THÉORIE DES NOYAUX[1]

LAURENT SCHWARTZ

Nous supposerons connus les fondements de la théorie des distributions.[2] La question des notations est fondamentale dans cet article. Si $\varphi(x) \in (\mathfrak{D})_x$ $T_x \in (\mathfrak{D}')_x$, le produit scalaire $T(\varphi) = T \cdot \varphi$ sera *toujours* noté comme intégrale[3] $\int_{R^n} \varphi T$ du produit φT, et même, pour qu'aucune confusion ne soit possible sur les variables, sous la forme

$$T \cdot \varphi = \int_{R^n} T_x \varphi(x)\, dx. \tag{1}$$

Lorsque T_x est une fonction $g(x)$, on retrouve l'intégrale classique $\int_{R^n} g(x)\varphi(x)\, dx$ Cette notation est assez lourde mais évite toute confusion.

1. Opérateurs intégraux. Soient X^m, Y^n deux espaces vectoriels réels isomorphes respectivement à R^m, R^n; x sera un point de X^m, y un point de Y^n Un noyau $K(x, y)$, c'est-à-dire une fonction (à valeurs complexes) localement sommable sur $X^m \times Y^n$, définit un opérateur intégral $f \to g = K \cdot f$, qui à toute fonction continue à support compact $f(y)$ sur Y^n fait correspondre une fonction $g(x)$ localement sommable sur X^m:

$$\left\{\begin{aligned} g &= K \cdot f \\ g(x) &= \int_{Y^n} K(x, y) f(y)\, dy. \end{aligned}\right. \tag{2}$$

Il est bien connu que toutes les opérations linéaires ne peuvent pas être représentées par de tels noyaux, comme on le voit pour l'opérateur identique ou les opérateurs de multiplication ou de dérivation sur R^n. Mais Dirac,[4] dans le mémoire où il introduit sa célèbre "fonction" δ, montre que cette "fonction" permet de représenter les opérations précédentes à l'aide de noyaux:

$$\left\{\begin{aligned} f(x) &= \int_{R^n} \delta(x - \xi) f(\xi)\, d\xi \\ \alpha(x) f(x) &= \int_{R^n} [\alpha(x)\delta(x - \xi)]\, f(\xi)\, d\xi \\ \frac{\partial f}{\partial x_1} &= \int_{R^n} \left[\frac{\partial}{\partial x_1} \delta(x - \xi)\right] f(\xi)\, d\xi. \end{aligned}\right. \tag{3}$$

[1] Cette communication était mentionnée sur le programme imprimé sous le titre *Distributions and principal applications*.

[2] Le lecteur trouvera dans notre livre (*Théorie des distributions*, Paris, Hermann, 1950 tous les renseignements nécessaires sur les termes employés ici, notamment en consultant l'index terminologique et l'index des notations situés à la fin du volume. Nous noterons cet ouvrage par (TD).

[3] Voir (TD), formule (V, 1; 5).

[4] Dirac, *The physical interpretation of the quantum dynamics*, Proc. Roy. Soc. London Ser. A t. 113 (1926–1927) pp. 621–641.

e but de cet article est de montrer comment la théorie des distributions permet ɜ réaliser correctement une telle représentation, pour toutes les opérations néaires rencontrées dans la pratique, et d'étudier les noyaux en relation avec s opérations linéaires. Nous donnerons dans un autre article les démonstra-ons des théorèmes, et les applications de cette théorie.

2. Noyaux-distributions. Nous appellerons noyau-distribution ou simplement ɔyau une distribution $K_{x,y}$ sur $X^m \times Y^n$; $K_{x,y} \in (\mathfrak{D}')_{x,y}$ est donc une forme néaire continue sur $(\mathfrak{D})_{x,y}$.

Un tel noyau définit en outre:

1°. Une forme bilinéaire $B_K(u, v)$ sur $(\mathfrak{D})_x \times (\mathfrak{D})_y$:

$$B_K(u, v) = \iint_{X^m \times Y^n} K_{x,y}\, u(x)v(y)\; dx\, dy.^5$$

Lorsque l'une des fonctions u, v est fixée, B est continue par rapport à l'autre t uniformément lorsque la première reste bornée); de plus, elle est continue ır rapport à l'ensemble des deux arguments u, v lorsque les supports de u et restent dans des compacts fixes de X^m et Y^n.

2°. Une transformation linéaire $v \to \mathfrak{L}_K(v)$ de $(\mathfrak{D})_y$ dans $(\mathfrak{D}')_x$, définie comme ıit pour $u(x) \in (\mathfrak{D})_x$:

$$\int_{X^m} [\mathfrak{L}_K(v)]_x u(x)\; dx = B_K(u, v) = \iint_{X^m \times Y^n} K_{x,y}\, u(x)v(y)\; dx\, dy.$$

C'est cette transformation qui, si l'on remplace v par f et $\mathfrak{L}_K(v)$ par g, et si est une fonction $K(x, y)$, est définie par la formule (2): nous pouvons donc mplacer $\mathfrak{L}_K(f)$ par $K \cdot f$, et adopter la notation suivante, pour $f(y) \in (\mathfrak{D})_y$, $x) \in (\mathfrak{D})_x$, $K \cdot f = [K \cdot f]_x \in (\mathfrak{D}')_x$:

$$\int_{X^m} [K \cdot f\,]_x\, \varphi(x)\; dx = \iint_{X^m \times Y^n} K_{x,y}\, \varphi(x)f(y)\; dx\, dy.$$

$\mathfrak{L}_K$ est une opération continue de $(\mathfrak{D})_y$, muni de la topologie forte, dans ɔ$')_x$, muni de la topologie faible ou forte. On a ainsi:

Théorème I. *Tout noyau-distribution K définit une transformation linéaire $\to K \cdot f$ continue de $(\mathfrak{D})$ dans $(\mathfrak{D}')$.*

3°. Une transformation linéaire continue $u \to \mathfrak{L}'_K(u)$ de $(\mathfrak{D})_x$ dans $(\mathfrak{D}')_y$, ፧finie comme suit pour $v(y) \in (\mathfrak{D})_y$:

$$\int_{Y^n} [\mathfrak{L}'_K(u)]_y v(y)\; dy = B_K(u, v) = \iint_{X^m \times Y^n} K_{x,y}\, u(x)v(y)\; dx\, dy.$$

ɜtte transformation $\mathfrak{L}'_K$ est évidemment la transposée de la précédente $\mathfrak{L}_K$. ɜmarquons que l'isomorphisme canonique $(x, y) \to (y, x)$ de $X^m \times Y^n$ sur

[5] Il s'agit toujours de la notation définie à la formule (1), mais nous emploierons le mbole d'intégrale double quand ce sera sur l'espace produit $X^m \times Y^n$, le symbole d'in-ɡrale simple quand ce sera sur l'espace X^m ou Y^n.

$Y^n \times X^m$ associe à la distribution $K_{x,y} \in (\mathcal{D}')_{x,y}$ une distribution $^*K_{y,x} \in (\mathcal{D}')_{y,x}$ et on a bien évidemment $\mathcal{L}'_K = \mathcal{L}_{(^*K)}$, et $\mathcal{L}'_K(f) = {}^*K \cdot f$.

Si les espaces X^m, Y^n sont confondus avec un même espace R^n, il y a lieu d changer les notations. Un noyau sera une distribution $K_{x,\xi}$ sur $R^n \times R^n$. L'opéra tion $\mathcal{L}_K$ est celle qui fera correspondre à une fonction $f(x) \in (\mathcal{D})_x$ une distribu tion $[\mathcal{L}_K(f)]_x = [K \cdot f]_x \in (\mathcal{D}')_x$, définie par

$$\int_{R^n} [K \cdot f]_x \varphi(x)\, dx = \iint_{R^n \times R^n} K_{x,\xi}\, \varphi(x) f(\xi)\, dx\, d\xi, \tag{8}$$

tandis que l'opération $\mathcal{L}'_K$ de $(\mathcal{D})_x$ dans $(\mathcal{D}')_x$ fera correspondre à une fonctio $f(x) \in (\mathcal{D})_x$ une distribution $[\mathcal{L}'_K(f)]_x \in (\mathcal{D}')_x$, définie par

$$\int_{R^n} [\mathcal{L}'_K(f)]_x \varphi(x)\, dx = \iint_{R^n \times R^n} K_{x,\xi}\, \varphi(\xi) f(x)\, dx\, d\xi. \tag{9}$$

On voit que dans ce cas il est logique d'introduire le noyau ^sK, "symétrique" de K (associé à K par la "symétrie", isomorphisme canonique $(x, \xi) \to (\xi, x)$ d $R^n \times R^n$ sur lui-même), défini par

$$\iint_{R^n \times R^n} ({}^sK)_{x,\xi}\, \varphi(x, \xi)\, dx\, d\xi = \iint_{R^n \times R^n} K_{x,\xi}\, \varphi(\xi, x)\, dx\, d\xi. \tag{10}$$

Alors l'opération $\mathcal{L}'_K$, transposée de $\mathcal{L}_K$, est l'opération $\mathcal{L}_{(^sK)}$ définie par l symétrique de K, et peut être notée $f \to \mathcal{L}'_K(f) = {}^sK \cdot f$.

3. Exemples. Dans tous les exemples qui suivent, X^m et Y^n seront identique à l'espace R^n.

Exemple 1.

$$\begin{cases} \text{Noyau } I_{x,\xi} \text{ défini par } \displaystyle\iint_{R^n \times R^n} I_{x,\xi}\, \varphi(x, \xi)\, dx\, d\xi = \int_{R^n} \varphi(t, t)\, dt; \\ I = \text{mesure, portée par la diagonale } x = \xi; \\ I \cdot f = f \text{ (opérateur identique); } {}^sI = I. \end{cases} \tag{11}$$

Nous avons là une expression correcte de la première formule (3).

Exemple 2. Soit $S_x \in (\mathcal{D}')_x$.

$$\begin{cases} \text{Noyau } K \text{ défini par } \displaystyle\iint_{R^n \times R^n} K_{x,\xi}\, \varphi(x, \xi)\, dx\, d\xi = \int_{R^n} S_t\, \varphi(t, t)\, dt; \\ K \cdot f = Sf \text{ (multiplication par } S\text{); } {}^sK = K; \\ \text{Si } S_x = \alpha(x) \text{ est une fonction continue, } K_{x,\xi} = \alpha(x) I_{x,\xi}. \end{cases} \tag{12}$$

Nous avons là l'expression correcte de la deuxième formule (3).

Exemple 3. Soit $S_x \in (\mathcal{D}')_x$.

$$
\text{13)}\quad \begin{cases} \text{Noyau } K \text{ défini par } K_{x,\xi} = S_{x-\xi}, \text{ ou} \\ \displaystyle\iint_{R^n \times R^n} S_{x-\xi}\,\varphi(x, \xi)\, dx\, d\xi = \int_{R^n} S_x \left[\int_{R^n} \varphi(x + t, t)\, dt \right] dx; \\ K\cdot f = S * f \text{ (convolution avec } S);^{6} \\ {}^{s}K \text{ s'obtient en remplaçant } S \text{ par } \check{S}. \end{cases}
$$

Avec ces notations, le noyau $I_{x,\xi}$ de l'exemple 1 peut s'écrire $\delta_{x-\xi}$.

Exemple 4. Soit D un polynome de dérivation sur R^n. L'opération de dériva-on $f \to Df$ définie par D correspond au noyau $(D\delta)_{x-\xi}$ (exemple 3) qui est aussi noyau $D_x\, I_{x,\xi}$ (obtenu en appliquant à $I_{x-\xi}$ la dérivation partielle D_x). Cette ernière forme est aussi valable si D est un opérateur différentiel à coefficients idéfiniment dérivables. Nous avons là l'expression correcte de la troisième for-ıule (3). L'opérateur différentiel adjoint (au sens classique) D' sera défini par noyau symétrique, qui n'est autre que $D_\xi I_{x,\xi}$. Ainsi l'adjoint s'obtient tou-ours par la symétrie $K \to {}^{s}K$, qu'il s'agisse d'un opérateur intégral ou différentiel.

4. Noyaux et opérations linéaires. Ces exemples suggèrent, comme l'a in-iqué Dirac, que des classes très larges d'opérations linéaires peuvent être éfinies par des noyaux. On peut effectivement démontrer la réciproque du héorème 1, qui sera fondamentale dans la suite:

Théorème II. *Toute transformation linéaire continue de* $(\mathfrak{D})_y$ *(muni de la pologie forte) dans* $(\mathfrak{D}')_x$ *(muni de la topologie faible) peut être définie par* $f \to K\cdot f$, *ì K est un noyau déterminé d'une manière unique.*

L'unicité est évidente;[7] l'existence de K fait au contraire appel à des propriétés ssez profondes. Remarquons qu'en prenant la topologie forte sur $(\mathfrak{D})$ et la pologie faible sur $(\mathfrak{D}')$, nous faisons les hypothèses les moins restrictives ossible. Mais elles entraînent alors d'après le Théorème 1, la continuité de D) fort dans $(\mathfrak{D}')$ fort.

Une forme équivalente du théorème est la suivante:

Toute forme bilinéaire $B(u, v)$ *sur* $(\mathfrak{D})_x \times (\mathfrak{D})_y$, *continue par rapport à chacun s arguments quand l'autre est fixé, est de la forme* $B_K(u, v)$ *(formule 4), où K t un noyau déterminé d'une manière unique.*

5. Prolongement de l'application $\mathfrak{L}_K$. Supposons choisi une fois pour toutes n ensemble $\mathfrak{F}$ d'espaces vectoriels localement convexes de distributions (es-aces fonctionnels généralisés) $\mathfrak{A}$ ayant les propriétés suivantes:

[6] Nous désignerons ici par convolution ce que nous avons appelé dans (TD) composition, ur éviter la confusion avec la composition de Volterra, qui en est une généralisation, et ra indiquée plus loin. Pour $\check{S}$, voir (TD) formule (VI, 4; 7).

[7] Voir (TD), Chapitre IV, Théorème III.

1°. $(\mathcal{D}) \subset \mathcal{A} \subset (\mathcal{D}')$; les applications identiques de $(\mathcal{D})$ fort dans $\mathcal{A}$ et de (dans $(\mathcal{D}')$ faible sont continues;

2°. Si $\mathcal{A}$ est dans $\mathcal{F}$, le dual faible $\mathcal{A}'$ de $\mathcal{A}$ est aussi dans $\mathcal{F}$;

3°. Dans l'intersection $\mathcal{A} \cap \mathcal{B}$ de deux espaces appartenant à $\mathcal{F}$, munie d la topologie borne supérieure des topologies définies par $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$, $(\mathcal{D})$ est dense Ou encore: Si $T \in (\mathcal{A} \cap \mathcal{B})$, il existe des fonctions $\varphi_j \in (\mathcal{D})$, qui convergent ver T à la fois pour les topologies $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$.

Pratiquement, $\mathcal{F}$ pourra contenir tous les espaces vectoriels usuels de l'analys fonctionnelle,[8] à condition de les munir éventuellement de leur topologie faibl (dans L^∞ ou dans l'espace $(\mathcal{C})$ des mesures, $(\mathcal{D})$ ne serait pas dense pour la topol ogie forte). [Pour chacun de ces espaces $\mathcal{A}$, si l'on choisit *une suite* de régularis antes $\rho_j \in (\mathcal{D})$, telles que $\rho_j \geqq 0$, $\int_{R^n}\rho_j(x)\, dx = +1$, et que pour $j \to \infty$, leur supports convergent vers l'origine de R^n, les régularisées $T * \rho_j$ de $T \in \mathcal{A}$ conver gent pour $j \to \infty$ vers T dans $\mathcal{A}$. D'autre part si l'on choisit une suite de multi plicateurs $\alpha_j \in (\mathcal{D})$, tels que $0 \leqq \alpha_j \leqq 1$, et que les fonctions $1 - \alpha_j$ convergen vers 0 uniformément sur tout compact en restant bornées sur R^n, ainsi qu chacune de leurs dérivées,[9] les $\alpha_j S$, pour $S \in \mathcal{A}$, convergent pour $j \to \infty$ vers S dans $\mathcal{A}$. De plus, la suite des $\alpha_j(T * \rho_j) \in (\mathcal{D})$ et la suite des $(\alpha_j T) * \rho_j \in (\mathcal{D})$ convergeront pour $j \to \infty$ vers T dans $\mathcal{A}$. Ces suites étant associées à T indé pendamment de l'espace $\mathcal{A}$ auquel elle appartient, la condition 3° sera assurée On peut d'ailleurs appeler *espace permis* tout espace $\mathcal{A}$ vérifiant la condition 1° et tel que pour toute $T \in \mathcal{A}$, les suites $\alpha_j(T * \rho_j)$ et $(\alpha_j T) * \rho_j$ convergen vers T dans $\mathcal{A}$ pour $j \to \infty$, et $\mathcal{F}$ sera *l'ensemble de tous les espaces permis*.]

On supposera définie la famille $\mathcal{F}$ pour les différents espaces numérique X^m, Y^n, etc. qui interviendront.

Soit alors $\mathcal{L}$ une transformation linéaire continue de $\mathcal{A} \in \mathcal{F}$ dans $\mathcal{B} \in \mathcal{F}$ D'après 1° elle est continue de $(\mathcal{D})$ fort dans $(\mathcal{D}')$ faible, donc il existe un noyau K unique tel que $\mathcal{L} = \mathcal{L}_K$ sur $(\mathcal{D})$; mais alors la connaissance de K détermine $\mathcal{L}$ sur $(\mathcal{D})$ donc sur $\mathcal{A}$ puisque $(\mathcal{D})$ est dense dans $\mathcal{A}$ (3°). Donc *toute application linéaire continue d'un espace de distributions dans un autre, si tous deux appartien nent à $\mathcal{F}$, est entièrement définie par un noyau K unique*. Ainsi les noyaux définissent toutes les opérations linéaires qu'on peut rencontrer dans la pratique. Même dans le cas des espaces fonctionnels les plus simples l'introduction des distribu tions est inévitable. Ainsi la transformation de Hilbert ($X^m = Y^n = R^1$), $f(x) \to g(x) = vp \int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi)d\xi/(x - \xi)$ de L^2 dans L^2 est définie par la distribution $K_{x,\xi} = vp/(x - \xi)$.

Réciproquement soit K un noyau tel que, pour $f \in (\mathcal{D})$, $K \cdot f$ soit dans $\mathcal{B}$ et qu'en outre $\mathcal{L}_K$ soit une application continue de $(\mathcal{D})$ dans $\mathcal{B}$ lorsqu'on munit $(\mathcal{D})$ de la topologie induite par $\mathcal{A}$. Alors $\mathcal{L}_K$ peut se prolonger d'une manière unique en une application linéaire continue de $\mathcal{A}$ dans $\mathcal{B}$. Pour $T \in \mathcal{A}$, nous

[8] Nous entendons par là les L^p, et espaces apparentés, et tous les espaces de distribution introduits dans (TD), etc.

[9] Nous avons couramment utilisé ces régularisations et ces multiplications dans (TD) t. 2.

oterons toujours par $\mathcal{L}_K(T)$ ou $K\cdot T$ l'image de T par cette application prongée. Nous dirons que K est un noyau $\mathcal{A} \to \mathcal{B}$. Remarquons qu'alors $\mathcal{A}'$ et $\mathcal{B}'$, ı moins lorsqu'ils sont munis des topologies faibles, sont dans $\mathcal{F}$ (condition 2°) que $^*K$ (et ^sK si $X^m = Y^n = R^n$) est un noyau $\mathcal{B}' \to \mathcal{A}'$.

On voit d'autre part aisément que si $\mathcal{B}$ est un espace permis, *pour que K it un noyau $(\mathcal{D}) \to \mathcal{B}$, il suffit que $\mathcal{L}_K(\mathcal{D}) \subset \mathcal{B}$.*

Naturellement un même noyau K est $\mathcal{A} \to \mathcal{B}$ pour une infinité de choix fférents de $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$. Ainsi le noyau $I_{x,\xi}$ (§3, exemple 1) est $\mathcal{A} \to \mathcal{A}$, quel que it $\mathcal{A}$; le noyau de Fourier exp $(-2i\pi x\cdot\xi)$ égal à son symétrique est $(\mathcal{S}) \to (\mathcal{S})$, ') $\to (\mathcal{S}')$, $(\mathcal{O}_M) \to (\mathcal{O}'_C)$, $(\mathcal{O}'_C) \to (\mathcal{O}_M)$, $L^2 \to L^2$, etc.

Si K est $\mathcal{A}_1 \to \mathcal{B}_1$ et $\mathcal{A}_2 \to \mathcal{B}_2$, et si $T \in (\mathcal{A}_1 \cap \mathcal{A}_2)$, la valeur de $K\cdot T$ est la ême (et située dans $\mathcal{B}_1 \cap \mathcal{B}_2$) dans le premier et dans le deuxième prolongement ı vertu de la propriété 3° de l'ensemble $\mathcal{F}$:[10] car $K\cdot T = \lim_{j\to\infty} K\cdot\varphi_j$. On ourra donc dire que $K\cdot T$ a un sens, s'il existe un espace $\mathcal{A} \in \mathcal{F}$ tel que $T \in \mathcal{A}$, que K soit $\mathcal{A} \to (\mathcal{D}')$.

La méthode de prolongement de $\mathcal{L}_K$ indiquée ici est celle que nous avons nployée en théorie des distributions pour étendre à des espaces variés de stributions les opérations de multiplication ou de composition, ou la transrmation de Fourier.

6. Problèmes de support; noyaux compacts.

THÉORÈME III. *Pour que $K_{x,y}$ soit un noyau* $(\mathcal{E}) \to (\mathcal{D}')$ (resp. $(\mathcal{D}) \to (\mathcal{E}')$), *faut et il suffit que l'image réciproque, par la projection* $(x, y) \to x$ (resp. $(x, y) \to$, *de tout compact de X^m* (resp. Y^n), *coupe le support de $K_{x,y}$ dans $X^m \times Y^n$ ivant un compact, ce qui revient à dire que la projection* $(x, y) \to x$ (resp. $(x, y) \to$ *est "régulière à l'infini" sur le support de K.*

THÉORÈME IV. *Pour que $K_{x,y}$ soit un noyau $(\mathcal{E}) \to (\mathcal{E}')$, il faut et il suffit que le pport de K dans $X^m \times Y^n$ soit compact, et alors le support de $K\cdot f$ est toujours ntenu dans un compact fixe.*

Un noyau qui est à la fois $(\mathcal{D}) \to (\mathcal{E}')$ et $(\mathcal{E}) \to (\mathcal{D}')$ sera dit *noyau compact*; ur un tel noyau, il n'y a jamais de difficultés dues au comportement à l'infini. n noyau $(\mathcal{E}) \to (\mathcal{E}')$ sera dit *compactifiant*, puisque l'image $K\cdot f$ est toujours à pport contenu dans un compact fixe. Le transposé $^*K$ (et, pour $X^m = Y^n = R^n$, symétrique ^sK) d'un noyau compact ou compactifiant a la même propriété. s paramétrix des opérateurs différentiels elliptiques sont des noyaux comcts.

[10] On rencontre parfois des espaces de distributions non permis, par exemple l'espace de lbert $\mathcal{H}$ des distributions d'énergie finie en théorie du potentiel (voir J. Deny, *Les potiels d'énergie finie*, Acta Math. t. 82). Si T est dans $\mathcal{H}$, on ne sait pas si les $\alpha_j T$ nt dans $\mathcal{H}$. Mais $(\mathcal{D})$ est dense dans $\mathcal{H}$. Alors toute application linéaire continue de $\mathcal{H}$ ns $(\mathcal{D}')$ sera définie d'une manière unique par un noyau K. Mais si T est à la fois dans et dans un espace fonctionnel classique $\mathcal{A}$, rien ne prouve que $K\cdot T$ ne puisse pas avoir ux sens différents lorsque l'on considère T comme dans $\mathcal{H}$ ou comme dans $\mathcal{A}$.

Les noyaux des exemples 1, 2, 4 du §3 sont compacts; le noyau de la multiplication (exemple 2) est compactifiant si S est à support compact. Le noyau de la convolution (exemple 3) est compact si S est à support compact.

Naturellement d'autres extensions relatives aux supports sont possibles comme dans la théorie du produit de convolution. Par exemple, $K \cdot f$ *a toujours un sens si f est indéfiniment dérivable et si le produit de tout compact de X^m par le support de f dans Y^n coupe le support de K dans $X^m \times Y^n$ suivant un compact* (formule 6). Cette extension a un grand intérêt dans l'étude des noyaux liés aux opérateurs différentiels hyperboliques.

En particulier soit K un noyau $(\mathcal{E}) \to (\mathcal{D}')$. Alors $K \cdot 1$ a un sens, et peut être noté sous la forme

$$K \cdot 1 = \int_{Y^n} K_{x,y}\, dy \tag{14}$$

par analogie avec ce qui se passe si K est une fonction $K(x, y)$. Si maintenant K est un noyau quelconque, et si $f \in (\mathcal{D})$, le produit multiplicatif $K_{x,y} f(y)$ est un noyau $(\mathcal{E}) \to (\mathcal{D}')$, et on voit que l'on peut écrire

$$K \cdot f = [K_{x,y} f(y)] \cdot 1 = \int_{Y^n} K_{x,y} f(y)\, dy \tag{15}$$

ce qui, si K est une fonction $K(x, y)$, redonne la formule (2).

Si K est un noyau à support compact, on a la formule

$$\iint_{X^m \times Y^n} K_{x,y}\, dx\, dy = \int_{X^m} \left[\int_{Y^n} K_{x,y}\, dy \right] dx; \tag{16}$$

alors si K est un noyau quelconque, et si $\varphi(x, y) \in (\mathcal{D})_{x,y}$, on aura

$$\iint_{X^m \times Y^n} K_{x,y}\, \varphi(x, y)\, dx\, dy = \int_{X^m} dx \left[\int_{Y^n} K_{x,y}\, \varphi(x, y)\, dy \right], \tag{16$^{\text{bis}}$}$$

l'ordre des intégrations pouvant être interverti.

7. Problèmes de régularité locale. Noyaux réguliers. Soit $f \to \mathcal{L}(f)$ une opération linéaire continue de $(\mathcal{D})_y$ fort dans $(\mathcal{D}')_x$ faible, telle que $\mathcal{L}(f)$ soit toujours une fonction m fois continûment différentiable de x, soit $\mathcal{L}(f)(x)$. C'est alors une opération continue de $(\mathcal{D})_y$ dans $(\mathcal{E}^m)_x$. Pour x fixé, $f \to \mathcal{L}(f)(x)$ est une forme linéaire continue sur $(\mathcal{D})_y$, donc une distribution S_y, qu'on devra noter $S_y(x)$, puisqu'elle dépend de x; l'application $x \to S_y(x)$ est alors une fonction vectorielle (à valeurs dans $(\mathcal{D}')_y$) de x, m fois continûment différentiable. Réciproquement une telle fonction vectorielle $S_y(x)$ définit l'application linéaire continue de $(\mathcal{D})_y$ dans $(\mathcal{E}^m)_x$

$$f \to \int_{Y^n} S_y(x) f(y)\, dy, \tag{17}$$

l'intégrale (au sens de la formule (1)) étant calculable pour toute valeur individuelle de x. Le Théorème 2 est ici trivial, car $\mathcal{L}(f) = K \cdot f$, le noyau K étant défini par

$$\iint_{X^m \times Y^n} K_{x,y}\varphi(x, y)\,dx\,dy = \int_{X^m} dx \left[\int_{Y^n} S_y(x)\varphi(x, y)\,dy \right], \tag{18}$$

le crochet étant calculable pour toute valeur de x, et fonction numérique de x m fois continûment différentiable à support compact. Nous pouvons donc énoncer:

Théorème V. *Pour que $f \to \mathcal{L}(f)$ soit une opération linéaire continue de $(\mathcal{D})_y$ dans $(\mathcal{E}^m)_x$, il faut et il suffit que $\mathcal{L}(f) = K \cdot f$, K étant un noyau défini par la formule* (18), *où $x \to S_y(x)$ est une application m fois continûment différentiable* de *X^m dans $(\mathcal{D}')_y$.*

Soit maintenant $T \to \mathcal{L}(T)$ une application linéaire faiblement continue de $(\mathcal{E}'^m)_y$ dans $(\mathcal{D}')_x$. Elle est alors transposée d'une application linéaire continue de $(\mathcal{D})_x$ dans $(\mathcal{E}^m)_y$, dont nous connaissons la forme. Il existe donc une application m fois continûment différentiable $y \to \Phi(y) = \Sigma_x(y)$ de Y^n dans $(\mathcal{D}')_x$, telle que $\mathcal{L}(f) = K \cdot f$, le noyau K étant défini par

$$\iint_{X^m \times Y^n} K_{x,y}\,\varphi(x, y)\,dx\,dy = \int_{Y^n} dy \left[\int_{X^m} \Sigma_x\,(y)\varphi(x, y)\,dx \right] \tag{19}$$

et réciproquement.

Remarquons alors que la formule

$$\int_{X^m} (K \cdot f)_x \varphi(x)\,dx = \int_{Y^n} f(y)\,dy \left[\int_{X^m} \Sigma_x(y)\varphi(x)\,dx \right] \tag{20}$$

montre que $K \cdot f$ peut s'écrire comme intégrale (faible ou forte) de la fonction continue vectorielle $\Phi(y) = \Sigma_x(y)$ (à valeurs dans $(\mathcal{D}')_x$):[11]

$$K \cdot f = \int_{Y^n} \Phi(y) f(y)\,dy. \tag{21}$$

Mais comme $\Phi(y)$ est fonction m fois continûment différentiable de y, on peut dans cette formule remplacer $f(y)$ par une distribution $T_y \in (\mathcal{E}'^m)_y$, et écrire

$$K \cdot T = \int_{Y^n} \Phi(y) T_y\,dy. \tag{22}$$

On a d'ailleurs les formules suivantes, qui auraient pu être considérées directement et servir à l'étude de ce cas indépendamment de celui qui précède:[12]

$$K \cdot \delta_{y;(\lambda)} = \Phi(\lambda) \tag{23}$$

[11] Voir (TD), t. 1, p. 30.

[12] Rappelons que $\delta_{y;(\lambda)}$ désigne la masse $+1$ au point λ dans l'espace Y^n de la variable y.

(et $\Phi(\lambda)$ doit être une fonction m fois continûment différentiable de λ, puisque $\delta_{y;(\lambda)}$ est une fonction (à valeurs dans $(\mathcal{E}'^m)_y$) m fois continûment différentiable de λ);

$$(24)\quad K\cdot T_y = K\cdot\left[\int_{Y^n} T_\lambda\, \delta_{y;(\lambda)}\, d\lambda\right] = \int_{Y^n} T_\lambda\, d\lambda[K\cdot\delta_{y;(\lambda)}] = \int_{Y^n} \Phi(\lambda) T_\lambda\, d\lambda.$$

Et nous pouvons énoncer:

THÉORÈME VI. *Pour que $T \to \mathcal{L}(T)$ soit une opération linéaire faiblement continue de $(\mathcal{E}'^m)_y$ dans $(\mathcal{D}')_x$, il faut et il suffit que $\mathcal{L}(T) = K\cdot T$, K étant un noyau défini par la formule* (19), *et $K\cdot T$ par la formule* (22), *où $\Sigma_x(y)$ est une application m fois continûment différentiable de Y^n dans $(\mathcal{D}')_x$.*

Un noyau $K_{x,y}$ défini par $\Sigma_x(y)$ pourra être écrit $K_x(y)$, pour indiquer que c'est une distribution en x, y, qui est une fonction en y; de même un noyau $K_{x,y}$ défini par $S_y(x)$ sera noté $[K(x)]_y$ (plutôt que $K_y(x)$, de façon à conserver l'ordre des 2 variables x, y).

Nous appellerons *noyau régulier* un noyau qui est à la fois $(\mathcal{D}) \to (\mathcal{E})$ et $(\mathcal{E}') \to (\mathcal{D}')$. Il sera alors à la fois de la forme $K_x(y) = \Sigma_x(y)$ (application indéfiniment différentiable de Y^n dans $(\mathcal{D}')_x$) et $[K(x)]_y$ (application indéfiniment différentiable de X^m dans $(\mathcal{D}')_y$). Mais il n'y a aucune raison pour qu'un tel noyau puisse être écrit comme $K(x, y)$, fonction de x et y; c'est là un aspect d'un *principe d'incertitude* très général dont nous reparlerons ailleurs. Si K est régulier, $^*K$ (et ^sK si $X^m = Y^n = R^n$) est aussi régulier.

Les noyaux des exemples 1, 3, 4, du §3 sont réguliers; le noyau de la multiplication (exemple 2) n'est régulier que si $S_x = \alpha(x) \in (\mathcal{E})_x$. Les noyaux intervenant dans la théorie des équations aux dérivées partielles hyperboliques ou elliptiques (noyau élémentaire, paramétrix, etc.) sont toujours réguliers.

Considérons par exemple le noyau $S_{x-\xi}$ de l'exemple 3 du §3. Il peut être écrit sous les deux formes suivantes:

$$(25)\quad \begin{cases} [K(x)]_\xi = \tau_x \check{S}_\xi \text{ (translaté } \tau_x \text{ du noyau } \check{S}_\xi \text{ dans l'espace de la variable } \xi); \\ K_x(\xi) = \tau_\xi S_x \text{ (translaté } \tau_\xi \text{ du noyau } S_x \text{ dans l'espace de la variable } x); \end{cases}$$

mais il est impossible de mettre un tel noyau sous la forme d'une fonction $K(x, \xi)$ de x et ξ, si la distribution S n'est pas une fonction.

THÉORÈME VII. *Si K est un noyau régulier compact, il est* $(\mathcal{D}) \to (\mathcal{D})$, $(\mathcal{E}) \to (\mathcal{E})$, $(\mathcal{E}') \to (\mathcal{E}')$, $(\mathcal{D}') \to (\mathcal{D}')$.

Les paramétrix des opérateurs différentiels elliptiques sont réguliers compacts.

THÉORÈME VIII. *Pour que K soit un noyau* $(\mathcal{E}') \to (\mathcal{E})$, *il faut et il suffit que K soit une fonction $K(x, y)$, indéfiniment dérivable sur $X^m \times Y^n$.*

Un tel noyau sera appelé *régularisant*, puisqu'il transforme une distribution ‹n fonction indéfiniment dérivable. Les noyaux de convolution (exemple 3 du 3) sont régularisants lorsque $S \in (\mathcal{E})$. Alors $S_{x-\xi} = S(x - \xi)$. Si K est un oyau régularisant, l'opération $T \to K \cdot T$ sera une *régularisation*.

Naturellement ces problèmes de régularité locale peuvent être étudiés de ien plus près, et donnent lieu à l'introduction de nombreuses catégories in-éressantes de noyaux.

8. Produit de composition de Volterra. Si $H(x, y)$ est un noyau-fonction ır $X^m \times Y^n$, $K(y, z)$ un noyau-fonction sur $Y^n \times Z^p$, le produit de composition e Volterra est défini usuellement par

$$L(x, z) = H(x, y) \circ K(y, z) = \int_{Y^n} H(x, y) K(y, z)\, dy. \tag{26}$$

'est un noyau sur $X^m \times Z^p$, quand il est défini.

Théorème IX. *Si $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$, sont* 3 *espaces de distributions appartenant à $\mathcal{F}$, $H_{x,y}$ est un noyau $\mathcal{B} \to \mathcal{C}$, $K_{y,z}$ un noyau $\mathcal{A} \to \mathcal{B}$, on peut définir un produit de omposition de Volterra $H \circ K$, qui est un noyau $\mathcal{A} \to \mathcal{C}$; le noyau obtenu est in-épendant de la séquence $\mathcal{A} \to \mathcal{B} \to \mathcal{C}$ utilisée.*

En effet K définit l'opération linéaire continue $\mathcal{L}_K$ de $\mathcal{A}$ dans $\mathcal{B}$, et H l'opération néaire continue $\mathcal{L}_H$ de $\mathcal{B}$ dans $\mathcal{C}$; alors $\mathcal{L}_H \circ \mathcal{L}_K$ est une opération linéaire ontinue de $\mathcal{A}$ dans $\mathcal{C}$, il lui correspond donc un noyau, qui sera par défini-on $H \circ K$. Ce produit est indépendant de la séquence $\mathcal{A} \to \mathcal{B} \to \mathcal{C}$ utilisée. upposons en effet que $\mathcal{A}_1 \to \mathcal{B}_1 \to \mathcal{C}_1$ et $\mathcal{A}_2 \to \mathcal{B}_2 \to \mathcal{C}_2$ soient deux séquences ossibles pour les mêmes noyaux H et K. Pour $f \in (\mathcal{D})$, $T = K \cdot f$ est dans $\mathcal{B}_1 \cap$ $_2$, et sa définition est indépendante de tout prolongement. Mais alors d'après s résultats du §5 (axiome 3°), $U = H \cdot T \in (\mathcal{D}')$ est la même distribution (né-essairement dans $\mathcal{C}_1 \cap \mathcal{C}_2$), que l'on considère H comme $\mathcal{B}_1 \to \mathcal{C}_1$ ou comme $\mathcal{B}_2$ $\to \mathcal{C}_2$; donc $U = (H \circ K) \cdot f$ est indépendante de la séquence utilisée, et par iite aussi le noyau $H \circ K$. Cette indépendance nous permet d'écrire $H \circ K$, uand il existe, sans spécifier la séquence $\mathcal{A} \to \mathcal{B} \to \mathcal{C}$ ayant servi à le définir.

Dans le cas de noyaux-fonctions, cette définition redonne bien le produit de omposition usuel de Volterra.

On définit de même le produit de composition de plusieurs noyaux $K_1 \circ K_2 \circ$ $_3 \circ \cdots \circ K_l$, à partir d'une séquence d'espaces de distributions $\mathcal{A}_{l+1} \to \mathcal{A}_l \to$ $\cdots \to \mathcal{A}_3 \to \mathcal{A}_2 \to \mathcal{A}_1$ appartenant à $\mathcal{F}$; un tel produit, défini d'emblée, peut re défini de proche en proche, et ce produit est alors associatif, et indépendant ı procédé de définition.[13]

La composition de noyaux définissant des multiplications (exemple 2 du §3)

[13] Il peut arriver que $K_1 \circ K_2$, $(K_1 \circ K_2) \circ K_3$, $K_2 \circ K_3$, $K_1 \circ (K_2 \circ K_3)$, aient un sens, que $(K_1 \circ K_2) \circ K_3 \neq K_1 \circ (K_2 \circ K_3)$, lorsque on ne peut pas définir d'emblée le produit $_1 \circ K_2 \circ K_3$. Voir (TD), t. 1, p. 119 et t. 2, p. 27.

donne lieu à un produit multiplicatif des distributions S correspondantes; la composition (de Volterra) de noyaux associés à des "convolutions" (exemple 3 du §3) donne lieu à un produit de convolution des distributions S correspondante.

On dira que deux noyaux sont composables si leur produit de composition de Volterra a un sens (cette notion dépendra de l'ensemble $\mathfrak{F}$ d'espaces vectoriels utilisés; pratiquement on prendra les "espaces permis", voir §5). Comme deux noyaux arbitraires ne sont pas composables, il est intéressant d'avoir des critères

THÉORÈME X. *Le produit de composition de plusieurs noyaux a un sens, si tous, sauf un au plus, sont compacts, et tous, sauf un au plus, réguliers.*

Raisonnons dans le cas de deux noyaux. On aura alors les cas suivants:
H compact et K régulier: séquence $(\mathfrak{D}) \to (\mathcal{E}) \to (\mathfrak{D}')$.
H régulier et K compact: séquence $(\mathfrak{D}) \to (\mathcal{E}') \to (\mathfrak{D}')$.
K régulier compact: séquence $(\mathfrak{D}) \to (\mathfrak{D}) \to (\mathfrak{D}')$.
H régulier compact: séquence $(\mathfrak{D}) \to (\mathfrak{D}') \to (\mathfrak{D}')$.

THÉORÈME XI. *Dans les conditions du Théorème* X, *si tous les noyaux facteurs sont compacts (resp. réguliers), il en est de même du produit; si tous les noyaux facteurs sont compacts (resp. réguliers) et l'un au moins compactifiant (resp. régularisant), le produit est compactifiant (resp. régularisant); si le premier et le dernier noyaux facteurs sont compactifiants (resp. régularisants), il en est de même du produit.*

Il est intéressant de pouvoir représenter $H \circ K$ sous une forme rappelant (26) Supposons par example que H soit compact et K régulier, on aura

$$\iint_{X^m \times Z^p} (H \circ K)_{x,z}\,\varphi(x, z)\,dx\,dz = \iint_{X^m \times Y^n} H_{x,y}\,dx\,dy \left[\int_{Z^n} [K(y)]_z\,\varphi(x, z)\,dz\right] \tag{27}$$

le crochet étant calculable pour toute valeur individuelle de x et y, et fonction numérique indéfiniment dérivable de x et y. Cette relation peut s'écrire sous la forme symbolique suivante:

$$(H \circ K)_{x,z} = \int_{Y^n} H_{x,y}[K(y)]_z\,dy, \tag{28}$$

l'intégrale étant une généralisation de celle de la formule (15), correspondant au cas où l'on remplace $f(y)$ par $F(y) = [K(y)]_z$, fonction vectorielle indéfiniment dérivable de y à valeurs dans $(\mathfrak{D}')_z$.

Cette théorie des noyaux a des applications à la théorie des opérateurs différentiels elliptiques et hyperboliques, que nous développerons ailleurs.

UNIVERSITY OF NANCY,
NANCY, FRANCE.