

# DES VARIÉTÉS TRIANGULÉES AUX VARIÉTÉS DIFFÉRENTIABLES

Par R. THOM

## 1. Généralités sur les groupes de difféomorphismes

Soit  $V^n$  une variété différentiable connexe séparée; par différentiable, on entendra toujours  $r$ -fois différentiable, où  $2 \leq r \leq \infty$ . On désigne par  $\text{Dif}(V^n)$  le groupe de tous les automorphismes de la variété différentiable  $V^n$ , muni de la  $C^r$ -topologie (i.e. la topologie définie par la différence sur tout compact des applications et de leurs dérivées partielles jusqu'à l'ordre  $r$ ). Si  $V^n$  est orientable, on se restreindra aux difféomorphismes de degré  $+1$ .

Tout difféomorphisme  $f$  d'une variété  $V$  connexe peut être déformé (au sens de la  $C^r$ -topologie) en un difféomorphisme  $g$  tel que:

- (1)  $g$  laisse fixe un point donné  $p$  de  $V$ ;
- (2)  $g$  est tangent à l'identité (jusqu'à l'ordre  $r$ ) en  $p$ ;
- (3)  $g$  se réduit à l'identité sur un voisinage de  $p$ .

Les propriétés (1) et (2) sont connues; on en trouvera une démonstration complète, ainsi que de (3), dans un article à paraître de Jean Cerf.

**1.1. Les difféomorphismes des boules et des sphères.** Soient  $\text{Dif}(B^{n+1})$ ,  $\text{Dif}(S^n)$  les groupes de difféomorphismes de degré un de la  $(n+1)$ -boule et de la  $n$ -sphère. Soient  $\pi_0(\text{Dif}(B^{n+1}))$ ,  $\pi_0(\text{Dif}(S^n))$  les groupes discrets quotients des groupes précédents par les composantes connexes de l'identité. Milnor a démontré la propriété suivante:

*Théorème 1. Les groupes  $\pi_0(\text{Dif}(B^{n+1}))$ ,  $\pi_0(\text{Dif}(S^n))$  sont abéliens.*

Démonstration: Soient  $f, g$  deux difféomorphismes de  $S^n$ ; d'après la propriété (3), on peut déformer  $f, g$  resp. en  $f_1, g_1$  tels que  $f_1$  se réduise à l'identité sur l'hémisphère Nord  $E^{n+}$  de  $S^n$ , et tel que  $g_1$  se réduise à l'identité sur l'hémisphère Sud  $E^{n-}$  de  $S^n$ . Dans ces conditions, il est clair que l'on a, en tout point de  $S^n$ :

$$f_1 \circ g_1 = g_1 \circ f_1.$$

Par restriction au bord  $S^n$  de  $B^{n+1}$ , on définit un homomorphisme canonique (en fait, une fibration sur la composante connexe de l'identité):  $j: \text{Dif}(B^{n+1}) \rightarrow \text{Dif}(S^n)$ ; par suite le quotient  $\text{Dif}(S^n)/j. \text{Dif}(B^{n+1})$  est discret, et isomorphe au quotient  $\pi_0(\text{Dif}(S^n))/j. \pi_0(\text{Dif}(B^{n+1}))$ . Ce groupe

abélien sera désigné par  $\Gamma_{n+1}$ . On sait que certains de ces groupes ne sont pas nuls (par exemple  $\Gamma_7$ ); néanmoins, on ne connaît aucun exemple où le groupe  $\pi_0(\text{Dif}(B_m))$  n'est pas nul.

## 2. Subdivisions différentiables d'une variété différentiable

Soit  $K$  un complexe simplicial,  $|K|$  l'espace topologique sous-jacent. Supposons que  $|K|$  soit une variété qu'on peut munir d'une structure différentiable ( $\mathcal{S}$ ). On dira que  $K$  est une subdivision *différentiable* de la variété  $X$ , si l'application canonique  $\sigma^k \rightarrow |K|$  de tout simplexe est une application différentiable de rang maximum du  $k$ -simplexe euclidien standard dans  $X$ . Tout simplexe apparaît ainsi comme un morceau de variété plongée dans  $X$ ; un voisinage tubulaire normal de  $\sigma^k$  contient les simplexes de l'étoile de  $\sigma^k$  comme sous-variétés plongées; en coupant en un point  $x$  de  $\sigma^k$  par un  $(n-k)$ -plan transverse, on définira l'«étoile transverse» à  $\sigma^k$ , qui est une  $(n-k)$ -boule différentiable, contenant les sections des simplexes de dimension  $> k$  de l'étoile de  $\sigma^k$  comme sous-variétés localement linéaires. Ceci impose que la triangulation proposée soit une «triangulation de Brouwer» dans la terminologie de Cairns.†

Etant donné le complexe  $K$ , donné par exemple par son schéma combinatoire, on se propose de déterminer si la variété  $X = |K|$  peut être munie d'une structure différentiable globale contenant  $K$  comme subdivision différentiable, et, de plus, de classier ces structures à l'équivalence près. Pour que le problème ait un sens, il faudra supposer au départ que  $|K|$  est une variété, et que  $K$  en est une «subdivision de Brouwer», ce qu'on peut exprimer en disant qu'à tout simplexe  $\sigma^r$  est attachée une carte locale contenant  $\sigma^r$ -comme sous-variété linéaire, et telle que tous les simplexes de l'étoile de  $\sigma^r$ -soient plongés rectilinéairement dans cette carte.

On construira la structure différentiable sur  $K$  par récurrence sur les squelettes  $K^i$  successifs; une structure différentiable dans un voisinage du 0-squelette  $K^0$  s'obtient en attachant à chaque sommet sa carte locale qui lui est donnée en raison de la propriété de Brouwer de la subdivision. Le problème consistera donc, étant donnée une structure différentiable ( $\mathcal{S}$ ) sur un voisinage du bord  $\partial\sigma^{k+1}$  d'un  $(k+1)$  simplexe, à étendre (si possible) cette structure à un voisinage de  $\sigma^{k+1}$ . C'est ce problème d'extension locale d'une structure différentiable qu'on va étudier de près.

† Ceci n'est pas une restriction; en effet, J. H. C. Whitehead a démontré que toute variété triangulée possède une subdivision qui a la propriété de Brouwer.

### 3. Extension locale d'une structure différentiable

Etant donnée une variété à bord  $M$  de bord  $V$ , et une variété à bord  $M'$  de bord  $V'$  de même dimensions, supposons qu'on ait défini dans les bords  $V$ ,  $V'$  deux sous-variétés à bords  $G \subset V$ ,  $G' \subset V'$  ( $\dim. G = \dim. G' = \dim. V$ ) qui soient difféomorphes; si, dans la réunion  $M \cup M'$ , on identifie  $G$  à  $G'$  par ce difféomorphisme, on obtient une nouvelle variété à bord  $P$ , dont la structure est bien déterminée à un difféomorphisme près. Cette structure ne varie pas non plus si on remplace le difféomorphisme d'attachement  $g: G \rightarrow G'$  par un difféomorphisme qui s'en déduit par déformation continue.

C'est ce procédé qu'on emploiera pour étendre la structure  $(\mathcal{S})$  du bord  $S^k$  de notre  $(k+1)$ -simplexe  $\sigma^{k+1}$  à l'intérieur de  $\sigma^{k+1}$ ; puisque la structure  $(\mathcal{S})$  est définie dans un voisinage de  $\partial\sigma^{k+1}$ , il est possible de définir une variété à bord  $M$  diff. pour  $(\mathcal{S})$  qui soit un 'voisinage tubulaire' régulier de  $\partial\sigma^{k+1}$  pour  $(\mathcal{S})$ ; un tel voisinage contient  $\sigma^{k+1} \cap M$  comme sous-variété plongée, et l'intersection  $V = \partial M$  par  $\sigma^{k+1}$  est, au moins topologiquement, une  $k$ -sphère  $S^k$  topologiquement isotope (dans  $\sigma^{k+1}$  un peu agrandi), au bord polyédral  $\partial\sigma^{k+1}$ .

On prendra pour  $G$  un voisinage tubulaire de  $S^k$  dans  $V$ . Au simplexe  $\sigma^{k+1}$  est attachée sa 'carte de Brouwer', dans laquelle il est rectilinéairement plongé; on peut, par une construction facile, définir une sphère  $S^k$  différentiablement plongée isotope au bord  $\partial\sigma^{k+1}$  pour la structure différentiable  $(\mathcal{S})$  associée à la carte de Brouwer; on prendra pour  $M'$  un voisinage tubulaire de  $\sigma^{k+1}$  pour  $(\mathcal{S})$ , limité aux plans normaux tombant sur  $S^k$ ; le voisinage normal de  $S^k$  sera la variété à bord  $G'$ . On recherchera si  $G$  et  $G'$  qui sont tous deux des fibrés en  $(n-k)$ -boules sont difféomorphes; si oui, on appliquera la construction générale; il restera à vérifier que la variété obtenue par identification est bien homéomorphe à un voisinage de  $\sigma^{k+1}$ ; ceci résulte du fait que les deux sphères  $S^k$  qu'on identifie dans  $\sigma^{k+1}$  sont isotopes au bord polyédral  $\partial\sigma^{k+1}$ , et que les plans normaux à  $\sigma^{k+1}$  pour les deux structures  $(\mathcal{S})$  et  $(\mathcal{S}')$  définissent des polyèdres isotopes à l'étoile transverse en tout point  $x$  de  $\sigma^{k+1}$ , étoile qui, elle, est intrinsèquement définie.

En fait la variété  $M'$  qu'on ajoute est difféomorphe au produit  $B^{k+1} \times B^{n-k}$ , comme voisinage tubulaire d'une boule; l'identification proposée sera possible si, pour la structure  $(\mathcal{S})$ , on peut trouver une sphère  $\Sigma$  approchant  $\partial\sigma^{k+1}$  dont la structure différentiable est la structure usuelle, et dont le voisinage normal soit trivial. Autrement dit: si l'on remarque que, pour la structure  $(\mathcal{S})$ , comme pour  $(\mathcal{S}')$ , le simplexe

$\sigma^{k+1}$  est différentiablement plongé, le problème d'extension de la structure  $(\mathcal{S})$  se trouve décomposé en deux problèmes:

- (1) extension de la structure 'tangente', restriction de  $(\mathcal{S})$  au simplexe  $\sigma^{k+1}$ ;
- (2) extension de la structure fibrée des vecteurs normaux de  $(\mathcal{S})$  à tout  $\sigma^{k+1}$ .

Le premier problème étant supposé résolu pour le moment, on va s'occuper du second. La première difficulté est de montrer que la structure fibrée normale à  $\Sigma$  pour  $(\mathcal{S})$  est celle du produit. On le montre grâce à la remarque suivante: soit  $\sigma^n$  un  $n$ -simplexe quelconque de l'étoile de  $\sigma^{k+1}$ ; sa section par un plan normal (pour  $(\mathcal{S})$ ) à  $\sigma^{k+1}$  en  $x$  donne un  $(n-k-1)$ -simplexe (de dimension maximum) de l'étoile transverse en  $x$ , simplexe qui a un sommet en  $x$ ; les vecteurs tangents en  $x$  aux arêtes de ce simplexe-section définissent en tout point  $x \in \Sigma$  un repère pour le fibré des vecteurs normaux. Comme ce repère est défini pour tout  $x$  et varie continuellement avec  $x$ , il en résulte bien que le fibré normal est trivial.

On pourra donc étendre sans difficulté la structure normale, mais une sérieuse difficulté apparaît: la nouvelle structure obtenue doit contenir les simplexes de l'étoile de  $\sigma^{k+1}$  comme sous-variétés linéaires en tout point. Cette condition est satisfaite pour la structure  $(\mathcal{T})$ ; le sera-t-elle pour  $(\mathcal{S})$  étendue? Dans l'identification des fibrés de vecteurs normaux pour  $(\mathcal{S})$  et  $(\mathcal{T})$ , on peut supposer qu'on prend comme repères homologues ceux définis par le simplexe  $\sigma^n$  de l'étoile transverse dont il a été question plus haut;  $x$  variant sur  $\Sigma$ , la section de l'étoile transverse par une sphère normale donne naissance à une triangulation géodésique variable de cette sphère, triangulation dont un simplexe de dimension maximum (à savoir le simplexe  $\sigma^{n-k}$  section de  $\sigma^n$ ) demeure fixe; le problème de l'extension sera donc possible si l'application de  $S^k$  dans l'espace des triangulations géodésiques de la sphère isotopes à une triangulation donnée (avec simplexe fixe) est homotope à zéro. Par une inversion on est ramené à considérer l'espace de tous les automorphismes semi-linéaires d'une subdivision simpliciale du simplexe. On est donc ramené à démontrer le

*Théorème 2. L'espace de tous les homéomorphismes semi-linéaires d'une subdivision simpliciale du  $n$ -simplexe dans lui-même (qui se réduisent à l'identité sur le bord du simplexe) est asphérique.*

Un homéomorphisme semi-linéaire du simplexe  $s^m$  dans lui-même est un homéomorphisme de  $s^m$  sur lui-même qui est linéaire sur chacun des simplexes d'une triangulation donnée de  $s^m$ . Il est clair qu'un tel homéo-

morphisme est complètement déterminé dès qu'on s'est donné la position des images des sommets; on a par suite sur cet espace une topologie naturelle définie par l'ouvert de  $(R^m)^q$  défini par la position dans  $s^m$  des  $q$  sommets images. Partons d'une subdivision donnée  $(K)$  de  $s^m$ , et supposons défini l'espace  $H$  des homéomorphismes semi-linéaires de  $K$ . Supposons maintenant qu'on subdivise l'un des  $m$ -simplexes de  $K$ , soit  $(z)$ , par adjonction d'un nouveau sommet  $y$  intérieur à  $(z)$ ; dans ces conditions, on obtient une nouvelle subdivision  $(K')$ ; formons l'espace  $(H')$  des homéomorphismes semi-linéaires correspondants; tout élément de  $(H')$  provient d'une application de  $(H)$  par subdivision du simplexe  $(z)$ ; ceci définit une application de  $(H')$  sur  $(H)$ ; pour les espaces représentatifs, la fibre est l'ensemble des positions de  $y$  dans  $(z)$ ; c'est donc un espace asphérique. Par suite  $(H')$  et  $(H)$  ont même type d'homotopie.

Nous avons donc démontré le théorème pour toutes les subdivisions qui se déduisent de la subdivision triviale du  $m$ -simplexe par une suite de 'subdivisions coniques' de simplexes de dimension maximum  $m$ . Le cas de la subdivision barycentrique classique échappe malheureusement au résultat. Il faudrait donc invoquer ici, pour obtenir le théorème dans toute sa généralité, une forme particulièrement forte de la 'Hauptvermutung'.

Il en résulte donc que, si les étoiles transverses aux simplexes de  $K$  satisfont à cette condition, le prolongement de la structure normale sera possible. C'est ce que nous supposerons dorénavant.

#### 4. Prolongement de la structure tangente

Pour que le prolongement de la structure tangente soit possible il suffit que la sphère  $\Sigma$  approximation différentiable de  $\partial\sigma^{k+1}$  pour la structure  $(\mathcal{S})$  soit isomorphe à la sphère  $S^k$  usuelle; de plus c'est une condition nécessaire de prolongement au  $(k+1)$ -simplexe: car on peut montrer qu'il y a unicité de la structure de l'approximation différentiable du bord  $\partial\sigma^{k+1}$ , la structure différentiable de l'espace ambiant étant donnée.

Observons d'ailleurs que la sphère  $\Sigma$  possède une subdivision différentiable isomorphe à  $\partial\sigma^{k+1}$ ; soit  $s^k$  un de ses simplexes; le complémentaire  $\Sigma - s^k$ , formé de  $k$  simplexes de dimension  $k$ , est nécessairement difféomorphe à l'un de ces simplexes de dimension  $k$  (on passe d'un simplexe à la réunion des  $k$ -simplexes par une suite de  $(k-1)$  expansions élémentaires au sens de Whitehead; or, du fait qu'une boule euclidienne a une structure de produit  $B^{n+1} \times I$ , toute expansion définit un difféomorphisme).

Il en résulte que la sphère  $\Sigma$  s'obtient en accolant deux  $k$ -boules (hémisphères) suivant leur bord commun  $S^{k-1}$ . Dans ces conditions deux sphères sont ou non difféomorphes suivant que les difféomorphismes d'attachement  $S^{k-1} \rightarrow S^{k-1}$  sont ou non dans la même composante connexe de  $\text{Dif}(S^{k-1})$  modulo  $\text{Dif}(B^k)$ . Donc l'ensemble des structures différentiables de la sphère  $S^k$  (compatibles avec une subdivision différentiable isomorphe au bord du  $(k+1)$ -simplexe) s'identifie au groupe abélien  $\Gamma_k$ . Ce groupe définira par suite la nature de l'obstruction rencontrée dans l'extension au  $(k+1)$ -squelette de la structure différentiable donnée sur le  $k$ -squelette.

De plus, au cas où l'obstruction est nulle, la sphère  $\Sigma$  est difféomorphe à  $S^k$  et on peut faire l'identification  $S^k \rightarrow \Sigma$ ; en modifiant au besoin la paramétrisation de  $\sigma^{k+1}$ , il est possible de modifier l'application d'attachement par un élément quelconque de  $\Gamma_{k+1}$ ; les diverses extensions possibles sont donc en correspondance biunivoque avec les éléments du groupe  $\Gamma_{k+1}$ .

*Lemme d'addition.* Soit  $\sigma^{r+1}$  le  $(r+1)$  simplexe standard; toute  $r$ -face  $F^r$  de  $\sigma^{r+1}$  admet pour bord  $\partial\sigma^r = S^{r-1}$ ; il est possible de modifier la paramétrisation de chaque face  $F_j$  en modifiant l'application d'attachement de  $S^{r-1}$  sur  $F_j$  par un élément  $\gamma_j$  de  $\Gamma_r$ . Le lemme d'addition exprime que pour la sphère  $S^r$  obtenue en recollant tous ces simplexes  $F_j$  ainsi modifiés, la structure différentiable globale correspond à l'élément  $c \in \Gamma_r$  défini par  $c = \sum (-1)^j \gamma_j$ .

En admettant toujours possible l'extension des structures 'normales', on voit que l'extension des structures 'tangentes' se heurte à des obstructions, à valeurs dans les groupes  $\Gamma_j$ . On peut vérifier que ces obstructions ont toutes les propriétés classiques des obstructions de la théorie de l'homotopie; ce sont des cocycles, et la nullité de leur classe est une condition nécessaire et suffisante de prolongement des structures, après une éventuelle déformation sur le squelette convenable.

De plus, il résulte du lemme d'addition que si  $K'$  est une subdivision barycentrique de  $K$ , les obstructions relatives à  $K'$  donnent les obstructions relatives à  $K$  dans l'homomorphisme canonique  $C(K') \rightarrow C(K)$ . La construction d'une structure différentiable sur  $K$  se présente donc formellement comme la construction d'une section d'un fibré  $\hat{K} \rightarrow K$ , dont la fibre serait un complexe (abstrait)  $\Gamma$  tel que  $\pi_i(\Gamma) = \Gamma_i$ . Une telle fibration donne naissance à une factorisation de Postnikov

$$\hat{K} \rightarrow \dots \rightarrow \hat{K}_n \rightarrow \dots \rightarrow \hat{K}_{j+1} \rightarrow \hat{K}_j \rightarrow \dots \rightarrow K,$$

la fibre de  $\hat{K}_{j+1} \rightarrow \hat{K}_j$  étant le 'complexe d'Eilenberg MacLane'  $K(\Gamma_j, j)$ .

Les invariants  $k_j$  de cette factorisation apparaissent comme les obstructions successives à la construction d'une section. On ignore si ces invariants sont de nature topologique (ce sont des invariants combinatoires); un exemple dû à Milnor montre que ce ne sont pas des invariants du type d'homotopie.

## 5. Classification des structures différentiables

*Théorème 3.* Soit  $M^{n+1}$  une variété à bord différentiable homéomorphe au produit  $V^n \times I$ , où  $V^n$  est une variété différentiable telle que le bord de  $M^{n+1}$  soit homéomorphe à  $(V, 0) \cup (V, 1)$ . Soit  $K$  une subdivision différentiable de  $V$ ; supposons que  $M^{n+1}$  admette une subdivision différentiable isomorphe au produit  $K \times I$ . Alors  $(V, 0)$  et  $(V, 1)$  sont difféomorphes, et  $M^{n+1}$  est difféomorphe au produit  $V \times I$ .

**5.1. Indication sur la démonstration.** Dans  $M$  on considère les hypersurfaces différentiables par morceaux  $t = \text{constant}$ ,  $t \in I$ ; en tout point  $p$  de  $M$ , l'hypersurface  $t = t(p)$  admet un vecteur transverse, à savoir le vecteur tangent à l'image de  $p \times I$  dans  $M$ ; un tel champ est différentiable par morceaux dans  $M$ ; on pourra donc l'approcher par un champ différentiable  $H$ , qui, lui, sera encore transversal aux hypersurfaces  $t = \text{constant}$ ; l'intégration du champ de vecteurs  $H$  (convenablement normé) fournira un groupe de difféomorphismes à un paramètre qui fait de  $M$  le produit  $V \times I$  au sens différentiable (on notera que cette structure de produit ne conserve pas la triangulation  $K \times I$  donnée tout d'abord). Soit  $K$  une subdivision, qu'on peut munir de deux structures différentiables  $(\mathcal{S}^0)$  et  $(\mathcal{S}^1)$ ; supposons qu'on puisse munir le produit  $K \times I$  d'une structure différentiable telle que les bords  $(K, 0)$  et  $(K, 1)$  y soient différentiablement plongés avec les structures  $(\mathcal{S}^0)$  et  $(\mathcal{S}^1)$  respectivement. Il résulte alors du théorème 3 que les structures  $(\mathcal{S}^0)$  et  $(\mathcal{S}^1)$  sont isomorphes. Or, dans l'interprétation qui fait d'une structure différentiable une section du fibré  $\hat{K}$  de fibre  $\Gamma$ , on voit que les sections correspondant à  $(\mathcal{S}^0)$  et  $(\mathcal{S}^1)$  sont la restriction d'une section sur  $K \times I$ , donc des sections homotopes. Ainsi: à des sections homotopes du fibré  $K$  correspondent des structures différentiables isomorphes.

*Remarque.* La classification ainsi obtenue des structures est plus fine que l'automorphisme différentiable pur et simple: on pourrait l'exprimer ainsi: Deux variétés différentiables  $V, V'$  munies de subdivisions différentiables isomorphes  $K, K'$  sont 'équivalentes', s'il existe un difféomorphisme  $h$  de  $V$  sur  $V'$  tel que les subdivisions  $K'$  et  $h(K)$  de  $V'$  soient 'isotopes' dans  $V'$ .

**5.2. Quelques conséquences.** Si l'on admet le résultat suivant:

**Théorème 4.** L'espace des automorphismes semi-linéaires d'une subdivision simpliciale du simplexe est contractile,

on peut affirmer:

(i) Toute variété contractile triangulée admet une structure différentiable compatible avec sa triangulation.

(ii) Sur une variété contractile deux structures différentiables compatibles avec la triangulation sont isomorphes.

Si l'on admettait en plus la *Hauptvermutung*, on en déduirait l'unicité de la structure différentiable sur les boules et l'espace euclidien. En effet, un fibré de base contractile admet toujours des sections, et deux sections sont homotopes.