SUR L'ÉLIMINATION DE PHÉNOMÈNES PARADOXAUX EN TOPOLOGIE GÉNÉRALE

Karol Borsuk

Warszawa.

1. Les notions de la géométrie élémentaire sont intimement liées aux propriétés des corps matériels. Aussi les théorèmes géométriques peuvent-ils être interprétés et vérifiés sur des modèles convenablement construits. C'est notamment le cas des chapitres de la géométrie élémentaire qui concernent les polyèdres. En vue des considérations qui vont suivre, j'entends ici par *polyèdres* les images homéomorphes de ceux de la géométrie élémentaire, donc aussi les polyèdres dits *curvilignes*.

Tout polyèdre se laisse *trianguler*, c'est-à-dire décomposer en un système fini de simplexes de manière que la partie commune de deux quelconques soit le simplexe tendu sur leurs sommets communs. L'effet en est que la structure topologique de tout polyèdre se trouve parfaitement déterminée par la table finie des incidences entre les simplexes de sa triangulation. C'est à ce caractère finitiste de leur structure que les polyèdres doivent bien la simplicité de leurs propriétés topologiques. Aussi, malgré la richesse considérable de formes, nous ne rencontrons parmi les propriétés intrinsèques de polyèdres aucune propriété paradoxale ou — comme on dit parfois — aucun phénomène pathologique, aucune monstruosité.

Mais l'espace euclidien et les polyèdres n'épuisent pas l'objet des recherches géométriques. Déjà en mathématique classique l'on voit apparaître, à coté de l'espace de géométrie élémentaire, des espaces beaucoup plus généraux, dus aux idées de Grassman, Lobatchevsky, Riemann et autres. L'attention des géomètres se concentrait au début sur les figures qui, tout en étant situées dans ces espaces, ne s'éloignent en général pas de l'intuition, grâce à la simplicité de leur structure. La situation a changé lorsqu'on a été amené, par suite du développement de la théorie des ensembles, à considérer des ensembles tout à fait arbitraires situés dans les espaces classiques et — plus encore — lorsqu'on a introduit la notion d'*espaces abstraits*.

Le processus de généralisation de la notion d'espace joue un rôle fondamental dans la mathématique contemporaine et il est probablement loin d'être achevé. Les espaces fort généraux, introduits axiomatiquement, s'écartent bien sensiblement de ceux de la mathématique classique. On a réussi cependant d'établir des théorèmes importants qui déterminent à peu près la place que les espaces de la mathématique classique, définis d'habitude arithmétiquement, occupent dans la vaste famille des espaces abstraits, définis axiomatiquement. Tel est, en premier lieu, le théorème capital d'Urysohn [1] qui caractérise axiomatiquement les espaces homéomorphes aux ensembles situés dans l'espace de Hilbert. Tel est aussi le théorème de Menger et Nöbeling [2] (sur le plongement d'ensembles de dimension n, par homéomorphie, dans le cube de dimension $2n + 1$) qui caractérise les images homéomorphes d'ensembles situés dans les espaces euclidiens. On a réussi d'autre part, surtout grâce aux travaux de Brouwer, Alexandroff, Vietoris, Čech, Lefschetz et autres d'étendre aux certains espaces abstraits très généraux une partie notable de notions qui se sont formées dans le domaine de la topologie des polyèdres. On a fait aussi ressortir l'élément géométrique contenu dans la notion d'espace abstrait. Enfin, les relations entre les notions topologiques générales et les figures géométriques classiques ont trouvé leur expression dans le peu de théorèmes connus qui caractérisent topologiquement l'*arc simple* [3], la *courbe simple fermée* [4], le *disque fermé*, la *sphère* de dimension 2 [6] et, plus généralement, les *variétés* de même dimension [7]. C'est à ceux théorèmes qu'appartient la caractérisation topologique des polyèdres de dimension 2, trouvée récemment à Varsovie par Kosiński [8].

Les généralisations topologiques des espaces de géométrie ayant introduit des propriétés paradoxales, il est naturel de se poser la question si l'on ne peut quand même définir à l'aide des notions de topologie générale une classe d'espace qui, tout en restant à l'abri des paradoxes, serait assez générale pour renfermer tous les polyèdres. Ce problème ne passionne peut-être pas, en ce moment, la plupart de topologues. Il ne se trouve même pas sur la route magistrale de leurs recherches actuelles. Néanmoins, il me semble mériter l'attention et pouvoir susciter l'intéret de tout mathématicien. C'est pourquoi je l'ai choisi pour sujet de ma conférence.

2. Le besoin d'avoir une notion extrêmement générale d'espace se manifeste dans divers domaines de mathématique. Il est clair cependant qu'en faisant croitre la généralité de cette notion, sa teneur géométrique décroit. Elle semble déjà fort pauvre lorsqu'on s'avance au delà des espaces métrisables. C'est pourquoi il est plausible de postuler ici la

I *Métrisabilité.*

Ce postulat, associé à celui de séparabilité, reduit (grâce au théorème précité d'Urysohn) les espaces abstraits généraux aux ensembles situés dans celui de Hilbert, donc dans un espace défini arithmétiquement.

En y ajoutant le postulat de la

II *Dimension finie.*

et en appliquant le théorème précité de Menger et Nöbeling, on parvient aux ensembles situés dans les espaces euclidiens en s'approchant ainsi du domaine classique de la géométrie.

Pourtant, ces ensembles étant arbitraires, il y a parmi eux qui ne ressemblent guère, par ses propriétés, aux figures classiques, voire aux polyèdres. Pour s'approcher d'elles — ou, si l'on veut, des notions aux propriétés possiblement voisines de celles d'objets matériels, il parait donc opportun d'ajouter à I et II le postulat de

III *Compacité.*

On sait que la compacité d'un espace métrique en assure la séparabilité, de sorte que les postulats I—III, pris ensemble, caractérisent topologiquement la classe de tous les ensembles compacts situés dans les espaces euclidiens. La topologie de ces ensembles s'est particulièrement développée et ses résultats témoignent de leur richesse en matière géométrique.

Mais même parmi les epaces assujettis aux postulats I—III, il y a notoirement qui sont porteurs de singularités impossibles dans le monde de polyèdres. Le *phénomène d'indécomposabilité* par exemple, decouvert par Brouwer [9] et même celui infiniment plus accentué, dit *indécomposabilité totale* ou *héréditaire* (découvert par Knaster [10]), est — comme l'a montré Mazurkiewicz [11] — la règle dans cette classe d'espaces: ceux qui en sont exempts y constituent en un certain sens des exceptions bien rares. Une autre singularité qui se présente dans cette classe d'espaces consiste dans la divergence, découverte par Pontrjagin [12], entre la notion géométrique usuelle et les notions qui lui correspondent dans la théorie de l'homologie.

La nature trop générale d'espaces métriques compacts a suggéré aux mathématiciens de soumettre les espaces dont ils s'occupaient à des conditions supplémentaires locales. Telle est par exemple la *connexité locale*, de même que ses analogues en dimensions supérieures à 1. Parmi ces classes moins générales d'espaces compacts, celle des espaces dits *rétractes absolus de voisinage* mérite une attention particulière. Ils ont été introduits d'abord pour les besoins de la théorie des prolongements de transformations continues. Il leur revient actuellement un role essentiel dans plusieurs domaines de topologie, en particulier dans la théorie de l'*homotopie* et dans celle des *espaces fibrés*. La notion de ces espaces — appelés en transcription anglaise „*absolute neighbourhood retracts*" et qui seront désignés ici par l'abréviation ANR — empruntée à Lefschetz [13] — a été plus récemment généralisée d'une manière essentielle grâce aux travaux de Kuratowski, Hu, Saito, Hanner et autres [14]. Pour nos buts cependant, il est plutôt utile de rétrécir cette notion, à savoir en la soumettant au postulat II (dimension finie), qui n'entre pas dans la définition primitive de ANR. Alors, les espaces ANR peuvent être définis comme assujettis aux postulats I—III et à celui de

IV *Contractilité locale.*

L'espace X est dit *localement contractile* lorsque, quel que soit le point x de X tout voisinage U de x (c'est-à-dire ensemble dont x est un point intérieur) contient un voisinage V de x qui se laisse réduire à un point par une déformation continue affectuée dans U.

Il est bien connu que les propriétés des espaces qui sont des ANR ressemblent beaucoup à celles des polyèdres [15]. En particulier, les groupes d'homologie de ces espaces sont isomorphes à ceux de certains polyèdres et plusieurs théorèmes établis d'abord pour les polyèdres sont entièrement valables pour les ANR. Telle est toute la théorie homologique des points invariants par exemple. Les ANR sont d'ailleurs, dans certain sens, le domaine naturel de la théorie de l'homotopie.

Mais, contrairement aux polyèdres, dont les définitions sont *constructives* (par les moyens de la géométrie élémentaire) les ANR sont définis *axiomatiquement* (par ceux de la topologie générale). C'est pourquoi les ANR sont souvent plus commodes dans les considérations topologiques que les polyèdres. La démonstration qu'un espace est ANR se réduit à vérifier qu'il satisfait aux postulats I—IV, tandis que le problème de montrer topologiquement qu'il est un polyèdre comporte en général des difficultés insurmontables à l'heure actuelle, car nous ignorons les propriétés topologiques qui caractérisent les polyèdres. Il est manifeste par exemple que le produit cartésien de deux espaces n'est un ANR que s'ils le sont tous les deux; autrement dit, un diviseur cartésien d'un ANR est toujours un ANR. Par contre, la question si un diviseur cartésien d'un polyèdre est toujours un polyèdre parait extrêmement difficile. Elle n'est résolue jusqu'à présent que pour les dimensions 1 et 2 par Kosiński [16] (à savoir par l'affirmative). Notre ignorance des propriétés topologiques caractérisant les polyèdres est l'une des raisons que le problème classique de triangulation concernant les variétés comporte toujours de si considérables difficultés. Il est possible que les résultats récents de Bing et de Moise [17] sur la triangulation des variétés à 3 dimensions contribueront à caractériser topologiquement tous les polyèdres à 3 dimensions.

3. Au point de vue du sujet proposé, il importe surtout d'étudier la question si les propriétés topologiques des ANR sont déjà suffisamment proches de celles des polyèdres; en d'autres termes, s'il existe même parmi les ANR des espaces

ayant des propriétés paradoxales. Oui, il en existe et on le sait depuis des dizaines d'années. Je vais m'arrêter un peu sur trois de ces propriétés, car elles me semblent les plus importantes [18].

Tout polyèdre est un ANR, il est donc localement contractile. Or, il est aisé de montrer que tout polyèdre X satisfait à la condition suivante, qui est plus restrictive que la contractilité locale [19]:

V *Quel que soit le point $x \in X$, tout voisinage U de x contient un tel voisinage V de x que tout sous-ensemble compact B de V se laisse réduire à un point par une déformation continue effectuée dans un sous-ensemble A de U assujetti à la condition $\dim A \leqq \dim B + 1$.*

Voici l'exemple [20] d'un espace X qui est ANR, mais ne satisfait pas à V: considérons une fonction continue f qui transforme un segment rectiligne I situé à l'intérieur du carré Q_2 en un cube Q_3 et identifions les points de I transformés par f en un même point de Q_3; l'espace X est ce que devient Q_2 par cette identification. Vu la liaison étroite de cet exemple avec l'existence de transformations continues f qui élèvent la dimension, découvertes en 1890 par Peano [21], j'appelle *singularité de Peano* l'absence de la propriété V chez un ANR.

La deuxième singularité est de nature homologique. Désignons par $p_n(X)$ le nombre n-dimensionnel de Betti de l'espace X. Il est facile de démontrer que tous les polyèdres satisfont à la condition suivante:

VI *Si $p_n(X) > 0$, il existe un sous-ensemble compact F de X pour lequel $p_n(X) = p_n(F) + 1$.*

Il n'en est pas ainsi pour tous les ensembles compacts. En 1910 Brouwer [22] a construit un continu plan X qui était la frontière commune à 3 régions. On a alors $p_1(X) = 2$ et en même temps $p_1(F) = 0$ pour tout sous-ensemble compact F de X qui est distinct de X. La condition VI est donc en défaut pour ce continu, ce que j'appelle *singularité de Brouwer*. Sur le plan, elle n'est possible que dans les ensembles de structure topologique très compliquée [23], mais il en est autrement déjà dans l'espace euclidien de dimension 3. Lubański [24] y a construit récemment un ANR constituant la frontière commune à 3 régions et par conséquent jouissant de la singularité de Brouwer.

La troisième singularité est liée à la notion de *rétracte absolu.* On appelle ainsi — et on désigne par AR — tout ANR contractile (à un point) dans lui-même. En particulier, tout polyèdre contractile dans lui-même est un AR. Plus encore: X étant un polyèdre, il existe manifestement, pour chacun de ses points, un voisinage aussi petit que l'on veut et qui est contractile dans lui-même. Tout polyèdre X satisfait par conséquent à la condition:

VII *Tout point x de X a un voisinage arbitrairement petit qui est un AR.*

Il existe cependant, déjà dans l'espace euclidien de dimension 3, des ensembles X qui sont des ANR ne satisfaisant pas à la condition VII. J'appelle *singularité de Mazurkiewicz* le phénomène en question, car c'est à lui que remonte la première idée d'un exemple de ce genre [25]. Un example plus singulier a été construit par moi en 1948 [26], à savoir un AR de dimension 2, situé dans l'espace euclidien de dimension 3 et dont tout vrai sous-ensemble de dimension 2 a le premier nombre de Betti infini; en conséquence, il n'est pas un ANR. Cet AR est donc en quelque sorte une surface sans trou, mais dont toute surface partielle en a une infinité.

4. Evidemment, pour se débarasser des singularités de Peano, Brouwer et Mazurkiewicz, il suffit tout simplement d'ajouter aux postulats I—IV, qui définissent les ANR de dimension finie, les conditions V—VII comme de nouveaux postulats. Ce mode de procéder serait justifié si chacune des conditions V—VII enrichissait essentiellement la teneur géométrique de l'espace. On ignore cependant, du moins à l'heure actuelle, s'il en est exactement ainsi. On sait, il est vrai, que ces trois conditions sont indépendantes l'une des autres. On sait aussi que la condition V a des conséquences intéressantes, dont surtout la suivante mérite d'être rappelé ici, à savoir que pour les espaces ANR assujettis à la condition V les dimensions homologiques coïncident avec la dimension usuelle. Mais on ne sait point si cette coincidence n'est générale pour les ANR, c'est-à-dire si elle ne résulte des postulats I—IV seuls. On sait moins encore sur les conséquences des conditions VI et VII.

On peut montrer que chacune des conditions V—VII est un invariant de la multiplication cartésienne. Mais on n'a pas réussi jusqu'à présent de résoudre le problème si ces conditions se transmettent de l'espace à ces diviseurs cartésiens. Aussi, aucune classe intéressante de transformations (sauf celle des homéomorphies) n'est connue qui laissent les conditions V—VII invariantes.

Toutes ces circonstances me font douter que la voie directe pour dégager la classe cherchée d'espaces conduise par les conditions V—VII. Je suis plutôt enclin de croire qu'elles doivent être remplaceés par d'autres conditions supprimant avec autant d'efficacité les singularités de Peano, Brouwer et Mazurkiewicz, mais convenant mieux au but proposé. Les conditions V—VII sont donc à considérer comme des sondages préliminaires destinés à faciliter l'orientation convenable de recherches ultérieures.

5. Le problème de déterminer une classe d'espaces ayant les propriétés proches de celles des polyèdres n'a pas été précisé. La notion de „proximité des

propriétés" est subjective et peut être conçue, par conséquent, de bien de manières diverses. On peut toutefois chercher de la préciser.

On sait par exemple que les espaces satisfaisant aux postulats I—IV coïncident avec les ensembles homéomorphes aux rétractes de polyèdres. Autrement dit, ces espaces ne diffèrent pas des polyèdres au point de vue des invariants des transformations dites *rétractions*. On peut dire aussi que la classe de ces espaces approche celle des polyèdres aux invariants de la rétraction près.

Un autre mode de préciser la notion de propriétés voisines a été indiqué par Hurewicz [27]. Il a introduit en 1936 la notion importante de type d'homotopie, qui est telle que l'identité de types d'homotopie de deux espaces entraîne l'isomorphie de leurs groupes d'homologie et de ceux d'homotopie. On est donc porté à préciser la proximité des espaces aux polyèdres par la simple condition que ces espaces aient le type d'homotopie des polyèdres. Or, malgré les remarquables et profonds résultats de J. H. C. Whitehead [28] sur les types d'homotopie des ANR, le problème si tout espace satisfaisant aux postulats I—IV a le type d'homotopie d'un polyèdre me semble d'être ouvert. Cependant, on sait que les relations entre le type d'homotopie d'un espace X et ceux de polyèdres deviennent plus étroites en soumettant cet espace à la condition suivante qui va plus loin que la condition VII:

VII* *L'espace X se laisse décomposer en une somme*

(*) $$X = X_1 + X_2 + \ldots + X_k$$

telle que tout ensemble de la forme $X_{i_1}, X_{i_2} \ldots X_{i_j}$, où $j = 1, 2, \ldots, k$ est soit vide, soit un AR.

Cette décomposition de X peut être regardée comme généralisation de la décomposition simpliciale d'un polyèdre. Tout comme la table des incidences simpliciales détermine complètement la structure topologique du polyèdre, la table analogue relative à la décomposition (*) détermine le type d'homotopie de X. Ce type se montre identique à celui du polyèdre qui est le nerf au sens de P. Alexandroff [29] de la décomposition (*). Je l'ai établi en 1948 [30] et A. Weil l'a étendu en 1951 [31] aux espaces de dimension infinie.

Notons que le problème de l'existence des décompositions (*) pour les variétés au sens classique peut être considéré comme une simplification du problème classique de la triangulation. Il me semble que même le problème ainsi simplifié reste toujours ouvert.

Il est clair que le problème de préciser convenablement la notion d'espaces s'approchant des polyèdres par leurs propriétés topologiques ne se résoud pas en postulant tout simplement que l'espace ait le type d'homotopie d'un polyèdre. Tous les exemples connus des ANR ne diffèrent pas des polyèdres par leurs types d'homotopie. Par conséquent, aucune des singularités envisagées ne peut pas être éliminée en ajoutant aux postulates I—IV celui que l'espace ait le type d'homotopie d'un polyèdre. Enfin, les ensembles de structure topologique bien différente peuvent avoir le même type d'homotopie. Tous les AR par exemple ont le type d'homotopie de l'ensemble composé d'un seul point.

6. Je vais essayer d'indiquer ici une voie différente qui me semble nous avancer vers le but. Il s'agit de faire correspondre au couples d'ensembles (situés dans un espace fixe) d'une distance particulière *mesurant la dissemblance* de leurs propriétés topologiques. [32]

On retrouve l'idée de mesurer les différences entre ensembles déjà dans la notion d'espace des ensembles compacts introduite en 1914 par Hausdorff [33]. Cependant la distance de Hausdorff ne dit rien sur les différences entre les propriétés topologiques d'ensembles. Les ensembles proches au sens de Hausdorff peuvent avoir la structure topologique fort différente; en particulier, tout ensemble se laisse en ce sens approcher indéfiniment par des ensembles finis.

Pour parvenir à une définition de la distance entre ensembles qui tienne compte de leurs propriétés topologiques, il faut d'abord qu'elle laisse invariantes au passage à la limite les propriétés d'homologie [34] et d'homotopie les plus importantes. C'est pourquoi j'ajoute à la distance de Hausdorff un sommande supplémentaire mesurant, pour ainsi dire le degré de contractilité d'un espace et ayant pour effet qu'une suite d'arcs par exemple approchant la circonférence, au sens de la distance hausdorfienne ne converge pas vers cette circonférence, mais diverge et ne constitue même pas une suite de Cauchy. Il en est ainsi avec une suite de circonférence concentriques dont les rayons décroissants indéfiniment convergent vers leur centre commun.

Comme il ne s'agit dans ces considérations que d' ensembles de structure assez régulière, on peut se borner ici aux ANR non vides situés dans un espace fixe, dans le cube Q de dimension n par exemple. Soit $R(Q)$ la classe des ANR en question. Pour saisir le degré de contractilité d'un espace, j'introduis la notion d'équicontractilité locale. Je dis que les ensembles d'une suite $\{X_\nu\} \subset R(Q)$ sont *équicontractiles localement* lorsque, pour tout $\varepsilon > 0$ il existe un $\eta > 0$ tel que pour tout $\nu = 1, 2, \ldots$ tout ensemble $B \subset X_\nu$ dont le diamètre $\delta(B)$ est plus petit que η est contractile (à un point) dans un ensemble $A \subset X$ de diamètre $\delta(A) < \varepsilon$ [35]. On obtient alors comme il suit la définition de la limite conforme au but proposé:

Une suite $\{X_\nu\} \subset R(Q)$ converge vers $X_0 \in R(Q)$ lorsque elle converge vers X_0 au sens de la métrique de Hausdorff et que les X_ν sont équicontractiles localement.

L'espace topologique $R(Q)$ ainsi défini peut être alors métrisé de la façon suivante:

X étant un des ensembles appartenant à $R(Q)$, désignons pour tout

$t \geqq 0$ par $E_X(t)$ l'ensemble de nombres composé de 1 et de tous les $\tau \geqq t$ pour lesquels tout ensemble $B \subset X$ de diamètre $\delta(B) \leqq t$ est contractile (à un point) dans un ensemble $A \subset X$ de diamètre $\delta(A) \leqq \tau$ (on a donc $B \subset A \subset X$ comme dans la condition V). La fonction

$$\varphi_X(t) = \inf E_X(t)$$

satisfait donc par définition à la condition

$$0 \leqq \varphi_X(t) \leqq 1 \quad \text{pour tout } t \geqq 0$$

et l'on déduit de la contractilité locale de X que

$$\lim_{t=+0} \varphi_X(t) = 0.$$

Pour X fixe, le parcours de φ_X (comme fonction de la variable t) au voisinage de $t = 0$ est, pour ainsi dire, une expression quantitative de la contractilité locale de X. Mais $\varphi_X(t)$, tout en étant une fonction non-décroissante de t, n'en est pas, en général une fonction continue. C'est pourquoi il est commode de l'améliorer en la majorant par la plus petite fonction $\psi_X(t)$ assujettie à la condition

$$\varphi_X(t) \leqq \psi_X(t) \quad \text{pour tout } t \geqq 0$$

et à celle de concavité

$$\psi_X[\lambda \cdot t_1 + (1-\lambda)t_2] \geqq \lambda \cdot \psi_X(t_1) + (1-\lambda) \cdot \psi_X(t_2),$$

où $t_1 \geqq 0$, $t_2 \geqq 0$ et $0 \leqq \lambda \leqq 1$. L'existence d'une telle fonction ψ_X se démontre aisément.

Ceci fait, en posant

$$\varrho(X_1, X_2) = \varrho_H(X_1, X_2) + \sup_{t \geqq 0} |\psi_{X_1}(t) - \psi_{X_2}(t)| \quad \text{pour } X_1, X_2 \in R(Q),$$

où ϱ_H désigne la distance de Hausdorff, la classe $R(Q)$ d'ensembles devient un espace métrique. *Cet espace est séparable et complet.* Plus encore, on constate que la distance ϱ saisit en général au juste les différences topologiques entre les ANR. En particulier, lorsque X_0 est un ANR non vide situé dans le cube Q, c'est-à-dire que X_0 est un point de l'espace $R(Q)$, *tout ensemble $X \in R(Q)$ suffisamment proche de X_0 a le même type d'homotopie que X_0*[36]. Par conséquent, tous les ANR qui appartiennent à la même composante de l'espace $R(Q)$ ont le même type d'homotopie. Mais la métrique ne fait pas ressortir que les différences entre les types d'homotopie. Elle est sensible aux différences entre maintes autres propriétés topologiques. Il est facile de montrer par exemple qu'un *X de dimension supérieur n'est jamais la limite* (au sens de la métrique ϱ) *d'une suite des X de dimensions inférieures.* De même, *le nombre fini de points de ramification d'une courbe ne peut augmenter à la limite et celle d'une suite convergente de courbes simples fermées ne peut être qu'une courbe simple fermée*[37]. On peut aussi démontrer que *la limite d'une suite convergente de surfaces au sens classique* c'est-à-dire des variétés fermées de dimension 2, *est toujours une surface* (au même sens) [38]. Ce théorème me semble mériter l'intéret du point de vue de l'analyse et de la géométrie différentielle. On peut supposer que, plus généralement, la limite de toute suite convergente de variétés en est toujours une. C'est à titre d'exemple, l'une d'une série de problèmes ouverts.

7. Il est difficile de juger en se moment si l'espace $R(Q)$ peut contribuer d'une façon essentielle à résoudre le problème de la définition topologique d'une classe d'ensembles ayant la structure particulièrement régulière. On sait encore trop peu sur cet espace. On ignore en particulier *si les polyèdres y constituent un ensemble dense*. S'il n'en est pas ainsi, la fermeture de l'ensemble des polyèdres, donc la classe des ANR approchables (au sens de la métrique ϱ) par les polyèdres, semble mériter une attention toute speciale. Si, par contre, l'ensemble des polyèdres est dense dans l'espace $R(Q)$, il est permis plutôt de douter que la métrique ϱ soit déjà assez fine pour qu'elle permette de distinguer les ensembles ayant des propriétés paradoxales des polyèdres. Quoi qu'il en soit, il semble intéressant d'examiner en tout cas la question si les ensembles affectés des singularités de Peano, Brouwer et Mazurkiewicz forment des sous-ensembles non-denses de $R(Q)$. Enfin, cet espace étant complet, il est légitime de s'attendre qu'il trouve application à des démonstrations d'existence procédant par la méthode dite de catégorie (et dont l'origine remonte au théorème de Baire).

8. La topologie générale a contribué jusqu'à présent relativement peu à saisir par les moyens qu'elle a élaboré le domaine important des êtres géométriques de mathématique classique. En particulier, le problème de caractériser en toute généralité les polyèdres par leur propriétés topologiques reste ouvert, malgré les beaux résultats de Bing et de Moise [17] concernant les variétés de dimension 3 et ceux de Kosiński [8] apportant une caractérisation topologique des polyèdres de dimension 2.

Le problème abordé ici est, bien entendu, beaucoup plus modeste, car il n'exige pas une caractérisation complète de l'ensemble des polyèdres, mais seulement un choix convenable de l'un de ses sur-ensembles, à savoir qui soit libre de phénomènes paradoxaux, étrangers aux propriétés géométriques des objets réels. Les relations entre elles et les conceptions abstraites de la topologie générale, qui engendrent si souvent des paradoxes géométriques, méritent à mon avis d'être étudiées et élucidées. Mais alors il faut les attaquer.

---

[1]) P. Urysohn, *Zum Metrisationsproblem*, Math. Ann. 94 (1925), p. 310.

[2]) K. Menger, *Über umfassendste n-dimensionale Mengen*, Proc. Akad. Amsterdam 29 (1926), p. 1125 et G. Nöbeling, *Über eine n-dimensionale Universalmenge im R_{2n+1}*, Math. Ann. 104 (1930), p. 71.

[3]) LENNES, Amer. Journ. of Math. 33 (1911). Aussi F. HAUSDORFF, *Mengenlehre*, Berlin, de Gruyter 1927, p. 220. Voir aussi C. KURATOWSKI, *Topologie II*, Monografie Matematyczne XXI, Warszawa — Wroclaw 1950, p. 103.

[4]) R. L. MOORE, *Concerning simple continuous curves*, Trans. Amer. Math. Soc. 21 (1920), p. 340. Voir aussi C. Kuratowski, l.c. p. 120.

[5]) L. ZIPPIN, *A characterization of the closed 2-cell*, Amer. Journ. of Math. 52 (1933), p. 207—217. Aussi H. WHITNEY, *A characterization of the closed 2-cell*, Trans. Amer. Math. Soc. 35 (1933), p. 261.

[6]) R. L. MOORE, *On the foundation of plane analysis situs*, Trans. of the Amer. Math. Soc. 17 (1916), p. 131—164. Aussi C. KURATOWSKI, *Une caractérisation topologique de la surface de la sphère*, Fund. Math. 13 (1929), p. 307. Voir aussi C. KURATOWSKI, *Topologie II*, p. 374.

[7]) E. R. v. KAMPEN, *On some characterizations of 2-dimensional manifolds*, Duke Math. Journ. 1 (1935), p. 74—93.

[8]) A paraître dans le Bull. de l'Ac. Pol. des Sc., Classe III, 2 (1954) et aussi dans les Fund. Math.

[9]) L. E. J. BROUWER, *Zur Analysis Situs*, Math. Ann. 68 (1910), p. 422—434.

[10]) B. KNASTER, *Un continu dont tout sous-continu est indécomposable*, Fund. Math. 3 (1922), p. 247.

[11]) S. MAZURKIEWICZ, *Sur l'existence des continus indécomposables*, Fund. Math. 25 (1935), p. 327.

[12]) L. PONTRJAGIN, *Sur une hypothèse fondamentale de la théorie de la dimension*, Comptes Rendus de l'Ac. des Sc. Paris, 190 (1930), p. 1105—1107.

[13]) S. LEFSCHETZ, *Topics in Topology*, Princeton University Press 1942, p. 58.

[14]) C. KURATOWSKI, *Sur les espaces localement connexes et péaniens en dimension n*, Fund. Math. 24 (1935), p. 269—287. S. T. HU, *A new generalization of Borsuk's theory of retracts*, Nederl. Akad. Wetensch. Proc. 50 (1947), p. 1051—1055. HIROSHI NOGUCHI, *A note on absolute neighbourhood retracts*, Tohoku Univ. 1951. SHIROCHI SAITO, *Retracts in the locally compact Hausdorff spaces*, Memoire of the Fac. of Sc. Kyusyu Univ. Ser. A, vol. 6 (1952), p. 157—166. S. D. LIAO, *On non-compact absolute neighbourhood retracts*, Osaka Math. Journ. 2 (1950), p. 59—62. O. HANNER, *Solid spaces and absolute retracts*, Arkiv for Matem. 1, Nr 28 (1950), p. 375—382. O. HANNER, *Some theorems on absolute neighbourhood retracts*, Arkiv for Matem. 1, Nr 30 (1950), p. 389—408. C W, SAALFRANCK, *Retraction properties of normal Hausdorff spaces*, Fund. Math. 36 (1949), p. 93—108.

[15]) Voir p. ex. S. LEFSCHETZ, l.c. Aussi C. KURATOWSKI, l.c.

[16]) A paraître dans le Bull. de l'Ac. Pol. des Sc., Classe III, vol. 2 (1954).

[17]) R. H. BING, *A characterization of 3-space by partitionings*, Trans. Amer. Math. Soc. 70 (1951), p. 15—27. E. E. MOISE, *Affine structures in 3-manifolds. V. The triangulation theorem and Hauptvermutung*. Ann. of Math. 56 (1952), p. 96—114.

[18]) Voir K. BORSUK, *Les polytopes, les quasi-polytopes et la topologie générale*, Casopis pro pestovani Matematiky a Fysiky 74 (1949), p. 31.

[19]) K. BORSUK, *Ensembles dont les dimensions modulaires de Alexandroff coïncident avec la dimension de Menger-Urysohn*, Fund. Math. 27 (1936), p. 77—93.

[20]) K. BORSUK, *Quelques rétractes singuliers*, Fund. Math. 24 (1935), p. 249—258.

[21]) G. PEANO, *Sur une courbe, qui remplit toute une aire plane*, Math. Ann. 36 (1890), p. 157—160.

[22]) voir renvoi [9]).

[23]) C. KURATOWSKI, *Sur les coupures irréductibles du plan*, Fund. Math. 6 (1924), p. 130—145.

[24]) M. LUBAŃSKI, *An example of an absolute neighbourhood retract, which is the common boundary of three regions in the 3-dimensional Euclidean space*, Fund. Math. 40 (1953), p. 29—38.

[25]) K. BORSUK et S. MAZURKIEWICZ, *Sur les rétractes absolus indécomposables*, Comptes Rendus de l'Ac. des Sc. 199 (Paris, 1934), p. 110—112.

[26]) K. BORSUK, *On an irreducible 2-dimensional absolute retract*, Fund. Math. 37 (1950), p. 137—160.

[27]) W. HUREWICZ, *Beiträge zur Topologie der Deformationen* III, *Klassen und Homologietypen von Abbildungen*, Proc. Akad. Wet. Amsterdam 39 (1936), p. 124.

[28]) J. H. C. WHITEHEAD, *On the homotopy type of ANR's*, Bull. of the Amer. Math. Soc. 54 (1948), p. 1133—1145.

[29]) P. ALEXANDROFF, *Untersuchungen über Gestalt und Lage abgeschlossener Mengen beliebiger Dimension*, Annals of Math. 30 (1929), p. 104.

[30]) K. BORSUK, *On the imbedding of systems of compacta in simplicial complexes*, Fund. Math. 35 (1948), p. 217.

[31]) A. WEIL, *Sur les théorèmes de de Rham*, Comm. Math. Helvetici 26 (1951), p. 119—145.

[32]) Un article concernant ce sujet va paraître dans le vol. 41 de Fundamenta Mathematicae.

[33]) F. HAUSDORFF, *Grundzüge der Mengenlehre*, Berlin 1914, p. 294.

[34]) Une définition de la distance satisfaisant à cette propriété a été introduite par E. G. Begle, *Regular convergence*, Duke Math. Journal 11 (1944), p. 441—450 et par P. A. White, *r-Regular convergence spaces*, American Journal of Math. 66 (1944), p. 69—96.

[35]) Une notion analogue, mais opérant au lieu de la contractilité locale avec la connexité locale en dimension n a été introduite récemment par M. L. Curtis, *Deformation-free continua*, Annals of Math. 57 (1953), p. 231—247. Comparez aussi la notion de la n-régulière convergence, appartenant à la théorie de l'homologie, due à G. T. Whyburn, *On sequences and limiting sets*, Fund. Math. 25 (1935), p. 408—426.

[36]) Les résultats analogues ont été trouvés récemment par M. L. Curtis, l.c. p. 242.

[37]) Comparez G. T. Whyburn, l.c. p. 416.

[38]) Comparez H. E. Vaughan, *On the convergence of manifolds and irreducible membranes*, Bull. of the Amer. Math. Soc. 42 (1936), p. 337—338. Aussi E. G. Begle, l. c. p. 449.