Proceedings of the International Congress of Mathematicians
Berkeley, California, USA, 1986

Случайные процессы в бесконечномерных пространствах

А. В. СКОРОХОД

В последние годы в теории случайных процессов все больше внимания уделяется изучению случайных процессов в бесконечномерных пространствах. Интерес к таким процессам вызван не только желанием распространить известные методы исследования конечномерных процессов, но и тем, что бесконечномерные процессы возникают и при решении ряда задач, естественных для конечномерных процессов. Те особенности и трудности, которые возникают при рассмотрении бесконечномерных процессов, связаны в первую очередь с геометрической структурой пространства. Поэтому такие трудности исчезают, если удается найти подходящее отображение исходного пространства в некоторое другое. Заметим, что упомянутые трудности появляются при рассмотрении вопросов конструктивного плана (изучение свойств выборочных функций, исследование сходимости случайных процессов, построение стохастических интегралов, определение и исследование решений стохастических дифференциальных уравнений). Общие вопросы теории меры безразличны к топологии.

В работе мы отвлекаемся от топологии фазового пространства и исследуем случайный процесс в измеримом пространстве со счетно-порожденной σ-алгеброй. Такие пространства составляют достаточно обширный класс, только такие пространства могут использоваться в приложениях. Выясняется структура измеримого процесса. Определяются некоторые инварианты процесса, которые при весьма широких ограничениях определяют процесс с точностью до неупреждающих обратимых преобразований. Среди этих инвариантов есть ранг процесса, который может быть равен или $+\infty$, или натуральному числу. Ранг и есть существенная размерность процесса. Случайной заменой времени и неупреждающим преобразованием процесс можно свести к процессу в R^∞, удовлетворяющему линейному стохастическому дифференциальному уравнению типа Ито. Ранг процесса — это число входящих в уравнение независимых винеровских процессов.

В работе без специальных ссылок используются результаты Мейера, Кунита, Ватанабе, Делашери по теории мартингалов и общей теории случайных процессов. Эти результаты широко известны и имеются в книгах этих авторов и во многих других книгах по теории случайных процессов.

1. Теорема Колмогорова. Случайный процесс определяется такими тремя объектами: (1) вероятностным пространством $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, (2) фазовым пространством $(X, \mathcal{B})$, которое является измеримым пространством, (3) отображением $x(t,\omega)\colon R_+ \times \Omega \to X$, обладающим тем свойством, что для всех $t \in R_+$ отображение $x(t,\cdot)\colon R_+ \to X$ измеримо относительно σ-алгебр $\mathcal{F}$ и $\mathcal{B}$. Функция $x(t,\omega)$ и есть случайный процесс в фазовом пространстве X, определенный на неотрицательной полупрямой R_+. Вероятностное пространство играет существенную роль лишь в том случае, когда процесс определяется с помощью некоторой конструкции. При общем рассмотрении случайных процессов основной характеристикой процесса являются конечномерные распределения. Это семейство функций

$$\mu_{t_1,\dots,t_n}(B_1,\dots,B_n) = P\{x(t_1,\omega)\in B_1,\dots,x(t_n,\omega)\in B_n\},$$
$$n=1,2,\dots,\quad t_k\in R_+,\quad B_k\in\mathcal{B}. \tag{1}$$

Эти функции удовлетворяют следующим условиям согласования:

(1)
$$\mu_{t_{i_1},\dots,t_{i_n}}(B_{i_1},\dots,B_{i_n}) = \mu_{t_1,\dots,t_n}(B_1,\dots,B_n),$$
$$\{i_1,\dots,i_n\}=\{1,2,\dots,n\},\quad n=1,2,\dots,\quad t_k\in R_+,\quad B_k\in\mathcal{B},$$

(2)
$$\mu_{t_1,\dots,t_{n-1},t_n}(B_1,\dots,B_{n-1},X) = \mu_{t_1,\dots,t_{n-1}}(B_1,\dots,B_{n-1}),$$

(3)
$$\mu_{t_1,\dots,t_n}(B,B_2,\dots,B_n)\ \text{есть мера по}\ B,\ \mu_t(X)=1.$$

Теорема Колмогорова утверждает, что для всякого набора согласованных конечномерных распределений существует случайный процесс $x(t,\omega)$, определенный на некотором вероятностном пространстве $\{\Omega,\mathcal{F},P\}$, для которого выполнено (1).

В качестве Ω можно взять пространство X^{R_+} — пространство всех X-значных функций, определенных на R_+; при этом $\mathcal{F}$ будет цилиндрической σ-алгеброй в X^{R_+}, а мера P однозначно определяется конечномерными распределениями равенством

$$P(\{x(\cdot)\colon x(t_1)\in B_1,\dots,x(t_n)\in B_n\}) = \mu_{t_1,\dots,t_n}(B_1,\dots,B_n).$$

Сам процесс $x(t,\omega)$ задан соотношением

$$x(t,\omega(\cdot)) = \omega(t),\qquad \omega(\cdot)\in X^{R_+}.$$

2. Измеримость. Пусть $x(t, \omega)$ и $\tilde{x}(t, \omega)$ два случайных процесса, заданных на одном и том же вероятностном пространстве. Они называются стохастически эквивалентными, если для всех $t \in R_+$

$$P\{x(t, \omega) = \tilde{x}(t, \omega)\} = 1.$$

Тогда еще $x(t, \omega)$ и $\tilde{x}(t, \omega)$ называются модификациями друг друга. При задании процесса конечномерными распределениями естественно не различать модификации. Дальнейшее изучение случайного процесса также не зависит от выбора модификации.

Будем называть процесс измеримым, если он имеет измеримую модификацию, т.е. такую модификацию $\tilde{x}(t, \omega)$, которая является измеримым отображением пространства $(R_+ \times \Omega, \mathcal{B}_{R_+} \otimes \mathcal{F})$ в $(X, \mathcal{B})$, $\mathcal{B}_{R_+}$ — борелевская σ-алгебра на R_+.

Для дальнейшего нам потребуются некоторые пространства случайных величин. Обозначим через $R(\Omega)$ пространство всех числовых величин на вероятностном пространстве $\{\Omega, \mathcal{F}, P\}$. Если ξ, $\eta \in R(\Omega)$, то

$$\rho(\xi, \eta) = M(1 - e^{-|\xi - \eta|})$$

есть метрика в $R(\Omega)$, относительно которой $R(\Omega)$ — полное пространство.

Пусть H_t замыкание в этой метрике множества величин вида $g(x(s_1, \omega), \ldots, x(s_n, \omega))$, где $n = 1, 2, \ldots$, $s_k \in R_+$, $s_k \le t$; $g(x_1, \ldots, x_n)$ есть B^n-измеримая функция X^n в R.

H_t — величины, определяемые течением процесса до момента t включительно.

Через H обозначим замыкание $\bigcup_t H_t$.

ТЕОРЕМА 1. *Пусть σ-алгебра $\mathcal{B}$ счетно порождена. Процесс $x(t, \omega)$ измерим тогда и только тогда, когда:* (1) *H сепарабельно,* (2) *$\mu_{s,t}(B_1, B_2)$ — борелевская функция s при любых $t \in R_+$, $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$.*

В случае счетно порожденного $(X, \mathcal{B})$ это пространство можно измеримо взаимно однозначно отобразить в отрезок $[0, 1]$. Это тем не менее не дает основания утверждать, что по существу все процессы с такими фазовыми пространствами одномерны. В дальнейшем будем предполагать, что σ-алгебра $\mathcal{B}$ счетно порождена, а процесс $x(t, \omega)$ является измеримым.

3. Определяющий поток σ-алгебр. Эволюция процесса во времени определяет изменение пространств H_t. Заметим, что эти пространства не меняются при взаимно однозначных неупреждающих преобразованиях случайного процесса, в частности взаимно однозначных отображениях фазовых пространств. Вместо семейства пространств H_t можно рассмотреть поток σ-алгебр $(\mathcal{F}_t)$, где $\mathcal{F}_t$ — σ-алгебра событий, порожденная случайными величинами из H_t. Так как $\mathcal{F}_t$ и H_t определяют друг друга, то будем изучать строение потока $(\mathcal{F}_t)$. Обозначим через $\mathcal{M}_2$ пространство квадратически интегрируемых $(\mathcal{F}_t)$-согласованных мартингалов.

ТЕОРЕМА 2. (1) $\mathcal{M}_2$ *определяет поток* $(\mathcal{F}_t)$, (2) *существует счетное множество мартингалов* $\{\eta_n(t),\ n = 1, 2, \ldots\}$ *в* $\mathcal{M}_2$ *такое, что для каждого* $t \in R_+$ *значения мартингалов плотны в* H_t.

Для дальнейшего нам потребуются следующие условия на поток $(\mathcal{F}_t)$:

(1) $\mathcal{F}$ полно относительно $\mathcal{P}$, F_t содержит все множества меры 0,

(2) $\mathcal{F}_t = \bigcap \mathcal{F}_{t+} = \bigcap_{s>t} \mathcal{F}_s$.

При выполнении этих условий мартингалы из $\mathcal{M}_2$ имеют непрерывные справа модификации без разрывов второго рода. Можно считать, что $\mathcal{M}_2$ состоит только из таких мартингалов. Будем обозначать через $\mathcal{W}$ и $\mathcal{P}$ σ-алгебры вполне измеримых и предсказуемых множеств в $R_+ \times \Omega$. Первая порождается непрерывными справа, а вторая — непрерывными согласованными процессами.

Для $\eta_1(t)$ и $\eta_2(t)$ из $\mathcal{M}_2$ обозначим через $\langle \eta_1, \eta_2 \rangle_t$ их взаимную характеристику — такой $\mathcal{P}$-измеримый процесс, что $\eta_1(t)\eta_2(t) - \langle \eta_1, \eta_2 \rangle_t$ есть мартингал. Величина $\langle \eta, \eta \rangle_t = \langle \eta \rangle_t$ — характеристика мартингала $\eta(t)$. Два мартингала $\eta_1(t)$ и $\eta_2(t)$ из $\mathcal{M}_2$ ортогональны ($\eta_1 \perp \eta_2$), если $\langle \eta_1, \eta_2 \rangle_t = 0$ для всех $t \in R_+$.

ТЕОРЕМА 3. $\mathcal{M}_2 = \mathcal{M}_2^0 \oplus \mathcal{M}_2^1 \oplus \mathcal{M}_2^2$ (*ортогональная сумма в смысле введенного понятия ортогональности*),

$\mathcal{M}_2^0$ — *пространство непрерывных мартингалов,*

$\mathcal{M}_2^1$ — *пространство чисто разрывных компенсированных мартингалов с непрерывными характеристиками,*

$\mathcal{M}_2^2$ — *пространство чисто разрывных мартингалов с чисто разрывными характеристиками.*

Это разложение имеет аналогию в известном разложении Леви процесса с независимыми приращениями на чисто разрывную ($\mathcal{M}_2^2$), стохастически непрерывную скачкообразную ($\mathcal{M}_2^1$) и непрерывную составляющие. Как мы увидим дальше эта аналогия может быть продолжена более глубоко.

4. Существенное время. Ранг. Рассмотрим пространство $\mathcal{M}_2^0 \oplus \mathcal{M}_2^1$ всех мартингалов из $\mathcal{M}_2$ с непрерывными характеристиками. Выбирая некоторую плотную последовательность мартингалов из $\mathcal{M}_2^0 \oplus \mathcal{M}_2^1$ и рассматривая их характеристики можно построить такой мартингал $\bar{\eta}(t) \in \mathcal{M}_2^0 \oplus \mathcal{M}_2^1$, что для всякого другого мартингала $\eta(t) \in \mathcal{M}_2^0 \oplus \mathcal{M}_2^1$ возрастающая функция $\langle \eta \rangle_t$ будет абсолютно непрерывна относительно возрастающей функции $\langle \bar{\eta} \rangle_t = \delta_t$. Всякую такую функцию δ_t (она представима как характеристика некоторого мартингала и относительно нее абсолютно непрерывны характеристики всех других мартингалов из $\mathcal{M}_2^0 \oplus \mathcal{M}_2^1$) будем называть существенным временем для потока $(\mathcal{F}_t)$ (или исходного процесса). Если на некотором интервале δ_t не растет, то на этом интервале исходный процесс эволюционирует детерминированно, хотя эволюция зависит от того, что происходило до этого интервала времени. Очевидно, что существенное время определяется с точностью до эквивалентности: если δ_t — существенное время и $\hat{\delta}_t$ непрерывный возрастающий согласованный процесс, для которого

$$P\{0 < d\hat{\delta}_t/d\delta_t < \infty\} = 1,$$

то $\hat{\delta}_t$ — также существенное время.

Рассмотрим теперь пространство $\mathcal{M}_2^0$. Пусть $\{\eta_n(t)\}$ плотно в $\mathcal{M}_2^0$. Ортогонализуем $\{\eta_n(t)\}$ следующим образом:

$$\xi_1(t) = \eta_1(t), \qquad \xi_r(t) = \eta_n(t) - \sum_{k=1}^{n-1} \int_0^t \alpha_{nk}(s)\, d\xi_k(s), \quad n > 1,$$

$$\alpha_{nk}(s) = \frac{d\langle \eta_n, \xi_k\rangle}{d\langle \xi_k\rangle_s}.$$

Построенная последовательность $\{\xi_k(t)\}$ обладает следующим свойством: для всякого мартингала $\eta(t) \in \mathcal{M}_2^0$ справедливо представление

$$\eta(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \int_0^t \alpha_k(s)\, d\xi_k(s), \qquad \alpha_k(s) = \frac{d\langle \eta, \xi_k\rangle_s}{d\langle \xi_k\rangle_s}.$$

Всякую последовательность, обладающую этим свойством, будем называть базисом в $\mathcal{M}_2^0$.

ТЕОРЕМА 4. *Пусть $\delta(t)$ — существенное время, $\{\xi_k(t)\}$ и $\{\tilde{\xi}_k(t)\}$ — два базиса в $\mathcal{M}_2^0$. Тогда если*

$$\nu(t) = \sum_k I_{\{d\langle \xi_k\rangle_t/d\delta(t)>0\}}, \qquad \tilde{\nu}(t) = \sum_k I_{\{d\langle \tilde{\xi}_k\rangle_t/\delta(t)>0\}},$$

то

$$P\{\int I_{\{\nu(s)\neq\tilde{\nu}(s)\}} d\delta(s) = 0\} = 1.$$

Таким образом существует не зависящая от выбора базиса такая $\mathcal{P}$-измеримая функция $r(t)$, что

$$P\{\nu(t) = r(t)\} = 1,$$

$r(t)$ называется рангом потока $(\mathcal{F}_t)$ в момент t. А величина

$$r = \inf\left\{k\colon P\left\{\int I_{\{\nu(s)>k\}} d\delta(s) = 0\right\} = 1\right\}$$

(считаем $\inf\varnothing = +\infty$) называется рангом потока $(\mathcal{F}_t)$. Ранг потока — это размерность минимального базиса в $\mathcal{M}_2^0$, это вытекает из следующего утверждения.

ТЕОРЕМА 5. *Пусть $\delta(t)$ существенное время, r — ранг $(\mathcal{F}_t)$. Существует последовательность $\mathcal{P}$-измеримых множеств $A_1 \supset A_2 \supset \cdots \supset A_r$ (эта последовательность бесконечна при $r = +\infty$) и базис $\{\xi_k(t),\ k < r+1\}$ такие, что*

$$\langle \xi_i\rangle_t = \int_0^t I_{A_i}(s)\, d\delta(s).$$

5. Примеры. Мартингалы из $\mathcal{M}_2^1 \oplus \mathcal{M}_2^2$ имеют довольно простую структуру, хотя для $\mathcal{M}_2^1$ мы укажем далее некоторый определяющий инвариант. Сейчас наша цель показать, что ранг процесса может быть различным, причем процесс при этом может быть довольно регулярным процессом в R.

ПРИМЕР 1. Пусть $x(t,\omega)$ — процесс в R^m, его компоненты $x_1(t,\omega)$, $\dots, x_m(t,\omega)$ — независимые винеровские процессы. Покажем, что его ранг $r = m$. Так как для всякого мартингала, согласованного с потоком $(\mathcal{F}_t)$, порожденным $x(t,\omega)$, справедливо представление

$$\eta(t) = \sum_{k=1}^{m} \int_0^t \varphi_k(s)\, dx_k(s,\omega),$$

то $r \neq m$. Если бы существовал базис из $r < m$ мартингалов $\eta_1(t), \dots, \eta_r(t)$ и

$$x_k(t,\omega) = \sum_{i=1}^{k} \int_0^t \alpha_{ki}(s)\, d\eta_i(s),$$

то

$$\delta_{lk}t = \sum_{i=1}^{r} \int_0^t \alpha_{ki}(s)^{\alpha_{kj}} d\langle\eta_i\rangle_s, \qquad \delta_{lk} = \sum_{i=1}^{r} \alpha_{li}\alpha_{ki}(t)\frac{d\langle\eta_i\rangle_t}{dt},$$

$l, k \leq m$, что невозможно (ранг матрицы $\|\alpha_{ki}(d\langle\eta_i\rangle/ds)^{1/2}\|$ не превосходит $r \leq m$).

ПРИМЕР 2. Пусть $\{w_k(t)\}$ последовательность независимых винеровских процессов. Положим

$$\eta_{n,n+1}(t) = \int_0^t (\operatorname{arctg} w_{n+1}(s) + \pi/2)\, dw_n(s),$$

$$\eta_{n,m}(t) = \int_0^t (\operatorname{arctg} \eta_{n+1,m}(s) + \pi/2)\, dw_n(s), \qquad m > n+1.$$

Поток $(\mathcal{F}_t^{n,m})$, порождаемый мартингалом $\eta_{n,m}(t)$, совпадает с потоком, порождаемым винеровскими процессами $w_n(t)$, $w_{n+1}(t), \dots, w_m(t)$, и его ранг равен $m - n + 1$. Легко убедиться, что существует предел в среднеквадратической сходимости $\lim_{m\to\infty} \eta_{n,m}(t) = \eta_n(t)$ и поток $\mathcal{F}_t^n$, порожденным предельным процессом, совпадает с потоком, порожденным винеровскими процессами $w_n(t)$, $w_{n+1}(t), \dots$. Он имеет ранг $+\infty$. В то же время процессы $\eta_{n,m}(t)$ и $\eta_n(t)$ — одномерные непрерывные мартингалы с дифференцируемыми характеристиками.

6. Квазинепрерывный поток $(\mathcal{F}_t)$. Случайная замена времени. Поток называется квазинепрерывным, если $\mathcal{M}_2^2$ содержит только 0. В этом случае характеристики всех мартингалов из $\mathcal{M}_2$ непрерывны. Пусть $\delta(t)$ существенное время и $\delta(t) \uparrow +\infty$ при $t \uparrow +\infty$. Положим $\tau_t = \delta^{-1}(t)$, $\tilde{x}(t,\omega) = x(\tau_t,\omega)$, $(\tilde{\mathcal{F}}_t) = (\mathcal{F}_{\tau_t})$, $\tilde{\mathcal{M}}_2$, $\tilde{\mathcal{M}}_2^0$, $\tilde{\mathcal{M}}_2^1$, $\tilde{\mathcal{M}}_2^2$ отвечают потоку $(\tilde{\mathcal{F}}_t)$.

ТЕОРЕМА 6. $\tilde{\mathcal{M}}_2 = \{\eta(\tau_t),\ \eta \in \mathcal{M}_2\}$, $\tilde{\mathcal{M}}_2^i = \{\eta(\tau_t), \eta \in \mathcal{M}_2^i\}$, $i = 0, 1, 2$. *Заметим, что процесс $\tilde{x}(t,\omega)$ не обязательно порождает $(\tilde{\mathcal{F}}_t)$, он вообще может стать неслучайным.*

Поток называется абсолютно непрерывным, если он непрерывен и существенное время абсолютно непрерывно (дифференцируемо по t). Приведенная выше замена времени приводит к тому, что поток $(\tilde{\mathcal{F}}_t)$ абсолютно непрерывен.

ТЕОРЕМА 7. *Для абсолютно непрерывного потока $(\mathcal{F}_t)$*

(1) существует последовательность винеровских процессов $\{w_k(t)\}$ и пуассоновская мера $\pi(dx \times dt)$ на R_+^2, для которой $E\pi(ds \times dx) = dx\,dt$, такие, что всякий мартингал $\eta(t) \in \mathcal{M}_2$ представим в виде

$$\eta(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \int_0^t \alpha_k(s)\,dw_k(s) + \int_0^t \int_{R_+} \gamma(s,x)[\pi(ds \times dx) - ds\,dx], \qquad (2)$$

где $\alpha_k(s)$ и $\gamma(s,x)$ — некоторые функции, измеримые относительно $\mathcal{P}$ и $\mathcal{P} \otimes \mathcal{B}_{R_+}$ соответственно, для которых при всех $t > 0$

$$P\left\{\sum \int_0^t \alpha_k^2(s)\,ds + \int_0^t \int_{R_+} \gamma^2(s,x)\,ds\,dx < \infty\right\};$$

(2) существуют такие $\mathcal{P}$-измеримые функции $r(t)$ и $\lambda(t)$, принимающие значения: первая — $0, 1, 2, \ldots, +\infty$, вторая — из R_+ или $+\infty$ такие, что $\mathcal{F}_t$ совпадает с потоком, порожденным процессами

$$\left\{\int_0^t I_{\{r(s)\ge k\}}dw_k(s), \quad k = 1, 2, \ldots; \quad \int_0^t \int_{R_+} I_{\{x \le \lambda(t)\}} \frac{1}{1+x^2} \pi(ds \times dx)\right\};$$

$r(t)$ — ранг потока. Функция $\lambda(t)$ имеет следующий смысл. Пусть $\nu(t) - \nu(s)$ при $s < t$ — число скачков всех мартингалов из $\mathcal{M}_2^1$ на отрезке $[s,t]$, тогда $\int_s^t \lambda(u)\,du$ есть компенсатор $\nu(t) - \nu(s)$; $\lambda(t)$ называется шириной пуассоновского спектра $(\mathcal{F}_t)$. Это тоже величина, инвариантная при преобразованиях процесса, сохраняющих поток.

7. Неупреждающие преобразования и стохастические уравнения. Пусть $\{\eta_n(t)\}$ — такая последовательность мартингалов из $\mathcal{M}_2$, что для всех t линейная оболочка величин $\{\eta_n(t), n \ge 1\}$ плотна в H_t. Будем предполагать, что поток абсолютно непрерывен. Тогда для каждого мартингала $\eta_n(t)$ можно записать формулу (2) с функциями $\alpha_{nk}(s)$ и $\gamma_n(s,x)$. При фиксированном x — это $\mathcal{F}_s$-измеримые случайные величины, входящие в H_s. Значит они могут быть выражены как некоторая линейная функция от $\{\eta_n(s),\ n = 1, 2, \ldots\}$. Более того, поскольку они предсказуемы, а предсказуемая проекция $\eta_n(s)$ есть $\eta_n(s-)$, то их можно рассматривать как линейные функции от $\eta_n(s-)$. Будем формально записывать эти линейные функции в виде бесконечных линейных комбинаций. (На самом деле это пределы конечных линейных комбинаций.) Если

$$\alpha_{nk}(s) = \sum a_{km}^n(s)\eta_m(s-),$$
$$\gamma_n(s) = \sum g_m^n(s,x)\eta_m(s-)$$

(функции $a_{km}^n(s)$ и $g_m^n(s,x)$ уже неслучайны), то для последовательности $\{\eta_n(t)\}$ получаем следующую систему линейных стохастических дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} d\eta_n(t) = {} & \sum_{k=1}^{\infty}\left(\sum_{m=1}^{\infty} a_{km}^r(s)\eta_m(s-)\right)dw_k(s) \\ & + \int_{R_+}\sum_{m=1}^{\infty} g_m(s,x)\eta_m(s-)[\pi(ds\times dx) - ds\,dx]. \end{aligned} \tag{3}$$

Уравнение (3) можно рассматривать как линейное уравнение в R^∞ с неограниченными операторными коэффициентами. Уточнение смысла уравнений (3), а также исследование их решений (в частности, условий единственности) — задача теории линейных стохастических дифференциальных уравнений.

Поскольку процесс $\eta_n(t)$ $\mathcal{F}_t$-измерим, а $\mathcal{F}_t$ порождено значениями процесса $x(s,\omega)$ при $s \le t$, то существует такая $\mathcal{B}_{R_+} \otimes \mathcal{B}^{R_+}$-измеримая функция $f_n(t, x(\cdot))$ из $R_+ \times X^{R_+}$ в R, что

$$\eta_n(t) = f_n(t, x(\cdot,\omega)),$$

при этом функция f_n неупреждающая: если $y_1(s) + y_2(s)$ при $s \le t$, $y_i(\cdot) \in X^{R_+}$, то $f_n(t, y_1(\cdot)) = f_n(t, y_2(\cdot))$. Отображение процесса $x(t,\omega) \to \{f_n(t, x(\cdot,\omega)), n = 1, 2, \dots\}$ в R^∞ сохраняет поток $(\mathcal{F}_t)$ и поэтому оно обратимо в обобщенном смысле. Это и есть то обратимое неупреждающее преобразование в R^∞, которое после случайной замены времени приводит квазинепрерывный процесс к процессу, удовлетворяющему системе линейных стохастических дифференциальных уравнений.

8. Некоторые выводы и задачи. 1. Вполне понятно строение квазинепрерывного потока. Он определяется такими тремя характеристиками: (а) существенным временем $\delta(t)$, которое определяется с точностью до эквивалентности для мер, порождаемых возрастающими непрерывными функциями; (б) рангом процесса $r(t)$, определенным однозначно почти всюду относительно существенного времени; (в) шириной пуассоновского спектра $\lambda(t)$, которая определяется однозначно почти всюду относительно существенного времени, если это время фиксировано.

Заметим, что функции $r(t)$ и $\lambda(t)$, определяющие поток при $\delta(t) = t$, должны быть предсказуемы относительно определяемого потока. Это накладывает на них определенные ограничения, которые следует изучить.

2. Выясняется особая роль линейных стохастических дифференциальных уравнений с неограниченными операторными коэффициентами. Изучение таких уравнений проводилось в рамках теории линейных систем при весьма жестких ограничениях, оказывается имеет смысл рассматривать такие системы без всяких ограничений.

3. Рассмотрены только некоторые преобразования процессов и потоков σ-алгебр. Весьма интересен вопрос о необратимых преобразованиях процессов (например, с помощью преобразований фазового пространства), при которых сохраняются потоки σ-алгебр.

4. Было бы полезно иметь способ доказательства квазинепрерывности потока, порожденного случайным процессом без рассмотрения пространства мартингалов, а используя лишь его конечномерные распределения. (Это возможно, например, для марковских процессов.)

5. Интерес представляет изучение общих потоков (с предсказуемыми разрывами). Здесь можно было бы использовать операцию предельного перехода для потоков с конечным числом предсказуемых разрывов.

ЛИТЕРАТУРА

1. А. В. Скороход, *О локальном строении непрерывных марковских процессов*, Теория вероятностей и ее применения 1 № 13 (1966), 381–423.

2. ——, *Операторные стохастические дифференциальные уравнения и стохастические полугруппы*, Успехи мат. наук 37 № 6 (1982), 157–183.

3. И. И. Гихман и А. В. Скороход, *Стохастические дифференциальные уравнения и их приложения*, Наук. думка, Киев, 1982.

4. А. В. Скороход, *Стохастические уравнения для сложных систем*, Наука, Москва, 1983.

Институт математики, Академии наук украинской ССР, Киев-4, СССР