Л. С. ПОНТРЯГИН

ОПТИМАЛЬНЫЕ ПРОЦЕССЫ РЕГУЛИРОВАНИЯ

В этом докладе я излагаю результаты, полученные моими учениками В. Г. Болтянским и Р. В. Гамкрелидзе и мною[1, 2, 3].

1. Постановка задачи

Пусть Ω—некоторое топологическое пространство. Будем говорить, что задан *управляемый процесс*, если имеется система обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{dx^i}{dt} = f^i(x^1, \dots, x^n; u) = f^i(\bar{x}; u) \quad (i = 1, \dots, n), \tag{1}$$

или в векторной форме:

$$\frac{d\bar{x}}{dt} = \bar{f}(\bar{x}; u), \tag{2}$$

где $x^1, \dots, x^n$ — действительные функции времени t, $\bar{x} = (x^1, \dots, x^n)$ — вектор n-мерного векторного пространства R, $u \in \Omega$, а

$$f^i(\bar{x}; u) \quad (i = 1, \dots, n)$$

— функции, заданные и непрерывные для всех значений пары $(\bar{x}, u) \in R \times \Omega$. Предполагается также, что частные производные

$$\frac{\partial f^i}{\partial x^j} \quad (i, j = 1, \dots, n)$$

также определены и непрерывны на всем пространстве $R \times \Omega$.

Для того, чтобы найти решение уравнения (2), определенное на отрезке $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$, достаточно указать *функцию* $u(t)$ *управления* на отрезке $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$ и начальное значение $\bar{x}_0$ решения при $t = t_0$. В соответствии с этим мы будем говорить, что задано *управление*

$$U = (u(t), t_0, t_1, \bar{x}_0) \tag{3}$$

уравнения (2), если задана функция $u(t)$, отрезок $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$ ее определения и начальное значение $\bar{x}_0$ решения $\bar{x}(t)$. В дальнейшем будут рассматриваться кусочно непрерывные функции управления $u(t)$, допускающие разрывы первого рода, и *непрерывные* решения уравнения (2). При этом управления $u(t)$ будут предполагаться непрерывными в начальной точке t_0 и полунепрерывными слева, т.е. удовлетворяющими условию $u(t-0) = u(t)$, $t > t_0$. Мы будем говорить, что управление (3) *переводит* точку $\bar{x}_0$ в точку $\bar{x}_1$, если соответствующее решение $\bar{x}(t)$ уравнения (2), удовлетворяющее начальному условию $\bar{x}(t_0) = \bar{x}_0$, удовлетворяет еще конечному условию: $\bar{x}(t_1) = \bar{x}_1$.

Пусть теперь $f^0(x^1, \ldots, x^n; u) = f^0(\bar{x}, u)$ — функция, определенная и непрерывная вместе со своими частными производными

$$\partial f^0/\partial x^j \quad (j = 1, \ldots, n),$$

на всем пространстве $R \times \Omega$. Каждому управлению (3) соответствует тогда число

$$L(U) = \int_{t_0}^{t_1} f^0(\bar{x}(t), u(t))\, dt.$$

Таким образом, L есть функционал управления (3). Управление U будем называть *оптимальным*, если, каково бы ни было управление

$$U^* = (u^*(t), t_0^*, t_1^*, \bar{x}_0),$$

переводящее точку $\bar{x}_0$ в точку $\bar{x}_1$, имеет место неравенство

$$L(U) \leqslant L(U^*).$$

Замечание 1. Если (3) —оптимальное управление уравнения (2), $\bar{x}(t)$ — соответствующее ему решение уравнения (2), а $t_2 < t_3$ — две точки отрезка $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$, то $U' = (u(t), t_2, t_3, \bar{x}(t_2))$ есть также оптимальное управление.

Замечание 2. Если (3) — оптимальное управление уравнения (2), переводящее точку $\bar{x}_0$ в точку $\bar{x}_1$, а τ—произвольное число, то

$$U'' = (u(t-\tau), t_0+\tau, t_1+\tau, \bar{x}_0)$$

—также оптимальное управление, переводящее точку $\bar{x}_0$ в $\bar{x}_1$.

Важным частным случаем является тот, когда функция $f^0(\bar{x}; u)$ определяется равенством

$$f^0(\bar{x}, u) \equiv 1. \tag{4}$$

В этом случае имеем

$$L(U) = t_1 - t_0,$$

и оптимальность управления U означает *минимальность времени перехода* из положения $\bar{x}_0$ в положение $\bar{x}_1$.

В применениях важен случай, когда Ω является замкнутой областью некоторого r-мерного эвклидова пространства E; тогда $u = (u^1, \ldots, u^r)$, и один управляющий параметр u превращается в систему числовых параметров $u^1, \ldots, u^r$. В случае, когда Ω представляет собой открытое множество пространства E, сформулированная здесь вариационная задача является частным случаем задачи Лагранжа ([4], стр. 225), и основной результат, приводимый ниже (принцип максимума), совпадает с известным критерием Вейерштрасса. Для приложений важен, однако, случай, когда управляющие параметры удовлетворяют неравенствам, включающим равенства, например

$$|u^i| \leqslant 1 \quad (i = 1, \ldots, r).$$

В этом случае критерий Вейерштрасса, очевидно, неверен, и приводимый ниже результат является новым.

2. Необходимые условия оптимальности (принцип максимума)

Для формулировки необходимого условия оптимальности введем в рассмотрение вектор

$$\tilde{x} = (x^0, x^1, \ldots, x^n)$$

$(n+1)$-мерного эвклидова пространства S и рассмотрим управляемый процесс

$$\frac{dx^i}{dt} = f^i(x^1, \ldots, x^n, u) = f^i(\bar{x}, u) = f^i(\tilde{x}, u) \quad (i = 0, 1, \ldots, n), \tag{5}$$

или в векторной форме

$$\frac{d\tilde{x}}{dt} = \tilde{f}(\tilde{x}, u), \tag{6}$$

где $f^0(\bar{x}, u)$ есть функция, которая определяет функционал L. Для того, чтобы, зная управление (3) уравнения (2), получить управление уравнения (6), достаточно, исходя из начального значения

$$\bar{x}_0 = (x_0^1, \ldots, x_0^n),$$

задать начальное значение $\tilde{x}_0$ уравнения (6). Мы определим вектор $\tilde{x}_0$, положив

$$\tilde{x}_0 = (0, x_0^1, \ldots, x_0^n).$$

Этим способом управление (3) уравнения (2) однозначно определяет управление уравнения (6), и мы просто будем считать, что (3) есть управление уравнения (6). Если теперь управление (3) переводит начальное значение $\tilde{x}_0$ уравнения (6) в конечное значение

$$\tilde{x}_1 = (x_0^1, x_1^1, \ldots, x_1^n),$$

то мы имеем

$$L(U) = x_1^0,$$

и этим определяется связь уравнения (6) с формулированной ранее вариационной задачей.

Наряду с контравариантным вектором $\tilde{x}$ пространства S рассмотрим вспомогательный ковариантный вектор

$$\tilde{\psi} = (\psi_0, \ldots, \psi_n)$$

этого пространства и составим функцию

$$K(\tilde{\psi}, \tilde{x}, u) = (\tilde{\psi}, \tilde{f}(\tilde{x}, u))$$

(справа стоит скалярное произведение векторов $\tilde{\psi}$ и $\tilde{f}$).

При фиксированных значениях $\tilde{\psi}$ и $\tilde{x}$ функция K становится функцией параметра u; верхнюю грань значений этой функции обозначим через $N(\tilde{\psi}, \tilde{x})$. Составим, далее, гамильтонову систему уравнений

$$\frac{dx^i}{dt} = \frac{\partial K}{\partial \psi_i} \quad (i = 0, \ldots, n), \tag{7}$$

$$\frac{d\psi_i}{dt} = -\frac{\partial K}{\partial x^i} \quad (i = 0, \ldots, n). \tag{8}$$

Непосредственно видно, что система (7) совпадает с системой (5), система же (8) есть

$$\frac{d\psi_0}{dt} = 0, \quad \frac{d\psi_j}{dt} = -\sum_{i=0}^{n} \psi_i \frac{\partial f^i(\tilde{x}, u)}{\partial x^j} \quad (j = 1, \ldots, n). \tag{9}$$

Теорема 1. *Пусть* (3) — *оптимальное управление уравнения* (2) *и* $\bar{x}(t)$ — *соответствующее ему решение уравнения* (2). *Дополним вектор* $\bar{x}(t)$ *до вектора* $\tilde{x}(t)$, *положив*

$$x^0(t) = \int_{t_0}^{t} f^0(\bar{x}(t), u(t))\, dt.$$

Существует тогда такая ненулевая непрерывная вектор-функция $\tilde{\psi}(t)$, *что*

$$K(\tilde{\psi}(t_0), \tilde{x}(t_0), u(t_0)) = 0 \quad (\psi_0(t_0) \leqslant 0), \tag{10}$$

а функции

$$\tilde{\psi}(t), \quad \tilde{x}(t), \quad u(t)$$

составляют решение гамильтоновой системы (7), (8), *причем*

$$K(\tilde{\psi}(t), \tilde{x}(t), u(t)) = N(\tilde{\psi}(t), \tilde{x}(t)); \tag{11}$$

при этом оказывается, что функция $K(\tilde{\psi}(t), \tilde{x}(t), u(t))$ *постоянна, так что*

$$K(\tilde{\psi}(t), \tilde{x}(t), u(t)) \equiv 0. \tag{12}$$

Для формулировки необходимого условия в случае, когда речь идет о минимализации времени (см. (4)), составим гамильтонову функцию

$$H(\bar{\psi}, \bar{x}, u) = (\bar{\psi}, \bar{f}(\bar{x}, u)).$$

При фиксированных значениях $\overline{\psi}$ и $\overline{x}$ функция $H(\overline{\psi}, \overline{x}, u)$ становится функцией параметра u. Верхнюю грань значений этой функции обозначим через $M(\overline{\psi}, \overline{x})$. Составим, далее, гамильтонову систему

$$\frac{dx^j}{dt} = \frac{\partial H}{\partial \psi_j} \quad (j = 1, \dots, n), \tag{13}$$

$$\frac{d\psi_j}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial x^j} \quad (j = 1, \dots, n). \tag{14}$$

Очевидно, что система (13) совпадает с системой (1), а система (14) есть

$$\frac{d\psi_j}{dt} = -\sum_{k=1}^{n} \psi_k \frac{\partial f^k(\overline{x}, u)}{\partial x^j} \quad (j = 1, \dots, n). \tag{15}$$

Теорема 2. *Пусть* (3) — *оптимальное для функционала* (4) *управление уравнения* (2) *и* $\overline{x}(t)$ — *соответствующее этому управлению решение уравнения* (2). *Существует тогда такая ненулевая непрерывная вектор-функция* $\overline{\psi}(t) = (\psi_1(t), \dots, \psi_n(t))$, *что*

$$H(\overline{\psi}(t_0), \overline{x}(t_0), u(t_0)) \geqslant 0,$$

а функции

$$\overline{\psi}(t), \quad \overline{x}(t), \quad u(t)$$

удовлетворяют гамильтоновой системе уравнений (13), (14), *причем*

$$H(\overline{\psi}(t), \overline{x}(t), u(t)) = M(\overline{\psi}(t), \overline{x}(t)). \tag{16}$$

Оказывается, кроме того, что функция $H(\overline{\psi}(t), \overline{x}(t), u(t))$ *постоянна, так что*

$$H(\overline{\psi}(t), \overline{x}(t), u(t)) \geqslant 0. \tag{17}$$

Теорема 2 непосредственно вытекает из теоремы 1.

Главным содержанием теорем 1 и 2 являются равенства (11) и (16). Поэтому теорема 2, первоначально опубликованная в качестве гипотезы в заметке[1], названа *принципом максимума*. В этом же смысле и теореме 1 естественно присвоить наименование *принципа максимума*.

3. Доказательство принципа максимума (*теоремы* 1 *и* 2)

Докажем теорему 1. В доказательстве использованы некоторые конструкции Макшейна[5]. Пусть (3) — некоторое управление уравнения (6) и $\tilde{x}(t)$ — соответствующее ему решение уравнения (6). Система уравнений в вариациях для системы (5) вблизи решения $\tilde{x}(t)$ записывается, как известно, в виде

$$\frac{dy^i}{dt} = \sum_{j=0}^{n} \frac{\partial f^i(\tilde{x}(t), u(t))}{\partial x^j} y^j \quad (i = 0, 1, \dots, n). \tag{18}$$

Записывая решение системы (18) в векторной форме, получаем вектор

$$\tilde{y}(t) = (y^0(t), \ldots, y^n(t)).$$

В дальнейшем будут рассматриваться только непрерывные решения $\tilde{y}(t)$. Систему уравнений в вариациях, как известно, можно истолковать следующим образом. Пусть $\tilde{y}_0$ — произвольный вектор пространства S. Зададимся начальным значением†

$$\tilde{x}_0 + \epsilon\tilde{y}_0 + \epsilon O(\epsilon)$$

для решения уравнения (6). Тогда само решение уравнения (6) с этим начальным значением записывается в форме:

$$\tilde{x}(t) + \epsilon\tilde{y}(t) + \epsilon O(\epsilon),$$

где $\tilde{y}(t)$ есть решение системы (18), взятое с начальным значением $\tilde{y}_0$. Мы будем говорить, что решение $\tilde{y}(t)$ системы (18) является *перенесением* вектора $\tilde{y}_0$, заданного в начальной точке $\tilde{x}_0$ траектории $\tilde{x}(t)$, вдоль всей траектории. В том же смысле можно сказать, что решение $\tilde{y}(t)$ является перенесением вектора $\tilde{y}(\tau)$, заданного в точке $\tilde{x}(\tau)$ траектории $\tilde{x}(t)$, вдоль всей траектории.

Наряду с контравариантным вектором $\tilde{y}(t)$, являющимся решением системы (18), рассмотрим ковариантный вектор $\tilde{\psi}(t)$, являющийся решением системы (8). Непосредственно проверяется, что

$$\frac{d}{dt}(\tilde{\psi}(t),\ \tilde{y}(t)) = 0,$$

так что

$$(\tilde{\psi}(t),\ \tilde{y}(t)) = \text{const}. \tag{19}$$

Если истолковывать ковариантный вектор $\tilde{\psi}(t)$ как плоскость, проведенную через точку $\tilde{x}(t)$, то можно сказать, что плоскость $\tilde{\psi}(t)$ является *перенесением* плоскости $\tilde{\psi}(\tau)$, заданной в точке $\tilde{x}(\tau)$ траектории $\tilde{x}(t)$, вдоль всей траектории.

Вариацией управления (3) будем называть управление

$$U^* = U^*(\epsilon, \alpha) = (u^*(t), t_0, t_1 + \alpha\epsilon, \tilde{x}_0),$$

зависящее от параметра ϵ и действительного числа α, определенное для всех достаточно малых положительных значений параметра ϵ и удовлетворяющее следующему условию: Решение $\tilde{x}^*(t)$ уравнения (6), соответствующее управлению U^*, в точке $t = t_1 + \epsilon\alpha$ может быть записано в виде

$$\tilde{x}(t_1) + \epsilon\tilde{\delta}(U^*) + \epsilon O(\epsilon),$$

где $\tilde{\delta}(U^*)$ не зависит от ϵ.

† В дальнейшем символ $O(\epsilon)$ используется как типическое обозначение для величин, стремящихся к нулю вместе с ϵ.

Семейство Δ вариаций одного и того же управления (3) будем называть *допустимым*, если наряду с каждыми двумя вариациями $U_1^*(\epsilon, \alpha_1)$ и $U_2^*(\epsilon, \alpha_2)$ в нем найдется при любых неотрицательных γ_1, γ_2 третья вариация $U^*(\epsilon, \gamma_1\alpha_1 + \gamma_2\alpha_2)$, удовлетворяющая условию

$$\tilde{\delta}(U^*) = \gamma_1 \tilde{\delta}(U_1^*) + \gamma_2 \tilde{\delta}(U_2^*). \tag{20}$$

Сконструируем теперь специальную вариацию

$$U^*(\epsilon, \alpha) = V(\epsilon, \alpha, \tau, \sigma, u^*),$$

зависящую от точки τ полуинтервала $t_0 < t \leqslant t_1$ (причем при $\alpha < 0$ должно быть $\tau < t_1$), неотрицательного числа σ и точки u^* пространства Ω. Вариацию $V(\epsilon, \alpha, \tau, \sigma, u^*)$ определим, задав функцию $u^*(t)$ соотношениями

$$u^*(t) = \left\{ \begin{array}{ll} u(t) \text{ при } t_0 \leqslant t \leqslant \tau - \epsilon\sigma, & \\ u^* \text{ при } \tau - \epsilon\sigma < t \leqslant \tau, & \\ u(t) \text{ при } \tau < t \leqslant t_1, & \\ u(t_1) \text{ при } t_1 < t \leqslant t_1 + \epsilon\alpha & (\text{если } \alpha > 0). \end{array} \right\} \tag{21}$$

Легко построить допустимое семейство Δ, содержащее все вариации типа (21). Это семейство Δ и будет положено в основу дальнейших построений.

Каждой вариации U^* допустимого семейства Δ соответствует вектор $\tilde{\delta}(U^*)$, выходящий из точки $\tilde{x}_1$. Совокупность всех этих векторов заполняет выпуклый конус (см. (20)) Π с вершиной в точке $\tilde{x}_1$. Пусть

$$\tilde{v} = (-1, 0, \ldots, 0)$$

— вектор, выходящий из точки $\tilde{x}_1$ и идущий в направлении отрицательной оси x^0 в пространстве S. Если конус Π содержит конец вектора $\tilde{v}$ в качестве внутренней точки, то управление U не является оптимальным. Пусть, в самом деле, $U^* \in \Delta$ — та вариация управления U, для которой

$$\tilde{\delta}(U^*) = \tilde{v}.$$

Обозначая через $\tilde{x}_1^*$ точку, в которую переходит точка $\tilde{x}_0$ при управлении U^*, получаем

$$\tilde{x}_1^* = \tilde{x}_1 + \epsilon\tilde{v} + \epsilon O(\epsilon).$$

Расщепляя это равенство на скалярное для нулевой координаты и векторное для остальных координат, получаем

$$L(U^*) = x_1^{0*} = x_1^0 - \epsilon + \epsilon O(\epsilon) = L(U) - \epsilon + \epsilon O(\epsilon),$$

$$\bar{x}_1^* = \bar{x}_1 + \epsilon O(\epsilon).$$

Таким образом, функционал уменьшен на величину порядка ϵ, а конец траектории отличается от желательного на величину $\epsilon O(\epsilon)$. Уточнение этого построения приводит нас к такой вариации $U^{\#} \in \Delta$, для которой конец $\tilde{x}_1^{\#}$ траектории $\tilde{x}^{\#}$ удовлетворяет точному равенству $\tilde{x}_1^{\#} = \tilde{x}_1 - \epsilon\tilde{v}$, а это противоречит предположению об оптимальности управления U.

Итак, предполагая, что управление U оптимально, мы будем считать в дальнейшем, что вектор $\tilde{v}$ не является внутренним для конуса П. Так как конус П выпуклый, то для него существует такая опорная плоскость Г, что сам конус лежит в одном полупространстве (замкнутом), определяемом этой плоскостью, а вектор $\tilde{v}$ — в другом. Обозначая через $\tilde{\psi}_1$ ковариантный вектор, соответствующий плоскости Г, выбранный с надлежащим знаком, мы получаем

$$(\tilde{\psi}_1, \tilde{\delta}(U^*)) \leqslant 0 \quad (U^* \in \Delta), \tag{22}$$

$$(\tilde{\psi}_1, \tilde{v}) \geqslant 0. \tag{23}$$

Из неравенства (23) сразу следует неравенство

$$\psi_{01} \leqslant 0. \tag{24}$$

Обозначим через $\tilde{\psi}(t)$ ковариантный вектор, получающийся перенесением вектора $\tilde{\psi}_1$, заданного в точке $\tilde{x}_1$, вдоль всей траектории $\tilde{x}(t)$. Покажем, что вектор-функция $\tilde{\psi}(t)$ и есть та, существование которой утверждается в теореме 1.

Пусть $V(\epsilon, 0, \tau, \sigma, u^*)$ — произвольная специальная вариация (см. (21)) семейства Δ и $\tilde{x}^*(t)$ — соответствующее ей решение уравнения (6). Простые вычисления дают

$$\tilde{x}^*(\tau) = \tilde{x}(\tau) + \epsilon[\tilde{f}(\tilde{x}(\tau), u^*) - \tilde{f}(\tilde{x}(\tau), u(\tau))] + \epsilon O(\epsilon).$$

Обозначим через $\tilde{y}(t)$ вектор, получающийся из вектора

$$\tilde{y}(\tau) = \tilde{f}(\tilde{x}(\tau), u^*) - \tilde{f}(\tilde{x}(\tau), u(\tau)),$$

заданного в точке $\tilde{x}(\tau)$, путем переноса вдоль траектории $\tilde{x}(t)$. Тогда мы имеем

$$\tilde{x}^*(t_1) = \tilde{x}_1 + \epsilon\tilde{y}(t_1) + \epsilon O(\epsilon).$$

Так как вектор $\tilde{y}(t_1)$ принадлежит конусу П, то в силу неравенства (22) получаем

$$(\tilde{\psi}_1, \tilde{y}(t_1)) \leqslant 0.$$

В силу (19) отсюда получаем

$$(\tilde{\psi}(\tau), \tilde{f}(\tilde{x}(\tau), u^*) - \tilde{f}(\tilde{x}(\tau), u(\tau))) \leqslant 0.$$

Переписывая последнее неравенство в обозначениях функции K, получаем неравенство

$$K(\tilde{\psi}(\tau), \tilde{x}(\tau), u(\tau)) \geqslant K(\tilde{\psi}(\tau), \tilde{x}(\tau), u^*),$$

эквивалентное равенству (11).

Пусть теперь $U^* = V(\epsilon, \alpha, \tau, 0, u^*)$. Решение уравнения (6), соответствующее этому управлению U^*, обозначим через $\tilde{x}^*(t)$. Мы имеем очевидно

$$\tilde{x}^*(t_1 + \alpha\epsilon) = \tilde{x}_1 + \epsilon\tilde{\delta}(U^*) + \epsilon O(\epsilon),$$

где
$$\tilde{\delta}(U^*) = \alpha\tilde{f}(\tilde{x}_1, u(t_1)).$$

Так как вектор $\tilde{\delta}(U^*)$ принадлежит конусу Π, то, в силу неравенства (22), получаем

$$\alpha(\tilde{\psi}_1, \tilde{f}(\tilde{x}_1, u(t_1))) \leqslant 0.$$

Ввиду того, что α есть произвольное действительное число, последнее неравенство возможно лишь при условии

$$(\tilde{\psi}_1, \tilde{f}(\tilde{x}_1, u(t_1))) = 0,$$

т.е. при
$$K(\tilde{\psi}(t_1), \tilde{x}(t_1), u(t_1)) = 0. \tag{25}$$

Докажем, наконец, что функция $K(t) = K(\tilde{\psi}(t), \tilde{x}(t), u(t))$ переменного t постоянна. Пусть $t_0 \leqslant t_2 < t_3 \leqslant t_1$, причем на полуинтервале $t_2 < t \leqslant t_3$ функция $u(t)$ непрерывна. Покажем, что на этом полуинтервале функция $K(t)$ постоянна. Возьмем две произвольные точки τ_0 и τ_1 полуинтервала $t_2 < t \leqslant t_3$. В силу (11) имеем

$$K(\tilde{\psi}(\tau_0), \tilde{x}(\tau_0), u(\tau_0)) - K(\tilde{\psi}(\tau_0), \tilde{x}(\tau_0), u(\tau_1)) \geqslant 0,$$

$$-K(\tilde{\psi}(\tau_1), \tilde{x}(\tau_1), u(\tau_1)) + K(\tilde{\psi}(\tau_1), \tilde{x}(\tau_1), u(\tau_0)) \leqslant 0.$$

Прибавляя к обеим частям этих неравенств разность $K(\tau_1) - K(\tau_0)$, получим неравенства

$$\begin{aligned} -K(\tilde{\psi}(\tau_0), \tilde{x}(\tau_0), u(\tau_0)) + K(\tilde{\psi}(\tau_1), \tilde{x}(\tau_1), u(\tau_0)) &\leqslant K(\tau_1) - K(\tau_0) \\ &\leqslant K(\tilde{\psi}(\tau_1), \tilde{x}(\tau_1), \tilde{u}(\tau_1)) - K(\tilde{\psi}(\tau_0), \tilde{x}(\tau_0), u(\tau_1)). \end{aligned} \tag{26}$$

Далее, так как функция $K(\tilde{\psi}(t), \tilde{x}(t), u(\tau))$ переменного t на отрезке $t_2 < t \leqslant t_3$ непрерывна и имеет производную, равную нулю в силу (7), (8), то крайние члены неравенств (26) исчезают. Таким образом, $K(\tau_1) - K(\tau_0) = 0$, т.е. $K(t) = \text{const}$ на полуинтервале $t_2 < t \leqslant t_3$.

Пусть теперь τ_0 — точка разрыва функции $u(t)$ и $\tau_1 > \tau_0$ —

близкая к τ_0 точка. Если $K(\tau_0) > K(\tau_1)$, то при достаточно малом $\tau_1-\tau_0$ мы имеем

$$K(\tilde{\psi}(\tau_1), \tilde{x}(\tau_1), u(\tau_0)) > K(\tilde{\psi}(\tau_1), \tilde{x}(\tau_1), u(\tau_1)),$$

что противоречит равенству (11). Если же $K(\tau_0) < K(\tau_1)$, то при достаточно малом $\tau_1-\tau_0$ мы имеем

$$K(\tilde{\psi}(\tau_0), \tilde{x}(\tau_0), u(\tau_1)) > K(\tilde{\psi}(\tau_0), \tilde{x}(\tau_0), u(\tau_0)),$$

что также противоречит равенству (11). Таким образом,

$$K(\tau_0) = K(\tau_0+0).$$

Из доказанного вытекает (см. (25)) справедливость равенства (12) на всем отрезке $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$, чем, в частности, доказано первое из соотношений (10). Второе из соотношений (10) следует из неравенства (24) в силу первого уравнения (9).

Итак, теорема 1 полностью доказана.

Замечание к теореме 1. Теорема 1 остается справедливой и в случае, если в качестве допустимых управляющих функций $u(t)$ рассматривать *измеримые* ограниченные функции; при этом равенство (11) для оптимального управления выполняется почти всюду.

4. Оптимальные в смысле быстродействия линейные управления

Важным для приложений и хорошо иллюстрирующим общие результаты примером является линейная управляемая система

$$\frac{dx^i}{dt} = \sum_{j=1}^{n} a^i_j x^j + \sum_{k=1}^{r} b^i_k u^k \quad (i = 1, \ldots, n),$$

где $\overline{u} = (u^1, \ldots, u^r)$ есть точка выпуклого замкнутого ограниченного многогранника Ω, расположенного в линейном пространстве E с координатами $u^1, \ldots, u^r$. В векторном виде эта система может быть записана так:

$$\frac{d\overline{x}}{dt} = A\overline{x} + B\overline{u}, \tag{27}$$

где A — линейный оператор в пространстве R переменных $x^1, \ldots, x^n$, а B — линейный оператор из пространства E в пространство R. Мы будем рассматривать здесь только задачу о минимализации функционала $\int_{t_0}^{t_1} dt$, т.е. задачу минимализации времени перехода.

Для получения некоторых результатов характера единственности мы будем налагать на управляемое уравнение (27) нижеследующие условия (A), (B), роль которых выяснится в дальнейшем:

(A) Пусть $\overline{w}$ — некоторый вектор, имеющий направление какого-либо из ребер многогранника Ω; тогда вектор $B\overline{w}$ не принадлежит никакому истинному подпространству пространства R, инвариантному относительно оператора A; таким образом, векторы

$$B\overline{w}, \quad AB\overline{w}, \quad \ldots, \quad A^{n-1}B\overline{w} \tag{28}$$

линейно независимы в пространстве R всякий раз, когда $\overline{w}$ есть вектор, имеющий направление одного из ребер многогранника Ω.

(B) Начало координат пространства E является внутренней точкой многогранника Ω.

Функция $H(\overline{\psi}, \overline{x}, \overline{u})$ в нашем случае имеет вид

$$H = (\overline{\psi}, A\overline{x}) + (\overline{\psi}, B\overline{u}), \tag{29}$$

а система (15) записывается в виде

$$\frac{d\psi_j}{dt} = -\sum_{i=1}^{n} a_j^i \psi_i \quad (j = 1, \ldots, n),$$

или, в векторной форме,

$$\frac{d\overline{\psi}}{dt} = -A^*\overline{\psi}. \tag{30}$$

Очевидно, что функция H, рассматриваемая как функция переменного $\overline{u} \in \Omega$ достигает максимума одновременно с функцией

$$(\overline{\psi}, B\overline{u}).$$

В соответствии с этим обозначим через $P(\overline{\psi})$ максимум функции $(\overline{\psi}, B\overline{u})$, рассматриваемой как функция переменного $\overline{u} \in \Omega$. Из теоремы 2 следует, таким образом, что если

$$U = (\overline{u}(t), t_0, t_1, \overline{x}_0)$$

есть оптимальное управление уравнения (27), то существует такое решение $\overline{\psi}(t)$ уравнения (30), что

$$(\overline{\psi}(t), B\overline{u}(t)) = P(\overline{\psi}(t)). \tag{31}$$

Так как уравнение (30) не содержит неизвестных функций $\overline{x}(t)$ и $\overline{u}(t)$, то все решения уравнения (30) легко могут быть найдены, и тем самым по условию (31) легко могут быть найдены и все оптимальные управления $\overline{u}(t)$ уравнения (27). Вопрос о том, насколько однозначно условие (31) определяет управление $\overline{u}(t)$ через функцию $\overline{\psi}(t)$, решается нижеследующей теоремой:

Теорема 3. *Если выполнено условие* (A), *то при заданном нетривиальном решении* $\overline{\psi}(t)$ *уравнения* (30) *соотношение* (31) *однозначно* *определяет управляющую функцию $\overline{u}(t)$; при этом оказывается, что функция $\overline{u}(t)$ кусочно постоянна и ее значениями являются лишь вершины многогранника Ω.*

Доказательство. Так как функция

$$(\overline{\psi}(t), B\overline{u}), \tag{32}$$

рассматриваемая как функция вектора $\overline{u}$, линейна, то она либо постоянна, либо достигает своего максимума на границе многогранника Ω. Это же соображение применимо и к каждой грани многогранника Ω. Таким образом, либо функция (32) достигает своего максимума лишь в одной вершине многогранника Ω, либо же достигает его на целой грани многогранника Ω. Покажем, что в силу условия (A) последнее возможно лишь для конечного числа значений t. Допустим, что функция (32) достигает своего максимума (и, следовательно, постоянна) на некоторой грани Γ многогранника Ω. Пусть $\overline{w}$ — вектор, имеющий направление некоторого ребра грани Γ. В силу постоянства функции (32) на грани Γ имеем

$$(\overline{\psi}(t), B\overline{w}) = 0.$$

Если бы это соотношение имело место для бесконечного множества значений переменного t, то оно выполнялось бы тождественно по t и, дифференцируя его последовательно по t, мы получили бы

$$\left.\begin{aligned} (\overline{\psi}(t), B\overline{w}) &= 0, \\ (A^*\overline{\psi}(t), B\overline{w}) = (\overline{\psi}(t), AB\overline{w}) &= 0, \\ (A^{*2}\overline{\psi}(t), B\overline{w}) = (\overline{\psi}(t), A^2B\overline{w}) &= 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots & \\ (A^{*n-1}\overline{\psi}(t), B\overline{w}) = (\overline{\psi}(t), A^{n-1}B\overline{w}) &= 0, \end{aligned}\right\} \tag{33}$$

а так как в силу условия (A) векторы (28) образуют базис пространства R, то из соотношений (33) следовало бы $\overline{\psi}(t) \equiv 0$, что противоречит предположению о нетривиальности решения $\overline{\psi}(t)$.

5. Теоремы единственности для линейных управлений

Решим уравнение (27) как неоднородное методом вариации постоянных. Для этого обозначим через

$$\overline{\phi}_1(t), \quad \dots, \quad \overline{\phi}_n(t) \tag{34}$$

фундаментальную систему решений однородного уравнения

$$\frac{d\overline{x}}{dt} = A\overline{x},$$

удовлетворяющую начальным условиям $\phi^i_j(t_0) = \delta^i_j$, а через

$$\overline{\psi}^1(t), \quad \ldots, \quad \overline{\psi}^n(t)$$

— фундаментальную систему решений однородного уравнения (30), удовлетворяющую начальным $\psi^j_i(t_0) = \delta^j_i$. Будем искать общее решение уравнения (27) в виде

$$\overline{x}(t) = \sum_{i=1}^{n} \overline{\phi}_i(t)\, c^i(t).$$

Подставляя это решение в уравнение (27), получим

$$\sum_{i=1}^{n} \overline{\phi}_i(t) \frac{dc^i(t)}{dt} = B\overline{u}(t).$$

Умножая последнее соотношение скалярно на $\overline{\psi}^j$ и учитывая, что $(\overline{\psi}^j(t), \overline{\phi}_i(t)) = \delta^j_i$, получаем

$$\frac{dc^i(t)}{dt} = (\overline{\psi}^i(t), B\overline{u}(t)). \tag{35}$$

Таким образом, решение уравнения (27) при произвольном управлении $U = (\overline{u}(t), t_0, t_1, \overline{x}_0)$ записывается в виде

$$\overline{x}(t) = \sum_{i=1}^{n} \overline{\phi}_i(t) \left(x^i_0 + \int_{t_0}^{t} (\overline{\psi}^i(t), B\overline{u}(t))\, dt \right). \tag{36}$$

Теорема 4. *Допустим, что уравнение* (27) *удовлетворяет условию* (A), *и пусть*

$$U_1 = (\overline{u}_1(t), t_0, t_1, \overline{x}_0), \quad U_2 = (\overline{u}_2(t), t_0, t_2, \overline{x}_0)$$

— *два оптимальных управления уравнения* (27), *переводящие точку* $\overline{x}_0$ *в одну и ту же точку* $\overline{x}_1$; *тогда эти управления совпадают*

$$t_1 = t_2, \quad \overline{u}_1(t) \equiv \overline{u}_2(t).$$

Доказательство. Так как оба управления U_1 и U_2 оптимальны, то $t_1 = t_2$, ибо если бы было, например, $t_1 < t_2$, то управление U_2 не было бы оптимальным. Мы имеем, таким образом, равенство

$$\overline{x}_1 = \sum_{i=1}^{n} \overline{\phi}_i(t_1) \left(x^i_0 + \int_{t_0}^{t_1} (\overline{\psi}^i(t), B\overline{u}_1(t))\, dt \right)$$
$$= \sum_{i=1}^{n} \overline{\phi}_i(t) \left(x^i_0 + \int_{t_0}^{t_1} (\overline{\psi}^i(t), B\overline{u}_2(t))\, dt \right).$$

Так как векторы $\overline{\phi}^1(t_1), \ldots, \overline{\phi}^n(t_1)$ линейно независимы, то из последнего равенства следует

$$\int_{t_0}^{t_1} (\overline{\psi}^i(t), B\overline{u}_1(t))\, dt = \int_{t_0}^{t_1} (\overline{\psi}^i(t), B\overline{u}_2(t))\, dt \quad (i = 1, \ldots, n). \tag{37}$$

Оптимальному управлению U_1 в силу теоремы 3 соответствует вектор-функция $\overline{\psi}(t)$, являющаяся решением уравнения (30). Начальное значение этой функции при $t = t_0$ обозначим через

$$\overline{\psi}_0 = (\psi_{10}, \ldots, \psi_{n0});$$

тогда решение $\overline{\psi}(t)$ можно записать в виде

$$\overline{\psi}(t) = \sum_{i=1}^{n} \psi_{i0} \overline{\psi}^i(t). \tag{38}$$

Умножая соотношение (37) на ψ_{i0} и суммируя по i, получаем

$$\int_{t_0}^{t} (\overline{\psi}(t), B\overline{u}_1(t))\, dt = \int_{t_0}^{t} (\overline{\psi}(t), B\overline{u}_2(t))\, dt. \tag{39}$$

В силу теоремы 3 функция $\overline{u}_1(t)$ удовлетворяет условию

$$(\overline{\psi}(t), B\overline{u}_1(t)) = P(\overline{\psi}(t))$$

и определяется этим условием однозначно. Если бы функция $\overline{u}_2(t)$ не совпадала с функцией $\overline{u}_1(t)$, то она не удовлетворяла бы условию

$$(\overline{\psi}(t), B\overline{u}_2(t)) \equiv P(\overline{\psi}(t)),$$

и потому функция $(\overline{\psi}(t), B\overline{u}_2(t))$, нигде не превосходя функции $(\overline{\psi}(t), B\overline{u}_1(t))$, на некотором интервале была бы меньше ее. Таким образом, если на отрезке $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$ не имеет места тождество $\overline{u}_1(t) \equiv \overline{u}_2(t)$, то равенство (39) невозможно.

Итак, теорема 4 доказана.

Будем называть управление

$$U = (\overline{u}(t), t_0, t_1, \overline{x}_0)$$

экстремальным, если оно удовлетворяет условию (31), где $\overline{\psi}(t)$ — некоторое нетривиальное решение уравнения (30).

Для нахождения всех оптимальных управлений, переводящих точку $\overline{x}_0$ в точку $\overline{x}_1$, можно найти сперва все экстремальные управления, переводящие точку $\overline{x}_0$ в точку $\overline{x}_1$, а затем выбрать из их числа то единственное, которое осуществляет этот переход в кратчайшее время. Возникает вопрос, может ли существовать несколько экстремальных управлений, переводящих точку $\overline{x}_0$ в точку $\overline{x}_1$? Вообще говоря, их может существовать несколько. Нижеследующая теорема указывает важный случай единственности.

Теорема 5. *Допустим, что уравнение* (27) *удовлетворяет условиям* (A) *и* (B), *и пусть*

$$U_1 = (\overline{u}_1(t), t_0, t_1, \overline{x}_0), \quad U_2 = (\overline{u}_2(t), t_0, t_2, \overline{x}_0)$$

— два экстремальных управления, переводящих точку $\overline{x}_0$ в начало координат $x_1 = 0$ пространства R; тогда управления U_1 и U_2 согпадают

$$t_1 = t_2, \quad \overline{u}_1(t) \equiv \overline{u}_2(t).$$

Доказательство. По предположению, мы имеем равенства

$$\left.\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n} \overline{\phi}_i(t_1)\left(x_0^i + \int_{t_0}^{t_1} (\overline{\psi}^i(t), B\overline{u}_1(t))\,dt\right) = 0, \\ \sum_{i=1}^{n} \overline{\phi}_i(t_2)\left(x_0^i + \int_{t_0}^{t_2} (\overline{\psi}^i(t), B\overline{u}_2(t))\,dt\right) = 0. \end{aligned}\right\} \tag{40}$$

Так как векторы (34) линейно независимы при любом t, то из равенств (40) следует равенство

$$-x_0^i = \int_{t_0}^{t_1} (\overline{\psi}^i(t), B\overline{u}_1(t))\,dt = \int_{t_0}^{t_2} (\overline{\psi}^i(t), B\overline{u}_2(t))\,dt. \tag{41}$$

Допустим для определенности, что $t_1 > t_2$, и пусть $\overline{\psi}(t)$ — то решение уравнения (30), для которого имеет место тождество

$$(\overline{\psi}(t), B\overline{u}_1(t)) = P(\overline{\psi}(t)),$$

определяющее функцию $\overline{u}_1(t)$. Как и при доказательстве теоремы 4, функцию $\overline{\psi}(t)$ запишем в виде (38). Умножим соотношение (41) на ψ_{i0} и просуммируем по i. Мы получим

$$\int_{t_0}^{t_1} (\overline{\psi}(t), B\overline{u}_1(t))\,dt = \int_{t_0}^{t_2} (\overline{\psi}(t), B\overline{u}_2(t))\,dt.$$

Заметим теперь, что из условия (B) следует

$$P(\overline{\psi}(t)) \geqslant 0. \tag{42}$$

В самом деле, так как ноль является внутренней точкой выпуклого тела Ω, то функция $(\overline{\psi}(t), B\overline{u})$, как функция переменного $\overline{u}$, либо тождественно равна нулю, либо может принимать как отрицательные, так и положительные значения.

В силу (42) мы имеем неравенство

$$\int_{t_0}^{t_2} (\overline{\psi}(t), B\overline{u}_1(t))\,dt \leqslant \int_{t_0}^{t_2} (\overline{\psi}(t), B\overline{u}_2(t))\,dt.$$

Отсюда так же, как и при доказательстве теоремы 4, получаем

$$\overline{u}_1(t) \equiv \overline{u}_2(t) \quad \text{при} \quad t_0 \leqslant t \leqslant t_2.$$

Далее, так как равенство $P(\overline{\psi}(t)) = 0$ может иметь место только для отдельных значений t, то должно быть $t_1 = t_2$.

Итак, теорема 5 доказана.

6. Существование оптимальных управлений для линейных систем

Теорема 6. *Если существует хотя бы одно управление уравнения* (27), *переводящее точку* $\overline{x}_0$ *в точку* $\overline{x}_1$, *то существует и оптимальное управление уравнения* (27), *переводящее точку* $\overline{x}_0$ *в точку* $\overline{x}_1$.

Доказательство. Совокупность всех управлений вида

$$U = (\overline{u}(t), 0, t, \overline{x}_0), \tag{43}$$

переводящих точку $\overline{x}_0$ в точку $\overline{x}_1$, обозначим через $\Delta_{\overline{x}_0, \overline{x}_1}$. Каждому управлению (43) соответствует время перехода t. Нижнюю грань всех таких времен при $U \in \Delta_{\overline{x}_0, \overline{x}_1}$ обозначим через t^* и докажем, что существует управление $U^* = (u^*(t), 0, t^*, \overline{x}_0)$, переводящее точку $\overline{x}_0$ в точку $\overline{x}_1$.

Выберем из множества $\Delta_{\overline{x}_0, \overline{x}_1}$ бесконечную последовательность управлений

$$U_k = (\overline{u}_k(t), 0, t_k, \overline{x}_0) \quad (k = 1, 2, \dots),$$

для которой имеет место равенство

$$\lim_{k\to\infty} t_k = t^*.$$

Очевидно, имеет место равенство

$$\lim_{k\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \overline{\phi}_i(t^*) \left(x_0^i + \int_0^{t^*} (\overline{\psi}^i(t), B\overline{u}_k(t))\, dt\right) = \overline{x}_1. \tag{44}$$

Рассмотрим гильбертово пространство L_2 всех измеримых функций с интегрируемым квадратом, заданных на отрезке $0 \leqslant t \leqslant t^*$. Управление $\overline{u}_k(t)$ есть вектор-функция; i-ю координату этой функции обозначим через $u_k^i(t)$. Функция $u_k^i(t)$, рассматриваемая на отрезке $0 \leqslant t \leqslant t^*$, принадлежит пространству L_2. Совокупность всех функций $u_k^i(t)$, $k = 1, 2, \dots$, очевидно принадлежит некоторому шару пространства L_2, и потому из нее можно выбрать слабо сходящуюся подпоследовательность. Мы будем просто считать, что сама последовательность

$$u_1^i(t), \quad u_2^i(t), \quad \dots, \quad u_k^i(t), \quad \dots \tag{45}$$

слабо сходится к некоторой функции $u^i(t)$, $i = 1, \dots, r$.

Докажем, что вектор-функция

$$\overline{u}^*(t) = (u^1(t), \dots, u^r(t))$$

почти для всех значений t удовлетворяет условию

$$\bar{u}^*(t) \in \Omega.$$

Пусть

$$b(\bar{u}) = \sum_{i=1}^{r} b_i u^i = b$$

— уравнение гиперплоскости, несущей одну из $(r-1)$-мерных граней многоранника Ω, причем многогранник Ω расположен в полупространстве

$$b(\bar{u}) \leqslant b.$$

Пусть m — множество всех значений t отрезка $[0, t^*]$, для которых $b(\bar{u}^*(t)) > b$, и $v(t)$ — характеристическая функция множества m: Мы имеем тогда

$$\lim_{k\to\infty} \int_0^{t^*} v(t)\,[b(\bar{u}^*(t)) - b(\bar{u}_k(t))]\,dt = 0,$$

в силу слабой сходимости последовательностей (45), и так как $b(\bar{u}^*(t)) - b(u_k(t)) > 0$ на множестве m, то $\operatorname{mes}(m) = 0$.

Таким образом, изменяя вектор-функцию $\bar{u}^*(t)$ на множестве меры нуль, мы получим новую функцию, которую снова обозначим через $\bar{u}^*(t)$, удовлетворяющую условию $\bar{u}^*(t) \in \Omega, 0 \leqslant t \leqslant t^*$.

Из соотношения (44) в силу слабой сходимости последовательностей (45) следует

$$\sum_{i=1}^{n} \bar{\phi}_i(t^*) \left(x_0^i + \int_0^{t^*} \bar{\psi}(^i(t), B\bar{u}^*(t))\,dt \right) = \bar{x}_1.$$

Таким образом, $U^* = (\bar{u}^*(t), 0, t^*, \bar{x}_0)$ является измеримым оптимальным управлением, переводящим точку $\bar{x}_0$ в точку $\bar{x}_1$.

В силу замечания к теореме 1, изменяя управление $\bar{u}^*(t)$ на множестве меры нуль, мы можем превратить его в управление, удовлетворяющее принципу максимума, т.е. в нашем случае — условию

$$(\bar{\psi}(t), B\bar{u}^*(t)) = P(\bar{\psi}(t)).$$

Из этого условия, очевидно, вытекает кусочная непрерывность функции $\bar{u}^*(t)$.

Итак, теорема 6 доказана.

Теорема 7. *Если уравнение* (27) *удовлетворяет условиям* (A) *и* (B) *и оператор A устойчив, т.е. все его собственные значения имеют отрицательные действительные части, то для каждой точки $\bar{x}_0 \in R$ существует оптимальное управление, переводящее эту точку в начало координат $0 \in R$.*

Доказательство. Докажем прежде всего, что существует окрестность V точки 0 в R, каждая точка $\bar{x}_0$ которой может быть при помощи некоторого управления переведена в 0.

Выберем в Ω такой вектор $\bar{v}$, чтобы вектор $-\bar{v}$ принадлежал Ω и чтобы вектор

$$\bar{b} = B\bar{v}$$

не принадлежал ни к какому истинному подпространству пространства R, инвариантному относительно оператора A. В силу условий (A) и (B) такой вектор $\bar{v}$ существует. При достаточно малом положительном ϵ операторы A и $e^{-\epsilon A}$ имеют совпадающие инвариантные подпространства, и потому векторы

$$e^{-\epsilon A}\bar{b}, \quad e^{-2\epsilon A}\bar{b}, \quad \ldots, \quad e^{-n\epsilon A}\bar{b}$$

линейно независимы.

Пусть $\chi(t)$ — произвольная действительная функция, определенная на некотором отрезке $0 \leqslant t \leqslant t_1$ и не превосходящая по модулю единицы; тогда

$$U = (\bar{v}\chi(t), 0, t_1, \bar{x}_0)$$

есть управление уравнения (27) и управление это переводит точку $\bar{x}_0$ в точку (см. (36))

$$\bar{x}_1 = e^{t_1 A}\left(\bar{x}_0 + \int_0^{t_1} e^{-tA}\bar{b}\chi(t)\,dt\right). \tag{46}$$

Выберем теперь функцию $\chi(t)$ зависящей от параметров $\xi^1, \ldots, \xi^n$ таким образом, чтобы точка (46) — обозначим ее через $\bar{x}_1(\bar{x}_0;\, \xi^1, \ldots, \xi^n)$ — удовлетворяла следующим условиям:

$$\bar{x}_1(0;\, 0, \ldots, 0) = 0,$$

а функциональный определитель

$$\left.\frac{\partial(x_1^1, \ldots, x_1^n)}{\partial(\xi^1, \ldots, \xi^n)}\right|_{x_0=0,\, \xi^1=0,\, \ldots,\, \xi^n=0}$$

отличен от нуля. Построив такую функцию $\chi(t)$, мы докажем, что уравнение $\bar{x}_1(\bar{x}_0;\, \xi^1, \ldots, \xi^n) = 0$ разрешимо относительно $\xi^1, \ldots, \xi^n$ для всех значений $\bar{x}_0$, принадлежащих некоторой окрестности V начала 0.

Определим прежде всего функцию $\sigma(t, \tau, \xi)$ переменного t, $0 \leqslant t \leqslant t_1$, где $0 < \tau < t_1$, а ξ — параметр. Функция $\sigma(t, \tau, \xi)$, как функция переменного t, равна нулю всюду вне интервала $[\tau, \tau + \xi]$, а на этом интервале она равна $\operatorname{sign} \xi$. Положим теперь

$$\chi(t) = \sum_{k=1}^{n} \sigma(t, k\epsilon, \xi^k).$$

Простые вычисления показывают, что точка $\overline{x}_1(\overline{x}_0; \xi^1, \ldots, \xi^n)$ при этом выборе функции $\chi(t)$ удовлетворяет высказанным условиям.

Пусть теперь $\overline{x}_0$ — произвольная точка пространства R. Пусть она сперва двигается при управлении $\overline{u}(t) \equiv 0$. Так как все собственные значения оператора A имеют отрицательные действительные части, то по истечении некоторого времени точка придет в окрестность V, после чего ее, по доказанному, можно перевести в начало координат. Отсюда, в силу теоремы 6, вытекает существование *оптимального* управления, переводящего точку $\overline{x}_0$ в начало.

Итак, теорема 7 доказана.

7. Синтез линейного оптимального управления

Задача *синтезирования* оптимального управления имеет смысл для произвольной управляемой системы (1), однако здесь я буду трактовать ее только для линейной управляемой системы (27), удовлетворяющей условиям (A) и (B), с устойчивым оператором A. Для такой системы имеют место теоремы существования и единственности (теоремы 7 и 5), благодаря чему задача синтеза является в принципе решенной. Приводимые здесь соображения дают конструктивный метод решения задачи. Осуществление этого метода в каждом конкретном случае требует, однако, ряда построений. Синтезирование оптимального управления линейной системы (27) совершенно другим методом было осуществлено до сих пор лишь для случая одного управляющего параметра (т.е. при $r = 1$) Фельдбаумом[6] при действительных корнях оператора A и Бушоу[7] для случая, когда $n = 2$, а собственные значения оператора A комплексны.

Будем считать, что уравнение (27) удовлетворяет условиям (A) и (B) и имеет устойчивый оператор A. Тогда для каждой точки $\overline{x}_0 \in R$ существует (и притом только одно) оптимальное управление

$$U_{\overline{x}_0} = (\overline{u}_{\overline{x}_0}(t), t_0, t_1, \overline{x}_0), \tag{47}$$

переводящее точку $\overline{x}_0$ в начало координат $0 \in R$. Единственность имеет место конечно с точностью до сдвига времени (см. замечание 2 к постановке задачи). Величина $\overline{u}_{\overline{x}_0}(t_0)$ зависит, таким образом, только от точки $\overline{x}_0$, а не от случайно выбранного начала отсчета времени t_0, и потому можно положить

$$\overline{v}(\overline{x}_0) = \overline{u}_{\overline{x}_0}(t_0).$$

Пусть $\overline{x}(t)$ — решение уравнения (27), соответствующее управлению

(47); тогда $U_{\bar{x}(\tau)} = (\bar{u}_{\bar{x}_0}(t), \tau, t_1, \bar{x}(\tau))$ (см. замечание 1 к постановке задачи), и потому

$$\bar{u}_{\bar{x}_0}(\tau) = \bar{v}(\bar{x}(\tau)).$$

Таким образом,

$$\frac{d}{dt}\bar{x}(t) = A\bar{x}(t) + B\bar{v}(\bar{x}(t)),$$

и мы видим, что решение уравнения

$$\frac{d\bar{x}}{dt} = A\bar{x} + B\bar{v}(\bar{x}) \tag{48}$$

с произвольным начальным условием $\bar{x}(t_0) = \bar{x}_0$ дает закон оптимального движения точки $\bar{x}_0$ в начало координат. В этом смысле функция $\bar{v}(\bar{x})$ *синтезирует* оптимальное управление, переводящее любую точку $\bar{x}_0$ в начало.

Дадим теперь метод построения функции $\bar{v}(\bar{x})$. Пусть $\bar{\psi}(t)$ — то решение уравнения (30), которое в силу теоремы 2 соответствует управлению (47), так что

$$\frac{d\bar{\psi}(t)}{dt} = -A^*\bar{\psi}(t), \tag{49}$$

а функция $\bar{u}_{\bar{x}_0}(t)$ определяется из уравнения

$$(\bar{\psi}(t), B\bar{u}_{\bar{x}_0}(t)) = P(\bar{\psi}(t)). \tag{50}$$

Пусть, далее, $\bar{x}(t)$ — решение уравнения (27), удовлетворяющее начальному условию

$$\bar{x}(t_0) = \bar{x}_0 \tag{51}$$

и конечному условию

$$\bar{x}(t_1) = 0, \tag{52}$$

так что

$$\frac{d\bar{x}(t)}{dt} = A\bar{x}(t) + B\bar{u}_{\bar{x}_0}(t). \tag{53}$$

Тогда функция $\bar{v}(\bar{x})$ удовлетворяет условию

$$(\bar{\psi}(t_0), B\bar{v}(\bar{x}(t_0))) = P(\bar{\psi}(t_0)). \tag{54}$$

Из теорем существования и единственности следует, что существует, и притом только одна (с точностью до сдвига времени), пара функций $\bar{u}_{\bar{x}_0}(t), \bar{x}(t)$, заданных на отрезке $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$ и удовлетворяющих условиям (49)–(53). Ввиду возможности сдвига времени, числа t_0 и t_1 этими условиями не определены однозначно, а число $t_1 - t_0$ определено.

Совершенно не ясно, как искать функции $\bar{u}_{\bar{x}_0}(t), \bar{x}(t)$, удовлетворяющие всем условиям (49)–(53), но легко найти все функции $\bar{u}_{\bar{x}_0}(t), \bar{x}(t)$, удовлетворяющие лишь условиям (49), (50), (52), (53).

Для этого поступим следующим образом: Ввиду возможности произвольного сдвига времени, зафиксируем число t_1, положив $t_1 = 0$. Пусть теперь $\overline{\chi}$ — произвольный ковариантный вектор, отличный от нуля, и $\overline{\psi}(t, \overline{\chi})$ — решение уравнения (49), удовлетворяющее начальному условию

$$\overline{\psi}(0, \overline{\chi}) = \overline{\chi}$$

и определенное при $t \leqslant 0$. Определим, далее, функцию $\overline{u}(t, \overline{\chi})$ из условия

$$(\overline{\psi}(t, \overline{\chi}), B\overline{u}(t, \overline{\chi})) = P(\overline{\psi}(t, \overline{\chi})) \quad (t \leqslant 0),$$

и функцию $\overline{x}(t, \overline{\chi})$ из уравнения

$$\frac{d\overline{x}(t, \overline{\chi})}{dt} = A\overline{x}(t, \overline{\chi}) + B\overline{u}(t, \overline{\chi}).$$

Согласно сказанному выше, функция $\overline{v}(\overline{x})$ определится соотношением

$$(\overline{\psi}(t, \overline{\chi}), B\overline{v}(\overline{x}(t, \overline{\chi}))) = P(\overline{\psi}(t, \overline{\chi})). \tag{55}$$

Из теоремы существования (теорема 7) следует, что точка $\overline{x}(t, \overline{\chi})$ описывает все пространство R, когда t пробегает отрицательные значения, а вектор $\overline{\chi}$ меняется произвольно. Таким образом, соотношение (55) определяет значение функции $\overline{v}(\overline{x})$ для произвольной точки $\overline{x}$ пространства R.

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Болтянский, В. Г., Гамкрелидзе, Р. В. и Понтрягин, Л. С. К теории оптимальных процессов. *ДАН*, 110, no. 1, 7–10 (1956).

[2] Гамкрелидзе, Р. В. К теории оптимальных процессов в линейных системах. *ДАН*, 116, no. 1, 9–11 (1957).

[3] Болтянский, В. Г. Принцип максимума в теории оптимальных процессов. *ДАН*, 119, no. 6 (1958).

[4] Блисс, Г. А. *Лекции по вариационному исчислению*. ИЛ, М., 1950.

[5] McShane, E. J.. On multipliers for Lagrange problems. *Amer. J. Math.* 61, 809–819 (1939).

[6] Фельдбаум, А. А. *Автомат. и Телемех.* 16, no. 2, 129 (1955).

[7] Bushaw, D. W. Experimental towing tank. *Stevens Institute of Technology, Report 469*. Hoboken, N.Y., 1953.