О НЕКОТОРЫХ ПОГРАНИЧНЫХ ВОПРОСАХ АЛГЕБРЫ И ЛОГИКИ

А. И. МАЛЬЦЕВ

В настоящем докладе мы хотим сделать обзор некоторых резуль-атов и проблем, относящихся к математической дисциплине, воз-икшей в последние десятилетия на рубеже между математической огикой и классической абстрактной алгеброй и пока не получив-ıей общепринятого наименования. Наиболее часто она называется еорией моделей и универсальной алгеб-ой, некоторые же говорят об общей алгебре.

Основными математическими структурами, изучаемыми в этой бщей алгебре, являются алгебраические системы, т. е. нсамбли, состоящие из какого-то непустого множества и некоторого исла определенных на нем операций и отношений различных онечных арностей. Типичным примером алгебраической истемы может служить упорядоченное кольцо $\langle A; -, \cdot, \leqslant; \tau\rangle$, остоящее из основного множества A элементов кольца, называемо-э также его носителем, символов $-$, $\cdot$, бинарных операций ычитания и умножения, символа $\leqslant$ бинарного отношения поряд-а и отображения τ, ставящего упомянутым символам $-$, $\cdot$, $\leqslant$ те онкретные операции и отношение, которые служат значениями имволов в данном конкретном кольце. Совокупность символов -, $\cdot$, $\leqslant$, рассматриваемых вместе с их арностями 2, 2, 2, называет-я сигнатурой упорядоченного кольца.

В общем случае сигнатурой называется пара Ω_f, Ω_p епересекающихся множеств и отображение α: $\Omega_f \cup \Omega_p \to N$ объе-инения их в множество натуральных чисел $N = \{0, 1, 2, \ldots\}$. лементы Ω_f называются функциональными, а элементы из Ω_p — редикатными сигнатурными символами. В дальнейшем сигнатура множество всех сигнатурных символов будут обозначаться одной той же буквой Ω. Отвечающее произвольному сигнатурному сим-олу $\omega \in \Omega$ натуральное число $\alpha\omega$ называется арностью сим-ола ω.

Алгебраической системой данной сигнатуры Ω называется нсамбль

$$\mathbf{A} = \langle A; \Omega; \tau\rangle,$$

остоящий из непустого множества A, сигнатуры Ω и отображения τ, авящего в соответствие каждому $f \in \Omega_f$ некоторую функцию $:A^{\alpha f} \to A$ и каждому предикатному сигнатурному символу $p \in \Omega_p$.

некоторый предикат $p^{\tau} \subseteq A^{\alpha p}$. Функции f^{τ} и предикаты p^{τ} называются значениями соответствующих сигнатурных символов f, p в системе **A**, а отображение τ называется означивающим отображением или просто означиванием. Символ означивания τ при записи алгебраических систем обычно опускается и вместо $\langle A; \Omega; \tau\rangle$ пишется $\langle A; \Omega\rangle$. Алгебраическая система называется алгеброй, если ее сигнатура не содержит предикатных символов, и называется моделью, если ее сигнатура не содержит функциональных символов. Алгебраическая система **A** конечна, если конечно ее основное множество A.

Обычным путем определяются понятия подсистемы данной алгебраической системы и гомоморфного и изоморфного отображений одной алгебраической системы в произвольную систему той же сигнатуры. Произвольная совокупность алгебраических систем одной и той же сигнатуры Ω называется классом систем сигнатуры Ω. Класс систем называется абстрактным, если он вместе с каждой своей системой содержит и все ей изоморфные.

Идея о необходимости изучения свойств алгебр произвольной сигнатуры возникла еще в конце прошлого века. Однако в течение более трех последующих десятилетий она не получила сколько-нибудь существенного развития. Вместо этого, с одной стороны, были созданы глубокие теории частных классов алгебр—полей, колец, групп, решеток, а с другой стороны, в математической логике были проведены широкие исследования простейших формальных языков. Во второй половине 30-х годов было замечено, что объединение идей алгебраической системы и языка 1-й ступени позволяет сформулировать предложения, специализации которых для классических систем — полей, групп — не только дают нетривиальные уже известные теоремы теорий групп и полей, но дают ответ и на некоторые в то время открытые вопросы общей теории групп. Так на стыке классической абстрактной алгебры и математической логики возникла новая дисциплина — общая алгебра, в которой в отличие от классической алгебры видное место заняли проблемы зависимостей между структурными свойствами классов алгебр и свойствами формальных языков, на которых могут быть определены упомянутые классы. Полного развития исследования по общей алгебре достигли в послевоенные годы. Особенно значительные законченные результаты были получены в конце 50-х и 60-х годов. Достаточно назвать создание теории фильтрованных произведений и теории полных классов. Подробные обзоры этих теорий уже появились в журналах, и потому в дальнейшем мы будем рассматривать лишь другие направления исследований.

Напомним еще несколько понятий. Пусть задана какая-нибудь сигнатура Ω. Комбинируя по известным правилам сигнатурные символы, скобки, символы $x_1, x_2, \ldots$ предметных переменных, имволы логических связок $\&$, $\bigvee$, $\rightarrow$, $\neg$, $=$ и кванторы

$\forall x_i$ — *«для каждого элемента x_i носителя A системы»*,

$\exists x_i$ — *«существует такой элемент $x_i \in A$, что»*,

олучим конечные последовательности символов, называемые *фор-мулами 1-й ступени* сигнатуры Ω. Например, последовательности

$$(\forall x_1)(\forall x_2)(x_1+x_2=x_2+x_1), \tag{1}$$

$$(\forall x_1)(\exists x_2)(x_2 \leqslant x_1 \; \& \; x_1 \neq x_2) \tag{2}$$

вляются формулами 1-й ступени любой сигнатуры, включающей наки $+$, $\leqslant$. Если теперь заданы какая-нибудь алгебраическая истема $\mathbf{A}$ сигнатуры Ω и формула $\mathscr{A}$ той же сигнатуры, то в соответствии с содержательным смыслом символов, участвующих в записи формулы $\mathscr{A}$, определяется истинность или ложность формулы $\mathscr{A}$ системе $\mathbf{A}$. Например, если

$$\mathbf{A} = \langle\{0, 1, 2, \ldots\}; +, \leqslant\rangle,$$

де символы $+$, $\leqslant$ имеют обычные арифметические *значения*, то ормула (2) ложна, а формула (1) истинна в $\mathbf{A}$.

Символом $\mathscr{E}$ условимся обозначать класс всевозможных формул -ступени любой сигнатуры, а символом $\mathscr{E}_\Omega$ будем обозначать множество формул 1-й ступени, сигнатура которых содержится в Ω. омимо класса $\mathscr{E}$ далее нам потребуются некоторые подклассы ормул специального вида. Напомним, что формулы, в записи которых участвуют лишь функциональные символы и символы предметных переменных, называются термами (полиномами) от указанных переменных. Например, если $+$, $\wedge$ суть бинарные функциональные символы, то выражения

$$x+(x \wedge y), \qquad (x+x)+(x+x)$$

вляются термами от x, y сигнатуры $\{+, \wedge\}$.

Введем теперь следующие специальные классы формул:

$\mathscr{I}$ — *класс тождеств*, т. е. формул вида

$$(\forall x_1) \ldots (\forall x_n) P(f_1, \ldots, f_s),$$

де P—какой-нибудь предикатный сигнатурный символ или знак авенства, а $f_1, \ldots, f_s$ — термы от $x_1, \ldots, x_n$;

$\mathscr{Q}$ — *класс квазитождеств*, т. е. формул вида

$$\forall x_1) \ldots (\forall x_n)(P_1(f_1, \ldots, f_r) \& \ldots \& P_k(h_1, \ldots, h_s) \rightarrow P(l_1, \ldots, l_t)),$$

де $P_1, \ldots, P_k$, P — некоторые предикатные сигнатурные симво-ы или знаки равенства, а $f_1, \ldots, f_r$, $h_1, \ldots, h_s$, $l_1, \ldots, l_t$ — ермы от $x_1, \ldots, x_n$;

$\forall$ — *класс общностных (универсальных) формул*, т. е. формул вида

$$(\forall x_1) \dots (\forall x_n) \mathscr{B},$$

где $\mathscr{B}$ — формула, не содержащая кванторов;

$\forall\exists$ — *класс формул вида*

$$(\forall x_1) \dots (\forall x_m) (\exists x_{m+1}) \dots (\exists x_n) \mathscr{B},$$

где снова $\mathscr{B}$ — формула, не содержащая кванторов;

$\mathscr{D}$ — *класс диофантовых формул*, т. е. формул вида

$$(\exists x_1) \dots (\exists x_m) (P_1 (f_1, \dots, f_r) \,\&\, \dots \,\&\, P_k (h_1, \dots, h_s)),$$

где $P_1, \dots, P_k$ — предикатные символы или знаки равенства, а $f_1, \dots, f_r, h_1, \dots, h_s$ — термы от $x_1, \dots, x_n$.

Пусть Γ — класс формул 1-й ступени какого-нибудь специального вида, например один из только что введенных классов $\mathscr{J}$, $\mathfrak{Q}, \dots, \mathscr{D}$, и пусть $\mathfrak{K}$ — какой-нибудь класс алгебраических систем сигнатуры Ω. Тогда Γ-теорией класса $\mathfrak{K}$ называется совокупность $\Gamma\mathfrak{K}$ всех тех (закрытых) формул из Γ, сигнатура которых содержится в Ω и которые истинны в каждой системе класса $\mathfrak{K}$. Напротив, если задано какое-то конкретное множество формул Γ, то через $K_\Omega\Gamma$ обозначается класс всех тех алгебраических систем сигнатуры Ω, на которых истинна любая формула из Γ, сигнатура которой содержится в Ω. В частности, $K_\Omega \varnothing$ является классом «всех» алгебраических систем сигнатуры Ω. Он будет более кратко обозначаться через $K\Omega$. Через $\mathfrak{K}_{\text{fin}}$ будет обозначаться класс всех конечных систем, принадлежащих $\mathfrak{K}$.

Множество $\mathscr{E}_\Omega$ формул 1-й ступени сигнатуры Ω является частью совокупности W_Ω всех конечных последовательностей, составленных из символов сигнатуры Ω, скобок, логических знаков $\&, \dots, =, \forall, \exists$ и символа x [1]), т. е. является подмножеством множества слов в алфавите, состоящем из упомянутых символов. Совокупность всех слов в фиксированном алфавите несет на себе известную структуру индуктивной алгебры, которая позволяет ввести для совокупностей слов понятия рекурсивности, рекурсивной перечислимости и т. п. Эти понятия хорошо исследованы в теории алгоритмов для конечных алфавитов, но недавно Р. Петер, Ф. Швенкель [9] изучили некоторые их свойства и для бесконечных алфавитов, что позволяет ныне говорить о рекурсивности или нерекурсивности теорий не только классов алгебраических систем конечной сигнатуры, но и классов систем бесконечной сигнатуры.

---

[1]) Как обычно, предметное переменное x_i обозначается при этом словом $(xx \dots x)$.

В результате естественно возникают следующие 2 круга вопросов:

1) для наиболее важных классов $\mathfrak{K}$ алгебраических систем и наиболее интересных классов Г формул найти алгоритмическую природу теории $\Gamma\mathfrak{K}$;

2) для наиболее интересных классов формул Г найти общие алгебраические свойства классов алгебраических систем вида $K_\Omega\Gamma_1$, где $\Gamma_1 \subseteq \Gamma$.

Классы вида $K_\Omega\Gamma_1$ ($\Gamma_1 \subseteq \Gamma$) обычно называются Г-классами. В частности, $\mathfrak{I}$-классы называются многообразиями, $\mathfrak{Q}$-классы — квазимногообразиями и $\forall$-классы — универсально аксиоматизируемыми классами (или универсалами) алгебраических систем.

Мы хотим теперь сделать небольшие обзоры новых результатов и открытых проблем, примыкающих к указанным направлениям.

1. Алгоритмическая природа теорий

1.1. $\mathfrak{S}$-теории и теории тотальных классов. Вопрос о рекурсивности теории $\mathfrak{S}K\Omega$ был известен как проблема разрешимости узкого исчисления предикатов. Для достаточно богатой сигнатуры Ω он был решен отрицательно А. Черчем (1939) [10]. Вопрос о рекурсивности теории $\Gamma K\Omega$, $\Gamma K\Omega_{\mathrm{fin}}$ для различных типов формул Г и различных сигнатур Ω привлекал внимание многих авторов. Один из наиболее замечательных результатов этого направления был получен Ван Хао, доказавшим нерекурсивность теории $\forall^1\exists^1\forall^1K\Omega$, где через $\forall^1\exists^1\forall^1$ обозначен класс формул вида $\forall x\exists y\forall z\mathfrak{B}$ ($\mathfrak{B}$ кванторов не содержит), а Ω состоит из одного бинарного и бесконечного числа унарных предикатных символов. Пользуясь методами Ван Хао, Гуревич [12] получил в конце прошлого года в каком-то смысле окончательный результат в указанном направлении. Вводя вместе с Гуревичем обозначения

Г — некоторая совокупность слов вида $(Q_1x_1)(Q_2x_2)\dots(Q_mx_m)$

$$(Q_i = \forall, \exists,\ Q_i \neq Q_{i+1},\ m = 1, 2, 3, \dots);$$

Ω — сигнатура, не содержащая функциональных символов;

Γ_Ω — совокупность замкнутых формул пренексного вида, не содержащих знака равенства, имеющих сигнатуру Ω, кванторная часть которых принадлежит Г;

Γ^*_Ω — то же, но допускается знак равенства;

$\Gamma_2 = \{\forall^m\exists^n\colon m, n = 0, 1, 2, \dots\}$;

$\Gamma_3 = \{\exists^m\forall^i\exists^n\colon i = 1, 2;\ m, n = 0, 1, 2, \dots\}$;

Ω_1—сигнатура, состоящая лишь из одноместных предикатных символов, можно представить его результаты в следующем виде:

$$\mathrm{Rec}\,\Gamma_\Omega K\Omega \Leftrightarrow \mathrm{Rec}\,\Gamma_\Omega^* K\Omega \Leftrightarrow \mathrm{Rec}\,\Gamma_\Omega (K\Omega)_{\mathrm{fin}} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \mathrm{Rec}\,\Gamma_\Omega^* (K\Omega)_{\mathrm{fin}} \Leftrightarrow \neg\, \mathrm{Creat}\,\Gamma_\Omega K\Omega \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \Omega \subseteq \Omega_1 \vee \Gamma \subseteq \Gamma_2 \cup \Gamma_3 \vee (\mathrm{Fin}\,\Omega \,\&\, \mathrm{Fin}\,(\Gamma \setminus (\Gamma_2 \cup \Gamma_3))),$$

где $\mathrm{Rec}\,M$, $\mathrm{Creat}\,M$, $\mathrm{Fin}\,M$ означают, что совокупность M соот ветственно рекурсивна, креативна, конечна.

По традиции эти исследования причисляются к «чистой логике» Напротив, вопросы о рекурсивности теорий $\mathfrak{E}\mathfrak{K}$, $\mathfrak{Q}\mathfrak{K}$, $\mathfrak{J}\mathfrak{K}$, гд $\mathfrak{K}$ — тот или иной специальный класс систем, например клас групп или класс конечных групп, чаще относятся уже к теори самого класса $\mathfrak{K}$ (теории групп, теории конечных групп и т. п.) Исходными результатами этого направления можно считать теоремь Россера о нерекурсивности арифметики $\mathfrak{E}\langle N; +, \cdot\rangle$ и Пресбурге ра о рекурсивности $\mathfrak{E}\langle N; +\rangle$.

Значение этой области исследований стало особенно ясно посл работ А. Тарского, доказавшего рекурсивность $\mathfrak{E}\langle \mathbf{K}; +, \cdot\rangle$ $\mathfrak{E}\langle \mathbf{C}; +, \cdot\rangle$, и работы Ю. Робинсон [13], обнаружившей нерекурсивность $\mathfrak{E}\langle \mathbf{R}; +, \cdot\rangle$, где $\mathbf{K}$, $\mathbf{C}$, $\mathbf{R}$ — поля комплексных вещественных и рациональных чисел. В известной книге Тарского Мостовского и Робинсона [14] были подведены первые итоги разви тия новой области. Однако для очень многих важных классов $\mathfrak{K}$ алгоритмическая природа теории $\mathfrak{E}\mathfrak{K}$ оставалась в то время неизве стной. В течение следующего десятилетия была доказана нерекур сивность элементарных теорий многих классов систем и, в частно сти, элементарных теорий вида $\mathfrak{E}\mathfrak{K}_{\mathrm{fin}}$, т. е. элементарных теорий совокупностей всех конечных систем, содержащихся в тех ил иных более известных классах $\mathfrak{K}$. Были найдены также сравнитель но немногие классы $\mathfrak{K}$, для которых теория $\mathfrak{E}\mathfrak{K}$ оказалась рекур сивной. В обзоре Ершова, Лаврова, Тайманова и Тайцлина [15 дана сводка результатов, полученных к 1964 году.

В последние годы резко увеличилось внимание, уделяемое тео риям вида $\Gamma\mathfrak{K}$ для различных типов Γ. С другой стороны, естествен но спрашивать, не только рекурсивна или нет какая-нибудь теори $\Gamma\mathfrak{K}$, но и какова ее степень неразрешимости. Наконец, большо интерес представляет и вопрос о том, для каких $\mathfrak{K}$, $\mathfrak{L}$, Γ имее место равенство $\Gamma\mathfrak{K} = \Gamma\mathfrak{L}$.

В связи с работами по структуре теорий был развит ряд общи методов. В частности, для доказательства неразрешимости теори детально исследован метод интерпретаций. Для доказательств рекурсивности наряду с прямым методом исключения кванторо основное значение приобрел метод модельной полноты, открыты А. Робинсоном [16]. Методы доказательств совпадения элементарны теорий также известны ныне в различных формах: метод перекиды вания, метод ультрапроизведений, метод стратегий. Тем не менее и сегодня существует большое число важных теорий, алгоритмическая природа которых остается совершенно неизвестной.

Ниже я позволю себе указать ряд важных новых результатов, полученных после прошлого конгресса, и напомнить в связи с ними о некоторых открытых проблемах.

1.2. Теория чисел. Одной из наиболее замечательных нерешенных проблем все еще остается так называемая 10-*я проблема Гильберта*:

а) *рекурсивна или нет теория* $\mathfrak{D}\langle N; -\cdot\rangle$?

Не решен и тесно связанный с этой проблемой вопрос:

б) *можно ли для любого рекурсивно-перечислимого множества* M *натуральных чисел найти такой многочлен* $f(x_0, x_1, \ldots, x_n)$ *с целыми коэффициентами, что*

$$x\in M \Leftrightarrow (\exists y_1, \ldots, y_n)(f(x, y_1, \ldots, y_n)=0)?$$

Интересен также следующий вариант проблемы Гильберта:

в) *существуют ли натуральное число* s *и целозначные многочлены* $f_{1i}(n), \ldots, f_{si}(n)$, *такие, что совокупность тех* n, *для которых разрешимо уравнение*

$$\sum_{i=1}^{t} \pm x_1^{f_{1i}(n)} x_2^{f_{2i}(n)} \ldots x_s^{f_{si}(n)}=0,$$

является нерекурсивной? Если существуют, то каковы наименьшие значения s, t *и степеней* $f_{ki}(n)$?

Хотя эти проблемы остаются все еще открытыми, тем не менее очень близкая проблема существования алгоритма, распознающего по коэффициентам полинома $f(x_1, \ldots, x_m, y_1, \ldots, y_m)$ разрешимость показательного уравнения

$$f(x_1, \ldots, x_m, 2^{x_1}, \ldots, 2^{x_m})=0,$$

была решена отрицательно в замечательной работе Девиса, Путнама и Робинсон [17]. Но и здесь остался открытым вопрос о нахождении многочленов f по возможности простого вида, для которых все еще не существует алгоритма решения.

1.3. Теория полей. В каком-то смысле родственными проблеме Гильберта являются вопросы о рекурсивности элементарных теорий классов полей. Поскольку на данном конгрессе этому вопросу посвящен специальный доклад Ю. Л. Ершова, я ограничусь лишь некоторыми замечаниями. В течение почти 15 лет известны были по существу только 2 класса бесконечных полей с разрешимыми теориями: алгебраически замкнутые поля фиксированной характеристики и вещественно замкнутые поля. В то же время число известных классов полей с неразрешимыми теориями быстро росло.

Только в 1964—1965 гг. Аксом и Коченом [18] методом ультрапроизведений и независимо Ю. Л. Ершовым [19], [20], [21] методом модельной полноты была установлена разрешимость элементарной теории P-адического поля и элементарных теорий ряда других полей. Можно считать, что сегодня работами Ю. Л. Ершова и Акса — Кочена уже заложен фундамент теории полей, имеющих разрешимые элементарные теории. Отметим также, что, используя тонкий аппарат теории моделей, Акс, Кочен и Ершов смогли попутно доказать и некоторые гипотезы Ленга и Артина о формах.

Работы по проблеме Гильберта и работы Акса, Кочена и Ершова представляются особенно интересными, так как они открывают пути «внедрения» теории моделей в область классической теории чисел и, возможно, в алгебраическую геометрию.

Несмотря на большие успехи в изучении элементарных теорий классов полей, много очень простых по формулировке проблем, относящихся к этой области, остаются открытыми. Упомянем лишь, что сегодня не известно, рекурсивна или нет элементарная теория

а) *класса всех конечных полей* (Ю. Робинсон);

б) *поля рациональных функций от переменных* $x_1, \ldots, x_m$ *над произвольным полем коэффициентов*;

в) *поля тех комплексных чисел, которые могут быть построены при помощи циркуля и линейки, и его подполя вещественных чисел* (А. Тарский).

В самой теории чисел большой интерес представляют проблемы эффективизации в теоремах типа теоремы Туе. Применение методов теории моделей, возможно, окажется полезным и в этой области.

1.4. Теория групп и полугрупп. Неразрешимость элементарной теории класса всех групп $\mathfrak{G}$ была установлена А. Тарским. Более тонкая теорема о неразрешимости $\mathfrak{Q}\mathfrak{G}$ доказана П. С. Новиковым и Буном. В 60-х годах доказана нерекурсивность элементарных теорий многих классов групп, в том числе класса всех конечных групп, всех n-ступенно ($n \geqslant 2$) разрешимых групп и т. п. Не известно, рекурсивны или нет

а) *теория* $\mathfrak{Q}\mathfrak{G}_n$ (проблема эквивалентности слов в классе $\mathfrak{G}_n$ n-ступенно разрешимых групп ($n = 2, 3, 4, \ldots$));

б) *теории* $\mathcal{D}\mathbf{F}_n$, $\exists\mathbf{F}_n$, $\mathfrak{E}\mathbf{F}_n$, где $\mathbf{F}_n$ — свободная группа ранга n ($n \geqslant 2$);

Недавно А. Д. Тайманов показал, что

$$\forall\exists\forall\exists\mathbf{F}_m = \forall\exists\forall\exists\mathbf{F}_n \qquad (m, n \geqslant 2).$$

Однако все еще неизвестно, верны ли утверждения

в) $\mathfrak{E}\mathbf{F}_m = \mathfrak{E}\mathbf{F}_n \qquad (m, n \geqslant 2)$;

г) $\mathfrak{E}G_0 = \mathfrak{E}G_1 \,\&\, \mathfrak{E}H_0 = \mathfrak{E}H_1 \Rightarrow \mathfrak{E}(G_0 * H_0) = \mathfrak{E}(G_1 * H_1)$, 'де $G_i * H_i$ означает свободное произведение произвольных групп $\dot{i}_i$, H_i ($i = 0, 1$).

Ю. И. Мерзляков показал, что в $\mathbf{F}_n$ нет неабелевых подгрупп, ıредставимых позитивными формулами. Однако остается не-ıсным,

д) *есть или нет в* $\mathbf{F}_n$ *неабелевы формульные подгруппы, отличные т* $\mathbf{F}_n$ ($n \geqslant 2$)?

Еще в 1949 г. В. Шмелева доказала разрешимость элементарной еории класса всех абелевых групп. В 1964 г. Ю. Ш. Гуревич [22] оказал, что элементарная теория класса всех упорядоченных белевых групп также разрешима. Им же найдены и условия совпа-ения элементарных теорий двух упорядоченных абелевых групп. ı. И. Кокорин и Н. Г. Хисамиев [23] изучили элементарные теории труктурно-упорядоченных абелевых групп. Ими были найдены словия совпадения $\mathfrak{E}$-теорий структурно-упорядоченных групп, меющих конечное число нитей. Н. Г. Хисамиевым (1966) [24] было оказано, что $\forall$-теория абелевых структурно-упорядоченных групп екурсивна. Вопрос,

е) *рекурсивна или нет элементарная теория класса всех абелевых труктурно-упорядоченных групп*, остался пока открытым [1]).

Класс абелевых полугрупп более сложный, чем класс абелевых рупп. М. А. Тайцлин и А. Тарский показали, что элементарная еория класса абелевых полугрупп с сокращением нерекурсивна. ; текущем году М. А. Тайцлин [25] нашел серию классов абелевых олугрупп, имеющих разрешимые $\mathfrak{E}$-теории. В частности, он обна-ужил, что $\mathfrak{E}$-теория каждой отдельной конечно-порожденной абе-евой полугруппы рекурсивна.

Для теории абелевых полугрупп имеет принципиальное значение ледующая проблема изоморфизма:

ж) *существует ли алгоритм, позволяющий для любых двух полу-рупповых конечных систем определяющих соотношений узнать, пределяют ли эти системы в классе всех абелевых полугрупп изо-ıорфные полугруппы?*

Для соотношений с двумя порождающими упомянутый алгоритм ıыл известен (ср. Редеи [26]). М. А. Тайцлин указал соответствую-ций алгоритм для полугрупп с 4 порождающими. В классе абелевых ıолугрупп с сокращением проблема изоморфизма была решена Е. А. Халезовым. М. А. Тайцлин нашел большое число других важ-ıых классов абелевых полугрупп, в которых проблема изоморфизма акже решается положительно. Если бы 10-я проблема Гильберта

[1]) В сентябре 1966 г. Ю. Ш. Гуревич обычными методами решил эту ıроблему отрицательно.

имела положительное решение, то и проблема изоморфизма для абелевых полугрупп решалась бы положительно. Верно ли обратное — неизвестно.

Согласно П. С. Новикову, проблема изоморфизма в многообразии всех групп решается отрицательно. В многообразии абелевых групп эта проблема решается положительно. Она решается положительно и в нескольких других многообразиях групп, обладающих тем свойством, что все конечно-порожденные их группы конечны. Как решается проблема изоморфизма в других многообразиях — неизвестно. В частности, неизвестно, как решается эта проблема в неабелевых полинильпотентных многообразиях групп и даже в многообразии метабелевых групп.

1.5. Проблема тождеств. Рекурсивность теории $\mathfrak{J}\mathfrak{K}$ для какого-нибудь многообразия $\mathfrak{K}$ означает, что свободные алгебры в классе $\mathfrak{K}$ допускают конструктивное описание (см. [27]). Во многих случаях такое описание было найдено, например, если $\mathfrak{K}$ — класс всех колец, ассоциативных колец, колец Ли, решеток или произвольное полинильпотентное многообразие групп. Однако существуют конечно-аксиоматизируемые многообразия коммутативных луп, $\mathfrak{J}$-теория которых нерекурсивна [27]. Интересно было бы выяснить,

а) *существуют ли конечно-аксиоматизируемые многообразия групп, обладающие нерекурсивной $\mathfrak{J}$-теорией, и*

б) *существуют ли конечно-аксиоматизируемые многообразия ассоциативных (или лиевых) колец, имеющих нерекурсивную $\mathfrak{J}$-теорию.*

В настоящее время неизвестно даже,

в) *является ли каждое многообразие групп конечно-аксиоматизируемым* (Б. Нейман) и

г) *является ли конечно-аксиоматизируемым каждое многообразие ассоциативных (лиевых) колец* (Шпехт).

1.6. Степени неразрешимости теорий. Из теоремы полноты Геделя следует, что для каждого рекурсивно-аксиоматизируемого класса систем $\mathfrak{K}$ теории $\mathfrak{E}\mathfrak{K}$, $\mathfrak{J}\mathfrak{K}$, $\mathfrak{Q}\mathfrak{K}$, $\forall\mathfrak{K}$ заведомо рекурсивно-перечислимы. Какие степени неразрешимости могут иметь эти теории? В частности, какие степени неразрешимости могут иметь упомянутые теории для конечно-аксиоматизируемых многообразий $\mathfrak{K}$? Совсем нетрудно для каждой рекурсивно-перечислимой степени неразрешимости построить бесконечно-аксимоматизируемый класс $\mathfrak{K}$, у которого теория $\mathfrak{E}\mathfrak{K}$ имеет заданную степень неразрешимости. Для конечно-аксиоматизируемых многообразий аналогичный результат получен Ханфом [8]. Тем не менее у всех естественных (т. е. построенных независимо от данной проблемы) конечно-аксиоматизируемых классов $\mathfrak{K}$, у которых степень неразрешимости теории $\mathfrak{E}\mathfrak{K}$ известна, эта степень оказалась или нулевой (множество $\mathfrak{E}\mathfrak{K}$ рекурсивно), или наивысшей $0'$.

В связи с изложенным представляет особенный интерес следующий вопрос (Г ж е г о р ч и к):

а) *какова степень неразрешимости теории*

$$\mathfrak{E}\langle \mathbf{C};\ +,\cdot,\ \exp\rangle,$$

где **C** — *совокупность вещественных чисел?*

Пусть $A_{\mathbf{T}}$ — совокупность подмножеств некоторого топологического пространства **T** и $\cup$, $'$, $^{-}$ суть операции объединения, дополнения и замыкания множеств. Рассмотрим теорию

$$\mathcal{T} = \mathfrak{E}\langle A_{\mathbf{T}};\ \cup,\ ',\ ^{-}\rangle.$$

Если **T** — квадрат $(0,1) \times (0,1)$, то, согласно Гжегорчику [28], теория $\mathcal{T}$ нерекурсивна. Однако до сих пор неизвестно,

б) *какова степень неразрешимости* $\mathcal{T}$, *если* **T** — *простой интервал* (0,1) (Г ж е г о р ч и к).

Было бы интересно найти возможные степени неразрешимости проблемы изоморфизма в конечно-аксиоматизируемых многообразиях, а также, пользуясь понятиями метрической теории алгоритмов, найти степени с л о ж н о с т и теорий $\mathfrak{E}\mathfrak{K}$, $\mathfrak{J}\mathfrak{K}$ в тех случаях, когда эти теории рекурсивны.

2. Многообразия и квазимногообразия

2.1. Решетки подмногообразий. Пусть фиксирован какой-нибудь тип Γ формул. Совокупность всех Γ-подклассов произвольного Γ-класса $\mathfrak{K}$ является полной решеткой относительно теоретико-множественного отношения включения.

Эту решетку мы условимся обозначать через $\mathbf{L}_\Gamma\mathfrak{K}$.

Атомы решетки $\mathbf{L}_\Gamma K\Omega$ называются Γ-минимальными или Γ-полными классами. Ясно, что Γ-класс $\mathfrak{K}$ тогда и только тогда **L**-минимальный, когда решетка $\mathbf{L}_\Gamma\mathfrak{K}$ двухэлементная. Заметим, что наименьшим элементом в $\mathbf{L}_\Gamma\mathfrak{K}$ может оказаться пустой класс. Создание общей теории $\mathfrak{E}$-полных классов (см. [29]) было, по-видимому, одним из главных событий в общей алгебре в последние годы.

С чисто алгебраической точки зрения такое же большое значение имело бы и создание, по возможности, детальной теории $\mathfrak{J}$, $\mathfrak{Q}$ и $\forall$ классов, наиболее простых с точки зрения логического языка, на котором эти классы задаются. Хотя удобные теоретико-множественные характеристики указанных классов хорошо известны [34], тем не менее эти характеристики могут служить лишь отправным пунктом исследований.

Началом общей теории многообразий алгебр можно считать статью Г. Биркгофа (1935) [4], а началом теории многообразий групп — статью Б. Неймана (1937) [30]. Уделяемое обоим этим аспектам теории многообразий внимание резко увеличилось в 50-х годах. Прямой вопрос о явном описании решетки $L_{\mathcal{J}}\mathfrak{K}$ для классических многообразий $\mathfrak{K}$ оказался весьма трудным и был решен только для очень простых многообразий. Например, обозначим через $\mathfrak{N}_k$ многообразие всех k-ступенно нильпотентных и через $\mathfrak{S}_k$ многообразие всех k-ступенно разрешимых групп ($k = 1, 2, 3, \ldots$; $\mathfrak{N}_1 = \mathfrak{S}_1$ — многообразие абелевых групп). Давно известно, что решетка $L_{\mathcal{J}}\mathfrak{N}_1$ состоит из подмногообразий $\mathfrak{A}_m$, выделяемых в $\mathfrak{N}_1$ тождествами $x^m = 1$ $(m = 0, 1, 2, \ldots)$, причем $\mathfrak{A}_d \supseteq \mathfrak{A}_m$ равносильно условию $d \mid m$. Решетка $L_{\mathfrak{Q}}\mathfrak{N}_1$ недавно найдена А. А. Виноградовым [35]. В отличие от счетной решетки $L_{\mathcal{J}}\mathfrak{N}_1$ решетка $L_{\mathfrak{Q}}\mathfrak{N}_1$ оказалась мощности континуума. В настоящее время полностью описаны решетки $L_{\mathcal{J}}\mathfrak{N}_2$, $L_{\mathcal{J}}\mathfrak{N}_3$ (см. [36], [37]) и частично решетка $L_{\mathcal{J}}\mathfrak{S}_2$. В связи с некоторыми гипотезами о строении решеток представляется важным

а) *найти полное описание решетки* $L_{\mathcal{J}}\mathfrak{S}_2$ (Б. Нейман и Х. Нейман), *а также найти строение решетки* $L_{\mathcal{J}}\mathfrak{N}_4$.

Мало что известно о строении решетки $L_{\mathcal{J}}\mathfrak{L}$, где $\mathfrak{L}$ — многообразие всех решеток. Наиболее известные ее элементы — это многообразие всех модулярных решеток и многообразие дистрибутивных решеток. Последнее из них является единственным атомом в $L_{\mathcal{J}}\mathfrak{L}$. Другие многообразия решеток указаны Икбалуннизой [39], а также Лёвигом [40]. По-видимому, пока не потеряна надежда, что решетка $L_{\mathcal{J}}\mathfrak{L}$ или решетка $L_{\mathcal{J}}\mathfrak{M}$ ($\mathfrak{M}$ — класс модулярных решеток) не очень сложна и удастся

б) *найти описание* $L_{\mathcal{J}}\mathfrak{L}$ *или* $L_{\mathcal{J}}\mathfrak{M}$.

Из общих соображений вытекает, что в каждом многообразии содержится хотя бы одно $\mathcal{J}$-полное многообразие и в каждом квазимногообразии содержится хотя бы одно $\mathfrak{Q}$-полное квазимногообразие. В частности, каждое минимальное многообразие содержит минимальное квазимногообразие. Однако не каждое минимальное квазимногообразие содержится в подходящем минимальном многообразии. Поэтому число минимальных квазимногообразий в произвольном многообразии $\mathfrak{K}$ больше или равно числу минимальных многообразий, содержащихся в $\mathfrak{K}$.

Атомы решетки $L_{\mathcal{J}}\mathfrak{K}$ для многих классических многообразий $\mathfrak{K}$ были в явном виде найдены Калицким и Тарским. Калицкий доказал также, что многообразие всех группоидов содержит континуум минимальных подмногообразий. В текущем году этот результат был усилен Больботом (Новосибирск), показавшим, что многообразие группоидов, определяемое тождествами $x \cdot xy = yx \cdot x = x$, также содержит континуум минимальных подмногообразий.

Из теоремы компактности следует, что решетки $L_{\mathscr{E}}\mathfrak{K}$, $L_{\mathscr{Y}}\mathfrak{K}$, $L_{\mathfrak{Q}}\mathfrak{K}$ не могут иметь произвольное строение. Спрашивается,

в) *какие решетки могут быть реализованы в виде решеток* $L_{\mathscr{Y}}\mathfrak{K}$, $L_{\mathfrak{Q}}\mathfrak{K}$ *для подходящих многообразий (квазимногообразий)* $\mathfrak{K}$?

2.2. Группоиды квазимногообразий. Новый подход к изучению многообразий групп нашла в 1956 г. Х. Нейман [31]. Она ввела ассоциативную операцию перемножения многообразий групп и предложила вместо решетки $L_{\mathscr{Y}}\mathfrak{G}$ изучать полугруппу $G_{\mathscr{Y}}\mathfrak{G}$ всех групповых многообразий относительно упомянутого умножения. Опираясь на результаты цитированной статьи [31], Б. Нейман, Х. Нейман и П. Нейман (1962) [32] и независимо от них А. Шмелькин (1963) [33] показали, что $G_{\mathscr{Y}}\mathfrak{G}$ является свободной полугруппой с нулем и единицей. Однако мощность этой полугруппы (заведомо бесконечная и не превышающая мощности континуума) остается все еще неизвестной.

Вероятно, целесообразно по аналогии с умножением многообразий групп ввести следующее $\mathfrak{K}$-умножение любых подклассов произвольного фиксированного класса $\mathfrak{K}$ алгебраических систем. А именно для любых $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{K}$, $\mathfrak{B} \subseteq \mathfrak{K}$ полагаем $A \in \mathfrak{A} \underset{\mathfrak{K}}{\circ} \mathfrak{B}$, если $A \in \mathfrak{K}$ и существует такая факторсистема A/θ, что $A/\theta \in \mathfrak{B}$ и любой смежный класс $a\theta$ $(a \in A)$, являющийся $\mathfrak{K}$-подсистемой в A, принадлежит $\mathfrak{A}$ (см. [41]). Легко показывается, что если $\mathfrak{K}$ есть $\forall$-класс или $\mathfrak{Q}$-класс конечной сигнатуры, то $\mathfrak{K}$-произведение любых двух его $\forall$-подклассов (соответственно $\mathfrak{Q}$-подклассов) является снова $\forall$-подклассом ($\mathfrak{Q}$-подклассом). Таким образом, наряду с решетками $L_{\forall}\mathfrak{K}$, $L_{\mathfrak{Q}}\mathfrak{K}$ в указанных случаях можно рассматривать группоиды $G_{\forall}\mathfrak{K}$, $G_{\mathfrak{Q}}\mathfrak{K}$. Интересно отметить, что даже в случае, когда $\mathfrak{K}$ — многообразие полугрупп, $\mathfrak{K}$-произведение подмногообразий может не быть подмногообразием. Однако если на всех алгебрах какого-нибудь многообразия $\mathfrak{K}$ конгруэнции перестановочны и существует терм, все значения которого совпадают и образуют одноэлементную подалгебру в каждой $\mathfrak{K}$-алгебре, то $\mathfrak{K}$-произведение подмногообразий будет подмногообразием в $\mathfrak{K}$, т. е. в этом случае группоид $G_{\mathfrak{Q}}\mathfrak{K}$ будет содержать $G_{\mathscr{Y}}\mathfrak{K}$ в качестве своего подгруппоида. Можно указать и условия, при выполнении которых группоиды $G_{\mathfrak{Q}}\mathfrak{K}$, $G_{\mathscr{Y}}\mathfrak{K}$ будут ассоциативны (см. [41]).

Пусть $\mathfrak{K}$ — квазимногообразие конечной сигнатуры и $\mathfrak{B} \in G_{\mathfrak{Q}}\mathfrak{K}$. Ясно, что в общем случае $\mathfrak{B}$-произведение двух подквазимногообразий из $\mathfrak{B}$ будет отличаться от $\mathfrak{K}$-произведения их и потому $G_{\mathfrak{Q}}\mathfrak{B}$ не будет подгруппоидом группоида $G_{\mathfrak{Q}}\mathfrak{K}$. Если же окажется, что $\mathfrak{B} \underset{\mathfrak{K}}{\circ} \mathfrak{B} = \mathfrak{B}$, то $G_{\mathfrak{Q}}\mathfrak{B}$ будет подгруппоидом в $G_{\mathfrak{Q}}\mathfrak{K}$. Это показывает, что, помимо нахождения общей структуры группоидов $G_{\mathfrak{Q}}\mathfrak{K}$, особый интерес представляет задача нахождения идемпотентов этих группоидов.

С последней задачей тесно связана задача Т. Тамуры [38] о нахождении так называемых достижимых подквазимногообразий в данном квазимногообразии. Действительно, легко заметить, что из достижимости подквазимногообразия $\mathfrak{A}$ в $\mathfrak{K}$ вытекает, что

$$(\mathfrak{X}\circ\mathfrak{A})\circ\mathfrak{A}=\mathfrak{X}\circ\mathfrak{A}$$

для произвольного $\mathfrak{X}\in G_{\mathfrak{Q}}\mathfrak{K}$. При некоторых условиях верно и и обратное.

Из сказанного выше вытекает, в частности, что если $\mathfrak{K}$ — многообразие колец, луп или коммутативных луп, то подмногообразия $\mathfrak{K}$ образуют группоид относительно $\mathfrak{K}$-умножения. Возможно, что некоторые из этих группоидов будут иметь не очень сложную структуру.

Сибирское отделение АН СССР,
Новосибирск, СССР

ЛИТЕРАТУРА

[1] Cohn P. M., Universal algebra, Harper & Row., N.Y., 1965.
[2] Gratzer G., Universal algebra (preprint, 1966).
[3] Conférence sur l'Algèbre générale, Varsovie 7. IX—11. IX, 1964, *Coll. Math.*, 14 (1966).
[4] Birkhoff G., On the structure of abstract algebras, *Proc. Cambridge Phill. Soc.*, 31 (1935), 433-454.
[5] Tarski A., Der Wahrheitsbergiff in der formalizierten Spachen, *Studia Philosophica*, 1 (1936), 261-404.
[6] Мальцев А. И., Untersuhungen aus dem Gebiete der mathematische Logik, *Матем. сб.*, 1 (1936), 323-336.
[7] Мальцев А. И., Об одном общем методе получения локальных теорем теории групп, Уч. зап. Ивановского пединст., 1 (1941), 3-9.
[8] The Theory of Models, Proceedings of the 1963 International Symposium at Berkeley, Amsterdam, 1965.
[9] Schwenkel F., Rekursive Wortfunktionen über Unendlichen Alfabeten, *Zeitschrift math. Logik und Grundl. d. Math.*, 11 (1965), 133-147.
[10] Church A., A note on the Entscheidungsproblem, *J.S.L.*, 1 (1936), 40-41, 101-102.
[11] Трахтенброт Б. А., Невозможность алгорифма для проблемы разрешимости на конечных классах, *ДАН СССР*, 70 (1950), 569-572.
[12] Гуревич Ю. Ш., Об эффективном распознавании выполнимости формул УИП, *Алгебра и логика*, 5, № 2 (1966), 25-56.
[13] Robinson J., Definability and decision problems in arithmetics, *J.S.L.*, 14 (1946), 98-114.
[14] Tarski A., Mostowski A., Robinson R., Undecidable theories, Amsterdam, 1953.
[15] Ершов Ю. Л., Лавров И. А., Тайманов А. Д., Тайцлин М. А., Элементарные теории, *УМН*, 20, № 4 (1965), 37-108.

[16] Robinson A., Introduction to Model Theory and to the Metamathematics of Algebra, Amsterdam, 1963.
[17] Davis M., Putnam H., Robinson J., The decision problem for exponential Diophantine equations, *Ann. of Math.*, **74** (1961), 425-436.
[18] Ax J., Kochen S., Diophantine problems over local fields, I, II, III (preprint, 1964).
[19] Ершов Ю. Л., Об элементарных теориях локальных полей, *Алгебра и логика*, **4**, № 2 (1965), 5-30.
[20] Ершов Ю. Л., Об элементарной теории максимальных нормированных полей, *Алгебра и логика*, **4**, № 3 (1965), 31-78.
[21] Ершов Ю. Л., Об элементарной теории максимальных нормированных полей, II, *Алгебра и логика*, **5**, № 1 (1966), 5-40.
[22] Гуревич Ю. Ш., Элементарные свойства упорядоченных абелевых групп, *Алгебра и логика*, **3**, № 1 (1964), 5-40.
[23] Кокорин А. И., Хисамиев Н. Г., Элементарная классификация структурно-упорядоченных абелевых групп с конечным числом нитей, *Алгебра и логика*, **5**, № 1 (1966), 41-50.
[24] Хисамиев Н. Г., Универсальная теория структурно-упорядоченных абелевых групп, *Алгебра и логика*, **5**, № 3 (1966), 71-76.
[25] Тайцлин М. А., Об элементарных теориях коммутативных полугрупп, *Алгебра и логика*, **5**, № 4 (1966), 55-89.
[26] Rédei L., Theorie der endlich erzeugbaren kommutativen Halbgruppen, Leipzig, 1963.
[27] Мальцев А. И., Тождественные соотношения на многообразиях квазигрупп, *Матем. сб.*, **69**, № 1 (1966), 3-12.
[28] Grzegorczyk A., Undecidability of some topological theories, *Fund. Math.*, **38** (1951), 137-152.
[29] Vaught R. L., Models of complete theories, *Bull. Am. Math. Soc.*, **69**, № 3 (1963), 299-313.
[30] Neumann B. H., Identical relations in groups, I, *Math. Ann.*, **114** (1937), 506-525.
[31] Neumann H., On varieties of groups and their associated near-rings, *Math. Z.*, **65**, № 1 (1956), 36-69.
[32] Neumann B. H., Neumann H., Neumann P. M., Wreath products and varieties of groups, *Math. Z.*, **80** (1962), 44-62.
[33] Шмелькин А. Л., Полугруппа многообразий групп, *ДАН СССР*, **146**, № 3 (1963), 543-545.
[34] Мальцев А. И., Несколько замечаний о квазимногообразиях алгебраических систем, *Алгебра и логика*, **5**, № 3 (1966), 3-10.
[35] Виноградов А. А., Квазимногообразия абелевых групп, *Алгебра и логика*, **4**, № 6 (1965), 15-20.
[36] Ремесленников В. Н., Два замечания о трехступенно нильпотентных группах, *Алгебра и логика*, **4**, № 2 (1965), 59-66.
[37] Jonsson B., Varieties of groups of nilpotency three, *Notices AMS*, **13**, № 4 (1966), 488.
[38] Tamura T., Attainability of systems of identities on semigroups, *Journal of Algebra*, **3**, № 3 (1966), 261-276.
[39] Iqbalunnisa, On types of lattices, *Fund. Math.*, **59**, № 1 (1966), 97-102.
[40] Löwig H., On the importance of the relation $[(A, B), (A, C)] < < (A, [(B, C), (C, A), (A, B)])$ between three elements of a structure, *Ann. of Math.*, **44** (1943), 573-579.
[41] Мальцев А. И., Об умножении классов алгебраических систем, *Сиб. матем. журнал*, **8**, № 2 (1967).