Proceedings of the International Congress of Mathematicians
Berkeley, California, USA, 1986

Neuere Entwicklungen in der arithmetischen algebraischen Geometrie

GERD FALTINGS

Ich möchte einige Höhepunkte in der Entwicklung der arithmetischen algebraischen Geometrie in den letzten vier Jahren darstellen darstellen. Naturgemäß ist die Auswahl rein subjektiv, und die Darstellung erhebt keinen Anspruch auf Vollständigkeit. Wir konzentrieren uns auf die folgenden vier Themen:

(a) Die Formel von Gross-Zagier,

(b) Die Vermutungen von Tate, Schafarevitsch, und Mordell,

(c) Hodge-Tate Strukturen auf der p-adischen Kohomologie,

(d) Die Beilinson-Vermutung.

Zu zweien von den obigen Themenkreisen habe ich persönlich Beiträge geleistet, und ich darf daher vielleicht mit einigem Recht versuchen, die Ergebnisse vor diesem großen Kreis von Zuhörern darzustellen. Bei den beiden anderen Gebieten muß mich darauf beschränken, das wiederzugeben, was ich in letzter Zeit aus verschiedenen Quellen gelernt habe. Meine Entschuldigung für diese sicherlich unvollkommene Darstellung besteht darin, daß die Plenar-Vorträge doch für einen weiteren Zuhörer-Kreis als die Sektions-Vorträge bestimmt sind. Für eine kompetentere Darstellung kann ich aber nur auf diese verweisen.

1. Die Formel von Gross-Zagier. Als Hintergrund dienen zwei Schwierigkeiten, die oft in der diophantischen Geometrie auftreten. Die eine ist die Bestimmung der Nullstellen-Ordnung von L-Reihen. Dies sind Verallgemeinerungen der klassischen L-Reihen. Es handelt sich um Dirichlet-Reihen $\sum a_n \cdot n^{-s}$, welche in einer Halbebene $\mathrm{Re}(s) \geq s_0$ konvergieren. Die L-Reihe gehört zu einer arithmetischen Varietät $\mathbf{X}$, und die Koeffizienten a_n berechnen sich aus dem Reduktions-Verhalten von $\mathbf{X}$ in den endlichen Stellen. Es wird vermutet, daß die L-Reihen sich zu meromorphen Funktionen auf der ganzen komplexen Ebene fortsetzen, und sogar eine Funktional-Gleichung erfüllen. Dies ist gezeigt worden für eine Reihe von arithmetischen Varietäten $\mathbf{X}$, vor allem für gewisse Shimura-Varietäten. Weiter gibt es Vermutungen, daß die Ordnungen der Nullstellen beziehungsweise Pole der L-Reihe an ganzzahligen Stellen mit geometrischen Invarianten zusammenhängen. Es handelt sich um die Vermutung von Birch und Swinnerton-Dyer und allgemeiner um die Tate-Vermutung.

Da numerische Berechnungen stets mit einem Fehler behaftet sind, kann man mit ihnen nie direkt zeigen, daß eine analytische Funktion an einer bestimmten Stelle verschwindet, sondern höchstens das Gegenteil. Dies macht es schwierig, die oben angeführten Vermutungen zu testen. Dies andere Schwierigkeit betrifft rationale Punkte auf abelschen Varietäten, speziell auf elliptischen Kurven. Man beweist relativ einfach, daß es sich um Torsionspunkte handelt, doch das Gegenteil ist etwas schwieriger. Dabei möchte man oft gerne zeigen, daß die Mordell-Weil Gruppe positiven Rang besitzt, zum Beispiel falls dies von der Vermutung von Birch und Swinnerton-Dyer vorausgesagt wird. Die Formel von B. Gross und D. Zagier erlaubt es nun in einigen Fällen, beide Probleme zu lösen. Sie liefert nämlich die Gleichheit zwischen der Néron-Tate Höhe gewisser rationaler Punkte auf speziellen elliptischen Kurven (Heegner-Punkte auf Weil-Kurven), und der Ableitung einer zugehörigen L-Reihe an der Stelle $s = 1$. Dies kann in beiden Richtungen ausgenutzt werden: Ist der rationale Punkt ein Torsionspunkt (leicht zu zeigen), so verschwindet die Ableitung der L-Reihe (schwierig). Umgekehrt: Ist die Ableitung der L-Reihe verschieden von Null (leicht), so haben wir einen Punkt unendlicher Ordnung gefunden (schwierig).

Die bekannteste Anwendung bis jetzt ist die Bestimmung effektiver unterer Schranken für die Klassenzahlen imaginär quadratischer Zahlkörper. Dies folgt aus einer älteren Arbeit von D. Goldfeld, vorausgesetzt man findet eine L-Reihe wie oben mit einer Nullstelle der Ordnung mindestens drei. Dieses aber leistet gerade die Formel von Gross und Zagier.

Alles in allem handelt es sich um eine schöne Entdeckung, welche wir aber leider noch nicht "erklären" können: Warum ist sie richtig?

Literatur: [**G1**, **G2**, **O**, **Zg**].

2. Die Mordell-Vermutung. Kommen wir zum Themenkreis der Mordell-Vermutung. Diese besagt, daß auf einer Kurve vom Geschlecht größer als eins über einem Zahlkörper nur endlich viele rationale Punkte liegen. Dies wurde 1922 von L. Mordell vermutet, in der Arbeit in welcher er bewies, daß die rationalen Punkte auf einer elliptischen Kurve ein endlich erzeugte abelsche Gruppe bilden. Allerdings schreibt Mordell selbst, daß er keinen Beweisansatz kennt, und nicht einmal plausibel machen kann warum dies so sein sollte. Die ersten Fortschritte erzielten A. Weil and C. L. Siegel: Der erste verallgemeinerte Mordell's Satz auf abelsche Varietäten, während Siegel mit Hilfe der diophantischen Approximation und A. Weil's Satz die Vermutung für ganze Punkte zeigen konnte. Allerdings führten diese Ansätze im Weiteren nicht mehr zu so großen Fortschritten, und interessanterweise benutzt der endgültige Beweis ganz andere Methoden.

Diese wurden entwickelt zum Beweis der Mordell-Vermutung über Funktionenkörpern. Dies gelang zuerst J. Manin und H. Grauert, und die für uns wichtige Methode geht zurück auf A. N. Parshin, der die Behauptung reduzierte auf die Schafarevitsch-Vermutung: Über einem Zahlkörper gibt es bis auf Isomorphie nur endlich viele abelsche Varietäten vorgegebener Dimension, welche gute Reduktion außerhalb einer festen endlichen Menge von Stellen des Körpers haben. Die Verbindung zwischen beiden Vermutungen geschieht, indem man zu einem rationalen Punkt auf einer Kurve zunächst eine Überlagerung konstruiert, welche genau über diesem Punkt verzweigt. Auf diese Weise erhält man eine neue Kurve, die schlechte Reduktion höchstens an den Stellen haben kann, wo dies der Fall ist für die ursprüngliche Kurve, plus eventuell einige weitere Stellen (zum Beispiel alle Stellen der Charakteristik zwei). Die Isomorphieklasse dieser Überlagerung bestimmt den rationalen Punkt, und man benötigt nur noch den Satz von Torelli sowie die Vermutung von Schafarevitsch für die Jacobi-Varietät der Überlagerungskurve. Diese Methode liefert übrigens auch den Satz von Siegel über ganze Punkte auf affinen elliptischen Kurven.

Wie aber zeigt man nun die Vermutung von Schafarevitsch? Sie erschien zunächst recht unwahrscheinlich, da über Funktionenkörpern wohl die Mordell-Vermutung gilt, aber nicht diese stärkere Aussage. Trotzdem kommt man bei Zahlkörpern zum Ziel, da man die Tate-Vermutung benutzen kann: Diese reduziert das Problem auf eine Frage über l-adische Darstellungen, und diese kann man einfacher lösen als das ursprüngliche Problem.

Für alles dies benötigt man etwas Information über den Modulraum der prinzipal polarisierten abelschen Varietäten, insbesondere über seine Kompaktifizierungen. Genauer gesagt geht es um die Bestimmung der Höhe einer abelschen Varietät, das heißt des zugehörigen rationalen Punktes im Modulraum. Dazu benötigt man eine Kompaktifizierung des Modulraums, ein amples Geradenbündel darauf, sowie eine hermite'sche Metrik für das Geradenbündel. Dies erforderte zunächst einige Tricks, doch mittlerweile besitzen wir eine befriedigende Theorie: Zunächst konstruiert man die toroidale Kompaktifizierung über den ganzen Zahlen. Über dieser dehnt sich die universelle abelsche Varietät aus zu einer semiabelschen Varietät, und man erhält ein Geradenbündel ω, das Determinantenbündel der relativen Differentiale dieser semiabelschen Varietät. Die globalen Schnitte der Potenzen von ω sind gerade die Siegel'schen Modulformen mit ganzzahligen Fourierkoeffizienten. Mit Hilfe von Theta-Reihen ergibt sich, daß eine Potenz von ω global erzeugt ist, und das Bild der korrespondierenden Abbildung von der toroidalen Kompaktifizierung in den projektiven Raum ist die arithmetische Version der minimalen (oder Satake-, oder Baily-Borel-) Kompaktifizierung. Nach Konstruktion gibt es darauf ein kanonisches amples Geradenbündel, und es bleibt die Definition einer guten Metrik. Wieder gibt es nur eine kanonische Wahl, nämlich Quadratintegration von Differentialen. Leider hat diese Metrik Singularitäten im Unendlichen, doch sind diese so mild, daß sie den Gang der Dinge nicht behindern.

Auf diese Weise erhält man eine einfache Definition der Höhe einer abelschen Varietät, mit der sich arbeiten läßt. Es handelt sich im Wesentlichen um das Quadrat-Integral eines Erzeugenden der ganzzahligen Differentiale. Dies liefert eine numerische Invariante der abelschen Varietät, so daß es bis auf Isomorphie nur endlich viele abelsche Varietäten gibt, für die diese Invariante nicht größer als ein fester vorgegebener Wert ist. Erwähnen wir noch daß die arithmetische Kompaktifizierung des Modulraums auch andere Anwendungen besitzt. Insbesondere ist sie sehr nützlich für eine arithmetische Theorie der Siegelschen Modulformen.

Bleibt schließlich der Beweis der Tate-Vermutung. Genauer gesagt handelt es sich nur um einen Spezialfall der allgemeinen Vermutung, betreffend Endomorphismen abelscher Varietäten. Der Beweis geht zurück auf J. Tate und J. G. Zarhin, und man braucht als neue Ingredienz nur noch die Kompaktifizierung des Modulraums der abelschen Varietäten sowie einige Resultate von J. Tate und M. Raynaud über p-divisible Gruppen. Genauer gesagt betrachtet man eine l-divisible Untergruppe der abelschen Varietät, und dividiert sukzessiv durch die verschieden Stufen dieser Untergruppe. Dies liefert eine Folge von abelschen Varietäten, und man muß zeigen, daß unendlich viele dieser isomorph sind. Dazu betrachtet man die zugehörige numerische Invariante, wie weiter oben definiert. Es reicht wenn die Folge dieser reellen Zahlen stationär wird. Es geht also darum, wie sich die Höhe einer abelschen Varietät (so wie oben definiert) bei Isogenien ändert. Man zeigt daß die Variation der Höhe in einer Isogenieklasse beschränkt ist, sogar mit einer ganz effektiv berechenbaren Schranke.

Alles in allem zeigen diese Resultate aufs neue die ungeheure Kraft der Grothendieck'schen Methoden in der algebraischen Geometrie. Man hat aber das Gefühl daß diese Sätze gewissermaßen den vorläufigen Abschluß einer Entwicklung darstellen, und daß wir neue Methoden benötigen, etwa um rationale Punkte auf Varietäten höherer Dimension zu studieren. Dieses wird sicher einiges Experimentieren erfordern, genau wie ehedem die Verhältnisse bei Kurven erarbeitet werden mußten.

Literatur: [**D**, **F2**, **F3**, **F4**, **FW**, **S1**, **S2**, **Z1**, **Z2**].

3. P-adische Darstellungen. Es handelt sich um das Studium der p-adischen étalen Kohomologie einer algebraischen Mannigfaltigkeit über einem p-adischen Körper. Man findet Beziehungen zur kohärenten Kohomologie, und erhält so eine Art von p-adischer Hodge-Theorie. Außerdem gibt es Zusammenhänge mit der kristallinen Kohomologie. Es geht dabei um A. Grothendieck's "mysterious functor."

Versuchen wir zu erklären, worum es sich handelt. Sei K ein p-adischer Körper, etwa eine endliche Erweiterung der p-adischen Zahlen $\mathbb{Q}_p$. Mit $\mathbb{C}_p$ bezeichnen wir die Komplettierung des algebraischen Abschlusses $\overline{K}$ von K, Darauf operiert stetig die Galois-Gruppe $\mathcal{G} = \mathrm{Gal}(\overline{K}/K)$, und $\mathbb{C}_p(n)$ bezeichnet den Twist mit der n-ten Potenz des zyklotomischen Charakters $\mathcal{G} \to \mathbb{Z}_p^*$. Als erstes bemerken wir, daß der ungeheuer große Körper $\mathbb{C}_p$ einer Behandlung zugänglich ist: Er enthält den Zwischenkörper, der durch die Einheitswurzeln von p-Potenzordnung erzeugt wird, und ist fast unverzweigt über diesem. Deshalb kann man viele Probleme auf den kleineren Körper zurückführen, wo man sie durch direkte Rechnung löst. Tate und Raynaud haben gezeigt, daß für eine eigentliche glatte K-Varietät $\mathbf{X}$ gilt:

$$H^1(\mathbf{X}, \mathbb{Z}_p) \otimes \mathbb{C}_p \cong H^1(\mathbf{X}, \mathcal{O}_{\mathbf{X}}) \otimes \mathbb{C}_p \oplus H^0(\mathbf{X}, \mathcal{O}_{\mathbf{X}}) \otimes \mathbb{C}_p(-1) \quad (\text{als } \mathcal{G}\text{-Moduln}).$$

Dazu sei bemerkt daß die verschiedenen Twists $\mathbb{C}_p(m)$ nicht isomorph sind, und daß ein $\mathbb{C}_p$-Vektorraum mit semilinearer $\mathcal{G}$-Aktion einen größten Unterraum besitzt, welcher isomorph zu einer direkte Summe von $\mathbb{C}_p(m)$'s ist.

Es wurde auch vermutet, und kann inzwischen beweisen werden, daß allgemeiner gilt:

$$H^n(\mathbf{X}, \mathbb{Z}_p) \otimes \mathbb{C}_p \cong \sum_{a+b=n} H^a(\mathbf{X}, \Omega^b_{\mathbf{X}}) \otimes \mathbb{C}_p(-b).$$

Insbesondere kann man damit einen rein algebraischen Beweis für das Degenerieren der Hodge Spektral-Sequenz geben. Es folgt auch die Symmetrie der Hodge-Zahlen, zumindest für projektive Varietäten. Bekanntlich reicht dies schon, um viele Resultate zu beweisen, für die man üblicherweise analytische Methoden benutzt. Ein Beispiel ist des Verschwindungssatz von Kodaira.

Die Beweismethode benutzt eine Art von intermediärer Kohomologie, in die sich die Kohomologien auf beiden Seiten der obigen Abbildung natürlich abbilden. Dies reicht, da beide Seiten alle üblichen Axiome erfüllen, wie etwa Künneth-Formel oder Poincaré-Dualität. Die Details sind etwas kompliziert, doch im Wesentlichen kann man die intermediäre Theorie wie folgt beschreiben:

Sei R ein affiner Ring der Varietät, $\overline{R}$ die p-adische Komplettierung der maximalen unverzweigten Erweiterung von R. Dann betrachte man die Galois-Kohomologie von $\overline{R}$. Die Galois-Kohomologie von $\mathbb{Z}_p$ bildet sich da hinein ab, und dies ergibt die eine natürliche Transformation. Die andere erhält man durch Betrachtung der Differentiale. Einige Details: Wir nehmen an daß R genügend viele Einheiten besitzt. Durch Adjungieren der p-Potenzwurzeln dieser Einheiten erhalten wir eine gut zu kontrollierende Erweiterung $\tilde{R}$ von R, welche unverzweigt ist in Charakteristik 0. Über $\tilde{R}$ ist $\overline{R}$ fast unverzweigt in Kodimension ≤ 2, und man kann mit einiger Mühe Resultate von $\tilde{R}$ auf $\overline{R}$ übertragen. Sei zum Beispiel $\overline{V}$ die Komplettierung des ganzen Abschlusses des diskreten Bewertungsringes V von K. Die exakte $\mathcal{G}$-lineare Sequenz

$$0 \to \Omega_{\overline{V}/V} \otimes_{\overline{V}} \overline{R} \to \Omega_{\overline{R}/R} \to \Omega_{\overline{R}/R\overline{V}} \to 0,$$

zusammen mit der Bestimmung des ersten Terms durch J. Fontaine, führt zu der gesuchten zweiten Abbildung, das heißt zu einer Beziehung zwischen Differentialen und Galois-Kohomologie.

In einigen speziellen Fällen kann man noch mehr aussagen: Man findet eine Beziehung zwischen der p-adischen étalen Kohomologie und der kristallinen Kohomologie, so daß die eine die andere eindeutig bestimmt. Dies ist ein Fall des "mysterious functor," nach dem schon A. Grothendieck gesucht hat. Der Beweis von J. Fontaine und W. Messing benutzt die "syntomic topology," und wird sicher in einem der Spezialvorträge ausführlicher dargestellt werden.

Außerdem sei erwähnt, daß Fontaine kürzlich eine weitere Vermutung von Schafarevitsch bewiesen hat: Es gibt keine abelsche Varietät über $\mathbb{Q}$, welche überall gute Reduktion hat. Der Beweis benutzt die Theorie der endlichen Gruppenschemata, und natürlich p-adische Darstellungen.

Literatur: [**F5**, **F6**, **Fo**].

4. Arithmetische Schnitt-Theorie. Beim Studium der Zahlkörper hat es sich gezeigt, daß man am besten versucht, die unendlichen Stellen und die endlichen ähnlich zu behandeln. Wenn man nun Varietäten über Zahlkörpern betrachtet, so ist es klar was man an den endlichen Stellen zu tun hat: Man benötigt gute Modelle über den entsprechenden diskreten Bewertungsringen. Was aber entspricht dem im Unendlichen? Die Erfahrung zeigt, daß man die algebraischen Objekte mit Metriken versehen muß. Wenn man zum Beispiel Geradenbündel auf einer algebraischen Kurve (über dem Zahlkörper) betrachtet, so benötigt man zunächst eine Ausdehnung auf ein Modell über den ganzen Zahlen. Dies erledigt die endlichen Stellen. Fürs Unendliche versieht man die Geradenbündel mit Metriken. Auf diese Weise hat S. Arakelov eine Schnitt-Theorie für arithmetische Flächen entwickelt, und man kann zeigen, daßein Teil der Theorie der algebraischen Flächen sich auf diesen Fall überträgt. Dies gilt etwa für den Satz von Riemann-Roch oder für den Indexsatz von Hodge.

Man macht dabei die folgenden Überlegungen: Zunächst definiert man Volumenformen auf der Kohomologie eines metrisierten Geradenbündels. Dies ist ein Resultat über Riemann'sche Flächen, also rein lokal an den unendlichen Stellen. Die Definition des Volumens ist so gemacht, daß der übliche Beweis des Satzes von Riemann-Roch für algebraische Flächen übertragen werden kann. Aus dem Riemann-Roch leitet man eine Beziehung her zwischen Schnitt-Theorie und Néron-Tate Höhen, und der Satz von Hodge folgt. Außerdem gelten einige weitere Resultate, insbesondere ist bei Kurven vom Geschlecht größer als Eins das Quadrat des dualisierenden Geradenbündels ω kleiner oder gleich Null. Was aber etwa fehlt, ist ein Analogon zur Hodge-Theorie oder zum Frobenius.

Es stellt sich nun die Frage, was man bei höheren Dimensionen tun soll. Schon an den endlichen Stellen treten neue Schwierigkeiten auf, da die Theorie der minimalen Modelle fehlt, Trotzdem haben A. Beilinson, H. Gillet, und C. Soulé eine Schnitt-Theorie entwickelt. Es handelt sich um eine sehr schöne Mischung aus Analysis und Algebra, und meiner Ansicht nach liegt hier ein reiches Feld für künftige Forschungen.

Ein verwandtes Feld sind die Beilinson-Vermutungen über spezielle Werte von L-Reihen. Dabei scheint mir ein sehr wichtiger Punkt die Frage nach der Konstruktion von Motiven. Ihre Existenz wurde von A. Grothendieck vermutet, und diente als Leitmotiv für viele kohomologische Untersuchungen. Sie sollten eine Art von universeller Kohomologie-Theorie bilden. Zur Zeit kennen wir eigentlich nur 1-Motive, und dies sind im Wesentlichen semiabelsche algebraische Gruppen. Beilinson hat mit Hilfe der algebraischen K-Theorie einige Kandidaten für Motive höherer Dimension gefunden.

Literatur: [**B1**, **B2**, **B3**, **F1**, **GS**].

LITERATUR

[B1] A. Beilinson, *Higher regulators and values of L-functions*, Modern Problems in Mathematics, VINITI Series **24** (1984), 181–238.

[B2] ——, *Notes on absolute Hodge cohomology*, preprint, 1984.

[B3] ——, *Height pairings between algebraic cycles*, preprint, 1985.

[D] P. Deligne, Seminaire Bourbaki **616** (1984).

[F1] G. Faltings, *Calculus on arithmetic surfaces*, Ann. of Math. **119** (1984), 387–424.

[F2] ——, *Endlichkeitssätze für abelsche Varietäten über Zahlkörpern*, Invent. Math. **73** (1983), 349–366.

[F3] ——, *Die Vermutungen von Tate und Mordell*, Jahresber. Deutsch. Math.-Verein. **86** (1984), 1–13.

[F4] ——, *Arithmetische Kompaktifizierung des Modulraums der abelschen Varietäten*, Lecture Notes in Math., vol. 1111, Springer-Verlag, 1985, pp. 321–383.

[F5] ——, *Hodge-Tate structures and modular forms*, submitted to Math. Ann.

[F6] ——, *P-adic Hodge-theory*, Manuscript, Princeton University, Princeton, N.J., 1985.

[Fo] J. Fontaine, *Il n'y a pas de variété abelienne sur* $\mathbb{Z}$, Invent. Math. **81** (1985), 515–538.

[FW] G. Faltings und G. Wüstholz, *Rational points*, Vieweg, Braunschweig, 1984.

[G1] D. Goldfeld, *The class number of quadratic fields and the conjecture of Birch and Swinnerton-Dyer*, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa **3** (1976), 623–663.

[G2] ——, *Gauss' class number problem for imaginary quadratic fields*, Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.) **13** (1985), 23–37.

[GS] H. Gillet und C. Soulé, *Intersection sur les variétés d'Arakelov*, C. R. Acad. Sci. Paris **299** (1984), 563–566.

[GZ] B. Gross und D. Zagier, *Points de Heegner et dérivés de fonctions L*, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. **297** (1983), 85–87.

[O] J. Osterlé, Seminaire Bourbaki **631** (1984).

[S1] L. Szpiro, Seminaire Bourbaki **619** (1984).

[S2] ——, *Séminaire sur les pinceaux arithmétiques: La conjecture de Mordell*, Astérisque **127** (1985).

[Z1] J. G. Zarhin, *Isogenies of abelian varieties over fields of finite characteristic*, Math. USSR-Sb. **24** (1974), 451–461.

[Z2] ——, *Endomorphisms of abelian varieties over fields of finite characteristic*, Math. USSR Izv. **9** (1975), 255–260.

[Zg] D. Zagier, *Modular points, modular curves, modular surfaces and modular forms*, Lecture Notes in Math., vol. 1111, Springer-Verlag, pp. 225–248.

PRINCETON UNIVERSITY, PRINCETON, NEW JERSEY 08544, USA