EINIGE FRAGEN DER APPROXIMATION VON FUNKTIONEN DURCH POLYNOME

S. M. NIKOLSKY

1. In der Geschichte der theoretischen Untersuchungen, die der Approximation von Funktionen durch Polynome gewidmet sind, bemerkt man zwei Perioden.

Im vorigen Jahrhundert, im Laufe der ersten Periode, waren die Bemühungen der Mathematiker auf die Ausarbeitung der Approximationsmethoden einzelner individueller Funktionen gerichtet. Jedoch wurden zu der Zeit ebenfalls die Grundlagen zur gegenwärtigen Approximationstheorie von Funktionen gelegt.

P. L. Tschebyscheff führte den Begriff der besten Approximation ein und entdeckte den Satz, mit dessen Hilfe wir erkennen, ob die gegebene stetige Funktion auf dem Segment durch das Polynom auf die beste Weise oder nicht approximiert wird.

Tschebyscheff, sowie seine Schüler und Nachfolger, untersuchten ausserdem die speziellen Eigenschaften der Polynome, die sogenannten Extremaleigenschaften, die als Beweisinstrument eine Rolle in der modernen Approximationstheorie von Funktionen spielen. Die bekannten Markoffsche Ungleichungen für algebraische Polynome und die Bernsteinsche Ungleichung für trigonometrische Polynome sind Beispiele dieser Eigenschaften.

Die zweite Periode fällt schon in unsere Zeit. Sie formierte sich im Anfang unseres Jahrhunderts, nachdem Weierstrass seinen Satz bewies, der die prinzipielle Möglichkeit der Approximation auf dem Segment einer beliebigen stetigen Funktion durch Polynome feststellte.

Während im vorigen Jahrhundert die Approximation einzelner Funktionen den Untersuchungsgegenstand bildete, wird in der gegenwärtigen Zeit die Hauptaufmerksamkeit Fragen der Approximation von Funktionenklassen gewidmet.

Gegeben wird die Klasse der Funktionen, die (auf irgendeine Weise normierbar) analytisch, differenzierbar, der Lipschitzbedingung genügend usw. sind. Gegeben wird ausserdem die Approximationsmethode der Funktionen dieser Klasse durch Polynome. Gefordert ist, dass alles nur mögliche über die Grösse oder den Änderungscharakter der Approximationen der Funktionen dieser Klasse ausgesagt wird.

Dieser Vortrag setzt sich zum Ziel, einen kurzen Überblick über einige Ergebnisse, die sich auf dieses Thema beziehen, und in den letzten 20 Jahren erhalten wurden, zu geben. Dabei wird vielmehr die Aufmerkzamkeit nur auf solche Fragen gerichtet, mit denen ich selbst in meinen persönlichen Untersuchungen nahe Berührung hatte.

2. Vor allen Dingen wird uns folgende Aufgabe interessieren.

Gegeben sei die Funktionsklasse $\mathfrak{M}$ und gegeben sei die Approximationsmethode der Funktion $u_n(f, x)$ durch Polynome. Solche Methoden können zum Beispiel Fouriersche Summen, Fejérsche Summen n-ter Ordnung, beste oder algebraische Interpolationspolynome und trigonometrische Polynome n-ten Grades sein.

Gefragt ist, wie die obere Grenze

$$\sup_{f\in\mathfrak{M}} | f(x) - u_n(f, x) | = \mathscr{E}_{u_n}(\mathfrak{M}) \tag{1}$$

der erwähnten Approximation unter den Funktionen der Klasse $\mathfrak{M}$ ist.

In den Arbeiten von Lebesgue, Bernstein, Jackson, Vallée-Poussin, Borel und anderer Mathematiker wurden die Grössenordnungen der erwähnten oberen Grenzen in einer Reihe von Approximationsfällen untersucht, die für die Mathematische Analysis wichting sind.

Später, schon in den dreissiger Jahren, kam die Tendenz auf, genaue und asymptotische Ausdrücke für diese Konstanten zu suchen. Wir wenden uns ausführlicher gerade dieser Seite des Problems zu.

Angenommen, r sei eine natürliche Zahl und $\mathfrak{M}$ eine positive Zahl.

Wenn die Funktion f mit der Periode 2π eine Ableitung r-ter Ordnung $f^{(r)}(x)$ hat, die der Ungleichung $| f^{(r)}(x) | \leqq \mathfrak{M}$ genügt, so wollen wir sagen, dass sie zur Klasse $W^{(r)} = W^{(r)}(\mathfrak{M})$ gehört.

Es sei ferner $0 < \alpha \leqq 1$. Wenn die Ableitung r-ter Ordnung der Funktion mit der Periode 2π der Lipschitzbedingung mit der Konstante $\mathfrak{M}$ genügt

$$| f^{(r)}(x + h) - f^{(r)}(x) | \leqq \mathfrak{M} | h |^{\alpha},$$

so wollen wir sagen, dass sie zur Klasse $W^{(r)}H^{(\alpha)} = W^{(r)}H^{(\alpha)}(\mathfrak{M})$ gehört.

Angenommen, die Funktion $f(x)$ gehört jetzt zur Klasse $W^{(r)}(\mathfrak{M})$ und $S_n(f, x)$ ist ihre Fouriersche Summe n-ter Ordnung, dann gilt die Ungleichung

$$| f(x) - S_n(f, x) | < C_r \mathfrak{M} \frac{\ln n}{n^r}.$$

Diese Ungleichung wurde schon in den frühen Arbeiten von Lebesgue [15] und S. N. Bernstein [2] betrachtet. Damals sorgten die Autoren nicht dafür, dass die Konstante C_r möglichst klein sei. Sie sorgten allerhöchstens dafür, die Ungleichung im Sinne der Grössenordnung möglichst klein zu halten.

A. N. Kolmogoroff machte im Jahre 1934 den nächsten Schritt vorwärts zur Verstärkung dieses Resultates [11]. Er zeigte, dass folgende asymptotische Gleichheit existiert:

$$\mathscr{E}_{s_n}(W_r) \approx \frac{4M}{\pi^2} \frac{\ln n}{n^r} \quad (n \to \infty).$$

In Anschluss an Kolmogoroff bekamen späterhin ich [20], B.-Sz.-Nagy [18], S. Stečkin [31], I. Natanson [19] und andere, A. Timan [33], eine Reihe asymptotischer Abschätzungen ähnlicher Art für verschiedene in der Analysis wichtige Approximationsmethoden und Funktionsklassen.

Bemerkt sei, dass Stečkin die Aufgabe Kolmogoroffs löste für Potenzreihen, welche auf der Grenze des Kreises der Klasse $B^{(r)}$ gehören, die ähnlich der Klasse $W^{(r)}$ bestimmt ist.

3. Ein anderer wichtiger Untersuchungszyklus bezieht sich auf die Abschätzungen der besten Approximationen von Funktionen. Dieser Zyklus wurde in den Arbeiten von J. Favard begonnen, der die Ungleichung von G. Bohr und S. N. Bernstein verallgemeinerte. Weiter wurde der Zyklus fortgesetzt anfangs in den Arbeiten von N. I. Achieser, M. G. Krein und B. Sz. Nagy, und später in meinen und W. K. Dsjadyks Arbeiten.

Ich werde mich bemühen, dies zu Erklären, indem ich das Schema der Banachschen Räume benutze.

Wir betrachten im Banachschen Raum einen Körper $\mathfrak{M}$, der konvex, abgeschlossen und symmetrisch bezüglich des Nullelements ist. Diesen Körper wollen wir mit Klasse $\mathfrak{M}$ bezeichnen.

Es sei in unserem Banachschen Raum noch ein linearer n-dimensionaler Unterraum L gegeben, durch dessen Elemente (Polynome) wir die Elemente der Klasse $\mathfrak{M}$ approximieren wollen.

Es sei $E_n(x)$ der Abstand des Elementes x vom Unterraum L. Die kleinste Approximationskonstante der Klasse $\mathfrak{M}$ mit Hilfe von Polynomen aus L ist gleich

$$\mathscr{E}_n = \sup_{x \in \mathfrak{M}} E_n(x).$$

Wenn wir einen Hilbertschen Raum haben und $u_n(x)$ die Projektion des Elementes x auf L ist, so gilt $E_n(x) = || x - u_n(x) ||$ und folglich ist unsere Konstante $\mathscr{E}_n$ gleich der oberen Grenze

$$\mathscr{E}_n = \sup_{x \in \mathfrak{M}} || x - u_n(x) ||, \tag{2}$$

wobei $u_n(x)$ der lineare Operator ist.

In anderen, nicht Hilbertschen Räumen, ist die Sache komplizierter, da das x am nächsten liegende Element des Unterraums L mit Hilfe einer nichtlinearen Operation gefunden wird.

Und hier taucht das Problem auf: Ist es nicht trotzdem möglich, einen solchen linearen Operator $u_n(x)$ zu finden, der die Klasse $\mathfrak{M}$ im Unterraum L abbildet, und eben solchen der der Gleichheit (2) genügt?

In solcher abstrakten Form ist das Problem nicht in einem konkreten Banachschen Raum, ausser dem Hilbertschen, gelöst. Hier ist die Rede vom Existenzbeweis des linearen Operators $u_n(x)$, den wie die beste lineare Methode zur Betrachtung der Extremalaufgabe nennen werden.

Jedoch sind die Untersuchungen der obigen Autoren gerade Lösungen dieses Problems in einer Reihe für die Analysis konkret wichtiger partieller Fälle in der Metrik (C) (stetiger Funktionen) und der Metrik (L) summierbarer Funktionen.

J. Favard [6] löste diese Aufgabe in der Metrik (C) für die Klasse $W^{(r)}(\mathfrak{M})$.

Es sei $E_n(f)$ die beste Approximation einer Funktion mit der Periode 2π mit Hilfe trigonometrischer Polynome n-ter Ordnung, das heisst der Abstand in der Metrik (C) der Funktion f zum Unterraum der genannten Polynome. Dann gilt die Gleichheit

$$\sup_{f \in W^{(r)}(\mathfrak{M})} E_n(f) = \frac{A_r \mathfrak{M}}{n^r} \quad (r, n = 1, 2, \ldots),$$

wobei die Konstante A_r effektiv ausrechenbar ist.

J. Favard erhielt auch die beste lineare Methode für die Extremalaufgabe. Sie sieht folgendermassen aus:

$$u_n(f, x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{1}^{n-1} \lambda_\varkappa^{(n)} (a_\varkappa \cos \varkappa x + b_\varkappa \sin \varkappa x), \tag{3}$$

wobei $a_\varkappa$, $b_\varkappa$ Fourierkoeffizienten der Funktion f sind, und die Zahlen $\lambda_\varkappa^{(n)}$ durch die Klasse $W^{(r)}$ bestimmt werden und effektiv ausgerechnet werden können.

Eben dieses Resultat wurde später von N. I. Achieser und M. G. Krein [1] erhalten, die parallel den Fall der Klasse $\overline{W}_r$ betrachteten, der trigonometrisch der Klasse W_r konjugiert ist, und die dieses Ergebnis allgemeiner Klassen von periodischen, differenzierbaren oder analytischen Funktionen verallgemeinerten.

Die erwähnte Theorie lässt sich völlig auf die Klasse $\mathfrak{M}$ der periodischen Funktionen erstrecken, die in Form des Integrals

$$f(x) = \int_0^{2\pi} \varkappa(x - t) \varphi(t) dt \quad (|\varphi| \leqq \mathfrak{M})$$

darstellbar sind, wenn nur der Kern $\varkappa(t)$ den speziellen Bedingungen genügt. Diese Bedingungen werden auf jeden Fall für die von B. Nagy untersuchten Kerne erfüllt.

Es sei bemerkt, dass vor Kurzem der sowjetische Mathematiker W. K.

Dsjadyk [5] diese Aufgabe für die Klasse $W^{(r)}(\mathfrak{M})$ löste, wenn $r < 1$ und die Ableitungen im Sinne von Weyl verstanden werden.

4. Indem ich zu den Summen (3) zurückkehre, möchte ich bemerken, dass sie als Sonderfall die meisten bekannten Methoden der Summierung von Fourierschen Reihen bei passenden Koeffizienten $\lambda_\varkappa^{(n)}$ enthalten (Fejérsche Summen, Summen von Vallée-Poussin, Cesaro, Rogosinski-Bernstein usw.).

Gewöhnlich wurde jede solcher Summierungsmethoden für sich betrachtet. Jedoch lässt sich in der letzten Zeit die Tendenz feststellen, diese Summen im allgemeinen Falle zu untersuchen. Hierbei werden vorher an die Koeffizienten $\lambda_\varkappa^{(n)}$ nur allgemeine Bedingungen gestellt: Monotonie, Konvexität, Quasikonvexität, Darstellbarkeit in Form von $\lambda_\varkappa^{(n)} = \varphi\left(\frac{\varkappa}{n}\right)$ usw. Schon bei diesen Bedingungen gelingt es, weitgehende notwendige und hinreichende Konvergenzkriterien dieser Methoden zu bekommen, die eine grosse Anzahl früher erhaltener Teilfälle umfasst. Darüberhinaus gelingt es sogar, für die oben bestimmten oberen Grenzen nicht nur die Grössenordnungen, sondern auch die asymptotischen Ausdrücke zu erhalten.

Im Zusammenhang damit sind die Arbeiten von E. Hille und I. D. Tamarkin, J. Favard, G. Alexits, S. Losinksy und S. Nikolsky zu erwähnen, die sich auf Fragen der Konvergenz beziehen, und die späteren Arbeiten von B. Sz.-Nagy und A. F. Timan, die sich durch grosse Allgemeinheid und Genauigkeit der erzielten Ergebnisse auszeichnen.

5. Ich möchte noch eine Bemerkung machen. Wenn die Funktion f der Periode 2π zur Klasse $W^{(r)}H^{(\alpha)}(\mathfrak{M})$ gehört, so genügt, gemäss der Ungleichung von Jackson, ihre beste Approximation der Ungleichung $E_n(f) \leqq C\mathfrak{M}n^{-r-\alpha}$ $(n = 1, 2, \ldots)$.

Die umgekehrte Behauptung bei α kleiner als eins ist auch richtig. Diese wurde von Vallée-Poussin festgestellt der die Umkehrung des Satzes Bernstein endgültig präzisierte. Jedoch ist bei α gleich eins die umgekehrte Behauptung im allgemeinen nicht richtig.

Der Ausweg aus dieser Lage fand Zygmund. Er hat etwas andere Klassen vorgeschlagen, die wir mit $H^{(r)}$ bezeichnen.

Es sei $r = r' + \alpha$, wo r' ganz und $0 < \alpha \leqq 1$. Auf Definition $H^{(r)} \doteq W^{(r')}H^{(\alpha)}$, wenn $0 < \alpha < 1$; aber für $\alpha = 1$, $f \in H^{(r)}$, wenn $f_{(x)}^{(r')}$ stetig ist und

$$| f^{(r')}(x + h) - 2f^{(r')}(x) + f^{(r')}(x - h) | \leqq \mathfrak{M} \, | h |. \tag{4}$$

Es gilt folgender Satz.

Damit die Funktion f zur Klasse $H^{(r)}$ gehört, ist es notwendig und hinreichend dass die Ungleichung $E_n(f) < \frac{c}{n^r}$ $(n = 1, 2, \ldots)$ erfüllt ist.

6. Übrigens ist zu bemerken, dass bei ganzem r Untersuchungen, die sich das Ziel setzen, genaue Konstanten für die Klassen $H^{(r)}$ zu erhalten, sehr schwer ausfallen.

Nehmen wir ein Beispiel: Wenn eine Funktion an den Enden des Segments $[-1, 1]$ gleich Null ist und der Lipschitzbedingung mit der Konstante $\mathfrak{M}$ gleich eins genügt, so ist $\max |f(x)| = 1$. Uns ist die genaue Lösung dieser Aufgabe für Funktionen, die der Zygmundbedingung mit der Konstanten eins genügen, unbekannt. A. F. Timan gab die nichttriviale Abschätzung $|f(x)| < \frac{4}{3}$. Sie ist jedoch nicht endgültig.

Hier sei noch eine Aufgabe, deren Lösung ich nicht kenne: Die genaue obere Grenze des Integrals $\int\limits_0^{2\pi} f(x) \sin x dx$ ist unter den Funktionen f, die der klasse $H^{(r)}(\mathfrak{M})$ angehören, zu finden.

Im Übrigen gibt es für die Klassen $W^{(r)}$ und $W^{(r)}H^{(\alpha)}$ auch Aufgaben, die wir bisher nicht lösen konnten.

Uns ist zum Beispiel der genaue asymptotische Ausdruck für die Konstanten

$$\sup_{f \in W(0)H(\alpha)(\mathfrak{M})} E_n(f) = \mathscr{E}_n \quad (0 < \alpha < 1)$$

und $\sup\limits_{f \in W(1)(\mathfrak{M})} |f(x) - \bar{\sigma}_n(f, x)|$ unbekannt, wobei $\bar{\sigma}_n$ die in der Fejérschen Summe konjugierte Summe ist.

Für die Summen vieler Veränderlicher gelang es bisher nur in Einzelfällen solche asymptotischen Ausdrücke zu erhalten (siehe [4]).

7. Zuletzt ist noch zu erwähnen, dass die Jacksonschen Ungleichungen für die beste Approximation von Funktionen eine Abschätzung von oben geben. Vor kurzem erhielt S. B. Stečkin [31] eine Abschätzung von unten für Funktionen aus den Klassen $H^{(r)}$ und sogar allgemeinerer.

8. Gehen wir zum nicht periodischen Fall über. Angenommen, dass $W^{(r)}(\mathfrak{M})$ Klassen nicht periodischer Funktionen sind, gegeben auf der Strecke $[-1, +1]$. Des Weiteren werden die Funktionen dieser Klassen genau so bestimmt, wie vorher. Jetzt ist schon die Rede von der Approximation dieser Funktionen durch algebraische Polynome: $P_n(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n$. Angenommen, $E_n(f)$ bezeichnet die beste Approximation der Funktion f auf der Strecke $[-1, +1]$ in der Tschebyscheffmetrik durch Polynome $P_n(x)$.

Es gelang, zu zeigen, dass die obere Grenze der besten Approximationen $E_n(f)$ unter den Funktionen der nicht periodischen Klasse $W^{(r)}(\mathfrak{M})$ asymptotisch gleich der oberen Grenze im periodischen Falle ist:

$$\sup_{f \in W^{(r)}(\mathfrak{M})} E_n(f) \approx \frac{\mathrm{A}_r}{n^r} \quad (n \to \infty,\ r = 1, 2, \ldots). \tag{5}$$

Der Fall $r = 1$ wurde von mir [21] bewiesen, den allgemeinen Fall bewies S. H. Bernstein [2].

Die dieser Aufgabe entsprechende asymptotisch beste Linearmethode sieht so aus [37]:

$$u_n(f, x) = a_0 + \sum_{1}^{n} x^{\varkappa} \int_{-1}^{t} \alpha_{\varkappa}^{(n)}(t) f^{(r)}(t) dt,$$

wobei $\alpha_{\varkappa}^{(n)}(t)$ die durch die Klasse $W^{(r)}$ zu bestimmenden Funktionen sind. Gleichzeitig wurde diese Aufgabe in der Metrik (L) gelöst [23].

9. Ich möchte noch bei einigen Ergebnissen verweilen, die ich nur im Falle $r = 1$ formulieren werde. Es wurde gezeigt, dass die aus (5) folgende Ungleichung

$$\limsup_{n \to \infty} n E_n(f) \leqq \frac{\pi}{2} \mathfrak{M}$$

die auch für die Funktionen der Klasse $W^{(r)}(\mathfrak{M})$ gilt, genau ist.

Interessant ist, dass im Falle einer Beschränkung auf solche Funktionen der Klasse $W^{(r)}(\mathfrak{M})$, die eine Ableitung mit Unstetigkeiten 1-ter Art haben, für sie schon eine andere Ungleichung gilt, nämlich [22]:

$$\limsup_{n \to \infty} n E_n(f) \leqq \limsup_{n \to \infty} n E_n(|\, x \,|) = \mu \approx 0{,}282$$

wobei μ die Bernsteinsche Konstante, die kleiner als $\frac{\pi}{2}$ ist.

Aus der Jacksonschen Ungleichung folgt, dass die allergrösste Ordnung,die die beste Approximation einer individuellen Funktion der Klasse $W^{(1)}$ annehmen kann, gleich $O\left(\frac{1}{n}\right)$ ist. Seinerzeit bewies S. Bernstein, dass diese Grössenordnung für die Funktion $|\, x \,|$ erreicht wird. Wir können jetzt sagen, dass nicht vom Standpunkt der Grössenordnung, sondern von dem des asymptotischen Verhaltens der besten Approximation, es in der Klasse $W^{(1)}$ noch schlechtere Funktionen gibt, als $|\, x \,|$.

10. Ich möchte noch die Aufmerksamkeit darauf richten, das die Konstante A_r naturgemäss in anderen präzisen Extremalaufgaben der Analysis auftaucht. Im Zusammenhang damit sei folgendes Resultat von Kolmogoroff angeführt [12].

Es seien $\mathfrak{M}_0, \mathfrak{M}_{\varkappa}, \mathfrak{M}_n$ $(0 < \varkappa < n)$ drei positive Zahlen. Damit es auf der ganzen reellen Achse eine Funktion $f(x)$ existiert, für die

$$\mathfrak{M}_i = \sup_{-\infty < x < \infty} |\, f^{(i)}(x) \,| \quad (i = 0, \varkappa, n)$$

gilt ist notwendig und hinreichend, dass die Ungleichung

$$\mathfrak{M}_\varkappa \leqq \frac{A_{n-\varkappa}}{(A_n)^{\frac{n-\varkappa}{n}}} \mathfrak{M}_0^{\frac{n-\varkappa}{n}} \mathfrak{M}_n^{\frac{\varkappa}{n}}$$

stattfindet.

11. Ich möchte auch bemerken, dass die Theorie der Approximationen von Funktionen in der letzten Zeit um eine neue Seite bereichert wurde. Ich denke an ganze Funktionen vom Exponentialtypus oder, wie man sie noch nennt, ganze Funktionen endlichen Grades.

An der Schaffung der Approximationstheorie von Funktionen auf der reellen Achse durch ganze Funktionen endlichen Grades hat S. Bernstein grossen Anteil. Unter den mir bekannten anderen Arbeiten, die sich auf dieses Problem beziehen, bemerke ich die Arbeiten von N. Achieser, M. Krein, Boas, Kober, B. Sz.-Nagy, S. Nikolsky.

In einer dem periodischen Fall analogen Weise lassen sich auch, für die auf der geraden definierten Funktionen, die Klassen $H^{(r)}$ und — für die Metrik L_p die Klassen $H^{(r)}_{L_p}$ definieren, welche in bezug auf ganze Funktionen endlichen Grades sich ebenso verhalten, wie die betreffenden periodischen Klassen in bezug auf die trigonometrischen Polynome.

Der enge Zusammenhang mit der Theorie der Approximationen durch trigonometrischen Polynome ist hier so gross, dass sogar die genauen Approximationskonstanten in analogen Fällen völlig übereinstimmen [1, 17, 14]. Hier formuliere ich nur folgendes Resultat von S. Bernstein:

Bei allgemeinen Voraussetzungen, die an die Funktion gestellt werden, gilt die Gleichheit

$$\lim_{n\to\infty} E_n\left(f, \frac{n}{p}\right) = A p(f),$$

wobei $E_n(f, a)$ die beste Approximation der Funktion f auf dem Segment $[-a, a]$ mit Hilfe eines algebraischen Polynoms n-ten Grades ist und $A_p(f)$ beste Approximation f durch eine ganze Funktion p-ten Grades.

12. Der letzte Teil meines Vortrages bezieht sich auf Fragen der Approximation von Funktionen mit mehreren Veränderlichen.

Die Klassen $H^{(r_1,\ldots,r_n)}$ [2] und $H^{(r_1,\ldots,r_n)}_{L_p}$ [38], [1], [25] von Funktionen mehrer Verändlicher sind nach dem Muster der Klassen $H^{(r)}$ und $H^{(r)}_{L_p}$ von Funktionen mit einer Veränderlichen aufgebaut, ebenso die gewöhnliche Theorie der Approximationen mit direkten und inversen Sätzen.

Im Falle der Metrik L_p ist es erforderlich, um die direkten und inversen Sätze zu vollkommenen „Abschliessen" zu bringen, dass die partiellen Ableitungen der Funktionen der Klassen $H^{(r_1,\ldots,r_n)}_{L_p}$ im verallgemeinerten Sinne zu verstehen sind, so wie es in der modernen Mathematischen Physik üblich ist.

Überhaupt muss konstatiert werden, dass einige Ideen die in der Mathematischen Physik schon in den dreissiger Jahren auftauchten sich in den letzten Jahren berührten mit der Theorie der Approximationen durch Polynome, was wiederum zu ihrer weiteren Entwicklung führte. Ich denke dabei an die in der mathematischen Physik bekannten Einbettungsatz von Soboleff [29].

Auf Grund der auf entsprechender Weise entwickelten Approximationstheorie von Funktionen durch ganze Funktionen endlichen Grades, wurde es ermöglicht, die Sätze von S. Soboleff und seines Schülers W. Kondrascheff [1]) [13] zu präzisieren und eine Klasse dieser Sätze voll umzukehren.

Es gibt zwei Typus von Soboleffschen Sätzen. Zum ersten Typus gehören die Theoreme, mit deren Hilfe man nach gegebener Differentialeigenschaft der Funktionen, ausgedrückt in der Metrik L_p, ihre Differentialeigenschaften in der Metrik $L_{p'}$ erkennen kann, wobei $1 \leqq p < p' \leqq \infty$.

Wenn zum Beispiel das Quadrat der Funktion $f(x, y)$ und die Quadrate ihrer ersten und zweiten verallgemeinerten Ableitungen in der Ebene integrierbar sind, so folgt daraus, dass die Funktion in der Ebene stetig ist. Sie gehört darüberhinaus zur Klasse $H^{(1,1)}$, das heisst sie genügt der (4) mit der Variablen x.

Zum zweiten Typus gehören die Sätze, mit deren Hilfe man nach gegebener Differentialeigenschaft, ausgedrückt bezüglich des Gebietes $\mathscr{G}$ die Differentialeigenschaft dieser Funktion erkennen kann, wenn man sie in der Mannigfaltigkeit betrachtet, die zu $\mathscr{G}$ gehört, und eine kleinere Zahl von Dimensionen hat als $\mathscr{G}$.

Wenn zum Beispiel die Funktion $f(x, y)$, gegeben in der Ebene, zur Klasse $H_{L_2}^{(1,1)}$ gehört, so gehört sie, wie die Funktion von x bei fixiertem y zur Klasse $H_{L_2}^{(1/2)}$.

Es zeigt sich jedoch, dass die Sätze des zweiten Typus völlig reversibel sind [27]. Aus dem Grunde kann man, wenn auf der x-Achse eine beliebige Funktion $\varphi(x)$ gegeben ist, die zur Klasse $H_{L_2}^{(1/2)}$ gehört, sie auf der ganzem Ebene fortsetzen so, dass die fortgesetzte Funktion aufs Neue zur Klasse $H_{L_2}^{(1,1)}$ gehört.

Für solche Untersuchungen von Funktionen mehrerer Veränderlicher mit Hilfe von Approximationsmethoden durch ganze Funktionen endlichen Grades oder durch trigonometrische Polynome wurde, neben der Anwendung der Bernsteinschen Ungleichung, die Anwendung anderer Extremalungleichungen [25] notwendig. Sie sehen so aus:

$$\| \mathscr{G} \|_{L_p}^{(m)} \leqq C \left(\sum_{m}^{n} \nu_\varkappa \right)^{\frac{1}{p}} \| \mathscr{G} \|_{L_p}^{(n)} \quad (1 \leqq m < n)$$

$$\| \mathscr{G} \|_{L_{p'}}^{n} \leqq C \left(\sum_{0}^{n} \nu_\varkappa \right)^{\frac{1}{p} - \frac{1}{p'}} \| \mathscr{G} \|_{L_p}^{(n)} \quad (1 \leqq p < p' \leqq \infty).$$

[1]) Es sei noch die zu dieser Frage gehörende Arbeit von I. Petrowsky und K. Smirnoff [28] erwähnt.

Hier ist $\mathscr{G}$ eine ganze Funktion mit mehreren Veränderlichen des Grades $\nu_1 \dots \nu_n$ und C eine Konstante, die nur von n abhängt.

Die erste Ungleichung gibt die Möglichkeit, die Norm der Funktion $\overline{\overline{\mathscr{G}}}$ im m-dimensionalen Unterraum durch die Norm abzuschätzen, die im n-dimensionalen Unterraum berechnet ist. Die zweite Ungleichung gibt die Möglichkeit die Norm $\overline{\overline{\mathscr{G}}}$ in der Metrik $L_{p'}$ zu berechnen, wenn die Norm $\overline{\overline{\mathscr{G}}}$ in der Metrik L_p bekannt ist. Die zweite Ungleichung war Jackson bei $n = 1$ und $p' = \infty$ früher bekannt.

Die Resultate, von denen hier die Rede ist, finden ihre Anwendung in der Theorie der direkten Methoden der Variationsrechnung [26, 29]. Als Beispiel betrachte ich die einfachste Dirichletsche Aufgabe.

Bekannt ist, dass die in der Ebene $\mathscr{G}$ harmonische Funktion $u(x, y)$ die an ihrer Grenze Γ gegebene Werte $u|_\Gamma = \varphi(s)$ annimmt, als Funktion zu bekommen ist, für welche das Integral

$$\mathscr{D}[F] = \iint\limits_{\mathscr{G}} \left\{\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2\right\} dxdy$$

ein Minimum erreicht unter allen möglichen Funktionen F, die der Randbedingung $F|_\Gamma = \mathring{\varphi}(s)$ genügen.

Jedoch ist die Dirichletsche Aufgabe längst nicht bei allen, sogar stetigen, Randwertfunktionen $\varphi(s)$ lösbar. Schon Weierstrass brachte ein Beispiel einer stetigen Randwertfunktion, für welche die Dirichletsche Aufgabe nicht durch die Variationsmethode lösbar ist, da die ihr entsprechende harmonische Funktion ein unendliches Dirichletsches Integral $\mathscr{D}[u] = \infty$ hat.

In den modernen Handbüchern der Mathematischen Physik werden bei der Begründung der Variationsmethode unmittelbar die Eigenschaften der Randwertfunktion nicht gegeben. Um diese Schwierigkeit zu umgehen, wird angenommen, dass zum Mindesten eine zulässige Funktion existiert, die die gegebenen Randeigenschaften besitzt. Mit anderen Worten: Es wird angenommen, dass die Klasse der zulässigen Funktionen nicht leer ist, und das ist schon hinreichend, um die Existenz von Funktionen in dieser Klasse zu begründen, die das Dirichletsche Integral zum Minimum werden lassen, und die Tatsache zu begründen, dass die zum Minimum führende Funktion die einzige ist und harmonisch ist.

Trotzdem taucht die Frage auf: Welche Eigenschaften sollen die Randbedingungen besitzen, damit eine zulässige Funktion existiert? Solche Bedingungen kann man in den allgemeinsten Fällen von Randwertaufgaben elliptischen Typs geben, wenn die Grenze des Gebietes, für welches die Aufgabe gelöst wird, genügend glatt ist.

Notwendige Bedingungen wurden in den Arbeiten von S. Soboleff und W. Kondrascheff erhalten. Indem man die Approximationsmethoden durch Polynome anwendet, kann man sie in einigen Fällen präzisieren, jedoch kann man auch ihnen nahe (in den Bezeichnungen der Klassen $H^{(r)}$ mit der Genauigkeit bis auf ε) hinreichende Bedingungen geben.

Zum Beispiel gibt es im Falle der von uns betrachteten Dirichletschen Aufgabe mit hinreichend glattem Rand folgende Behauptung:

Damit den Bedingungen $\mathscr{D}[F] < \infty$, $F|_{\Gamma} = \varphi(s)$ genügende zulässige Funktion existiert, ist es notwendig, dass die Randwertfunktion zur Klasse $H_2^{(1/2)}$ gehört, und hinreichend, dass die Funktion φ zur Klasse $H_2^{(1/2+\varepsilon)}$ gehört.

Zum Schluss möchte ich bemerken, dass gerade die Methoden der Approximation von Funktionen durch Polynome bei der Erfassung des Verhaltens von Funktionen in linearen Unterräumen des n-dimensionalen Raumes benutzt wurden. Der weitere Übergang von den Unterräumen zu kurvigen Rändern der Gebiete erforderte schon Betrachtungen, die für die Funktionstheorie überhaupt charakteristisch sind. Hierbei waren uns einige Ergebnisse von M. K. Hestenes [8] und H. Whitney [35] nützlich.

Literatur

[1] N. I. Achieser, Vorlesungen über die Approximationstheorie. 1941.

[2] S. N. Bernstein, Gesammelte Arbeiten, Band 1, 2, Akademi Nauk UdSSR (1952—1954).

[3] H. Bohr, C. R. Acad. Sci., Paris, t. 200 (1935), 1276.

[4] N. G. Bugajez. Dokladi Akad. Nauk UdSSR, 79 (1951), 557—560.

[5] W. K. Dsjadyk. Iswestija Akad. Nauk UdSSR (Serie Mathem.), 17 (1953), 135—162.

[6] J. Favard, C. R. Acad. Sci., Paris, 203 (1936), 1122—1124.

[7] J. Favard, Colloque intern. d. Centre National d. l. Recherche Scientifique, Paris (1949), XV.

[8] M. K. Hestenes, Duke Math. Journ., 8 (1941), 183—192.

[9] E. Hill and I. D. Tamarkin, Trans. of the Amer. Math. Soc., 34 (1932), 757—783.

[10] D. Jackson, The theory of approximation. N.Y. (1930).

[11] A. Kolmogoroff, Ann. of Math., 36 (1935), 521—526.

[12] A. N. Kolmogoroff, Utschenye Sapiski Mosk. Univ., 30 (1939), 3—16.

[13] W. I. Kondraschoff, DAN UdSSR, 48 (1945), 536—566.

[14] M. G. Krein, DAN UdSSR, 18 (1938), 619—624.

[15] A. Lebesgue, Bull. Soc. Math. de France (1910).

[16] S. M. Losinsky. Math. Sbornik, 14 (65) (1944), 175—268.

[17] B. Sz.-Nagy, Leipzig, Ber. Akad. d. Wiss. (1938).

[18] B. Sz.-Nagy, Acta Sci. Math. Szeged, 12 (1950), 204—210.

[19] I. P. Natanson, DAN UdSSR, 72 (1950), 11—14.

[20] S. M. Nikolsky, Trudy Matem. Inst. Akad. Nauk UdSSR, 32 (1945), 1—76.

[21] S. M. Nikolsky, Iswestija Akad. Nauk UdSSR (Serie Mathem.), 10 (1946), 295—332.

[22] S. M. Nikolsky, DAN UdSSR, 15 (1947), 99—102.

[23] S. M. Nikolsky, DAN UdSSR, 58 (1947), 185—187.

[24] S. M. NIKOLSKY, Iswestija Akad. Nauk UdSSR (Serie Mathem.), 12 (1948), 258—278.
[25] S. M. NIKOLSKY, Trudy Mat. Inst. imeni W. A. Steklowa Akad. Nauk UdSSR, 38 (1951), 244—274.
[26] S. M. NIKOLSKY, DAN UdSSR, 83 (1953), 409—411.
[27] S. M. NIKOLSKY, Mat. Sbornik, 33 (1953), 261—326.
[28] I. G. PETROWSKY und K. N. SMIRNOFF, Bull. Mosk. Univ., A (1938), 10, 1—5.
[29] S. L. SOBOLEFF, Einige Anwendungen der Funktionenanalyse in der Mathematischen Physik. Leningradski Univ. (1950).
[30] S. B. STEČKIN, Iswestija Akad. Nauk UdSSR (Serie Mathem.), 15 (1951), 219—242.
[31] S. B. STEČKIN, Iswestija Akad. Nauk UdSSR (Serie Mathem.), 17 (1953), 461—472.
[32] A. F. TIMAN, Iswestija Akad. Nauk UdSSR (Serie Mathem.), 15 (1951), 243—254.
[33] A. F. TIMAN, Iswestija Akad. Nauk UdSSR (Serie Mathem.), 17 (1953), 99—134.
[34] VALLÉE-POUSSIN, Leçons sur l'approximation des fonction d'une variable réelle. Paris (1919).
[35] H. WHITNEY, Trans. Amer. Math. Soc., 36 (1934), 63—89; 40 (1936), 309—317.
[36] A. ZYGMUND, Duke Math. J., 12 (1945), 47—76.
[37] S. M. NIKOLSKY, DAN UdSSR, 69 (1949), 129—132.
[38] E. S. QUADE, Duke Math. J., (1937), 529-543.