Actes, Congrès intern. math., 1970. Tome 1, p. 163 à 171.

LES JEUX DIFFÉRENTIELS LINÉAIRES

par L. PONTRYAGIN

On considère ici des jeux différentiels linéaires dont l'exemple-type est la poursuite d'un objet contrôlable par un autre objet contrôlable.

Les jeux différentiels linéaires constituent évidemment un cas très particulier, cependant, même dans ce cas, les résultats ne sont pas triviaux, et ils sont en plus beaucoup plus efficaces que les généralisations correspondantes au cas non-linéaire.

Le problème sera posé ici pour le cas non-linéaire, tandis que les résultats seront formulés seulement pour le cas linéaire.

Position du problème.

La théorie des jeux différentiels est née comme modèle d'idéalisation mathématique de problèmes techniques. Il y a différentes possibilités d'idéalisation. Dans le choix d'un modèle il faut tendre à ce que ce dernier, d'une part, reflète les traits principaux du problème technique, et d'autre part, puisse être traité mathématiquement. Ainsi, l'exposé de la théorie ne doit pas être complètement détaché des problèmes techniques.

Pour en avoir un exemple concret, imaginons qu'un avion en poursuit un autre; le but du premier avion est d'atteindre l'autre avion ; le but du deuxième est d'échapper à la poursuite.

Chaque pilote dirige son avion, en ayant son propre but et en utilisant l'information sur la situation. L'information est composée de deux parties: premièrement, c'est la connaissance complète des possibilités techniques des deux avions; deuxièmement, ce sont les renseignements sur le comportement de son propre avion et de l'avion de l'adversaire. Les données sur le comportement des avions peuvent inclure différents éléments se rapportant à la période précédant le moment présent, mais rien ne peut être considéré comme connu en ce qui concerne le futur comportement des avions, puisqu'ils sont contrôlables, et que, à chaque instant, chacun des deux pilotes peut modifier la position des commandes, modifiant ainsi le comportement de l'avion. Dans la réalité, chaque pilote reçoit les informations sur le comportement de l'adversaire avec un certain retard, cependant il n'est pas nécessaire de tenir compte de cela dans une idéalisation ; au contraire on peut même supposer que le comportement de l'adversaire est connu avec une certaine avance et on peut construire une idéalisation mathématique sur cette base, pour démontrer ensuite que la théorie, ainsi obtenue, peut être utilisée pour la solution approximative du problème réel.

Passons à la description mathématique du processus de la poursuite. Deux objets contrôlables participent à ce processus: l'un qui poursuit et l'autre qui fuit. L'état de chaque objet à tout instant est défini par son vecteur d'état. Nous désignons par x (resp. y)

le vecteur d'état de l'objet poursuivant (resp. fuyant). Les équations d'état s'écrivent sous forme habituelle :

$$\dot{x} = f(x, u) \quad ; \quad \dot{y} = g(y, v) \tag{1}$$

où le point désigne la dérivée par rapport au temps et u et v sont des contrôles, x et y étant les vecteurs d'état, chacun d'eux se décomposant en deux parties :

$$x = (x_1, x_2) \quad ; \quad y = (y_1, y_2)$$

où x_1, et y_1 déterminent les positions géométriques des objets, et x_2 et y_2 leurs vitesses. On considère que la poursuite se termine au moment où se réalise l'égalité suivante :

$$x_1 = y_1, \tag{2}$$

c'est-à-dire au moment où les objets coïncident.

La première partie de l'information, mentionnée ci-dessus, est composée des équations (1), qui décrivent non les mouvements réels des objets, mais seulement leurs possibilités, puisque pour différents contrôles $u = u(t)$ et $v = v(t)$ on obtient des mouvements différents. Ainsi, dans le cas des avions, les équations (1) décrivent les possibilités techniques des avions.

Le processus de la poursuite peut être considéré de deux points de vue différents :

1. On peut s'identifier avec l'objet poursuivant. Dans ce cas, notre but consiste à faire aboutir la poursuite, et nous avons à notre disposition le contrôle u pour atteindre ce but. Ainsi, pour chaque instant t, nous devons construire la valeur $u(t)$ du contrôle u, en partant des équations (1) connues (la première partie de l'information) et en utilisant la deuxième partie de l'information, c'est-à-dire la connaissance des fonctions $x(s)$, $y(s)$, $v(s)$ sur l'intervalle $t - \theta \leqslant S \leqslant t$, où θ est un nombre réel choisi convenablement.

2. Nous pouvons nous identifier avec l'objet fuyant : dans ce cas, notre but est d'empêcher l'aboutissement du processus de la poursuite, et nous disposons, pour réaliser ce but du contrôle v. Donc, à chaque instant t, nous devons construire la valeur $v(t)$ du contrôle v, en partant de la connaissance des équations (première partie de l'information) et en utilisant sa deuxième partie connue sous la forme des fonctions $x(s)$, $y(s)$, $u(s)$ sur l'intervalle $t - \theta \leqslant s \leqslant t$.

C'est ce modèle du processus de la poursuite que nous considérerons ici, modèle qui inévitablement divise le problème en deux problèmes différents : le problème de la poursuite et le problème de la fuite. Ceci tient à ce que nous disposons d'informations différentes suivant que nous adoptons l'un ou l'autre point de vue.

Il existe aussi un autre modèle, dû à Isaacs, dans lequel on utilise, pour le problème de la poursuite, la même information que pour le cas de la fuite, à savoir la connaissance des valeurs $x(t)$ et $y(t)$. Dans ce modèle on suppose l'existence d'un contrôle optimal $u = u(x, y)$ de la poursuite qui est une fonction de x et de y (états des objets), ainsi que l'existence d'un contrôle optimal de la fuite $v = v(x, y)$ défini comme fonction de x et de y.

Un tel modèle rend le problème très défini du point de vue mathématique : dans ce cas le problème consiste à trouver les fonctions $u(x, y)$ et $v(x, y)$, appelées les stratégies optimales, mais cette précision justement rend la solution extrêmement difficile. De plus, en supposant l'existence de stratégies optimales, nous réduisons beaucoup la classe des problèmes considérés.

Le jeu différentiel.

Le jeu différentiel résulte, en partant du processus de la poursuite, du désir naturel de simplifier les notations, c'est-à-dire d'avoir un seul vecteur $z = (x, y)$, au lieu des deux vecteurs d'état x et y. Pour cela, on construit l'espace des variables d'état R du jeu comme somme directe des espaces des variables d'état des deux objets. Les équations (1) s'écrivent alors sous forme d'une seule équation:

$$\dot{z} = F(z, u, v) \tag{3}$$

La relation (2) définit, dans l'espace vectoriel R, une certaine variété M. Nous pouvons maintenant définir le jeu différentiel indépendamment du processus initial de la poursuite.

Un jeu différentiel est défini par la donnée de son espace des variables d'état R, l'équation (3), où $z \in R$ et F est une fonction de trois variables (u étant le contrôle de la poursuite et v le contrôle de la fuite) et dans l'espace R, un ensemble M, sur lequel s'achève le jeu.

Comme dans le cas du processus de la poursuite, nous associons au jeu différentiel deux problèmes distincts:

1. Notre but est l'achèvement du jeu, c'est-à-dire d'amener le point z dans l'ensemble M, et nous disposons, pour atteindre ce but, du contrôle de la poursuite u, et donc, à chaque instant t, nous choisissons la valeur $u(t)$ de ce contrôle, en utilisant les fonctions $z(s)$ et $v(s)$ sur l'intervalle $t - \theta \leqslant s \leqslant t$. Telles sont les règles du jeu de la poursuite.

2. Notre but est d'empêcher que le jeu ne s'achève, c'est-à-dire d'empêcher que le point z n'arrive dans l'ensemble M, et pour cela nous avons à notre disposition le contrôle v de la fuite, et donc, à chaque instant t, nous choisissons la valeur $v(t)$ de ce contrôle en utilisant les fonctions $z(s)$ et $u(s)$ sur l'intervalle $t - \theta \leqslant s \leqslant t$. Telles sont les règles du jeu de la fuite.

Jeu différentiel linéaire.

Nous considérerons que l'espace des variables d'état R du jeu linéaire est un espace vectoriel euclidien à n dimensions. L'équation du jeu a la forme suivante:

$$\dot{z} = Cz - u + v \tag{4}$$

où $z \in R$, où C est une application linéaire de R dans R et où u et v sont des vecteurs de l'espace R, qui, toutefois, ne sont pas arbitraires, mais doivent vérifier les conditions suivantes:

$$u \in P \quad ; \quad v \in Q \tag{5}$$

où P et Q sont des sous-ensembles convexes compacts de l'espace R (les dimensions des ensembles P et Q sont arbitraires). Comme fonctions du temps, les contrôles $u = u(t)$ et $v = v(t)$ sont des fonctions mesurables de t. Nous supposerons que l'ensemble M, dans lequel s'achève le jeu, est un sous-espace vectoriel de l'espace R. Il existe aussi des résultats pour le cas plus général, où M est un sous-ensemble convexe fermé quelconque de l'espace R.

Quand il sera question de ce cas plus général, nous le préciserons explicitement.

A) On désignera par $\mathscr{L}$ le supplémentaire orthogonal de M dans l'espace R et par ν (dim $\mathscr{L} = \nu$) la dimension de ce supplémentaire. La projection orthogonale de l'espace R sur $\mathscr{L}$ sera désignée par π. C étant une application linéaire de R dans R, $e^{\tau C}$, où τ est un nombre réel, est une application linéaire de R dans R, et $\pi e^{\tau C}$ est une application linéaire de R dans l'espace $\mathscr{L}$. Ces deux applications dépendent analytiquement du paramètre réel τ. Posons :

$$P_\tau = \pi e^{\tau C} P \quad ; \quad Q_\tau = \pi e^{\tau C} Q \tag{6}$$

Alors P_τ et Q_τ sont des sous-ensembles convexes compacts de l'espace $\mathscr{L}$ et dépendent continûment du paramètre réel τ.

B) *Opérations sur les convexes compacts de $\mathscr{L}$.* — Soient A et B deux sous-ensembles convexes compacts de $\mathscr{L}$, et α et β des nombres réels. Nous désignerons par :

$$\alpha A + \beta B \tag{7}$$

l'ensemble de tous les vecteurs de la forme $\alpha x + \beta y$, où $x \in A$ et $y \in B$. Il est évident que l'ensemble (7) est compact et convexe. Si l'un des deux ensembles A et B est vide, l'ensemble (7) est également vide. Il est facile de vérifier que pour α et β non-négatifs, on a la distributivité

$$(\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta B \tag{8}$$

L'ensemble de tous les sous-ensembles compacts convexes non vides de $\mathscr{L}$ forme, d'une façon naturelle, un espace métrique complet Ω. Donc, si $X_\tau = X(\tau)$ est un sous-ensemble compact convexe de Ω, dépendant du paramètre réel τ, autrement dit, si $X(\tau)$ est une fonction du paramètre réel τ à valeurs dans Ω, on peut définir la mesurabilité de cette fonction et son intégrale de Lebesgue

$$\int_{t_1}^{t_2} X(\tau)d\tau \qquad (t_1 \leqslant t_2) \tag{9}$$

qui sera aussi un élément de l'espace Ω. Nous supposerons que, pour $t_1 = t_2$, l'ensemble (9) est composé de l'élément nul de $\mathscr{L}$.

C) Soient A et B deux sous-ensembles compacts convexes de $\mathscr{L}$. S'il existe un vecteur $x \in \mathscr{L}$ tel que :

$$x + B \subset A \tag{10}$$

nous écrirons :

$$B \overset{*}{\subset} A \tag{11}$$

L'ensemble de tous les vecteurs x qui vérifient la condition (10) sera désigné par

$$A \overset{*}{-} B \tag{12}$$

que nous appellerons la différence géométrique des ensembles A et B.

Il est évident que l'ensemble (12) est compact et convexe. Cet ensemble est non vide si et seulement si la condition (11) est vérifiée.

Le jeu de la poursuite.

Constituons pour le jeu (4) la différence géométrique (voir A) et C)):

$$P_\tau \overset{*}{-} Q_\tau \tag{13}$$

Il s'avère que cette différence est une fonction mesurable de τ, et que, par conséquent, on peut définir son intégrale de Lebesgue

$$\int_0^t (P_\tau \overset{*}{-} Q_\tau)d\tau \qquad 0 \leqslant t \tag{14}$$

Pour $t = 0$, cette intégrale est composée du vecteur nul. Nous désignerons par $\mathscr{I}$ l'ensemble de toutes les valeurs de t pour lesquelles (14) n'est pas vide. L'ensemble $\mathscr{I}$ est réduit à 0, ou bien est un intervalle $0 \leqslant t \leqslant t_0$, ou bien coïncide avec la demi-droite $0 \leqslant t$.

Désignons par W_t l'ensemble de tous les points $z \in R$, pour lesquels on a l'appartenance :

$$\pi e^{tC} z \in \int_0^t (P_\tau \overset{*}{-} Q_\tau)d\tau \tag{15}$$

et par $T(z)$, la valeur minimale du nombre t, pour laquelle on a l'appartenance (15). Il est évident que

$$W_0 = M \tag{16}$$

et que W_t est non-vide pour tout $t \in \mathscr{I}$.

On a alors le théorème suivant sur la poursuite [1].

THÉORÈME 1. — *Si, pour la valeur initiale* z *du jeu* (4), *le nombre* $T(z\ )$ *est défini, alors le jeu de poursuite ayant pour valeur initiale* z_0 *peut être terminé en un temps qui ne dépasse pas* $T(z_0)$.

Ce théorème n'est pas tout à fait exact. Plus précisément, en un temps t, inférieur ou égal à $T(z_0)$, le point z_0 peut être amené dans une position $z(t)$ dont la distance à M est inférieure à $c\varepsilon$, où $c > 0$ et dépend de z_0, et où $\varepsilon > 0$ est un nombre arbitrairement petit dont le choix détermine la façon dont nous menons le jeu de poursuite.

Pour donner une idée de la démonstration du théorème et de la mesure de son inexactitude, nous formulerons la propriété principale de la fonction W_t de t.

D) Soient $z_0 \in W_\tau$ et $0 < \varepsilon \leqslant \tau$. Pour chaque contrôle de la fuite $v(t)$, donnée sur le segment $0 \leqslant t \leqslant \varepsilon$, on peut trouver un contrôle de la poursuite $u(t)$, donnée sur le segment $0 \leqslant t \leqslant \varepsilon$, telle que le jeu (4) dans lequel interviennent ces contrôles $u(t)$ et $v(t)$, amène dans le temps ε le point z_0 au point $z_1 = z(\varepsilon)$ qui appartient à l'ensemble $W_{\tau-\varepsilon}$. Cette propriété des fonctions W_t s'appelle la propriété $\mathscr{P}$ (poursuite).

La propriété $\mathscr{P}$ de la fonction W_t permet de terminer le jeu en un temps ne dépassant pas $T(z_0)$, en disposant comme information, de la connaissance de $v = v(s)$ *a priori* c'est-à-dire sur le segment $t \leqslant s \leqslant t + \varepsilon$ où $\varepsilon > 0$ est arbitrairement petit. Si on ne dispose que d'une information *a posteriori*, par exemple de la connaissance de $v(s)$ sur le segment $t - 2\varepsilon \leqslant s \leqslant t - \varepsilon$, on ne peut conclure à l'arrivée sur M.

Le résultat D) peut être sensiblement amélioré [2].

E) Considérons le jeu (4) avec comme ensemble terminal M un ensemble convexe fermé quelconque dans R. Alors il existe, et on peut définir effectivement, un ensemble convexe fermé M_t, dépendant de $t (t \geqslant 0)$, vérifiant la condition $M_0 = M$ et possédant la propriété $\mathscr{P}$ (voir D)). La fonction M_t est maximale parmi les fonctions qui possèdent cette propriété.

Le résultat E) permet de démontrer un théorème analogue au théorème 1 mais plus fort que celui-ci. Si, pour un z donné ($z \in R$), il existe un τ ($\tau \geqslant 0$) tel que $z \in M_\tau$, alors nous désignerons par $T(z)$ le τ minimal pour lequel on a cette appartenance. Alors, si pour la valeur initiale z_0 le nombre $T(z_0)$ est défini, le jeu de poursuite, ayant pour valeur initiale z_0, peut être terminé dans un temps non-supérieur à $T(z_0)$.

Il convient de noter que ce résultat ne donne pas la solution complète du problème de la poursuite. En effet, si pour le z_0 donné, le $T(z_0)$ correspondant n'est pas défini, il peut tout de même arriver que le jeu de la poursuite avec la valeur initiale z_0 soit terminé dans un temps inférieur à un certain nombre. En outre, même si $T(z_0)$ est défini, ce n'est pas nécessairement la meilleure estimation du temps de terminaison.

La fonction maximale M_t a été construite par nous pour des jeux linéaires, mais le fait qu'elle soit maximale a été remarqué par N. Krassovski et A. Soubbotine. Ces mêmes auteurs ont construit une fonction maximale M_t, possédant la propriété $\mathscr{P}$ pour le jeu non-linéaire de la forme (3).

Le jeu de la fuite.

Soit $\hat{\mathscr{L}}$ un sous-espace vectoriel à deux dimensions de l'espace $\mathscr{L}$ (voir A)), pris pour le jeu (4). Par analogie avec A), nous désignerons par π l'opération de projection orthogonale de l'espace R sur $\hat{\mathscr{L}}$ et nous supposerons que

$$\hat{P}_\tau = \hat{\pi} e^{\tau C} \hat{P} \quad ; \quad \hat{Q}_\tau = \hat{\pi} e^{\tau C} Q \tag{17}$$

on a alors le théorème suivant :

THÉORÈME 2. — *Supposons que pour le jeu* (4), *il existe un sous-espace vectoriel* $\hat{\mathscr{L}}$ *a deux dimensions de l'espace* $\mathscr{L}$ (voir A)) *tel que les conditions suivantes soient réalisées :*

a) *on peut trouver un nombre réel* $\mu > 1$ *tel que pour tous les* τ *positifs suffisamment petits, on ait l'inclusion suivante* (voir (17)) :

$$\mu \hat{P}_\tau \subset \hat{Q}_\tau \quad ; \tag{18}$$

b) *il n'existe pas, dans le plan* $\hat{\mathscr{L}}$, *de droite fixée* $\overset{*}{\mathscr{L}}$ *telle que, pour tous les* τ *positifs suffisamment petits, on ait l'inclusion suivante:*

$$\hat{Q}_\tau \overset{*}{\subset} \overset{*}{\mathscr{L}} \tag{19}$$

Alors on peut, pour chaque valeur initiale z_0 *du jeu, n'appartenant pas à* M, *mener le jeu de la fuite de telle façon que le point* $z(t)$ *n'atteigne jamais l'espace* M $(0 \leqslant t < \infty)$, *et que, de plus, pour la distance de* $z(t)$ *à* M, *on ait l'inégalité* (21).

F) Pour écrire l'évaluation (21), nous ferons correspondre à chaque point $z \in R$ deux nombres positifs ou nuls

$$z \to (\xi, \eta) \tag{20}$$

où ξ est la distance du point z à M et η est la distance de z à $\mathscr{L}$. Pour la valeur initiale z_0, on écrira $z_0 \to (\xi_0, \eta_0)$ et si $z(t)$ est le point variable on écrira

$$z(t) \to (\xi(t), \eta(t)).$$

Il existe alors des nombres positifs C et ε, et un entier naturel K, dépendant du jeu mais non de son déroulement, tels que

$$\xi(t) > \frac{C\xi_0^K}{(1 + \eta(t))^K} \qquad \text{pour} \qquad \xi_0 \leqslant \varepsilon \tag{21}$$

Le théorème 2 découle entièrement de la proposition suivante:

G) Au jeu (4), on peut associer deux nombres positifs: θ, définissant un intervalle de temps, et ε, définissant une distance. Ensuite, à toute valeur initiale z_0, telle que $\xi_0 \leqslant \varepsilon$, et à tout contrôle $u(t)$, définie sur $0 \leqslant t \leqslant \theta$, on fait correspondre un contrôle $v(t)$ ($v(t)$ étant défini par le point z_0 et par la fonction $u(s)$, connue sur le segment $0 \leqslant s \leqslant t$). Cette correspondance est telle que, pour la solution $z(t)$ de l'équation (4) avec les contrôles indiqués $u = u(t)$ et $v = v(t)$ et avec la valeur initiale z_0, on ait les deux inégalités suivantes:

$$\xi(\theta) > \varepsilon \tag{22}$$

$$\xi(t) > \frac{C\xi_0^K}{(1 + \eta(t))^K} 0 \leqslant t \leqslant \theta \tag{23}$$

On appelle contrôle spécial de fuite le contrôle $v(t)$.

Le processus du jeu de la fuite peut être décrit de la façon suivante:

Désignons par S l'ensemble de tous les points $z \in R$, pour lesquels $\xi \leqslant \varepsilon$, et par S' l'ensemble des points z pour lesquels $\xi = \varepsilon$. Si l'état initial z_0 du jeu appartient au cyclindre S, nous faisons immédiatement intervenir le contrôle spécial de la fuite (voir G)) pour un temps $0 \leqslant t \leqslant \theta$, à la fin duquel $z(\theta)$ se trouve en dehors du cylindre S (voir (22)) tandis que, dans le segment $0 \leqslant t \leqslant \theta$, on a l'inégalité (23).

Si, au moment initial $t = 0$, ou à un autre moment intermédiaire t, le point $z(t)$ se trouve en dehors du cylindre S, nous choisissons arbitrairement le contrôle de la fuite $v(t)$ et nous attendons le moment t_0 où le point $z(t_0)$ se trouve sur la surface S^1. En prenant le point $z(t_0)$ pour point initial dans le segment $t_0 \leqslant t \leqslant t_0 + \theta$, nous enclenchons durant ce temps le contrôle spécial de la fuite (voir (6)). Alors, en vertu de (23), dans cet intervalle de temps on a l'inégalité suivante :

$$\xi(t) > \frac{C\varepsilon^K}{(1+\eta(t))^K} \; ; \; t_0 \leqslant t \leqslant t_0 + \theta \tag{24}$$

et, à la fin de cet intervalle du temps, le point se trouve en dehors du cylindre S et l'étude du jeu recommence. Donc, pendant toute la durée du jeu on a toujours, pour le point $z(t)$, l'une des inégalités (23), (24) ou $\xi(t) \geqslant \varepsilon$. En supposant que $\varepsilon > C\varepsilon^K$, on déduit de ces inégalités l'évaluation (21).

Si, pour la construction du contrôle spécial de fuite $v(t)$, on utilise une information *a posteriori* sur $v(t)$, c'est-à-dire si, pour calculer la valeur $v(t)$, on utilise la connaissance de $v(s)$ dans le segment $-\delta \leqslant s \leqslant t - \delta$, avec

$$0 < \delta < \frac{C_1 \xi_0^l}{(1+\eta_0)^l} \tag{25}$$

où $C_1 > 0$ et l est un entier naturel, alors les évaluations (22) et (23) restent valables. Ainsi, on peut utiliser, dans le jeu de la fuite, l'information *a posteriori*. Initialement, le théorème 2 sur la fuite a été démontrée dans notre article [3], écrit en commun avec E. Mitchenko, où nous avons supposé les conditions *c*) et *d*) suivantes, plus fortes que *a*) et *b*) :

c) Il existe un nombre $\mu > 1$ tel que pour chaque τ suffisamment petit on ait l'inclusion (voir A)) suivante :

$$\mu P_\tau \overset{*}{\subset} Q_\tau \qquad \text{(comparer à (18))} \tag{26}$$

d) L'application $\pi e^{\tau C}$ étant linéaire et dépendant analytiquement de τ, peut être représentée par une série :

$$\pi e^{\tau C} = g_0 + \tau g_1 + \ldots + \tau g_m^m + \ldots. \tag{27}$$

La condition *d*) affirme qu'il existe un entier $m \geqslant 0$ tel que chacune des applications $g_0, g_1, \ldots, g_{m-1}$ transforme l'ensemble Q en un point et que

$$\dim g_m Q = \nu, \qquad \nu \geqslant 2 \qquad \text{(voir A)).}$$

Nous avons renforcé ultérieurement le résultat, en remplaçant la condition *d*) par la condition plus faible.

e) Pour chaque τ positif suffisamment petit, on a

$$\dim Q_\tau = \nu, \qquad \nu \geqslant 2.$$

Après avoir pris connaissance de notre article, R. Gamkrelidze a exprimé la certitude que, dans les conditions *c*) et *e*), l'espace $\mathscr{L}$ peut être remplacé par n'importe quel sous-espace à deux dimensions $\hat{\mathscr{L}}$. Ainsi, selon lui, le théorème 2 devait être juste si la condition *a*) et la condition suivante *f*) sont satisfaites : dim $\hat{Q}_\tau = 2$ pour tout τ positif suffisamment petit.

En vérifiant notre démonstration, nous avons trouvé qu'elle reste en effet valable si les conditions *a*) et *f*) sont satisfaites et, en plus, nous avons découvert que la condition *f*) peut être, d'une façon naturelle, remplacée par *b*). Le résultat a donc pris la forme donnée ici.

Exemple.

Considérons, dans un espace euclidien E, de dimension $\nu \geqslant 2$ le mouvement des deux points x et y où x est « le poursuivant » et y l'objet qui fuit.

Le processus de la poursuite se termine quand $x = y$. Les mouvements des points x et y sont définis par les équations

$$x^{(k)} + a_1 x^{(k-1)} + \ldots + a_{k-1}\dot{x} + a_k x = u \tag{28}$$

$$y^{(l)} + b_1 y^{(l-1)} + \ldots + b_{l-1}\dot{y} + b_l y = v \tag{29}$$

où $x^{(i)}$ et $y^{(i)}$ sont les dérivées d'ordre i des vecteurs x et y par rapport à t, et où

$$a_i, \quad i = 1, \ldots, k; \quad b_j, \quad j = 1, \ldots, l \tag{30}$$

sont des applications linéaires de E dans E. Les vecteurs u et v, qui sont les vecteurs de commande, appartiennent à E et satisfont aux conditions suivantes :

$$u \in P, \quad v \in Q \tag{31}$$

où P et Q sont des sous-ensembles convexes compacts de E de dimension ν.

Nous dirons que le point y a l'avantage de manœuvrabilité par rapport au point x, si l'une des deux conditions suivantes est vérifiée :

1) $l < k$
2) pour $l = k$ il existe un nombre $\mu > 1$ tel que

$$\mu P \subset Q \tag{32}$$

On découvre que, si l'objet fuyant y a d'avantage de manœuvrabilité par rapport au poursuivant x, ce processus de la poursuite vérifie les conditions *c*) et *d*) et donc, si, au moment initial, les points x_0 et y_0 ne coïncident pas, le processus de la fuite continue indéfiniment.

Dans le cas où c'est le poursuivant x qui possède l'avantage de manœuvrabilité, nous pouvons, en appliquant le théorème, trouver dans l'espace des phases de ce jeu, un ensemble ouvert des états initiaux, en partant desquels le jeu se termine toujours.

Cet exemple a été calculé par A. Mesintzev.

BIBLIOGRAPHIE

[1] L. Pontryagin. — Les jeux différentiels linéaires, *Dokl. Akad. Nauk*, 17, NG (1967).
[2] —. — Les jeux différentiels linéaires. II, *Dokl. Akad. Nauk*, 175, No. 4 (1967).
[3] — et E. Mitchenko. — Le problème de la fuite d'un objet commandé d'un autre objet commandé, *Dokl. Akad. Nauk*, 189, No. 4 (1969).

Steklov Institute
Department of Mathematics,
Vavilova 42, Moscow V 333
(U. R. S. S.)