THÉORIE LOCALE DES FONCTIONS DIFFÉRENTIABLES

BERNARD MALGRANGE

Les résultats dont je vais parler ont une double origine : d'une part, deux problèmes posés par L. Schwartz à propos de la théorie des distributions, d'autre part l'étude des singularités des applications différentiables, developpée d'abord par H. Whitney et R. Thom.

Fixons d'abord quelques notations ; soit Ω un ouvert $\subset \mathbf{R}^n$, et soit $\mathcal{E}(\Omega)$ l'espace des fonctions de classe C^∞ dans Ω, à valeurs réelles, muni de sa topologie usuelle ; pour $a \in \Omega$ et $f \in \mathcal{E}(\Omega)$, désignons par $T_a f$ le développement de Taylor de f en a ; si l'on a $V \subset \mathcal{E}(\Omega)$, posons $T_a V = \{T_a f \mid f \in V\}$.

Cela posé, le premier problème est celui de la synthèse harmonique dans l'espace des distributions tempérées ; par dualité et transformation de Fourier, il est résolu par le théorème suivant, conjecturé par Schwartz et démontré par Whitney [7], [12] :

Théorème 1. *Soit $\mathcal{I}$ un idéal de $\mathcal{E}(\Omega)$. Pour que f appartienne à l'adhérence de $\mathcal{I}$, il faut et il suffit que l'on ait, pour tout $a \in \Omega$: $T_a f \in T_a \mathcal{I}$.*

Quant au second problème, celui de la division des distributions, il équivaut par dualité au suivant : on se donne $f \in \mathcal{E}(\Omega)$; à quelle condition l'idéal engendré par f est-il fermé ? Tout d'abord, on voit facilement que ce n'est pas toujours vrai : par exemple, si f est nulle en un point ainsi que toutes ses dérivées, sans être identiquement nulle au voisinage, l'idéal $f\mathcal{E}(\Omega)$ n'est pas fermé ; d'autre part, dans le cas d'une variable, on constate immédiatement que, si cette circonstance ne se produit en aucun point, notre idéal est fermé ; ces faits et quelques autres avaient amené Schwartz à conjecturer le résultat suivant [8] :

Théorème 2. *Si f est analytique, $f\mathcal{E}(\Omega)$ est fermé.*

Ce résultat a été démontré simultanement par Hörmander [1] (dans le cas où f est un polynôme) et par Łojasiewicz [2] (dans le cas général). Les deux méthodes reposent sur l'importante inégalité suivante :

Théorème 3. *Soit f une fonction analytique dans Ω, X l'ensemble de ses zéros (supposé non vide), et K un compact $\subset \Omega$. Il existe des constantes $C > 0$ et $\alpha > 0$ telles qu'on ait, pour tout $a \in K$:*

$$|f(a)| \geqslant C d(a, X)^\alpha.$$

Pour une fonction $f \in \mathscr{E}(\Omega)$ arbitraire, cet énoncé équivaut au suivant : toute $\varphi \in \mathscr{E}(\Omega)$, nulle ainsi que toutes ses dérivées sur X, appartient à $f\mathscr{E}(\Omega)$; ce fait, joint au théorème 1, montre que cette inégalité est nécessaire pour que cet idéal soit fermé. Dans le cas analytique, une fois le théorème 3 obtenu, la méthode consiste à prendre une stratification convenable de X : on l'écrit comme somme finie disjointe de sous ensembles X_i, avec $\overline{X}_i - X_i \subset \bigcup\limits_{i<j} X_i$, et l'on établit un énoncé analogue au théorème 2 pour les « fonctions différentiables au sens de Whitney » sur $\overline{X}_i$, nulles à l'ordre infini sur $\overline{X}_i - X_i$ (ce qui exige d'appliquer le théorème 3 à d'autres fonctions que f...). Hörmander prend tout simplement la stratification dans laquelle X_i est l'ensemble des points où f s'annule exactement à l'ordre i ; Łojasiewicz en prend une plus fine, qui l'amène à une étude détaillée de l'ensemble des zéros des fonctions analytiques-réelles.

Quelles sont les extensions possibles de ces résultats ? Tout d'abord, il n'est pas nécessaire de se limiter aux idéaux principaux: le théorème 2 se généralise ainsi [3].

Théorème 2 bis. *Un idéal de $\mathscr{E}(\Omega)$ engendré par des fonctions analytiques est fermé.*

Joint au théorème 1, ceci a pour conséquence immédiate la démonstration d'une conjecture de Serre [9] : l'anneau des germes de fonctions C^∞ en un point est un module fidèlement plat sur l'anneau des germes de fonctions analytiques en ce point ; autrement dit : les relations à coefficients C^∞ entre des fonctions analytiques sont engendrées par les relations à coefficients analytiques.

Que peut-on dire maintenant dans le cas non analytique ? Nous avons déjà vu que les propriétés précédentes n'étaient pas toujours vraies ; mais nous allons voir, en utilisant une variante d'une idée de Thom [10], qu'elles le sont « en général » : il nous faut d'abord donner un précis à cette notion. Soit $\mathscr{E}_n$ l'espace des germes de fonctions C^∞ en 0 dans $\mathbf{R}^n$, et soit $\mathscr{J}$ un idéal de type fini de $\mathscr{E}_n$, engendré par $f_1, \ldots, f_n$. Nous dirons que $\mathscr{J}$ est fermé s'il existe un voisinage ouvert Ω de 0 et des représentants des f_i dans $\mathscr{E}(\Omega)$ tels que l'idéal qu'ils engendrent soit fermé.

Posons d'autre part, pour $f \in \mathscr{E}_n$: $\hat{f} = T_0 f$; l'espace $\hat{\mathscr{E}}_n$ s'identifie alors aux séries formelles $\mathbf{R}[[x_1, \ldots, x_n]]$, les x_i désignant les coordonnées dans $\mathbf{R}^n$. En considérant $\hat{\mathscr{E}}_n$ comme la limite projective de ses quotients par les puissances de l'idéal maximal, on définit la notion de variété algébrique dans $\hat{\mathscr{E}}_n$. Nous dirons alors qu'une propriété (P) des éléments de $\hat{\mathscr{E}}_n$ est « générale » s'il existe une variété algébrique $V \subset \hat{\mathscr{E}}_n$ de *codimension infinie*, telle que (P) soit vérifiée pour toute $f \in \mathcal{E}_n$ satisfaisant à $f \notin V$. (Cette notion ne doit pas être confondue avec celle de « propriété générique » au sens où l'entend Thom [10] : le fait, par exemple, pour une fonction d'être « de Morse » est générique, mais c'est une propriété bien trop restrictive pour être « générale ».) Nous définirons de même une propriété générale des systèmes $(f_1, \ldots, f_p) \in (\mathcal{E}_n)^p$.

Cette notion a été récemment étudiée systématiquement par Tougeron [11], qui a montré que, en général, les fonctions, et les systèmes de p fonctions différentiables ont des propriétés au moins aussi bonnes que les fonctions analytiques arbitraires. Parmi ses résultats, nous citerons l'un des plus simples, obtenu également par Mather [6].

Théorème 4. *Supposons $p < n$; alors, en général, l'idéal engendré par $(f_1, \ldots, f_p)$ dans $\mathcal{E}_n$ est une intersection complète admettant l'origine pour point singulier isolé (c'est-à-dire : l'idéal engendré par $f_1, \ldots, f_p$ et leurs jacobiens d'ordre p contient une puissance de l'idéal maximal de $\mathcal{E}_n$). Un tel idéal est équivalent, par difféomorphisme, à un idéal engendré par des polynômes ; en particulier, il est fermé.*

En réalité, on démontre davantage : étant donné $(f_1, \ldots, f_p)$, tel que l'idéal engendré soit une intersection complète avec point singulier isolé, il existe un entier k possédant la propriété suivante : si $(f'_1, \ldots, f'_p)$ a même développement de Taylor en 0 à l'ordre k de f, les deux idéaux sont équivalents par difféomorphisme ; il suffit alors de prendre pour f'_j des polynômes pour obtenir la seconde assertion du théorème précédent.

A l'usage des spécialistes de topologie différentielle, je me permettrai la suggestion suivante : il serait peut-être intéressant d'étudier, au point de vue global, les variétés différentiables admettant des singularités du type précédent.

Enfin, dans le cas où l'on a $p \geqslant n$, on voit facilement que, en général, l'idéal engendré par $(f_1, \ldots, f_p)$ est un idéal de définition de $\mathcal{E}_n$, c'est-à-dire contient une puissance de l'idéal maximal.

Comme je l'avais promis au début, j'en viens maintenant à la théorie des applications différentiables ; ici, nous ne nous intéresserons plus seulement à l'idéal engendré par $(f_1, \ldots, f_p)$, mais au germe d'application $f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^p$ que ce système de fonctions définit. Remarquons d'abord que, par composition des fonctions, f définit une application $f^* : \mathcal{E}_p \to \mathcal{E}_n$, qui fait de $\mathcal{E}_n$ un $\mathcal{E}_p$-module ; désignons respectivement par $\mathcal{M}_n$ et $\mathcal{M}_p$ l'idéal maximal de $\mathcal{E}_n$ et celui de $\mathcal{E}_p$. On a alors le théorème suivant :

Théorème 5. *Soit F un $\mathcal{E}_n$-module de type fini ; pour qu'il soit de type fini sur $\mathcal{E}_p$, il faut et il suffit que $F/\mathcal{M}_p F$ soit de type fini sur $\mathcal{E}_p/\mathcal{M} \cong \mathbf{R}$.*

Notons que l'on peut dire alors un peu plus : prenons en effet des générateurs de $F/\mathcal{M}_pF$ sur $\mathbf{R}$, et remontons-les dans F : d'après le « lemme de Nakayama », on aura des générateurs de F sur $\mathcal{E}_p$.

L'énoncé précédent est ce qu'on appelle le « théorème de préparation différentiable » ; la forme donnée ici, un peu plus générale que la forme habituelle [4], [5], est due à Mather. Je vais en donner quelques cas particuliers : prenons d'abord $F = \mathcal{E}_n$; l'hypothèse « $\mathcal{E}_n/\mathcal{M}_p\mathcal{E}_n$ fini sur $\mathbf{R}$ » signifie simplement que l'idéal (f) engendré par $f_1, \ldots, f_p$ est un idéal de définition de $\mathcal{E}_n$: ceci exige $p \geqslant n$, et, inversement, nous avons vu plus haut que, pour $p \geqslant n$, cette propriété sera généralement vérifiée.

Prenons ensuite $p = n - 1$, et prenons pour f la projection définie par $f_i = x_i$, $i = 1, \ldots, n-1$. Soit d'autre part Φ une fonction de $\mathcal{E}_n$, $\Phi(0, \ldots, 0, x_n)$ ayant un développement de Taylor commençant par x_n^q ; prenons enfin $F = \mathcal{E}_n/\Phi\mathcal{E}_n$. Il est facile de voir que le théorème s'applique, et que l'on peut prendre pour générateurs de F sur $\mathcal{E}_{n-1}$ les classes des x_n^k, $k = 0, \ldots, q-1$. Autrement dit, pour toute $g \in \mathcal{E}_n$, il existe une identité

$$\text{(W)} \qquad g = \Phi Q + \sum_{j=0}^{q-1} x_n^j R_j, \text{ avec } Q \in \mathcal{E}_n, \quad R_j \in \mathcal{E}_{n-1}.$$

C'est la variante différentiable du théorème de préparation de Weierstrass, sous la forme que lui ont donnée Späth et Rückert (mais ici, contrairement au cas analytique, il n'y aura pas unicité) ; l'énoncé de Weierstrass lui-même, à savoir que Φ est équivalent à un polynome distingué, est donc encore vrai dans le cas différentiable : ce résultat avait été d'abord conjecturé par Thom.

La démonstration du théorème 5 se décompose en deux étapes : la première consiste, par une utilisation convenable du théorème des fonctions implicites, à ramener le cas général à un cas particulier : la démonstration de (W) dans le cas où Φ est un polynôme unitaire en x_n ; on peut même, en introduisant de nouvelles variables t_j, et en les substituant aux coefficients de ce polynôme, supposer que Φ est un polynôme par rapport à l'ensemble des variables. La seconde étape, plus difficile, consiste alors à établir le résultat particulier indiqué ; la méthode initiale du conférencier consistait à utiliser les techniques développées par Hörmander et Łojasiewicz, dont il a été question plus haut. Récemment, Mather [6] a donné une autre méthode, plus élémentaire, utilisant des développements en intégrales de Fourier.

On peut se poser, pour les applications différentiables, une question analogue à celle que nous avons examinée pour les idéaux : le germe d'application f étant donné, existe-t-il un entier k tel que tout germe f', ayant même développement de Taylor en 0 que f jusqu'à l'ordre k, soit équivalent à f par un difféomorphisme de la source et du but ? Contrairement à ce qui se passe pour les idéaux, cette propriété n'est pas généralement vraie (toutefois, d'après Thom, elle le devient si l'on remplace « difféomorphisme » par « homéomorphisme » [10]). Mather, en utilisant le théorème de préparation, a donné une caractérisation des applications qui possèdent cette propriété. Je n'exposerai pas ce résultat, mais je parlerai d'un autre, très voisin, et qui se traite par la même méthode : la caractérisation des germes stables.

Donnons-en d'abord la définition ; soit f un germe d'application $\mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^p$, avec $f(0) = 0$; en gros, f est stable si tout germe « suffisamment voisin » de f est équivalent à f par un difféomorphisme de la source et du but ; de façon plus précise, nous exigerons que, pour tout voisinage ouvert Ω de 0 dans $\mathbf{R}^n$, et tout représentant $\tilde{f}$ de f dans Ω, il existe un ouvert Ω', avec $0 \in \Omega' \subset \Omega$, et un ouvert $U \subset \mathbf{R}^p$, avec $\tilde{f}(\Omega') \subset U$ et $0 \in U$, possédant la propriété suivante : pour toute fonction $\tilde{f}' : \Omega \to \mathbf{R}^p$, suffisamment voisine de f dans la topologie de $\mathscr{E}(\Omega)$, il existe des plongements C^∞ $h : \Omega' \to \Omega$ et $h' : U \to \mathbf{R}^p$ tels qu'on ait

$$\tilde{h}' \circ (\tilde{f} \mid \Omega') = f' \circ h$$

(à noter que l'on ne suppose pas ici $f'(0) = 0$).

Une notion voisine est celle de « stabilité infinitésimale » : toute déformation infinitésimale g de f doit pouvoir être obtenue comme somme de deux déformations provenant de transformations infinitésimales de la source et du but ; de façon précise, il doit exister, pour tout germe g d'application en 0 de $\mathbf{R}^n$ dans $\mathbf{R}^p$ (on ne suppose pas nécessairement $g(0) = 0$), deux germes de champs de vecteurs X sur $\mathbf{R}^n$ et Y sur $\mathbf{R}^p$ tels qu'on ait

$$g = \langle X, \ df \rangle + Y \circ f.$$

Mather considère enfin, dans l'espace des jets (i.e. des développements de Taylor) d'ordre k d'applications de $\mathbf{R}^n$ dans $\mathbf{R}^p$, l'orbite $V(f)$ de $j^k f(0)$ sous l'action des difféomorphismes de la source et du but; son résultat est alors le suivant :

Théorème 6. *Les propriétés suivantes sont équivalentes* :

a) Le germe f est stable.

b) Le germe f est infinitésimalement stable.

c) Pour une (ou, pour toute) valeur de k suffisamment grande, f est transversal en 0 à $V(f)$.

L'équivalence de b) et c) se démontre en utilisant le théorème de préparation ; pour démontrer leur équivalence avec a), on utilise dans un sens un théorème de transversalité, et dans l'autre une intégration de champs de vecteurs qui permet de passer de transformations infinitésimales à des transformations finies. J'indique pour terminer que Mather a réussi à traiter aussi par ses méthodes le cas global, c'est-à-dire à caractériser d'une manière analogue les applications C^∞-stables d'une variété compacte dans une autre variété.

Université de Paris,
Faculté des Sciences,
Orsay, France

RÉFÉRENCES

[1] Hörmander L., On the division of distributions by polynomials, *Arkiv för Mathematik*, **3** (1958), 555-568.
[2] Łojasiewicz S., Sur le problème de la division, *Studia Math.*, **18** (1959), 87-136.
[3] Malgrange B., Division des distributions, Séminaire L. Schwartz (1959-60), exposés 21-25.
[4] Malgrange B., Le théorème de prépération en géométrie différentiable, Séminaire H. Cartan (1962-63), exposès 11-12-13-22.
[5] Malgrange B., Ideals of differentiables functions, Tata Institute Bombay and Oxford University Press, 1966. (Готовится к печати русский перевод.)
[6] Mather J., On the preparation theorem of Malgrange, Notes miméographiées, Princeton, 1966, et travaux non publiés.
[7] Schwartz L., Analyse et synthèse harmonique dans les espaces de distributions, *Canadian Journal Math.*, **3** (1951), 503-512.
[8] Schwartz L., Théorie des distributions, Hermann, Paris, 1950-51.
[9] Serre J.-P., Un théorème de dualité, *Comm. Math. Helvet.*, **29** (1955), 9-26.
[10] Thom R., Local topological properties of differentiable mappings, Bombay Colloquium on Differential Analysis, Oxford University Press, 1964.
[11] Tougeron J. C., Equivalence des idéaux de fonctions différentiables, *C. R. Acad. Sc. Paris*, **262** (1966), 563-565, et travaux non publiés.
[12] Whitney H., On ideals of differentiables functions, *Amer. Journal Math.*, **70** (1948), 635-658.