Адамян В. М., Аров Д. З., а) Об одном классе операторов рассеяния и характеристических оператор-функциях сжатий, *ДАН СССР*, **160**, № 1 (1965), 9-12.
б) Об операторах рассеяния и полугруппах сжатий в гильбертовом пространстве, *ДАН СССР*, **165**, № 1 (1965), 9-12.
в) Об унитарных сцеплениях полуунитарных операторов, *Докл. АН Арм. ССР*, **43**, № 5 (1966), 257-263.
г) Об унитарных сцеплениях полуунитарных операторов, Математические исследования, **1**, вып. 1, Кишинев (1966), 3-64.
[26] Sz.-Nagy B., Foiaş C., Analyse harmonique des opérateurs de l'espace de Hilbert, Akadémiai Kiadó Budapest, 1967.