DIE BEDEUTUNG DES LEVISCHEN PROBLEMS FÜR DIE ANALYTISCHE UND ALGEBRAISCHE GEOMETRIE

Von HANS GRAUERT

Vor nun mehr als 50 Jahren (1910) zeigte E. E. Levi [17], daß jede (reell) 3-dimensionale glatte Hyperfläche H im (komplex) 2-dimensionalen komplexen Zahlenraum $\mathbf{C}^2$, die natürliche Grenze einer holomorphen Funktion ist, gewissen Differentialungleichungen genügen muß. Diese Levischen Differentialbedingungen wurden später von Krzoska [16] auf Dimensionen $n>2$ erweitert und führten schließlich zur Definition des pseudokonvexen Randes und Gebietes. Jedes Holomorphiegebiet, d. h. jedes Gebiet G, zu dem eine in G holomorphe, auf dem Rande ∂G überall singuläre Funktion existiert, ist pseudokonvex. Offen blieb, ob auch jedes pseudokonvexe Gebiet ein Holomorphiegebiet ist. Nachdem in Spezialfällen von Faber [7], Behnke [2], u. a. das Problem im positiven Sinne gelöst worden war, durch Lelong und Oka die plurisubharmonischen Funktionen, ein wichtiges Hilfsmittel, geschaffen worden waren, gelang es Oka 1942 [20], das Problem im Falle $n=2$ zu lösen. 1954 wurde sodann von Oka [21], Bremermann [5], Norguet [19] für $n>2$ die Klasse der pseudokonvexen Gebiete mit der Klasse der Holomorphiegebiete identifiziert. Oka führte dieses sogar für unverzweigte, nicht-schlichte und neuerdings auch für unverzweigte unendliche Gebiete durch. Im Falle verzweigter unendlicher Gebiete wurden Gegenbeispiele gefunden.

§ 1. Komplexe Räume

Inzwischen war der Begriff der *komplexen Mannigfaltigkeit* und der des *komplexen Raumes* aufgestellt worden. Die Definition des komplexen Raumes ist dabei mehrfach verallgemeinert worden. Wir benutzen in diesem Aufsatz die Räume von Serre (man vgl. [10]), die nach der z. Zt. geltenden Terminologie *reduzierte komplexe Räume* heißen, also noch nicht der allgemeinsten Definition entsprechen. Da holomorphe Funktionen und Keime von holomorphen Funktionen auftreten, muß die *Garbentheorie* wesentlich herangezogen werden (als Einführung in die Garbentheorie vgl. [8]).

DEFINITION 1. *Ein Paar $\mathfrak{X}=(X,S)$ heißt ein komplex beringter Raum, wenn folgendes gilt:*

1) *X ist ein topologischer Raum.*

2) *S ist eine Untergarbe von $\mathfrak{C}^-=\mathfrak{C}^-(X)$, der Garbe der Keime von komplexwertigen stetigen Funktionen auf X.*

3) *S ist eine Untergarbe von Ringen und enthält die konstante Untergarbe von $\mathfrak{C}$.*

Anstelle von $\mathfrak{X}$ schreiben wir vielfach auch einfach X. S heißt die Strukturgarbe von X. Durch Beschränkung von S erhält man auch über jeder offenen Teilmenge $B \subset X$ eine Strukturgarbe. B wird dadurch zu einem komplex beringten Raum. Die Schnittflächen in $\mathfrak{C}$ und mithin erst recht die Schnittflächen in S können als stetige komplexwertige Funktionen gedeutet werden. Sie heißen morphe Funktionen.

Spezielle Beispiele komplex beringter Räume werden durch die analytischen Mengen gegeben (d. s. abgeschlossene Teilmengen in Bereichen B des n-dimensionalen komplexen Zahlenraumes $\mathbf{C}^n$, die sich lokal als simultanes Nullstellengebilde von endlich vielen holomorphen Funktionen darstellen lassen).

Es sei also $A \subset B$ eine analytische Menge. Wir bezeichnen mit $\mathcal{O}$ die Garbe der Keime von lokalen holomorphen Funktionen über B und mit $I \subset \mathcal{O}$ die Garbe der Keime, die auf A verschwinden. Es gilt $I|B-A = \mathcal{O}|B-A$ und $\mathcal{O}(A) = \mathcal{O}/I|A$ kann als Untergarbe von $\mathfrak{C}(A)$ aufgefaßt werden. Das Paar $(A, \mathcal{O}(A))$ ist ein komplex beringter Raum.

Definition 2. *Ein komplex beringter Raum $(X, \mathcal{O})$ heißt ein komplexer Raum, wenn:*

1) *X ein Hausdorffscher Raum ist,*
2) *X lokal isomorph zu einem Paar $(A, \mathcal{O}(A))$ ist.*

Im Falle, daß $(X, \mathcal{O})$ ein komplexer Raum ist, heißen die Schnittflächen in $\mathcal{O}$ natürlich holomorphe Funktionen und $\mathcal{O}$ heißt die Garbe der Keime von holomorphen Funktionen. Jede offene Teilmenge von X ist wieder ein komplexer Raum. Der Begriff der holomorphen Abbildung $\psi: (X, \mathcal{O}_1) \to (Y, \mathcal{O}_2)$ eines komplexen Raumes X in einen anderen Y ist wohldefiniert: Gilt $x \in X$, $y = \alpha(x) \in Y$ und ist $\alpha: X \to Y$ eine stetige Abbildung, so erhält man durch $f \to f \circ \alpha$ einen Homomorphismus α_x^* der Halme $\mathfrak{C}_y(Y) \to \mathfrak{C}_x(X)$. ψ heißt holomorph, wenn für alle Punkte $x \in X$ die Abbildung ψ_x^* stets $\mathcal{O}_{2y}$ in $\mathcal{O}_{1x}$ abbildet, d. h. wenn Keime von holomorphen Funktionen stets in Keime von holomorphen Funktionen übergehen.

Um nun zu den komplexen Mannigfaltigkeiten zurückzukommen, müssen wir die Ringe $\mathcal{O}_x$ näher betrachten. Zunächst ist jeder Halm $\mathcal{O}_x$ eine lokale komplexe Algebra. Ein Punkt $x \in X$ heißt ein regulärer Punkt, wenn die lokale Algebra $\mathcal{O}_x$ regulär ist. Man weiß, daß dieses damit äquivalent ist, daß eine offene Umgebung $U = U(x) \in X$ existiert, die zu einem Bereich $B \subset \mathbf{C}^n$ isomorph ist. Durch jeden Isomorphismus (= biholomorphe Abbildung) $\psi: U \to B$ werden die Koordinaten $z_1, \ldots, z_n$ von B nach U hin übertragen. Zwei auf diese Weise gewonnene Koordinatensysteme hängen durch eine biholomorphe Transformation zusammen und ein Keim einer stetigen Funktion ist genau dann holomorph, wenn er sich in eine Potenzreihe nach den lokalen Koordinaten entwickeln läßt. Ein komplexer Raum, der nur aus regulären Punkten besteht, ist also eine komplexe Mannigfaltigkeit. Man kann leicht zeigen:

Es sei X ein komplexer Raum, $N \subset X$ die Menge der nicht regulären Punkte von X. Dann ist N eine nirgends dichte analytische Teilmenge von X.

Der Bereich $X - N$ ist also eine komplexe Mannigfaltigkeit! Für das Folgende von Bedeutung sind auch die Termini: „normal" und „Dimension". X heißt normal in einem Punkte $x \in X$, wenn der lokale Ring $\mathcal{O}_x$ normal ist, unter der Dimension $d_x(X)$ versteht man die Krullsche Dimension von $\mathcal{O}_x$. Es zeigt sich, daß $d_x = \frac{1}{2} \cdot$ (topologische Dimension) ist. Ebenso hat man für „normal" einen Vergleichssatz (= Vergleich mit analytischen Eigenschaften): Ein komplexer Raum ist normal (d.h. normal in allen

Punkten $x \in X$), wenn der Fortsetzungssatz von Riemann gilt: Es sei $U \subset X$ eine offene Teilmenge, $A \subset U$ eine nirgends dichte analytische Menge, f eine in $U-A$ holomorphe beschränkte Funktion. Dann läßt sich f auf ganz U als holomorphe Funktion fortsetzen. Natürlich ist eine komplexe Mannigfaltigkeit in allen ihren Punkten normal.

Für analytische Teilmengen $A \subset X$, die man ja wieder als komplexe Räume auffassen kann, gilt noch:

1) *A ist diskret dann und nur dann, wenn $d_x(A) = 0$, $x \in A$.*
2) *A liegt nirgends dicht genau dann, wenn $d_x(A) < d_x(X)$, $x \in A$.*

Nirgends dichte analytische Teilmengen von X werden deshalb auch *niederdimensionale analytische Mengen* genannt.

§2. Das Levische Problem für komplexe Räume

Um das Levische Problem auf komplexe Räume zu übertragen, ist es zunächst notwendig, den Begriff des Holomorphiegebietes zu verallgemeinern. Das führt uns zu folgender

Definition 3. *Ein komplexer Raum $(X, \mathcal{O})$ heißt ein Steinscher Raum (oder auch holomorph-vollständiger Raum), wenn folgendes gilt:*

1) *X ist holomorph ausbreitbar:* zu jedem Punkt $x \in X$ gibt es endlich viele in X holomorphe Funktionen $f_1, \dots, f_k$, derart, daß x isolierter Punkt im Nullstellengebilde $\{f_1 = \dots = f_k = 0\}$ ist.

2) *X ist holomorph konvex:* Zu jeder unendlichen diskreten Menge $D \subset X$ gibt es eine in X holomorphe Funktion, so daß $f(D)$ unbeschränkt ist.

Aus einem Satz von Thullen folgt unmittelbar: *Ein Gebiet $G \subset \mathbb{C}^n$ ist genau dann Holomorphiegebiet, wenn es ein Steinscher Raum ist.* Wichtig ist auch das Verhalten der *Čechschen Kohomologiegruppen*. Ist X ein Steinscher Raum, so gilt nämlich: $H^\nu(X, \mathcal{O}) = 0$ für $\nu = 1, 2, 3, \dots$.

Den Begriff der Pseudokonvexität übertragen wir mit Hilfe von plurisubharmonischen Funktionen. Es sei $G \subset \mathbb{C}^n$ ein Gebiet.

Definition 4. *Eine über G zweimal stetig differenzierbare reelle Funktion $p(z)$ heißt (streng) plurisubharmonisch, wenn in jedem Punkte $z \in G$ die Levische Form*

$$L(p) = \sum_{\nu, \mu} \frac{\partial^2 p}{\partial z_\nu \partial \bar{z}_\mu} dz_\nu d\bar{z}_\mu$$

positiv (definit) semidefinit ist.

Die wichtigsten Eigenschaften plurisubharmonischer Funktionen wurden von P. Lelong ermittelt. Der Begriff selbst wurde von ihm auf halbstetige Funktionen ausgedehnt. — Es sei nun X ein komplexer Raum:

Definition 5. *Eine reelle Funktion $p(x)$ über X heißt (streng) plurisubharmonisch, wenn es zu jedem Punkt $x \in X$ eine Umgebung $U = U(x)$, ein Gebiet $G \subset \mathbb{C}^n$, eine analytische Menge $A \subset G$, eine biholomorphe Abbildung ψ: $U \xrightarrow{\sim} A$ und eine in G (streng) plurisubharmonische Funktion $\hat{p}$ gibt, so daß $p \mid U = \hat{p} \circ \psi$ ist.*

In analoger Weise kann man den Begriff der k-mal stetig differenzierbaren Funktion auf X übertragen. — Pseudokonvexe Gebiete werden nun auf folgende Weise definiert:

Definition 6. *Ein relativ kompaktes Teilgebiet G eines komplexen Raumes X heißt (streng) pseudokonvex, wenn es zu jedem Randpunkt $x_0 \in \partial G$ eine Umgebung $U = U(x_0)$ und eine in U (streng) plurisubharmonische Funktion p gibt, so daß*

$$U \cap G = \{x \in U : p(x) < p(x_0)\} \text{ gilt.}$$

Man zeigt leicht:

Ist G streng pseudokonvex, so kann man sogar eine Umgebung $U = U(\partial G)$ und eine in U streng plurisubharmonische Funktion p finden, derart, daß $U \cap G = \{x \in U : p(x) < 0\}$ (vgl. [13]).

Durch Anwendung eines funktionalanalytischen Satzes von L. Schwartz [24] zeigt man nun (vgl. [11]):

Ist $G \Subset X$ streng pseudokonvex, so gilt $\dim H^\nu(G, \mathcal{O}) < \infty$, $\nu = 1, 2, 3, \ldots$. *Ab einem ν_0 verschwindet außerdem $H^\nu(G, \mathcal{O})$.*

Aus diesem grundlegenden Resultat, das ohne größere Schwierigkeit hergeleitet werden kann, folgt sofort, daß G, falls streng pseudokonvex, auch holomorph konvex ist und weiter, daß G ein Steinscher Raum ist, sofern es keine kompakten analytischen Teilmengen A mit $\dim A > 0$ enthält (in einem Steinschen Raum gibt es natürlich niemals Teilmengen dieser Art).

Ein Gebiet $G \subset \mathbf{C}^n$ ist stets holomorph-ausbreitbar, wie man unter Benutzung der Koordinatenfunktionen $z_1, \ldots, z_n$ sofort einsieht, und deshalb holomorph konvex genau dann, wenn es ein Holomorphiegebiet ist. Wir haben also das Levische Problem für (streng pseudokonvexe) Gebiete $G \subset \mathbf{C}^n$ aufs Neue gelöst und gleichzeitig auf komplexe Räume verallgemeinert. Der Beweis ist übrigens wesentlich einfacher als der ursprüngliche, der von Oka angegeben wurde und hauptsächlich auf einer geschickten Anwendung von Integralen beruht. Es bleibt zu erwähnen, daß die bei uns angewendeten funktionalanalytischen Methoden ebenso „konstruktiv“ sind wie die Integration.

Es gibt pseudokonvexe Gebiete $G \Subset X$, die nicht holomorph-konvex sind und für die etwa $\dim H^1(G, \mathcal{O}) = \infty$ gilt.

Der Begriff der Pseudokonvexität ist durch R. Narasimhan von relativ kompakten Teilgebieten auf beliebige komplexe Räume verallgemeinert worden. Ein komplexer Raum X heißt streng pseudokonvex, wenn es eine kompakte Teilmenge $K \subset X$ und eine in $X - K$ streng plurisubharmonische Funktion p gibt, so daß für jedes $r > 0$ die Menge $\{x \in X - K : p(x) < r\} \Subset X$. Ist $G \Subset X$ und streng pseudokonvex im Sinne von Definition 6, so ist G auch ein streng pseudokonvexer komplexer Raum. R. Narasimhan hat nun unter Verwendung eines neuen Approximationssatzes gezeigt [18]:

Satz 1. *Es sei X streng pseudokonvex. Dann ist X holomorph-konvex und es gilt* $\dim H^\nu(X, \mathcal{O}) < \infty$, $\nu \geqslant 1$, *und* $H^\nu(X, \mathcal{O}) = 0$, $\nu \geqslant \nu_0$.

Eine Charakterisierung der Steinschen Räume gelingt durch die Pseudovollständigkeit:

Definition 7. *Ein komplexer Raum X heißt pseudovollständig, wenn es* *eine auf X streng plurisubharmonische Funktion p gibt, so daß für jedes $r>0$ die Menge $\{x \in X: p(x)<r\}$ relativ-kompakt in X liegt.*

R. Narasimhan hat gezeigt:

SATZ 2. *X ist ein Steinscher Raum genau dann, wenn X pseudovollständig ist.*

Von W. Rothstein wurde der Begriff der q-Konvexität in die Literatur eingeführt und bei den Kontinuitätssätzen für analytische Mengen mit viel Erfolg verwendet. Wir definieren hier zunächst q-konvexe Funktionen. Es sei wieder $G \subset \mathbf{C}^n$ ein Gebiet und $p(z)$ eine reelle zweimal stetig differenzierbare Funktion über G.

DEFINITION 8. *p heißt q-konvex über G, wenn in jedem Punkt $z \in G$ die Levische Form $L(p)$ mindestens $n-q+1$ positive Eigenwerte hat (mit $q=1,2,3,\ldots,n$).*

Die 1-konvexen Funktionen fallen also mit den streng plurisubharmonischen Funktionen zusammen. Jede q-konvexe Funktion ist erst recht $(q+1)$-konvex.

Es sei nun X ein komplexer Raum und p eine über X reelle Funktion.

DEFINITION 9. *p heißt q-konvex über X, wenn es zu jedem Punkt $x \in X$ eine Umgebung $U=U(x)$, ein Gebiet $G \subset \mathbf{C}^n$, eine analytische Menge $A \subset G$, eine biholomorphe Abbildung $\psi: U \xrightarrow{\sim} A$ und eine in G q-konvexe Funktion $\hat{p}$ gibt, so daß $\hat{p} \circ \psi = p \mid U$ gilt.*

Entsprechend der Pseudokonvexität nennen wir einen komplexen Raum X *q-konvex* (*q-vollständig*), wenn es eine kompakte Teilmenge $K \subset X$ und in $X-K$ (und in X) eine q-konvexe Funktion p gibt, so daß jede Menge $\{p(x)<r\}$ relativ kompakt in X liegt.

In einer gemeinsamen Arbeit mit A. Andreotti wurde gezeigt [1]:

SATZ 3. *Ist X q-konvex, so gilt* $\dim H^\nu(X, \mathcal{O}) < \infty$ *für $\nu \geqslant q$ und $H^\nu(X, \mathcal{O})=0$, $\nu \geqslant \nu_0$. Setzt man noch voraus, daß X q-vollständig ist, so folgt sogar $H^\nu(X, \mathcal{O})=0$, $\nu \geqslant q$.*

Der Beweis wurde in [1] erbracht. Es werden zunächst relativ-kompakte Teilgebiete $G \Subset X$ untersucht. Ein solches Gebiet heißt q-konvex, wenn es eine Umgebung $U=U(\partial G) \subset X$ und eine in U q-konvexe Funktion p gibt, so daß $G \cap U=\{x \in U: p(x)<0\}$. Man zeigt sodann, daß es zu jedem Randpunkt $x \in \partial G$ beliebig kleine Umgebungen $V=V(x)$ gibt, derart, daß $H^\nu(V, \mathcal{O})=0$ für $\nu \geqslant q$. Deshalb folgt: Ist $\varepsilon>0$ hinreichend klein gewählt, so gilt für $G'=G \cup \{x \in U: p(x)<\varepsilon\}$, daß der natürliche Homomorphismus: $H^\nu(G', \mathcal{O}) \rightarrow H^\nu(G, \mathcal{O})$ bijektiv ist für $\nu \geqslant q$. Aus „surjektiv" und dem Lemma von Schwartz ergibt sich sodann: $\dim H^\nu(G, \mathcal{O})<\infty$ für $\nu \geqslant q$. Weiter wird ein Approximationssatz bewiesen. In der Menge der Kozyklen $Z'=Z^\nu(\mathfrak{U}', \mathcal{O})$, $Z=Z^\nu(\mathfrak{U}, \mathcal{O})$ (bzgl. geeigneter Überdeckungen von G' bzw. G) läßt sich eine natürliche Topologie einführen, die Z', Z zu Fréchetschen Räumen macht. Die kanonische Abbildung $Z' \rightarrow Z$ liefert eine in Z dichte Bildmenge, wenn $\nu \geqslant q-1$ ist. Jeder Kozyklus über G läßt sich also beliebig stark durch Kozyklen über G' approximieren. Mit Hilfe dieser Approximationsaussage folgt leicht, daß $H^\nu(X, \mathcal{O}) \rightarrow H^\nu(G, \mathcal{O})$, $\nu \geqslant q$ bijektiv ist, wenn $G=\{x \in X-K: p(x)<r\} \cup K$ gesetzt wird. $K \subset X$ ist dabei eine kompakte Menge, $p(x)$ eine in $X-K$ q-konvexe Funktion, für r und p gelte: $r>p(x)$, wenn $x \in U(\partial K) \cap$

$(X-K)$ (mit $U(\partial K)$ = eine kleine Umgebung). Man gewinnt also aus den Endlichkeitsaussagen für G die entsprechenden Aussagen für X. Im Falle, daß X q-vollständig ist, kann man K = (leere Menge) setzen und erhält: $H^\nu(X, \mathcal{O}) = 0$, $\nu \geqslant q$. Damit ist der Beweis vollständig.

Der Satz bleibt richtig, wenn man $\mathcal{O}$ durch eine beliebige kohärente analytische Garbe über X ersetzt. Auf den Begriff der kohärenten Garbe soll hier jedoch nicht näher eingegangen werden.

Die Lösung des Levischen Problems für komplexe Mannigfaltigkeiten ist inzwischen auch auf andere Weise versucht worden. Mr. Nishino (Nara) hat sich sehr eng an den Gedankengang von Oka angeschlossen und mit Hilfe der Okaschen Integralmethode u. a. gezeigt:

Eine komplexe Mannigfaltigkeit X ist genau dann eine Steinsche Mannigfaltigkeit, wenn es eine in X streng plurisubharmonische Funktion $p(x)$ gibt, für die jede Menge $\{p(x) < r\}$ relativ kompakt in X liegt.

Der Begriff „streng plurisubharmonisch" wird dabei allgemeiner gebraucht, die Funktion $p(x)$ braucht nicht notwendig zweimal stetig differenzierbar zu sein. U. a. fallen bei unverzweigten Gebieten G über dem P^n gewisse Funktionen $p(x) = -lg\ \delta(x)$ darunter, wobei $\delta(x)$ einen (nichteuklidischen) Abstand der Punkte $x \in G$ vom Rande ∂G bezeichnet. Ist ∂G pseudokonvex, so gelingt es jedenfalls, eine in G streng plurisubharmonische Funktion p zu konstruieren mit $\{p(x) < r\} \Subset G$. In Nara kann man deshalb zeigen:

Ein unverzweigtes, nicht kompaktes Gebiet über dem P^n ist eine Steinsche Mannigfaltigkeit genau dann, wenn es einen pseudokonvexen Rand hat.

Es ist dem Verfasser unbekannt, ob und wo dieses Resultat veröffentlicht worden ist.

§ 3. Exzeptionelle analytische Mengen

Wir werden uns im folgenden mit der Anwendung der Levischen Aussage in der analytischen und algebraischen Geometrie befassen. Zunächst seien exzeptionelle analytische Mengen betrachtet. Zu dem Zwecke werde zunächst der Begriff der *Modifikation* von komplexen Räumen untersucht.

Modifikationen traten zum ersten Male 1950 in einer gemeinsamen Arbeit von H. Behnke und K. Stein auf [3]. Die beiden Autoren verstanden darunter einen Prozeß, der es gestattet, einen komplexen Raum X in einer Teilmenge N abzuändern. Die Teilmenge N wird herausgenommen und durch eine Punktmenge N' ersetzt, so daß sich die komplexe Struktur von $X-N$ nach $X' = (X-N) \cup N'$ fortsetzen läßt. Man hat die identische Abbildung $\psi: X-N \to X'-N'$. Da man komplexe Räume, die man biholomorph aufeinander abgebildet hat, als gleich ansehen kann, definiert man:

DEFINITION 10. *Eine Modifikation ist ein Quintupel (X', N', ψ, N, X), wobei:*

1) *X', X komplexe Räume,*

2) *$N \subset X$, $N' \subset X'$ abgeschlossene Teilmengen,*

3) *$\psi: X'-N' \xrightarrow{\sim} X-N$ eine biholomorphe Abbildung sind, derart, daß folgendes gilt:*

1) Ist $U = U(N) \subset X$ eine Umgebung von N, so ist $U' = \psi^{-1}(U-N) \cup N'$ eine Umgebung von N'.

2) N ist dünn, d. h. zu jedem Punkt $x_0 \in N$ gibt es eine Umgebung $U = U(x_0)$ und eine in U holomorphe, nirgends identisch verschwindende Funktion f, so daß $U \cap N \subset \{x \in U : f(x) = 0\}$.

Modifikationen können sehr pathologisch sein, wie bereits H. Behnke und K. Stein gezeigt haben. Man ging deshalb schon bald dazu über, spezielle Klassen zu untersuchen. Eine solche Klasse bilden die eigentlichen Modifikationen, die in [9] eingeführt wurden:

DEFINITION 11. *Eine Modifikation* (X', N', ψ, N, X) *heißt eigentlich, wenn sich* ψ *zu einer eigentlichen holomorphen Abbildung* $\hat{\psi}: X' \to X$ *fortsetzen läßt.*

$\hat{\psi}$ ist natürlich eindeutig bestimmt. Es folgt sofort, daß $\hat{\psi}$ surjektiv ist. Wählt man N' und N so klein wie möglich, so sind N', N analytische Mengen und unter der zusätzlichen Voraussetzung, daß X', X normale komplexe Räume sind, hat die Menge N sogar in jedem ihrer Punkte die Codimension 2, während aus der Annahme, daß X' normal und X eine komplexe Mannigfaltigkeit ist, folgt, daß N' überall 1-codimensional ist.

Spezielle eigentliche Modifikationen wurden schon sehr früh untersucht. Sind X', X vollständige normale algebraische Räume (Varietäten), so ist (X', N', ψ, N, X) genau dann eine eigentliche Modifikation, wenn $\hat{\psi}: X' \to X$ eine reguläre, birationale Transformation ist. Aus der algebraischen Geometrie wurde auch der σ-Prozeß (monoidale Transformation) in die komplexe Analysis übernommen. Man versteht darunter einen Prozeß, der es gestattet, einen regulären Punkt durch eine höher dimensionale analytische Menge zu ersetzen. Er ist eine eigentliche Modifikation (X', N', ψ, N, X), bei der N ein regulärer Punkt, $N' = P^{n-1}$ (mit $n = \dim_{\mathfrak{C}} X$) eine singularitätenfrei eingebettete analytische Menge und X' in der Umgebung von N' eine komplexe Mannigfaltigkeit ist. Komplexe Mannigfaltigkeiten werden also durch den σ-Prozeß stets in komplexe Mannigfaltigkeiten überführt. Es gibt andere eigentliche Modifikationen, bei denen ein Punkt x_0 durch eine höherdimensionale analytische Menge A ersetzt wird. Ist x_0 regulär, so wird jedoch jetzt nicht jeder Punkt von A regulär sein. Wir beschäftigen uns in diesem Paragraphen mit Modifikationen dieser Art in umgekehrter Richtung und nennen eine analytische Menge exzeptionell, wenn sie durch eine eigentliche Modifikation durch einen Punkt ersetzt werden kann. Um den Begriff exakt einführen zu können, definieren wir zunächst:

DEFINITION 12. *Eine analytische Teilmenge* A *heißt nirgends diskret, wenn sie keine isolierten Punkte enthält.*

Dimensionstheoretisch gesehen ist A genau dann nirgends diskret, wenn für alle Punkte $x \in A$ gilt: $d_x(A) > 0$. Es sei fortan $A \subset X$ eine nirgends diskrete niederdimensionale, kompakte analytische Teilmenge.

DEFINITION 13. A *heißt exzeptionell, wenn es einen komplexen Raum* Y, *eine diskrete Menge* $D \subset Y$ *und eine holomorphe eigentliche Abbildung* $\psi: X \to Y$ *gibt, so daß folgendes gilt:*

1) $\psi(A) = D$,

2) ψ *bildet* $X - A$ *biholomorph auf* $Y - D$ *ab,*

3) *Ist* $U = U(D)$ *eine offene Umgebung,* f *eine holomorphe Funktion in* $V = \psi^{-1}(U)$, *so gibt es eine in* U *holomorphe Funktion* $\mathfrak{f}$ *mit* $f = \mathfrak{f} \circ \psi$.

Die Eigenschaft 3 bedeutet dabei, daß in der Nähe von D hinreichend viele holomorphe Funktionen existieren, die komplexe Struktur von Y dort also nicht zu dünn ist. Ist A exzeptionell, so ist das Paar (ψ, Y) bis auf eine naheliegende Äquivalenz eindeutig bestimmt, d. h. sind (ψ_ν, Y_ν), $\nu=1,2$ zwei Paare mit den Eigenschaften 1–3, so gibt es eine biholomorphe Abbildung $\alpha: Y_1 \to Y_2$, so daß das Diagramm:

$$\begin{tikzcd} & X \arrow[dl, "\psi_1"'] \arrow[dr, "\psi_2"] & \\ Y_1 \arrow[rr, "\alpha"] & & Y_2 \end{tikzcd}$$

kommutativ ist. Der Beweis dieser Aussage ist nicht schwer. Übrigens: Ist X ein normaler komplexer Raum, so ist Y wieder normal, wie man durch die analytische Charakterisierung von „normal" sofort einsieht. Dagegen braucht Y keine komplexe Mannigfaltigkeit zu sein, auch dann nicht, wenn X es ist. Es sei $A = A_1 \cup \ldots \cup A_k$ die Zerlegung von A in zusammenhängende Komponenten. Wir setzen $d_\nu = \psi(A_\nu)$. Es gilt dann $d_\nu \neq d_\mu$ für $\nu \neq \mu$ und $D = \{d_1, \ldots, d_k\}$.

Wir sagen auch, daß eine exzeptionelle analytische Menge A „niedergeblasen" werden kann. Im allgemeinen ist eine analytische Menge nicht exzeptionell. Ist X homogen, so gibt es keine kompakte, exzeptionelle analytische Teilmenge in X. Man kann sogar zeigen: In einer hinreichend kleinen Umgebung einer exzeptionellen Menge gibt es niemals eine weitere.

Die Frage, die sich stellt, lautet also: *Wann ist eine kompakte, niederdimensionale, nirgends diskrete analytische Menge $A \subset X$ exzeptionell?* Es zeigt sich nun, daß man mit Hilfe der Levischen Aussage leicht zu einem einfachen Kriterium kommen kann. Dazu ist es notwendig, die Remmertsche Reduktionstheorie anzuwenden. Diese Theorie, die zu vielen wichtigen Ergebnissen führt, wurde 1957 [22] von R. Remmert aufgestellt. Ihre Resultate wurden später [6] von H. Cartan verschärft. Die Beweise benutzen wesentlich die Sätze von K. Stein über analytische Zerlegungen. Vgl. auch die Methoden von H. Rossi [23].

Satz 4. *Es sei X ein holomorph-konvexer komplexer Raum. Dann gibt es einen Steinschen Raum Y und eine eigentliche holomorphe Abbildung $\psi: X \to Y$, so daß gilt: Ist $U \subset Y$ eine offene Menge, f eine holomorphe Funktion über $V = \psi^{-1}(U)$, so gibt es eine über U holomorphe Funktion $\mathfrak{f}$ mit $f = \mathfrak{f} \circ \psi$.*

Das Paar (ψ, Y) ist wieder bis auf naheliegende Äquivalenz eindeutig bestimmt. Die Fasern $X_y = \psi^{-1}(y)$, $y \in Y$, sind kompakte analytische Teilmengen von X und — das ist im allgemeinen Fall sehr tiefliegend — sie sind zusammenhängend.

Ist $y_0 \in Y$ und $x_0 = \psi^{-1}(y_0)$ ein einzelner Punkt, so gibt es Umgebungen von y_0 und x_0, die durch ψ biholomorph aufeinander abgebildet werden. Falls X ein normaler komplexer Raum ist, folgt wieder wie vorhin, daß auch Y normal ist.

Es dürfte jetzt dem Leser einleuchten, wie man das Resultat von Cartan und Remmert anzuwenden hat. Ist X ein komplexer Raum, so heißt eine kompakte, nirgends diskrete analytische Teilmenge $A \subset X$ maximale kompakte analytische Teilmenge von X, wenn jede beliebige andere nirgends diskrete, kompakte analytische Teilmenge von X in A enthalten ist. Im allgemeinen besitzt ein komplexer Raum X natürlich keine maximale kompakte analytische Teilmenge — man nehme etwa als Beispiel das kartε sische Produkt des Einheitskreises der z-Ebene mit dem komplex projekti ven Raum P^n. Jedoch: existiert A, so ist A auch eindeutig bestimmt.

Unter Verwendung der Remmertschen Reduktionstheorie und der Lε vischen Aussage zeigt man nun:

Satz 5. *Es sei X ein streng pseudokonvexer komplexer Raum. Dann besitzt eine maximale kompakte analytische Teilmenge A* [13].

Um das gesuchte Kriterium für exzeptionelle analytische Mengen z gewinnen, bezeichne jetzt X einen beliebigen komplexen Raum, $A \subset X$ sε eine niederdimensionale, nirgends diskrete, kompakte analytische Tei menge. Es sei $T = T(A)$ eine relativ-kompakte streng pseudo-konvex Umgebung von A und A sei maximale kompakte analytische Teilmeng von T. Da nach der Levischen Aussage T holomorph-konvex ist, könne wir die Remmertsche Reduktionstheorie heranziehen. Wir erhalten eine komplexen Raum T^* und eine eigentliche holomorphe Abbildung $\tilde{\psi}: T \to T^*$ die alle Eigenschaften aus Satz 4 besitzt. Der berühmte Projektionssat von Remmert besagt nun, daß jedes Bild einer analytischen Menge untε einer eigentlichen und holomorphen Abbildung wieder eine analytisch Menge ist. $\tilde{\psi}(A)$ ist also analytische Teilmenge von T^* und da $\tilde{\psi}$ stetig is ist sie auch wie A kompakt. In einem Steinschen Raum liegt aber jed kompakte analytische Menge diskret. Wir schreiben $\tilde{\psi}(A) = D$. Es folg daß $\tilde{\psi}^{-1}(y)$ für $y \in T^* - D$ einpunktig ist. Anderenfalls wäre $\dim \tilde{\psi}^{-1}(y) >$ und damit $\tilde{\psi}^{-1}(y) \in A$ und $y \in D$. Also wird $T - A$ durch $\tilde{\psi}$ biholomorph au $T^* - D$ abgebildet. Durch Zusammenheften von T bzw. T^* mit $X -$ erhält man schließlich den gewünschten Raum $Y = T^* \cup (X - T)$ und di eigentliche holomorphe Abbildung $\psi: X \to Y$ mit den verlangten Eiger schaften. A ist also exzeptionell. — Umgekehrt kann man bei exzeptionelle Mengen leicht eine Umgebung T konstruieren.

Satz 6. *Eine niederdimensionale, nirgends diskrete kompakte analytisch Teilmenge A eines komplexen Raumes X ist exzeptionell genau dann, wenn eine offene streng pseudokonvexe Umgebung $T = T(A) \Subset X$ gibt, derart, da A die maximale kompakte analytische Teilmenge von T ist* [13].

In der algebraischen Geometrie ist die entsprechende Aussage falsch. Is X ein kompakter (=vollständiger) algebraischer Raum, $A \subset X$ eine exzep tionelle analytische Menge, so braucht der Raum Y, den man durch Niede blasen von A erhält, keineswegs mehr algebraisch zu sein. Das einfachst Beispiel dafür wurde von Hironaka angegeben. Man nehme etwa den zwe dimensionalen komplex projektiven Raum T. $D \subset T$ sei eine singularitäter freie abgeschlossene algebraische Fläche 3. Ordnung. Wir blasen durch σ Prozesse 10 geeignete Punkte $x_r \in D$ auf. Das Resultat ist eine 2-dimer sionale kompakte komplexe Mannigfaltigkeit T^*, die — wie man zeigt - projektiv algebraisch ist. D wird durch die σ-Prozesse in eine singularitäter freie, irreduzible Teilmenge D^* transformiert. D^* ist jetzt exzeptionel Durch Niederblasen erhält man einen 2-dimensionalen kompakten kon plexen Raum Y mit folgenden Eigenschaften:

1) Y ist normal.
2) Y hat nur einen singulären Punkt.

3) Y besitzt 2 analytisch und algebraisch unabhängige meromorphe Funktionen.

4) Y ist trotzdem nicht algebraisch (nicht einmal im allgemeinen Weilschen Sinne).

§4. Geradenbündel und Hodge'sche Räume

Wir werden in diesem Abschnitt eine Anwendung der Levischen Aussage auf komplex-analytische Geradenbündel über kompakten komplexen Räumen geben (man vgl. [13]). Es sei also X ein kompakter komplexer Raum, F sei ein weiterer komplexer Raum, der durch eine holomorphe Abbildung π auf X abgebildet ist. Jede Faser $F_x = \pi^{-1}(x)$, $x \in X$ trage außerdem noch die Struktur eines eindimensionalen komplexen Vektorraumes. Es gilt also $F_x \simeq \mathbf{C}$. Gibt es nun außerdem noch zu jedem Punkt $x_0 \in X$ eine Umgebung $U = U(x_0)$ und eine biholomorphe Abbildung $V = \pi^{-1}(U) \xrightarrow{\sim} U \times \mathbf{C}$, die jede Faser F_x, $x \in U$ auch als komplexe Vektorräume isomorph auf $x \times \mathbf{C}$ abbildet, so heißt $F \xrightarrow{\pi} X$ ein komplexanalytisches Geradenbündel über X. Wie üblich verstehen wir unter einer Schnittfläche in F eine holomorphe Abbildung $\psi: X \to F$ mit $\pi \circ \psi =$ Identität $x \to x$. Ordnet man jedem Punkt $x \in X$ das Nullelement $O_x \in F_x$ zu, so erhält man die Nullschnittfläche $\mathfrak{O} = \mathfrak{O}(F)$. Wir bezeichnen die Bildmenge von $\mathfrak{O}$ im folgenden auch mit $\mathfrak{O}$, also $\mathfrak{O} = \{O_x\}$.

Ersetzen wir jeden komplexen Vektorraum F_x durch seinen dualen (bzw. durch das k-fache Tensorprodukt mit sich selbst), so erhalten wir das duale komplex-analytische Geradenbündel F^* (bzw. das komplexanalytische Geradenbündel F^k).

Es seien $s_0, \ldots, s_k$ Schnittflächen in F über X. In jedem Punkt $x \in X$ gelte für wenigstens ein ν die Ungleichung $s_\nu(x) \neq O \in F_x$. Ist dann $\alpha: F_x \xrightarrow{\sim} \mathbf{C}$ ein Isomorphismus, so ist $(\alpha s_0(x), \ldots, \alpha s_k(x)) \neq 0$ ein $(k+1)$-tupel komplexer Zahlen. Da α bis auf einen multiplikativen Faktor bestimmt ist, erhalten wir zu x genau einen Punkt $\psi(x) \in P^k$. ψ ist eine holomorphe Abbildung $X \to P^k$.

Definition 14. *F heißt reich (ample), wenn es eine natürliche Zahl n und holomorphe Schnittflächen $s_0, \ldots, s_k$ in F^n gibt, so daß ψ eine biholomorphe Einbettung von X in den P^k ist.*

Existiert ein reiches Geradenbündel über X, so ist X natürlich projektiv algebraisch. Ferner stehen die Äquivalenzklassen von Einbettungen von X in die komplex projektiven Räume mit den Äquivalenzklassen von reichen Geradenbündeln auf X in Beziehung. Es ist deshalb von besonderer Wichtigkeit zu wissen, wann ein Geradenbündel reich ist.

Im Falle, daß X eine kompakte komplexe Mannigfaltigkeit ist, wurde ein einfaches Kriterium von Kodaira angegeben [15]. Es sei $c(F)$ das Bild der 1. Chernschen Klasse von F in der zweiten Kohomologiegruppe $H^2(X, R)$ von X mit Koeffizienten in den reellen Zahlen R. Nach dem Satz von De Rham ist jede Kohomologieklasse aus $H^2(X, R)$ cohomolog zu einer geschlossenen, reellen Differentialform der Dimension 2.

Satz 7. (von Kodaira). *F ist reich dann und nur dann, wenn $c(F)$ cohomolog zu einer geschlossenen, reellen Differentialform $\varphi = i \cdot \sum_{\nu,\mu} g_{\nu\mu} dz_\nu \wedge d\bar{z}_\mu$*

ist, bei der die zugeordnete Hermitesche Form $\sum g_{\nu\mu} dz_\nu \cdot d\bar{z}_\mu$ *in jedem Punkte positiv definit ist.*

Dabei bezeichnen natürlich $z_1, \dots, z_n$ lokale Koordinaten in X. Der Beweis des Satzes benutzt wesentlich Potentialtheorie und kann deshalb nicht ohne weiteres auf komplexe Räume übertragen werden. Es war deshalb wünschenswert, für komplexe Räume ein anderes Kriterium zu gewinnen. Es sei also nun wieder X ein beliebiger kompakter komplexer Raum, F ein komplex-analytisches Geradenbündel über X.

Satz 8. *F ist genau dann reich, wenn die Nullschnittfläche $\mathfrak{O} \subset F^*$ exzeptionell ist.*

Der Beweis dieses Satzes ist algebraischer Natur und wurde von Grothendieck auch in der algebraischen Geometrie durchgeführt [14].

Nun ist bei einem Geradenbündel in jeder relativ kompakten, streng pseudokonvexen Umgebung T um die Nullschnittfläche $\mathfrak{O}$ die Menge $\mathfrak{O}$ selbst die maximale kompakte analytische Teilmenge. Es folgt deshalb in Verbindung mit dem Kriterium für exzeptionelle analytische Mengen:

Satz 9. *F ist genau dann reich, wenn es eine relativ kompakte, streng pseudokonvexe Umgebung $T = T(\mathfrak{O}) \leqslant F^*$ gibt.*

Ein Geradenbündel F^*, bei dem $T(\mathfrak{O})$ existiert, heißt auch ein negatives Geradenbündel. Existiert bei F^* die Umgebung $T(\mathfrak{O})$, so nennen wir F selbst positiv.

Der Begriff der Kählerschen Metrik läßt sich in jedem komplexen Raum X definieren. Es sei $N \subset X$ die analytische Menge der singulären Punkte von X. Da N nirgends dicht in X liegt, ist folgende Definition sinnvoll.

Definition 15. *Eine Hermitesche Metrik $ds^2 = \sum g_{\nu\mu} d\bar{z}_\nu dz_\mu$ (mit stetigen Koeffizienten) in $X - N$ heißt eine Kählersche Metrik in X, wenn für die zugeordnete äußere Form $\varphi = i \cdot \sum_{\nu,\mu} g_{\nu\mu} dz_\nu \wedge d\bar{z}_\mu$ folgendes gilt: Zu jedem Punkt $x \in X$ gibt es eine Umgebung $U = U(x)$ und eine in U streng plurisubharmonische Funktion p, so daß $d'd''p \,|\, U - N = \varphi \,|\, U - N$ ist.*

Dabei bezeichnet d' die totale Ableitung nach den lokalen Koordinaten z_ν und d'' die totale Ableitung nach den $\bar{z}_\nu$. Bei einer Kählerschen Metrik ist also gefordert, daß lokal stets ein Potential p existiert.

Wie bei komplexen Mannigfaltigkeiten definiert nach dem De-Rhamschen Satz die Form φ eine Kohomologieklasse $\xi \in H^2(X, R)$. Ist X kompakt und liegt ξ im Bild der zweiten Kohomologiegruppe von X mit ganzzahligen Koeffizienten, so nennen wir ds^2 eine Hodgesche Metrik. Ein komplexer Raum, auf dem es eine Hodgesche Metrik gibt, heißt ein Hodgescher Raum.

Bei einem normalen komplexen Raum kann man nun zu einer Hodgeschen Metrik leicht ein komplex-analytisches Geradenbündel F mit $c(F) = \xi$ konstruieren. Für $\mathfrak{O} \subset F^*$ weist man nach: Es gibt eine streng pseudokonvexe Umgebung $T = T(\mathfrak{O}) \leqslant F^*$. F ist also reich und X projektiv algebraisch.

Satz 10. *Jeder Hodgesche Raum ist projektiv algebraisch.*

Damit ist der berühmte Satz von Kodaira auf normale komplexe Räume übertragen worden. Die Methoden sind dabei von den Kodairaschen völlig verschieden und beruhen einzig und allein auf der Levischen Aussage

Diese führt also auch bei kompakten komplexen Räumen zu wichtigen Resultaten.

Für zweidimensionale kompakte komplexe Mannigfaltigkeiten X gewinnt man ein sehr einfaches Kriterium dafür, daß X projektiv algebraisch ist. Es gilt nämlich folgender in dieser Allgemeinheit zuerst von van de Ven bewiesene:

Satz 11. *X ist genau dann projektiv algebraisch, wenn es eine analytische Menge $A \subset X$ gibt, die in die irreduziblen Komponenten $A_1, \ldots, A_k$ zerfällt, so daß die Schnittmatrix $(a_{\nu\mu})$ mit $a_{\nu\mu} = (A_\nu, A_\mu)$ weder negativ definit noch negativ semidefinit ist.*

Um zu zeigen, daß das Kriterium hinreichend ist, zeigt man zunächst daß die Voraussetzung: „Mindestens ein Eigenwert von $(a_{\nu\mu})$ positiv" damit äquivalent ist, daß es natürliche Zahlen $c_1, \ldots, c_k > 0$ gibt, so daß auch $d_\nu = \sum a_{\nu\mu} c_\mu > 0, \nu = 1, \ldots, k$, gilt (genauer: Nachdem man evtl. zu einer quadratischen Untermatrix von $(a_{\nu\mu})$ übergegangen ist.) Die Schnittzahl von A_ν mit dem Zyklus $\mathfrak{A} = \sum c_\mu A_\mu$ ist gleich d_ν und deshalb, wenn das Kriterium erfüllt ist, stets positiv. Daraus folgt dann: Die Beschränkung des Geradenbündels F, das zu dem Divisor $\mathfrak{A}$ gehört, auf A ist positiv. Unter Verwendung dieses Zwischenresultates zeigt man weiter: $X - A$ ist streng pseudokonvex. Es sei B die maximale kompakte analytische Teilmenge von $X - A$. B zerfalle in die irreduziblen Komponenten $B_1, \ldots, B_m$. Man kann nun natürliche Zahlen $e_1, \ldots, e_m$ finden, so daß das zu dem Divisor $\sum c_\mu A_\mu - \sum e_\nu B_\nu$ gehörende Geradenbündel über ganz X reich ist, wobei man unser Kriterium für reiche Geradenbündel benutzen muß. Damit hat man bewiesen, daß X projektiv algebraisch ist. Wieder einmal wurde also die Levische Aussage wesentlich herangezogen.

Eine analytische Menge $A \subset X$ mit einer nicht negativ semidefiniten Schnittmatrix gibt es stets, wenn auf X zwei unabhängige meromorphe Funktionen existieren. Also ist in unserem Satz das bekannte Resultat von Chow und Kodaira enthalten, daß jede kompakte, 2-dimensionale komplexe Mannigfaltigkeit mit zwei unabhängigen meromorphen Funktionen projektiv algebraisch ist.

§ 5. Normalenbündel

Um das Kriterium für exzeptionelle analytische Mengen aus § 3 anwenden zu können, ist es notwendig, Kenntnis der Struktur einer ganzen Umgebung von A zu haben. Wir wollen zeigen, daß das Normalenbündel von A bereits entscheidend ist, und dieses kann natürlich bedeutend leichter bestimmt werden.

Zunächst betrachten wir komplex-analytische Vektorraumbündel über kompakten komplexen Räumen X. Darunter versteht man einen komplexen Raum V, der durch eine holomorphe Abbildung $\pi: V \to X$ auf X bezogen ist. Die Fasern $V_x = \pi^{-1}(x)$ tragen außerdem die Struktur eines q-dimensionalen komplexen Vektorraumes und lokal ist wieder alles zu $U \times \mathbb{C}^q$, $U = U(x) \subset X$, isomorph. Die Zahl q ist dabei konstant und hängt nicht von x ab.

Nun kann man für Vektorraumbündel wie für Geradenbündel den Begriff „negativ" definieren. Da aber Kodaira und Nakano in Zusammenhang mit ihrem „vanishing theorem“ das Wort negativ bereits verwendet haben und unser Begriff wesentlich schwächer ist, schreiben wir:

DEFINITION 16. *Ein Vektorraumbündel V über einem kompakten komplexen Raum heißt schwach negativ, wenn es eine Umgebung $T=T(\mathfrak{O})\Subset V$ um die Nullschnittfläche $\mathfrak{O}\subset V$ gibt, die streng pseudokonvex ist.*

Ist nun X eine beliebige komplexe Mannigfaltigkeit und $A\subset X$ eine nirgends diskrete, singularitätenfreie kompakte analytische Teilmenge von einer Kodimension $q>0$, so ist das Bündel der kontravarianten Normalvektoren $N=N(A)$ definiert. Es ist ein komplex-analytisches Vektorraumbündel über A, dessen Fasern die Dimension q haben. Man zeigt leicht: Ist N schwach negativ, dann gibt es eine streng pseudokonvexe Umgebung $T=T(A)\subset\subset X$, derart, daß A maximale kompakte analytische Teilmenge von T ist. Es folgt also (vgl. [13]):

SATZ 12. *Es sei $N(A)$ schwach negativ, dann ist A exzeptionell.*

Leider ist dieses Kriterium nur notwendig, wenn die kompakte komplexe Mannigfaltigkeit A eine einfache Struktur hat, z. B. wenn sie homogen oder wenn sie eindimensional ist. Es gibt bereits 3-dimensionale komplexe Mannigfaltigkeiten X mit 2-dimensionalen singularitätenfreien exzeptionellen analytischen Mengen A, derart, daß $N(A)$ nicht schwach negativ ist.

Ist X ein allgemeiner komplexer Raum, $A\subset X$ eine beliebige niederdimensionale, nirgends diskrete kompakte analytische Teilmenge, so besitzt A im allgemeinen kein Normalenbündel. Man kann sich jedoch auf folgende Weise helfen, wobei man wesentlich den Begriff der kohärenten analytischen Garbe, wie er von H. Cartan definiert wurde, heranzieht. Es sei $\mathfrak{m}$ eine kohärente Garbe von Keimen von holomorphen Funktionen, die auf A verschwinden. $\mathfrak{m}$ ist also eine Untergarbe der Garbe $\mathfrak{n}$ aller Keime auf A verschwindender holomorpher Funktionen und damit auch eine Untergarbe von $\mathcal{O}=\mathcal{O}(X)$. Jeder Halm $\mathfrak{m}_x$ ist ein Ideal in dem Ring $\mathcal{O}_x$. Wir setzen zusätzlich voraus, daß in $X-A$ gilt: $\mathcal{O}=\mathfrak{m}$. Unter $\mathfrak{m}\cdot\mathfrak{n}$ verstehen wir die Garbe, die in jedem Punkt $x\in X$ als Halm das Produkt der Ideale $\mathfrak{m}_x$ und $\mathfrak{n}_x$ hat. $\mathfrak{m}\cdot\mathfrak{n}$ ist also eine Untergarbe von $\mathfrak{m}$ und man hat $\mathfrak{m}\cdot\mathfrak{n}\,|\,X-A=\mathfrak{m}\,|\,X-A=\mathcal{O}\,|\,X-A$. Es folgt nun, daß $S=\mathfrak{m}/\mathfrak{m}\cdot\mathfrak{n}\,|\,A$ eine kohärente analytishe Garbe über A ist. Im Falle, daß X eine komplexe Mannigfaltigkeit und $A\subset X$ singularitätenfrei eingebettet und $\mathfrak{m}=\mathfrak{n}$ ist, kann man die Struktur von S einfach bestimmen. S ist nichts weiter als die Garbe der Keime von lokalen holomorphen Schnittflächen in dem Bündel $V=V(A)$ der kovarianten Normalenvektoren an A. Das zu V duale Vektorraumbündel ist $N(A)$. Im allgemeinen Falle kann man zu S ebenfalls ein „Duales“ konstruieren. Dieses sei mit $N_{\mathfrak{m}}(A)$ bezeichnet. Es ist im allgemeinen kein Vektorraumbündel mehr, sondern nur noch ein „linearer Raum über X“, der zwar als Fasern noch komplexe Vektorräume aufweist, sich aber wesentlich von einem Vektorraumbündel dadurch unterscheidet, daß die Dimension der Fasern von $x\in X$ abhängt. In dem vorhin betrachteten Sonderfall gilt jedoch $N_{\mathfrak{m}}(A)=N(A)$.

Wie ein Vektorraumbündel besitzt jeder lineare Raum über X eine Nullschnittfläche $\mathfrak{O}$. Wir nennen $N_{\mathfrak{m}}(A)$ schwach negativ, wenn es eine streng pseudokonvexe Umgebung $T=T(\mathfrak{O})\Subset N_{\mathfrak{m}}(A)$ gibt. Man zeigt wieder: Existiert $T(\mathfrak{O})$, so gibt es auch eine streng pseudokonvexe Umgebung $T^* = T^*(A) \ll X$, so daß A maximale kompakte analytische Teilmenge von T^* ist. Es folgt:

SATZ 13. *Ist $N_{\mathfrak{m}}(A)$ schwach negativ, so ist A eine exzeptionelle analytische Teilmenge von X.*

Es darf vermutet werden, daß dieses Kriterium auch notwendig ist. Setzt man A als exzeptionell voraus, so dürfte es eine kohärente Garbe $\mathfrak{m}$ geben, die die geforderten Eigenschaften hat, so daß $N_{\mathfrak{m}}(A)$ schwach negativ ist. Der Beweis dieser Aussage ist jedoch wahrscheinlich schwierig. Wir spezialisieren uns nun wieder auf den Fall, daß X eine 2-dimensionale komplexe Mannigfaltigkeit ist. $A \subset X$ sei eine nirgends dichte, nirgends diskrete kompakte analytische Teilmenge. Sie zerfalle in die irreduziblen Komponenten $A_1, \ldots, A_k$. Nach einem Satz der Matrizentheorie ist nun die Schnittmatrix $(a_{\nu\mu})$ mit $a_{\nu\mu} = (A_\nu, A_\mu)$ genau dann negativ definit, wenn es natürliche Zahlen $c_1, \ldots, c_k > 0$ gibt, so daß $d_\nu = \sum_\mu a_{\nu\mu} c_\mu < 0$ gilt. Andererseits kann man zeigen (die eine Richtung folgt aus Satz 13), daß A genau dann exzeptionell ist, wenn es natürliche Zahlen $c_1, \ldots, c_k$ gibt, so daß die Beschränkung von F auf A negativ ist, wobei F das zu dem Divisor $\sum c_\nu A_\nu$ gehörende Geradenbündel bezeichnet. $F|A$ ist aber genau dann negativ, wenn $d_\nu = \sum_\mu a_{\nu\mu} c_\mu < 0$ für $\nu = 1, \ldots, k$ gilt. Somit haben wir bewiesen:

SATZ 14. *A ist genau dann exzeptionell, wenn die Schnittmatrix $(a_{\nu\mu})$ negativ definit ist.*

Dieses Resultat wurde in einem Spezialfall zuerst von Mumford hergeleitet. Mumford setzt zusätzlich voraus, daß jede irreduzible Komponente A_ν ein singularitätenfrei eingebetteter P^1 ist, daß der Schnitt $A_\nu \cap A_\mu$ entweder leer oder transversal ist und schließlich, daß es beliebig kleine (sich anschmiegende) Umgebungen $U = U(A)$ gibt, deren Rand eine S^3 ist. Unter diesen Voraussetzungen kann er dann sogar zeigen, daß A, falls $(a_{\nu\mu})$ negativ definit ist, zu einem regulären Punkt niedergeblasen werden kann.

Es bleibt noch zu untersuchen, wann man durch Niederblasen aus kompakten, projektiv algebraischen Räumen wieder projektiv algebraische erhält. Schon Enriques zeigte folgende Aussage:

Es sei X eine kompakte, projektiv algebraische, 2-dimensionale komplexe Mannigfaltigkeit, $A \subset X$ sei ein singularitätenfrei eingebetteter P^1, dessen Selbstschnittzahl -1 ist. Dann läßt sich A zu einem regulären Punkt niederblasen. Der dadurch erhaltene Raum Y ist wieder projektiv algebraisch.

Kodaira hat diesen Satz mit Hilfe seiner Potentialtheorie auf Dimensionen >2 verallgemeinert. Wie wir jedoch in § 3 gesehen haben, darf man bei beliebigen exzeptionellen analytischen Mengen A nicht erwarten, daß durch Niederblasen von A projektiv algebraische Räume in algebraische Räume transformiert werden. Ein notwendiges und hinreichendes Kriterium dürfte sich nur schwer angeben lassen, so daß man in der algebraischen Geometrie einfache Aussagen über exzeptionelle analytische Mengen nicht erwarten darf.

Wir geben hier ein hinreichendes Kriterium. Es bezeichne X eine komplexe Mannigfaltigkeit, $A \subset X$ eine kompakte, singularitätenfrei eingebettete analytische Menge. Die Kodimension von A sei gleich eins. Das Normalenbündel $N = N(A)$ ist dann ein komplex-analytisches Geradenbündel über A. Wir setzen es als negativ voraus. A ist also exzeptionell und, da $F = N^*$

ein reiches Geradenbündel über A ist, auch eine kompakte projektiv algebraische Mannigfaltigkeit.

Wie üblich, bezeichnen wir mit $H^1(A, \underline{N}^s)$ die erste Kohomologiegruppe über A mit Koeffizienten in der Garbe der Keime von lokalen holomorphen Schnittflächen in N^s (für $s=1,2,3,\ldots$). Da A eine Kählersche Mannigfaltigkeit ist, verschwindet $H^1(A, O(A))$ genau dann, wenn die erste Bettische Zahl von A verschwindet. Wir schreiben $H^1(A, O(A)) = H^1(A, \underline{N}^0)$. Unter „Gruppe von Néron-Severi" wollen wir hier den Untervektorraum $S \subset H^2(A, R)$ verstehen, der von den Chernschen Klassen von komplex-analytischen Geradenbündeln über A aufgespannt wird. Da A als projektiv-algebraisch vorausgesetzt ist, muß S mindestens eindimensional sein. Bezeichnet $H^{1,1}(A)$ den Vektorraum der reellen harmonischen Differentialformen $\varphi = i \sum g_{\nu\mu} dz_\nu \wedge d\bar{z}_\mu$ bezüglich einer Kählerschen Metrik, so ist $H^{1,1}(A)$ in natürlicher Weise in $H^2(A, R)$ eingebettet. S ist bzgl. dieser Einbettung ein Untervektorraum von $H^{1,1}(A)$.

Satz 15. *Es sei* dim $S=1$ *und* $H^1(A, \underline{N}^s)=0$, $s=0,1,2,\ldots$ *und* X *eine kompakte projektiv algebraische Mannigfaltigkeit. Dann ist der kompakte normale komplexe Raum, den man durch Niederblasen von A erhält, wieder projektiv algebraisch.*

Die Voraussetzungen sind erfüllt, wenn $A \simeq P^{n-1}$ und der Selbstschnitt von A homolog zu $-kH$, zu einem negativen Vielfachen einer Hyperebene in A ist (andere Möglichkeiten sind nur, daß der Selbstschnitt homolog zu einem positiven Vielfachen von H oder nullhomolog ist. A ist genau in dem ersten Fall exzeptionell). Man kann nun die Struktur der Singularität, die man durch Niederblasen von A erhält, errechnen. Im Falle $k=1$ kommt dabei heraus, daß man einen regulären Punkt bekommt. Damit ist der Kodairasche Satz aufs Neue mit Hilfe der Levischen Aussage und ohne Verwendung von Potentialtheorie bewiesen.

Die hier angegebenen Beispiele mögen genügen, um aufzuzeigen, wie man die verallgemeinerte Levische Aussage in der Theorie der komplexen Räume und der algebraischen Varietäten verwenden kann. Viele Sätze, die man früher auf potentialtheoretische Weise hergeleitet hat, lassen sich neu beweisen und auf komplexe Räume übertragen. Jedoch muß man die hier behandelten Methoden als ein zusätzliches Hilfsmittel ansehen, das keineswegs die Anwendung von partiellen Differentialgleichungen überflüssig macht. Einige Sätze von Kodaira über kompakte Kählersche Mannigfaltigkeiten, wie z. B. die Zerlegungssätze und das „vanishing theorem", lassen sich anscheinend nicht mit Hilfe des Levischen Problems behandeln. Es wäre daher von besonderem Wert, Differentialgleichungsmethoden zu gewinnen, die man auch in singulären Punkten verwenden kann.

Abschließend sei noch erwähnt, daß das Levische Problem neuerdings auch einen Einfluß auf die Theorie der partiellen Differentialgleichungen ausübt. Ehrenpreis, Hörmander, Malgrange haben gezeigt, daß in sehr allgemeinen Fällen Lösungen partieller Differentialgleichungen ein ähnliches Verhalten an Rändern aufweisen können wie holomorphe Funktionen.

Anmerkung. Ein geringer Teil der Sätze und Definitionen dieses Aufsatzes ist bereits in [12] gebracht worden. Diese Resultate mußten hier der Verständlichkeit und der Vollständigkeit halber wiederholt werden.

LITERATUR

[1]. ANDREOTTI, A. & GRAUERT, H., Théorèmes de finitude pour la cohomologie des espaces complexes. *Bull. Soc. Math. France* (1962).

[2]. BEHNKE, H., Natürliche Grenzen. *Abh. math. Sem. Hamburg*, 5 (1927).

[3]. BEHNKE, H. & STEIN, K., Modifikationen komplexer Mannigfaltigkeiten und Riemannscher Gebiete. *Math. Ann.* 124 (1951), 1–16.

[4]. BISHOP, E., Mappings of partially analytic spaces. *Amer. J. Math.* 83 (1961), 209–242.

[5]. BREMERMANN, H., Über die Äquivalenz der pseudokonvexen Gebiete und der Holomorphiegebiete im Raum von n komplexen Veränderlichen. *Math. Ann.* 128 (1954), 63–91.

[6]. CARTAN, H., Quotients of complex analytic spaces. *Contributions to Function Theory*. Bombay, 1960.

[7]. FABER, G., Über zusammengehörige Konvergenzradien von Potenzreihen mehrerer Veränderlicher. *Math. Ann.*, 61 (1905).

[8]. GODEMENT, R., *Topologie Algébrique et Théorie des Faisceaux*. Hermann, Paris, 1958.

[9]. GRAUERT, H. & REMMERT, R., Zur Theorie der Modifikationen. I. Stetige und eigentliche Modifikationen komplexer Räume. *Math. Ann.*, 129 (1955), 274–296.

[10]. —— Komplexe Räume. *Math. Ann.*, 136 (1958), 245–318.

[11]. GRAUERT, H., On Levi's problem and the imbedding of real-analytic manifolds. *Ann. Math.*, (2) 68 (1958), 460–472.

[12]. —— Die Riemannschen Flächen der Funktionentheorie mehrer Veränderlichen. *Proc. Internat. Congress Math. Edinburg*, 1958.

[13]. —— Über Modifikationen und exzeptionelle analytische Mengen. *Math. Ann.*, 146 (1962), 331–368.

[14]. GROTHENDIECK, A., Eléments de géométrie algébrique. II. *Publ. Math. (I.H.E.S.), Paris*, 8 (1961).

[15]. KODAIRA, K., On Kähler varieties of the restricted type. *Ann. Math.*, (2) 60 (1954), 28–48.

[16]. KRZOSKA, J., *Über die natürlichen Grenzen analytischer Funktionen mehrer Veränderlicher*. Dissertation, Greifswald, 1933.

[17]. LEVI, E. E., Studii sui punti singolari essenziali delle funzioni anal. di due o più var. compl. *Ann. Mat. Pura Appl.*, (3) 17 (1910).

[18]. NARASIMHAN, R., The Levi problem for complex spaces. *Math. Ann.*, 142 (1961), 355–365.

[19]. NORGUET, F., Sur les domaines d'holomorphie des fonctions uniformes de plusieurs variables complexes. *Bull. Soc. Math. France*, 82 (1954), 137–159.

[20]. OKA, K., Sur les fonctions analytiques de plusieurs variables. VI. Domaines pseudoconvexes. *Tôhoku Math. J.*, 49 (1942) 19–52.

[21]. —— Sur les fonctions analytiques de plusieurs variables. IX. Domaines finis sans point critique intérieur. *Japan J. Math.*, 23 (1954), 97–155.

[22]. REMMERT, R., Sur les espaces analytiques holomorphiquement séparables et holomorphiquement convexes. *C.R. Acad. Sci. Paris*, 243 (1956), 118–121.

[23]. ROSSI, H., Analytic spaces with compact subvarieties. *Math. Ann.*, 146 (1962), 124–145.

[24]. SCHWARTZ, L., Homomorphismes et applications complètement continues. *C.R. Acad. Sci. Paris*, 236 (1953), 2472–2475.