

Miskolci Egyetem



GÉPÉSZMÉRNÖKI ÉS INFORMATIKAI KAR

Statika

(Oktatási segédlet a Gépészmérnöki és Informatikai Kar Bsc levelezős hallgatói részére)

KÉSZÍTETTE:

Nándori Frigyes, Szirbik Sándor

Mechanikai Tanszék, 3515 Miskolc-Egyetemváros

Miskolc, 2008.

1. Bevezetés

Ezen kézirat a Gépészmérnöki és Informatikai Kar Bsc levelezős hallgatói részére készült kivonatos anyag, amelyben a Mechanikai Tanszék által tartott Statika című tárgy előadásainak vázlata szerepel. A tárgy elsajátítását segítő anyagok találhatóak a <http://www.mech.uni-miskolc.hu> URL-címen.

A mechanika tárgya, alapfogalmak

Koordináta-rendszer: Az $\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z$ egységvektorok által kijelölt derékszögű Descartes-féle koordináta-rendszert használunk vonatkoztatási alapként, melyben az egységvektorok segítségével a tér bármely P pontja az $\vec{r}_P = x_P\vec{e}_x + y_P\vec{e}_y + z_P\vec{e}_z$ helyvektor által megadható.

Alkalmazásra kerülő test modellek:

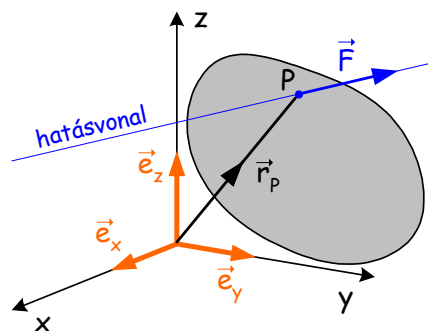
Merev test olyan idealizált test, mely alakját erő hatására nem változtatja, azaz bármely két tetszőleges pontjának távolsága állandó marad.

Szilárd test olyan idealizált test, mely alakváltozásra képes, tehát pontjainak távolsága erő hatására a pontok relatív rendezettségének megmaradása mellett megváltozhat.

Az **erőt** testek kölcsönhatásának mértékeként értelmezzük. Az erő irányított mennyiség, azaz vektor. A koncentrált erő jele az \vec{F} és mértékegysége az N [Newton].

Az $\vec{F} = F_x\vec{e}_x + F_y\vec{e}_y + F_z\vec{e}_z$ erővektort jellemzi:

- **nagysága** (mérőszáma és mértékegysége)
 $|\vec{F}| = F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2}$,
- **hatásvonala** (egyenes, mely megmutatja az erővektor helyét a térben),
- **irányítása** (hatásvonal menti két irány közül az egyiket jelöli ki).



Ha \vec{F}_1 és \vec{F}_2 erők egyszerre lépnek fel egy adott testen, akkor belőlük az $\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$ **eredő** képezhető. Két egymással párhuzamos, azonos nagyságú, de ellentétes irányú és nem közös hatásvonalú erő **erőpárt** alkot. Az erőpárnak nincs eredője, következésképp könnyen beláthatjuk azt, hogy amíg egyetlen erő eltolni és forgatni igyekszik a testet, addig az erőpár kizárólag forgató hatást, azaz **nyomatékot** fejt ki rá. Az erőpárból számított nyomatékvektor a tér minden pontjában azonosnak adódik.

További fontos észrevétel az, hogy az erő hatásvonala mentén eltolható anélkül, hogy az adott pontra számított nyomatéka megváltozna.

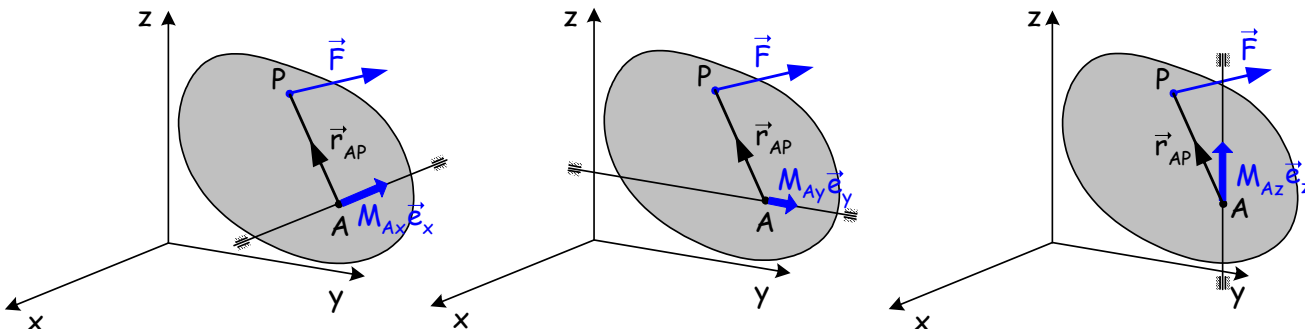
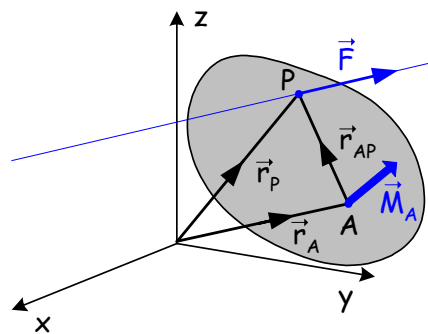
A nyomaték is vektormennyiség, jele az \vec{M} , mértékegysége pedig a Nm [Newtonméter].

Egyetlen koncentrált \vec{F} erőnek a test adott A pontjára gyakorolt nyomatéka az

$$\vec{M}_A = \vec{r}_{AP} \times \vec{F}$$

képlet alapján számítható, ahol \vec{M}_A nyomatékvektor merőleges az \vec{r}_{AP} és \vec{F} vektorok által kifeszített síkra.

Az \vec{M}_A nyomaték összetevői értelmezhetők úgy is, mint egyetlen koncentrált \vec{F} erő által kifejtett forgató hatás egy olyan csapágyazottvégű tengelyre, mely az adott A pontban a testhez mereven rögzített és valamely koordináta-tengellyel párhuzamos.



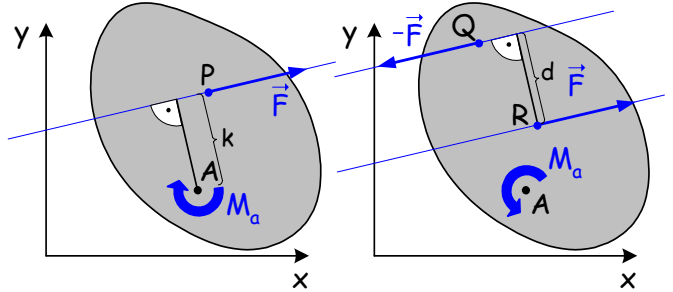
Az $\vec{M}_A = M_{Ax}\vec{e}_x + M_{Ay}\vec{e}_y + M_{Az}\vec{e}_z$ nyomatékvektor M_{Ax} , M_{Ay} és M_{Az} koordinátái az x , y és z tengelyekre vett nyomatéknak nevezzük.

Ha \vec{F}_1 és \vec{F}_2 erők egyszerre támadnak egy adott testet, akkor az A pontra vett \vec{M}_A nyomaték az \vec{F}_1 és \vec{F}_2 erők adott A pontra vett nyomatékainak összege lesz. Az \vec{F} eredő és az \vec{M}_A nyomaték ismeretében pedig az adott test tetszőleges B pontjára az

$$\vec{M}_B = \vec{M}_A + \vec{F} \times \vec{r}_{AB}$$

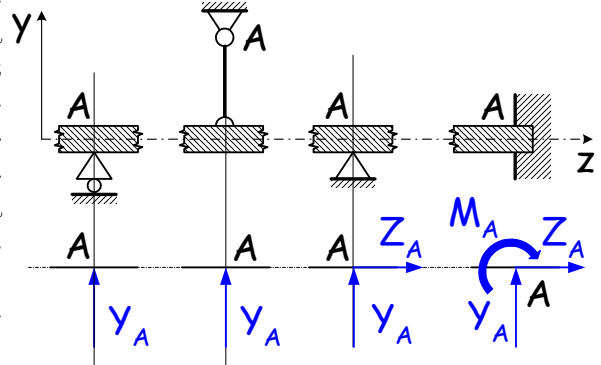
összefüggés szolgáltatja a nyomatékot, ahol \vec{r}_{AB} az A pontból B pontba mutató helyvektort jelöli.

Síkbeli erőknek síkra merőleges a tengelyre vett M_a nyomatéka számítható az erő $|\vec{F}|$ nagyságának és a k **erőkarnak** (a tengely adott síkkal vett döféspontjának az erő hatásvonalától mért távolságának) előjeles szorozatából. Az M_a nyomaték előjele a választott forgatási értelemről függ, az ábrán vázolt esetekben pozitív előjelűnek az x -ből y -ba történő forgatást tekintjük, azaz $\vec{M}_A = M_a \vec{e}_z$. Így $M_a = -k|\vec{F}|$. Egy erőpár nyomatéka pedig az erőpár d távolságának (két hatásvonal merőleges távolságának) és az erő $|\vec{F}|$ nagyságának $M_a = d|\vec{F}|$ szorozatából adódik.



Modellezés során a vizsgált testet (alkatrészt, stb.) elválasztjuk valamennyi rá hatást kifejtő testtől, majd ezek hatását erőkkel pótoljuk. A külső erők berajzolásakor megkülönböztetünk testre **terhelésként** ható ismert erőket és a támaszoknál fellépő ismeretlen **támasztóerőket**.

Támaszok: Azokat a gépelemeket, felületeket, stb, amelyekre az adott test felfekszik (támaszkodik) támasznak nevezzük. Az ábrákon a síkbeli egyszerű támaszok közül az ún. görgős, rudas, illetve csuklós megtámasztásokat, valamint a befalazást láthatjuk. Ezek a támaszok mindig pontbeliek és kétirányúak, azaz a test nem válhat el a megtámasztásától. A támaszok sematikus jelölése alatt az általuk a megtámasztott testre kifejtett \vec{F}_A támasztóerő pozitív előjelűnek, azaz tengelyirányúnak választott Y_A és Z_A koordinátáit, valamint a befalazás esetén a síkra merőleges \vec{M}_A támasztónyomaték síkban berajzolt forgatási értelmét láthatjuk.



Ha rudas támasz helyett kötel vagy lánc kerül alkalmazásra, akkor figyelni kell arra, hogy ezek az elemek csak húzóerőt képesek átvinni!

A **mechanika**, mint a fizika egy területe felbontható dinamikára és kinematikára. Dinamika a testekre ható erők tana, kinematika pedig a mozgástan. A dinamikán belül a statika az a részterület, mely az erők egyensúlyát vizsgálja, miközben a vizsgált testek relatív nyugalomban vannak. A statika felosztható **merev test statikájára** és az alakváltozásra képes test statikájára, azaz a **szilárdságtanra**.

2. Merev test statikája

A merev test statikájának feladata általában a merev testek támasztóerőrendszerének meghatározása.

Tartós nyugalom feltételei

A tartós nyugalom **szükséges feltétele** a merev testre ható külső erőrendszer egyensúlyának megléte:

$$(1) \quad \vec{F} = \vec{0} \quad \text{és} \quad \vec{M}_A = \vec{0},$$

azaz a testre ható külső erőrendszer eredője és egy tetszőleges pontra számított nyomatéka zérus.

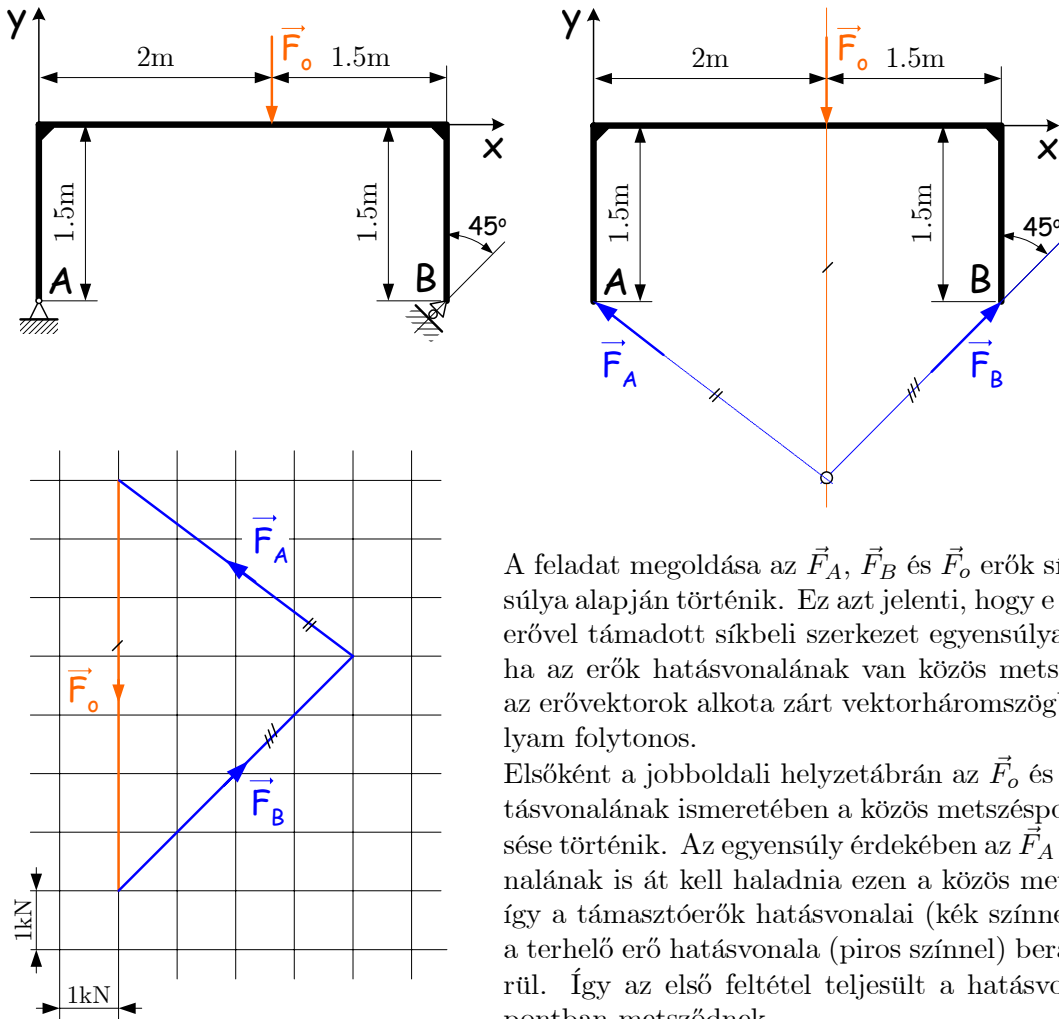
Az **elégőséges feltétel** pedig az, hogy a megtámasztások a test összes merevtestszerű mozgását gátolják, azaz a test nem mozdulhat el.

Síkbeli feladatok

Síkbeli feladatok esetén az (1) alapján a nyugalomban lévő test egyensúlyát 3 darab független skalár-egyenlet írja le. Ezek lehetnek például a síkot kijelölő két tengely irányába vett vetületi egyenletek és a sík egy tetszőleges pontján áthaladó, síkra merőleges tengelyre vett nyomatéki egyenlet. Egyes esetekben azonban célszerűbb vetületi egyenletek helyett inkább a megfelelő tengelyekre felírt nyomatéki egyenleteket használni, mivel ezek segítségével válik lehetővé a példamegoldás.

Ha a támasztóerőrendszer ismeretleneinek száma megegyezik a statikai egyenletek számával és ezekből a feladat ismeretlenei egyértelműen meghatározhatók, azaz az egymástól független statikai egyenletek száma egyezik az ismeretlenek számával, akkor a **feladat statikailag határozott** lesz.

Példa három erő síkbeli egyensúlyára: Az ábrán látható xy síkbeli keretszerkezetet saját síkjában egy koncentrált $\vec{F}_o = -7\vec{e}_y$ kN erő terheli. Az A pontban csuklós, míg B -ben egy a függőlegessel 45° szöget bezáró ferde görgős megtámasztás van kialakítva. Itt is felhívjuk a figyelmet arra, hogy a görgős támasz csak a görgőfelületre merőleges hatásvonalú támasztóerőt tud kifejteni. Határozzuk meg az \vec{F}_A , és \vec{F}_B támasztóerőket szerkesztéssel és számítással is!



A feladat megoldása az \vec{F}_A , \vec{F}_B és \vec{F}_o erők síkbeli egyensúlya alapján történik. Ez azt jelenti, hogy e három külső erővel támadott síkbeli szerkezet egyensúlya biztosított, ha az erők hatásvonalának van közös metszéspontja és az erővektorok alkotta zárt vektorháromszögben a nyílfolym folytonos.

Elsőként a jobboldali helyzetábrán az \vec{F}_o és \vec{F}_B erők hatásvonalának ismeretében a közös metszéspont megkeresése történik. Az egyensúly érdekében az \vec{F}_A erő hatásvonalának is át kell haladnia ezen a közös metszésponton, így a támasztóerők hatásvonalai (kék színnel), valamint a terhelő erő hatásvonalai (piros színnel) berajzolásra kerül. Így az első feltétel teljesült a hatásvonalak közös pontban metsződnek.

Egy lépték választása után az ismert \vec{F}_o erővektort egy O kezdőpontból kiindulva, léptékhelyesen felmérjük az erőábrán. Az így kapott \vec{F}_o vektor végpontjaiból párhuzamost húzunk az \vec{F}_A és \vec{F}_B hatásvonalaiival. A kiszerveztett vektorok irányát pedig a nyílfolymnak megfelelően berajzoljuk.

A feladat számítással történő megoldására szolgáló egyenleteket a

$$\begin{aligned} \sum Y &= 0 & \sum X &= 0 \\ -7 + Y_A + Y_B &= 0 & X_A + X_B &= 0 \end{aligned}$$

vetületi egyenletek, valamint az erők összetevői közti kapcsolatot adó, az \vec{F}_A és \vec{F}_B hatásvonalainak ismeretén alapuló

$$\frac{|X_A|}{|Y_A|} = \frac{2}{1.5} \quad \text{és} \quad |X_B| = |Y_B|$$

képletek képzik. Az \vec{F}_A és \vec{F}_B támasztóerők keresett X_A , Y_A , X_B , és Y_B komponensei ebből a négy független egyenletből meghatározhatók:

$$X_A = -4 \text{ kN}, \quad Y_A = 3 \text{ kN}, \quad X_B = 4 \text{ kN} \quad \text{és} \quad Y_B = 4 \text{ kN},$$

azaz

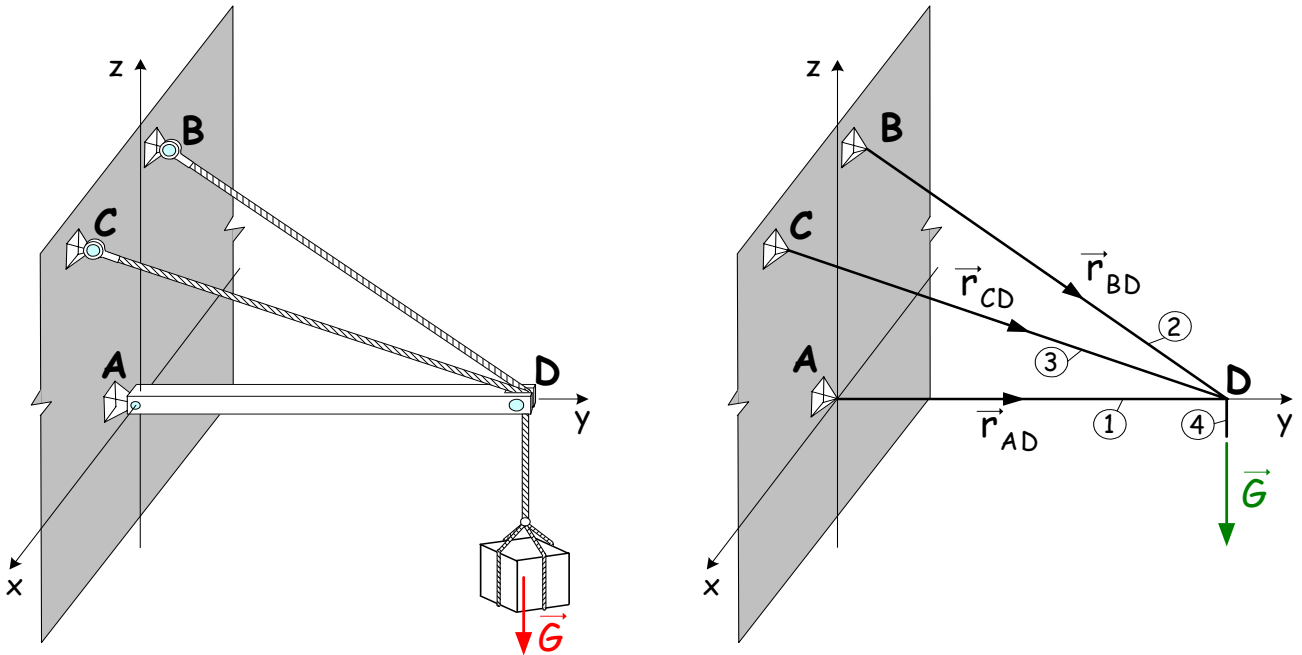
$$\vec{F}_A = (-4\vec{e}_x + 3\vec{e}_y) \text{ kN}, \quad \vec{F}_B = (4\vec{e}_x + 4\vec{e}_y) \text{ kN}.$$

MEGJEGYZÉS: Természetesen három párhuzamos erő is egyensúlyban lehet, de most ezzel külön nem foglalkozunk.

Példa térbeli közös pontban támadó erők egyensúlyára: Az alábbi szerkezet AD gerendája a B, illetve C pontoknál rögzített kötelek segítségével egy $m = 960$ kg tömegű terhet tart. A teher súlyát a súlypontjához kötött $G = mg = 960 \cdot 10 = 9600$ N = 9.6 kN nagyságú erőként vesszük figyelembe, amely a célszerűen megválasztott xyz koordináta-rendszerben $\vec{G} = (-9.6\vec{e}_z)$ kN erővektor lesz.

A teher súlya mellett a gerenda súlya elhanyagolható, így a gerendát egy súlytalan rúddal modellezzük, továbbá a köteleket is ideálisnak tételezzük fel. A feladat egyszerűsített vonalas ábráját elkészítjük, ahol a berajzolt egyenes szakaszok egyben az ébredő belső erők, az \vec{F}_i ($i = 1, \dots, 4$) kötélterők hatásvonalait is jelölik (természetesen $\vec{F}_4 = \vec{G}$).

Az adott KR-ben a vonatkozó pontok helyét az $\vec{r}_A = \vec{0}$; $\vec{r}_B = (-\vec{e}_x + 4\vec{e}_z)$ m; $\vec{r}_C = (3\vec{e}_x + 4\vec{e}_z)$ m és $\vec{r}_D = (6\vec{e}_y)$ m helyvektorok jelölik!



Feltételezés szerint a szerkezet tartós nyugalomban van. A közös pontban támadó erőrendszert, azaz a D pont egyensúlyát vizsgálva megállapíthatjuk azt, hogy az ismeretlen \vec{F}_i ($i = 1, \dots, 3$) kötélterők meghatározására szolgáló statikai egyenlet közül csak az $\vec{F} = \vec{0}$ marad, mert a másik az $\vec{M} = \vec{0}$ identikusan teljesül D-ben. A feladat jelöléseivel a vonatkozó egyenlet az

$$\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 + \vec{G} = \vec{0}$$

alakban írható fel, amely 3 db skalár egyenletet is jelent.

A megoldást a továbbiakban az $\vec{F}_i = \lambda_i \vec{a}_i$ alakban keressük, ahol \vec{a}_i az erő irányát kijelölő irányvektor, λ_i pedig a vonatkozó skalár szorzó lesz. Az irányvektorok legegyszerűbben a helyvektorokból állíthatók elő. Ez úgy történik például az \vec{a}_1 -re bemutatva, hogy az \vec{F}_1 erő hatásvonalán rajta lévő

$$\vec{r}_{AD} = \vec{r}_D - \vec{r}_A = 6\vec{e}_y - \vec{0} = (6\vec{e}_y) \text{ m}$$

helyvektort dimenziótlanjuk, azaz a mértékegységet elhagyjuk, így $\vec{a}_1 = 6\vec{e}_y$ lesz. Ezt elvégezve a másik kettőre is az

$$\begin{aligned} \vec{r}_{BD} &= \vec{r}_D - \vec{r}_B = (\vec{e}_x + 6\vec{e}_y - 4\vec{e}_z) \text{ m} & \longrightarrow & \vec{a}_2 = \vec{e}_x + 6\vec{e}_y - 4\vec{e}_z \\ \vec{r}_{CD} &= \vec{r}_D - \vec{r}_C = (-3\vec{e}_x + 6\vec{e}_y - 4\vec{e}_z) \text{ m} & \longrightarrow & \vec{a}_3 = -3\vec{e}_x + 6\vec{e}_y - 4\vec{e}_z \end{aligned}$$

jutunk. Ezek birtokában, valamint az ismert \vec{G} erő jobboldalra történő átvitele után kapjuk a

$$\lambda_1 \vec{a}_1 + \lambda_2 \vec{a}_2 + \lambda_3 \vec{a}_3 = -\vec{G}$$

vektoregyenletet.

A vektoregyenletből felírhatjuk a vonatkozó

$$\begin{aligned}\lambda_2 - 3\lambda_3 &= 0 \\ 6\lambda_1 + 6\lambda_2 + 6\lambda_3 &= 0 \\ -4\lambda_2 - 4\lambda_3 &= 9.6\end{aligned}$$

skaláregyenletekből álló egyenletrendszer, amit a lineáris algebrában megszokott módon a tömörebb

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & -3 \\ 6 & 6 & 6 \\ 0 & -4 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 9.6 \end{bmatrix}$$

alakban is meg lehet adni.

A kapott egyenletrendszer nem bonyolult és mérete is kicsi így megoldása a skaláregyenletekből is egyszerűen megkapható például a következő módon:

Az első skaláregyenletből kiindulva a

$$\lambda_2 = 3\lambda_3$$

összefüggés egyből adódik. Ezt behelyettesítve a harmadik egyenletbe juthatunk a

$$\begin{aligned}-4\lambda_2 - 4\lambda_3 &= 9.6 & / : (-4) \\ \underbrace{\lambda_2}_{3\lambda_3} + \lambda_3 &= -2.4\end{aligned}$$

alakra ahonnan a $\lambda_3 = \frac{-2.4}{4} = -0.6$ adódik és így $\lambda_2 = 3 \cdot (-0.6) = -1.8$ is ismert lesz. A második egyenletet először 6-al végig osztva, majd a λ_2 -t és λ_3 -t behelyettesítve adódik a

$$\lambda_1 - 1.8 - 0.6 = 0$$

egyenletet, melyből jutunk a $\lambda_1 = 2.4$ eredményre.

A megoldás ismeretében pedig

$$\vec{F}_1 = \lambda_1 \vec{a}_1 = 2.4 \cdot 6\vec{e}_y = (14.4\vec{e}_y) \text{ kN}$$

$$\vec{F}_2 = \lambda_2 \vec{a}_2 = -1.8 \cdot (\vec{e}_x + 6\vec{e}_y - 4\vec{e}_z) = (-1.8\vec{e}_x - 10.8\vec{e}_y + 7.2\vec{e}_z) \text{ kN}$$

$$\vec{F}_3 = \lambda_3 \vec{a}_3 = -0.6 \cdot (-3\vec{e}_x + 6\vec{e}_y - 4\vec{e}_z) = (1.8\vec{e}_x - 3.6\vec{e}_y + 2.4\vec{e}_z) \text{ kN}$$

lesz a végeredmény.

MEGJEGYZÉS: Jól látszik az ábrán, hogy a D pont egyensúlyban van, a 2 és 3 jelű köteleket

$$F_2 = \sqrt{1.8^2 + 10.8^2 + 7.2^2} \simeq 13.10 \text{ kN,}$$

illetve

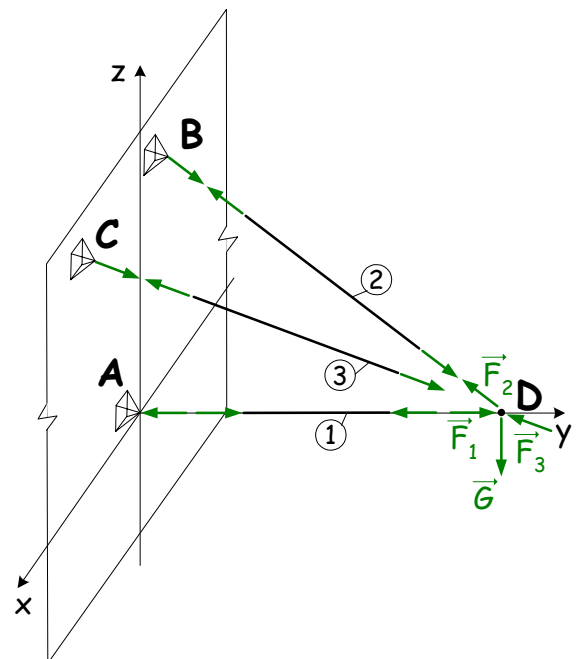
$$F_3 = \sqrt{1.8^2 + 3.6^2 + 2.4^2} \simeq 4.69 \text{ kN}$$

nagyságú erők húzzák, míg az 1 jelű rudat

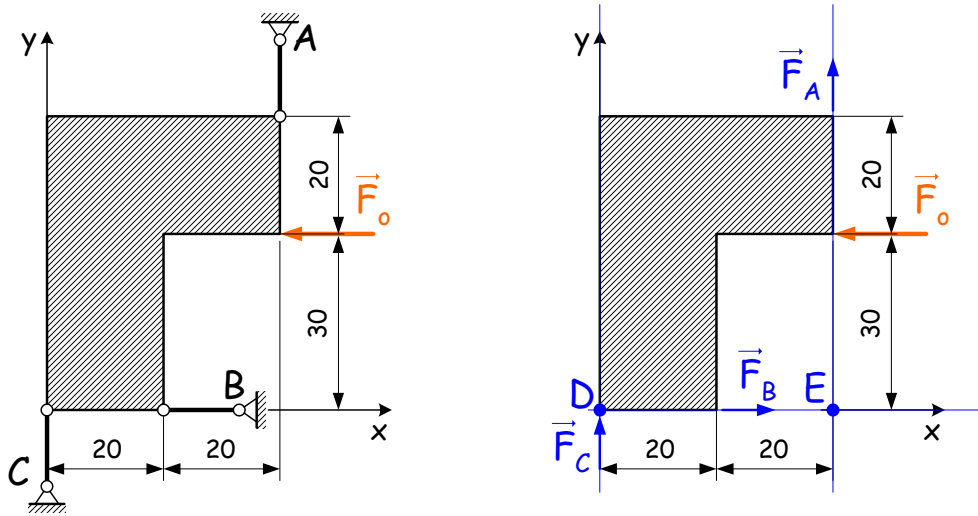
$$F_1 = 14.4 \text{ kN}$$

nagyságú erő nyomja.

Megfigyelhető továbbá az, hogy az A jelű rögzítési helyen a támaszt nyomja a gerenda, míg a C és B jelű felfüggesztési pontokat a kötelek leakarják szakítani.



Példák síkbeli megtámasztásokra: Az alábbi ábrán vázolt ún. háromrudas megtámasztású síkbeli alakzatot az $\vec{F}_o = -80\vec{e}_x$ N erő terheli. A csuklóknál végződő támasztó rudak csak rúdírányú erőket vesznek fel. A rudak közül kettő egymással párhuzamos, tehát az \vec{F}_A és \vec{F}_C erők hatásvonalai nem metsződnek a végesben. Határozzuk meg az alakzatot egyensúlyozó \vec{F}_A , \vec{F}_B és \vec{F}_C erőket!



A rudas támaszokat helyettesítő pozitív (tengelyirányúnak) feltételezett erők és ezek hatásvonalai (kék színnel) berajzolásra kerültek a jobboldali ábrán. Az ábrán látható, hogy a hatásvonalaknak metszéspontja van a D és E pontokban.

A feladat megoldása az ún. **Ritter-számítás** alapján történik, amely szerint ha a feladatbeli ismeretlen $\vec{F}_A = Y_A\vec{e}_y$, $\vec{F}_B = X_B\vec{e}_x$ és $\vec{F}_C = Y_C\vec{e}_y$ erők közül kettő hatásvonalja közös pontban metsződik, akkor a harmadik erőt meg lehet meghatározni egy nyomatéki egyenletből, mivel a metszésponton áthaladó, síkra merőleges tengelyre vett egyenletben csak egy ismeretlen (a harmadik) erőkomponens jelenik meg.

Ha pedig két erő párhuzamos, akkor a harmadik erő meghatározására a megfelelő vetületi egyenlet felírása szolgál.

Az $\vec{F}_A = Y_A\vec{e}_y$ erő számítása az elmondottak alapján a D ponton áthaladó d tengelyre vett

$$M_d \stackrel{\curvearrowright}{=} 0$$

nyomatéki egyenletből történik, ahol a pozitív forgást (x -ből y -ba) az egyenlőségjel feletti szimbólum jelöli. Természetesen az ellentétes irányú forgást is lehet pozitívnek választani, mivel az egyenlet jobboldalán 0 áll.

A feladat adatainak felhasználásával felírt egyenlet:

$$\begin{aligned} 40 \cdot Y_A + 30 \cdot |F_{ox}| &= 0 \\ 40 \cdot Y_A + 30 \cdot 80 &= 0 . \end{aligned}$$

Ezt megoldva az $Y_A = -60$ N eredményre jutunk. Az \vec{F}_A irányát eredetileg y irányúnak (\uparrow) tételeztük fel, mivel a kapott eredmény negatív szám lett, ezért az \vec{F}_A erő lefele (\downarrow) mutat.

Ennek mintájára az $\vec{F}_C = Y_C\vec{e}_y$ számítása az E ponton áthaladó e tengelyre vett $M_e \stackrel{\curvearrowright}{=} 0$ nyomatéki egyenletből történik. Innen:

$$\begin{aligned} -40 \cdot Y_C + 30 \cdot |F_{ox}| &= 0 \\ -40 \cdot Y_C + 30 \cdot 80 &= 0 . \end{aligned}$$

Végül az $Y_C = 60$ N eredményt kapjuk. Mivel eredményünk pozitív szám lett, ezért az \vec{F}_C erő az előzetes feltételezésünknek megfelelően felfele (\uparrow) mutat.

Az \vec{F}_A és \vec{F}_C erők hatásvonalai párhuzamosak, azaz végesben nem metszödnek, így a

$$\sum X = 0$$

vetületi egyenlet felírása vezet eredményre, azaz síkbeli alakzatra ható erők x irányú összetevőinek összege nyugalom esetén zérus lesz. Az egyenletbe az x irányú összetevők pozitív, a vele ellentétes irányúak pedig negatív előjellel kerülnek behelyettesítésre. Ezek alapján az

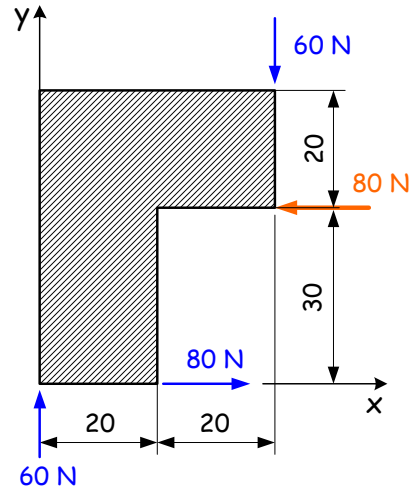
$$X_B - 80 = 0$$

egyenletből az $X_B = 80$ N, azaz \vec{F}_B erővektor jobbra (\rightarrow) mutat. A feladat megoldása során a fel nem használt y irányú

$$\sum Y \stackrel{?}{=} 0$$

vetületi egyenlet ellenőrzésre használható.

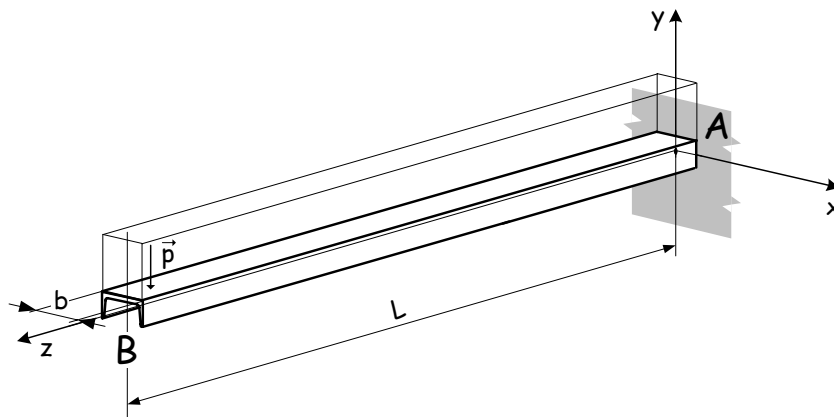
A kapott eredményeknek a feladat ábrájára történő visszarajzolása után jól látható az egyensúly teljesülése.



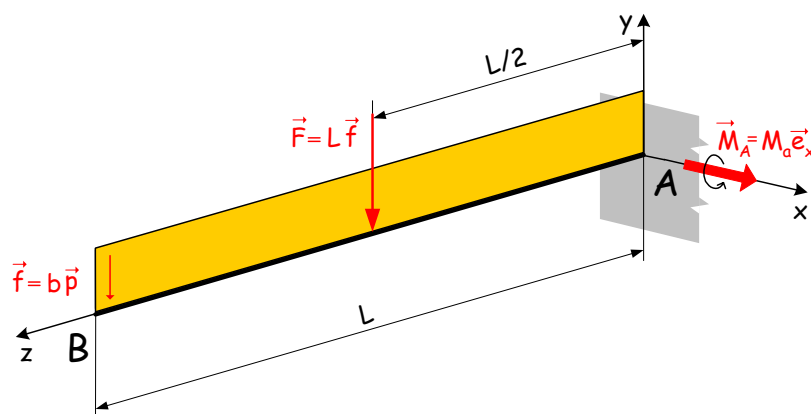
Síkbeli vonalmentén megoszló terhelés

Erőhatás két test között nem csak koncentráltan egy pontban, hanem felület és vonalmentén is átadódhat. Ismeretesek továbbá térfogaton megoszló erőrendszerek is. Az említettek közül a vonalmentén megoszlóval foglalkozunk röviden.

A vonalmenti konstans megoszló terhelés jó mechanikai modellezés abban az esetben, ha egy gerenda, vagy acélszelvény önsúlyát is figyelembe akarjuk venni, de természetesen terhelést is lehet így megadni. Az alábbi ábrán egy U acélből készült, jobbvégénél befalazott tartó látható, amely egy felületmentén megoszló \vec{p} konstans terhelésnek van kitéve.



A szerkezet egyszerűsített síkbeli mechanikai modelljét elkészítve bevezetjük a vonalmentén megoszló terhelés \vec{f} sűrűségvektorát, amelynek mértékegysége N/m.



A vonalmentén megoszló terhelés \vec{f} sűrűségvektorának iránya definiálja az őt helyettesítő \vec{F} eredő irányát is. Az eredő nagyságát pedig integrálás vagy egyszerű területszámítás útján nyerjük.

A konstans megoszló terhelés eredője és nyomatéka az A pontra az

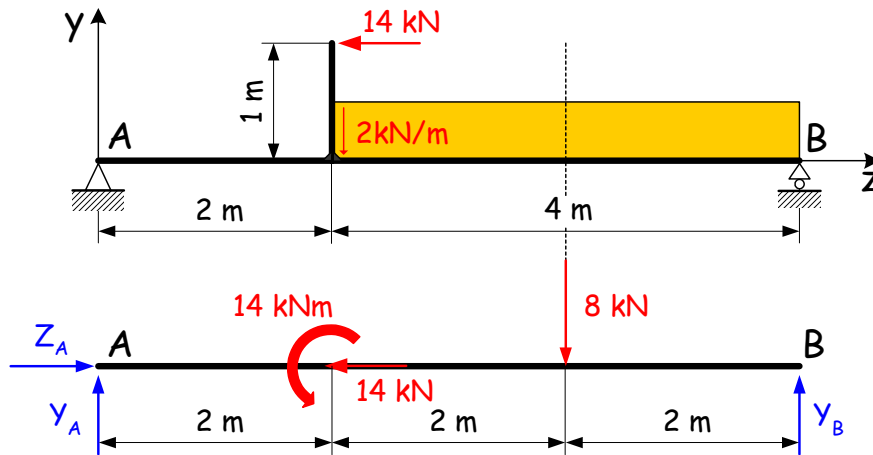
$$\vec{F} = \int_{z=z_A}^{z_B} \vec{f} dz = \vec{f}L, \quad \text{és} \quad \vec{M}_A = \int_{z=z_A}^{z_B} \vec{r} \times \vec{f} dz = \underbrace{|\vec{F}| \frac{L}{2}}_{M_a} \vec{e}_x$$

formulákból számítható, azaz nyomatékot integrálás mellett a megoszló terhelés \vec{F} eredőjét bevezetve egyszerűbben is számíthatunk.

Példa kéttámaszú tartóra: A tartószerkezetek valamilyen szálanyagból, vagy acélszelvényből készülhetnek. Statikai feladatok megoldása során a tartó keresztmetszete és anyaga nem játszik szerepet, ezért középvonalával (vonalas ábrával) helyettesítjük. A tartók (gerendák), olyan mechanikai modellek, amelyeket tengelyirányba és rá merőlegesen is terhelésnek lehet kitenni, azaz igénybevenni.

Feladat az alább vázolt tartó \vec{F}_A és \vec{F}_B támasztóerőinek meghatározása lesz. A tartó ismert külső terheléseit az ábrán piros színnel jelöltük.

Első lépésben a kényszereket a nekik megfelelő erőkomponensekkel (kék szín), a vonalmentén megoszló terhelést pedig a 8 kN nagyságú eredőjével helyettesítjük, valamint a 14 kN nagyságú koncentrált erőt is a középvonalra redukáljuk.



A korábban bemutatott Ritter-számítást alkalmazzuk. A Z_A és az Y_B erők hatásvonalai a B pontban metsződnek, ezért az Y_A meghatározása érdekében b tengelyre vett nyomatéki egyenletet írunk fel:

$$M_b \stackrel{(+)}{=} 0.$$

Az egyenletbe helyettesítéskor figyelni kell a b tengely körüli forgatási irányra és arra, hogy a B ponton áthaladó hatásvonalú erők a b tengelyre nem adnak nyomatékot. A terhelésként megjelenő nyomaték forgatási értelme ellentétes a választott pozitív forgással, így annak előjele negatív. A vonatkozó

$$6 \cdot Y_A - 14 - 2 \cdot 8 = 0$$

egyenletből az $Y_A = 5 \text{ kN}$ (\uparrow) eredményre jutunk.

A Z_A és az Y_A erők hatásvonalai az A pontban metszik egymást, ezért az Y_B meghatározása érdekében a tengelyre vett nyomatéki egyenletet írunk fel. Ekkor

$$M_a \stackrel{(+)}{=} 0 \\ -6 \cdot Y_B + 4 \cdot 8 - 14 = 0$$

a vonatkozó egyenlet, ebből az $Y_B = 3 \text{ kN}$ (\uparrow) eredmény adódik.

Ellenőrzésre a fel nem használt $\sum Y = 0$ vetületi egyenlet szolgál. A Z_A meghatározása pedig a

$$\sum Z = 0$$

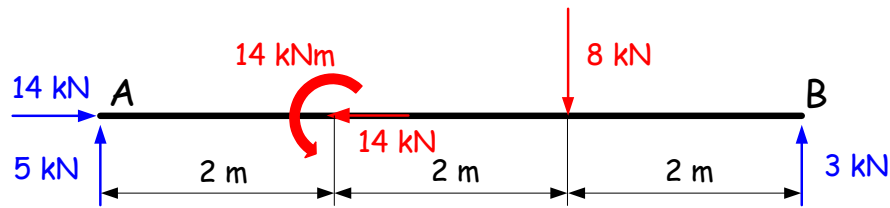
vetületi egyenletből történik, mivel Y_A és Y_B hatásvonala egymással párhuzamos. Innen

$$Z_A - 14 = 0,$$

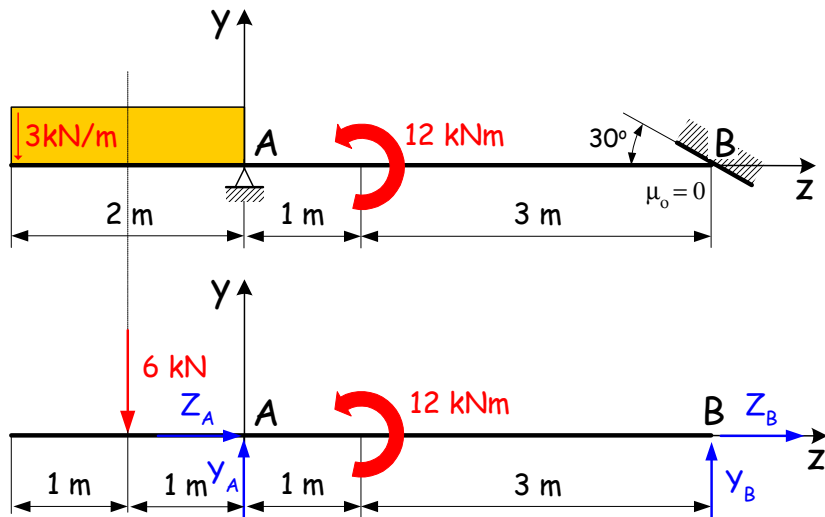
tehát a $Z_A = 14 \text{ kN}$ (\rightarrow) eredmény adódik. Így a tartó támasztóerői:

$$\vec{F}_A = (5\vec{e}_y + 14\vec{e}_z) \text{ kN} \quad \text{és} \quad \vec{F}_B = (3\vec{e}_y) \text{ kN}.$$

Az eredménytül kapott támasztóerőket ábrázoljuk:



Következő példában a gerenda jobboldali vége egy sima (súrlódásmentes, $\mu_o = 0$) felülettel van megtámasztva. Következésképpen a B pontban ébredő \vec{F}_B támasztóerő hatásvonala merőleges erre a felületre.



Mivel a Z_A és Z_B erők hatásvonala közös, így a Ritter-számítás itt is alkalmazható a függőleges Y_A és Y_B összetevők meghatározására. Így a Z_A és Z_B erők közös hatásvonala valamint az Y_B erő hatásvonala a B pontban metsződik, ezért az Y_A meghatározása érdekében a b tengelyre felírt:

$$M_b \stackrel{(+)}{=} 0$$

$$4 \cdot Y_A - 5 \cdot 6 - 12 = 0$$

nyomatéki egyenletből az $Y_A = 10.5 \text{ kN}$ (\uparrow) eredményre jutunk. Az Y_B meghatározása céljából az a tengelyre vett nyomatéki egyenletet írunk fel. Ekkor

$$M_a \stackrel{(+)}{=} 0$$

$$-1 \cdot 6 - 12 - 4 \cdot Y_B = 0$$

a vonatkozó egyenlet, amelyből az $Y_B = -4.5 \text{ kN}$ (\downarrow) lesz az eredmény. A számítást a $\sum Y = 0$ vetületi egyenlettel ellenőrizzük.

A támasztóerők Z_A és Z_B összetevőinek számításánál kihasználjuk azt a körülményt, hogy az \vec{F}_B hatásvonala valamint az Y_B és Z_B összetevők nagysága és iránya ismert. Felírhatjuk az erő két komponense közötti

$$\operatorname{tg}30^\circ = \frac{|Z_B|}{|Y_B|} \quad \rightarrow \quad |Z_B| = \operatorname{tg}30^\circ |Y_B| \cong 2.6 \text{ kN}$$

összefüggést, melyből a $Z_B \cong -2.6 \text{ kN}$ (\leftarrow) eredményre jutunk, mivel \vec{F}_B hatásvonala adott és $Y_B = -4.5 \text{ kN}$ (\downarrow) lefele mutat.

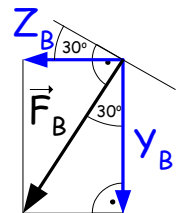
Az ismertté vált komponens birtokában a $\sum Z = 0$ vetületi egyenletből számíthatóvá válik a Z_A :

$$Z_A - 2.6 = 0$$

tehát $Z_A = 2.6 \text{ kN}$ (\rightarrow).

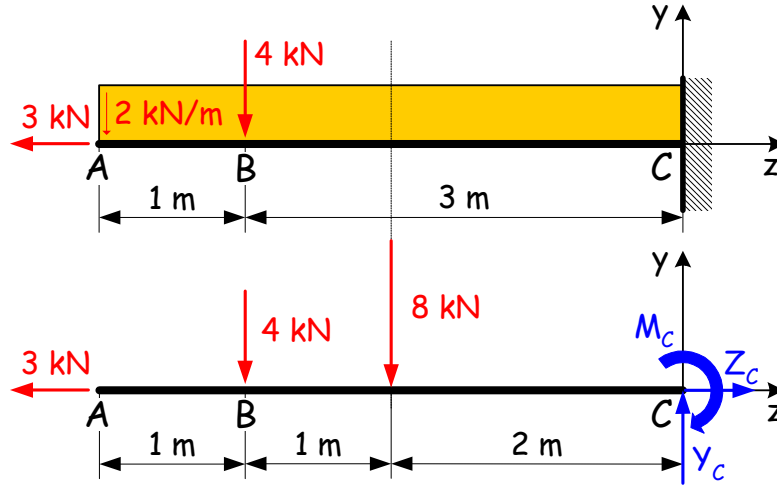
A tartó támasztóerői:

$$\vec{F}_A = (10.5\vec{e}_y + 2.6\vec{e}_z) \text{ kN} \quad \text{és} \quad \vec{F}_B = (-4.5\vec{e}_y - 2.6\vec{e}_z) \text{ kN}.$$



Példa befalazott tartóra: Az alább vázolt jobbvégén (C keresztmetszeténél) befalazott tartó támasztóerőrendszerét, azaz a C -ben ébredő \vec{F}_C erőt és \vec{M}_C nyomatékot keressük. A tartón piros színnel jelöltük a külső terheléseket.

Első lépésben a kényszereket helyettesítjük a nekik megfelelő erőkomponensekkel (kék szín) és a vonalmentén megoszló 2 kN/m intenzitású erőt helyettesítjük 8 kN nagyságú eredőjével.



Az Y_C és Z_C támasztóerő komponensek hatásvonalai a C jelű pontban metsződnek, így az M_C támasztónyomaték a c tengelyre vett

$$M_c \stackrel{(+)}{=} 0$$

nyomatéki egyenletből adódó

$$-4 \cdot 3 - 8 \cdot 2 + M_C = 0$$

összefüggésből $M_C = 28 \text{ kNm}$ lesz.

A másik két ismeretlent, az Y_C és Z_C erőkomponenseket az y és z irányú vetületi egyenletekből számítjuk, azaz a

$$\sum Y = 0$$

vetületi egyenletbe helyettesítve felírt

$$Y_C - 4 - 8 = 0$$

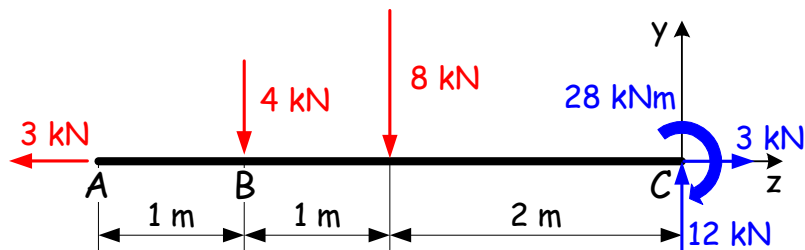
egyenletből a megoldás $Y_C = 12 \text{ kN}$ (\uparrow). A

$$\begin{aligned} \sum Z &= 0 \\ -3 + Z_C &= 0 \end{aligned}$$

egyenletből a $Z_C = 3 \text{ kN}$ (\rightarrow) adódik. A támasztóerőrendszer tehát az

$$\vec{F}_C = (12\vec{e}_y + 3\vec{e}_z) \text{ kN} \quad \text{és} \quad \vec{M}_C = 15\vec{e}_x \text{ kNm}$$

erőből és nyomatékból áll. Az eredményül kapott összetevőket ábrázoljuk:

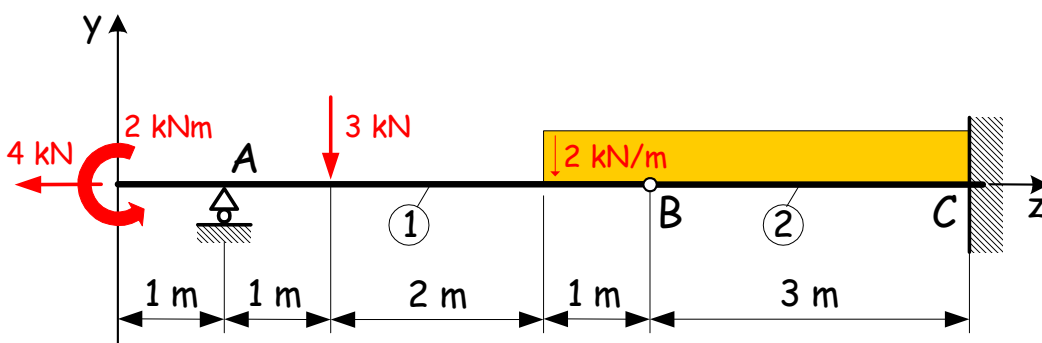


Összetett szerkezetek statikája

A nagy hosszúságú, egyenes középvonálú tartókat érdemes több helyen is alátámasztani, mivel így a lehajlás és a szükséges keresztmetszet mérete csökken. A tartó további támaszokkal történő megfogása azt eredményezi, hogy a szerkezet statikailag határozatlanná válik, ezért a statikai határozottság érdekében a tartót részekre osztó közbenső csuklót kell alkalmazni. Ezek az ún. **Gerber-tartók** tehát két, vagy több közös középvonálú tartórészből, a részeket összekötő közbenső csuklókból, valamint a megfelelően elhelyezett és kialakított támaszokból állnak, mivel csak ilyen kialakítás mellett lehetséges e többtámaszú tartók támasztóerőrendszerét tisztán statikai egyenletek felhasználásával meghatározni.

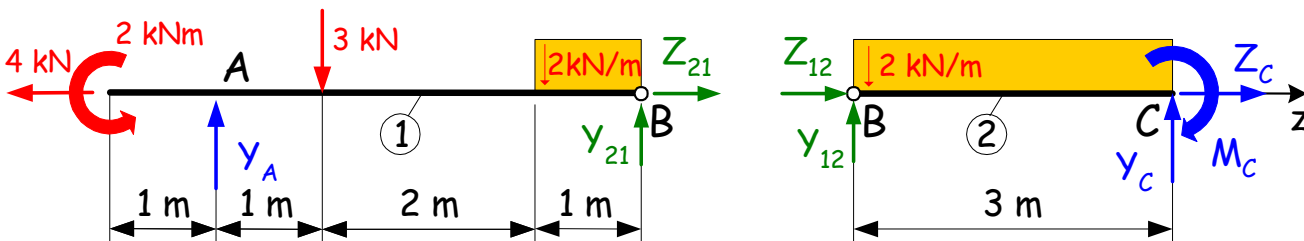
A síkbeli nyugalomban lévő, összetett szerkezet egyensúlyára három, egymástól független skaláregyenlet írható fel. A Gerber-tartók támasztóerőrendszerében megjelenő ismeretlenek száma azonban mindig több lesz ennél, így első lépésben a közbenső csuklóknál kell részszerkezetekre bontani a tartót, majd pedig a kapott részek egyensúlyát vizsgálni.

Példa: Az alábbi ábrán látható, két részből álló Gerber-tartó támasztóerőrendszerét, azaz a támaszoknál megjelenő Y_A , Y_C és Z_C erőkoordinátákat, valamint az M_C támasztónyomatékot kell meghatározni.



A csuklónál (a B pontban) elválasztott részszerkezetek egyensúlyát a B pontban megjelenő \vec{F}_{21} és \vec{F}_{12} belső erők biztosítják, melyekre a kölcsönhatás miatt az $\vec{F}_{21} = -\vec{F}_{12}$ teljesül.

A részszerkezeteken (az 1 és 2 jelű részeken) ébredő, pozitívnak feltételezett ismeretleneket berajzoltuk. Zöld szín jelöli a belső erők összetevőit, míg kék szín a támasztóerőrendszer ismeretleneit:



Vegyük észre azt, hogy az 1 jelű részen három darab ismeretlen jelenik meg, azaz a feladat megoldását az 1 jelű tartórész egyensúlyából kiindulva kezdjük meg. A korábbiakban bemutatott Ritter-számítást végezzük el, azaz Y_A meghatározása a B ponton átmenő b tengelyre felírt nyomatéki egyenletből történik, amelyből

$$M_b \stackrel{(+)}{=} 0$$

$$-2 + 4 \cdot Y_A - 3 \cdot 3 - 2 \cdot 0.5 = 0$$

a vonatkozó összefüggés, ahonnan $Y_A = 3 \text{ kN}$ (\uparrow). Ehhez hasonlóan az A ponton átmenő a tengelyre vett

$$M_a \stackrel{(+)}{=} 0$$

$$-2 + 3 \cdot 1 + 2 \cdot 3.5 - 4 \cdot Y_{21} = 0$$

nyomatéki egyenlet adja az $Y_{21} = 2 \text{ kN}$ (\uparrow) megoldást. A z irányú vetületi egyenletből pedig következik, hogy $Z_{21} = 4 \text{ kN}$ (\rightarrow). Következésképp az 1 jelű rész teljes erőjátékát sikerült tisztázni. Kihhasználva azt a körülményt, hogy az

$$Y_{12} = -Y_{21} = -2 \text{ kN} \quad (\downarrow) \quad \text{és} \quad Z_{12} = -Z_{21} = -4 \text{ kN} \quad (\leftarrow)$$

összefüggések érvényesek, a 2 jelű részen az eredetileg öt ismeretlenből csak három marad. Az M_C támasztónyomaték a c tengelyre vett

$$M_C \stackrel{(+)}{=} 0$$

nyomatéki egyenletből adódó

$$-2 \cdot 3 - 6 \cdot 1.5 + M_C = 0$$

összefüggésből $M_C = 15$ kNm nagyságú lesz.

Az y és z irányú vetületi egyenletekből következik, hogy $Y_C = 8$ kN (\uparrow), valamint $Z_C = 4$ kN (\rightarrow). A támasztóerőrendszer tehát az

$$\vec{F}_A = 3\vec{e}_y \text{ kN} \quad \text{és} \quad \vec{F}_C = (8\vec{e}_y + 4\vec{e}_z) \text{ kN}$$

erőkből és

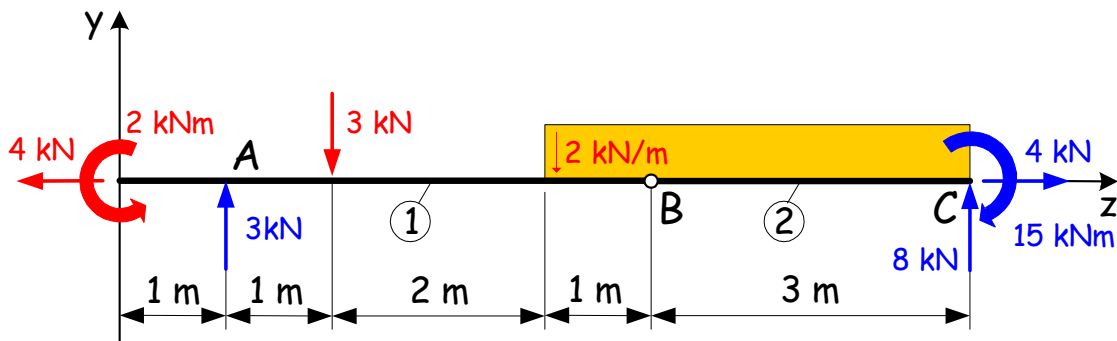
$$\vec{M}_C = 15\vec{e}_x \text{ kNm}$$

nyomatékból áll. Az

$$\vec{F}_{12} = (-2\vec{e}_y - 4\vec{e}_z) \text{ kN}$$

pedig a B pontban az 1 jelű részről a 2 jelű részre átadódó belső erő.

A kapott eredményeket a szerkezetre berajzolva szemléltetjük:



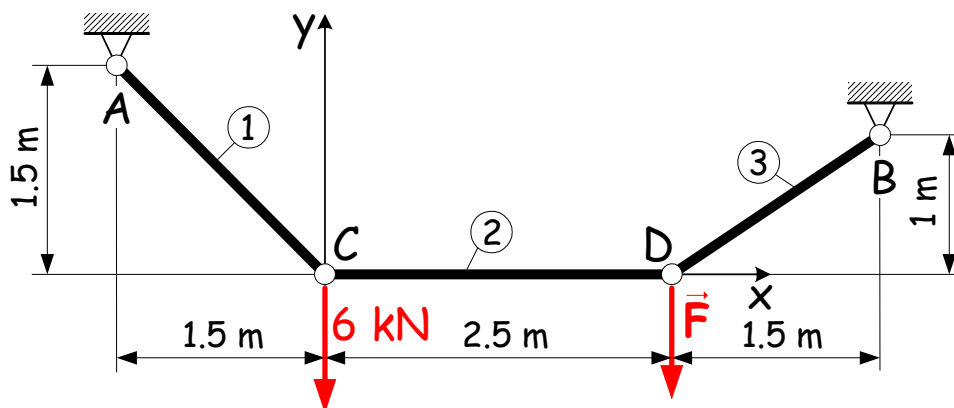
A teljes szerkezet egyensúlyát nem használtuk fel, így a vetületi egyenletek ellenőrzésre alkalmasak, azaz a

$$\begin{aligned} \sum Y \stackrel{?}{=} 0 & & \sum Z \stackrel{?}{=} 0 \\ -3 - 4 \cdot 2 + Y_A + Y_C = 0 & & -4 + Z_C = 0 \end{aligned}$$

egyenletekbe történő behelyettesítés igazolja, hogy jól számoltunk.

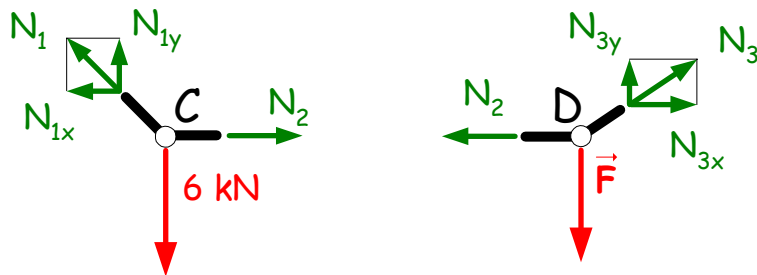
Csuklós rúdláncnak nevezzük az egymáshoz csuklóval csatlakoztatott, súlytalannak tekintett rudakból álló labilis szerkezetet.

Példa: Az ábrán látható szerkezet egyensúlyi helyzetét két erő biztosítja: a C pontban ható 6 kN nagyságú ismert és egy másik, D -ben lefele mutató ismeretlen nagyságú \vec{F} erő. Határozzuk meg az \vec{F} erőt!



A feladatban szereplő rúdlánc csak a csuklópontokban terhelt, következésképp Az 1, 2 és 3 jelű rudakban csak rúdirányú erő (rúderő) ébredhet. A rúderőt pozitívnek tekintjük ha az adott rúdcsonkból kifelé mutat, azaz a rúd húzott. Ellenkező esetben a rúd nyomott lesz.

A pozitív előjelűnek feltételezett rúderőket berajzolva a C és D csomópontok egyensúlyát vizsgáljuk:



Célszerű a koordináta-tengelyekkel nem párhuzamos N_1 és N_3 rúderőt az x és y tengellyel párhuzamos összetevőkre bontani.

A C csomópont egyensúlyát nézve egyértelmű, hogy $N_{1y} = 6 \text{ kN}$ (\uparrow). Kihasználva a fennálló hasonlóságot:

$$\frac{|N_{1x}|}{|N_{1y}|} = \frac{1.5}{1.5} \quad \Rightarrow \quad |N_{1x}| = |N_{1y}| = 6 \text{ kN}.$$

A kapott $N_{1x} = 6 \text{ kN}$ (\leftarrow) eredményt felhasználva az x irányú

$$-N_{1x} + N_2 = 0$$

vetületi egyenletben, adódik hogy a 2 jelű rúd húzott $N_2 = 6 \text{ kN}$

Az $N_2 = 6 \text{ kN}$ birtokában a D pont egyensúlyából következik, hogy $N_{3x} = 6 \text{ kN}$ (\rightarrow). A hasonlóságot ismételten felhasználva kapjuk, hogy

$$\frac{|N_{3y}|}{|N_{3x}|} = \frac{1}{1.5} \quad \Rightarrow \quad |N_{3y}| = \frac{1}{1.5}|N_{3x}| = 4 \text{ kN},$$

azaz a 3 jelű rúd is húzott:

$$N_3 = \sqrt{(N_{3x})^2 + (N_{3y})^2} = \sqrt{6^2 + 4^2} \cong 7.21 \text{ kN} \quad \text{--->}$$

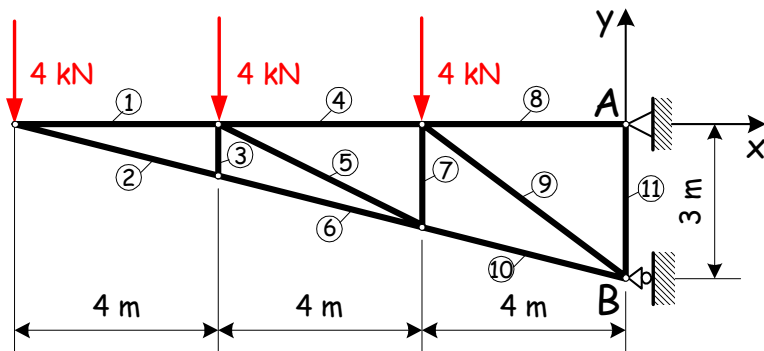
Az y irányú erők egyensúlyából felírt

$$N_{3y} - F = 0$$

egyenletből kapjuk, hogy az ábrán vázolt helyzet előáll, ha $\vec{F} = (-4\vec{e}_y) \text{ kN}$.

Rácsos szerkezet, olyan mechanikai modell, melyben az egymáshoz csuklók segítségével csatlakozó, súlytalanok tekintett, egyenes rudak stabil szerkezetet alkotnak. A szerkezetre ható külső erők a csuklópontokban működnek, így a szerkezet összes rúdjában kizárólag rúdirányú belső erő ébred.

Példa: Feladat az ábrán látható szerkezet kijelölt rúdjában ébredő rúdirányú erők (rúderők) meghatározása lesz.



A feladat végrehajtása során kétféle technikát alkalmazunk az ún. csomóponti, valamint az átmetsző-módszert. Az elsőben vetületi egyenleteket írunk fel, míg a másodikban nyomatéki egyenleteket is használunk.

Elsőként az 1 és 2 jelű rudakban ébredő rúderők meghatározását végezzük el a csomóponti módszer segítségével. Itt a megfelelő csomópont (ahová mindkét jelzett rúd befut) egyensúlyát írjuk fel. A csomópontban a 4 kN nagyságú erőnek, valamint az N_1 és N_2 rúderőknek (amelyeket úgyis fel lehet fogni, mint az elhagyott részek hatását) kell egyensúlyban lenni. Az ismeretlen rúderőket érdemes a kirajzolt csomópont ábráján a húzott rúdnak megfelelően a rudak csonkjából kifele mutatónak felvenni.

A vetületi egyenletek miatt célszerű a koordináta-tengelyekkel nem párhuzamos N_2 rúderőt az x és y tengellyel párhuzamos összetevőire, azaz az N_{2x} és N_{2y} jelű erőkre bontani. Az ábrán jól látszik, hogy y

irányba csak egy ismeretlen lesz, ezért az y irányú

$$\begin{aligned}\sum Y &= 0 \\ -4 - N_{2y} &= 0\end{aligned}$$

vetületi egyenletet képezzük, ahonnan $N_{2y} = -4$ kN (\uparrow) lesz. A kapott szám negatív, következésképp az N_2 irányát fordítva tételeztük fel. Az N_{2y} összetevő irányának változása miatt az N_{2x} is előjelet vált, azaz $N_2 < 0$, tehát a 2 jelű rúd nyomott lesz.

Az N_{2x} nagyságát a hasonló háromszögek tételéből számíthatjuk. Mivel N_2 rúdirányú, ezért N_{2x} és N_{2y} összetevői szükségképpen arányosak a 2 jelű rúd x és y vetületeivel, vagy még egyszerűbben az 1, 2 és 3 jelű rudak alkotta háromszög megfelelő oldalainak nagyságával, tehát

$$\frac{|N_{2x}|}{|N_{2y}|} = \frac{4}{1} \quad \Rightarrow \quad |N_{2x}| = \frac{4}{1}|N_{2y}| = 16 \text{ kN.}$$

Az N_{2x} irányát az előbb meghatároztuk, így $N_{2x} = -16$ kN (\leftarrow). A két összetevő birtokában pedig

$$N_2 = -\sqrt{(N_{2x})^2 + (N_{2y})^2} = -\sqrt{16^2 + 4^2} \cong -16.49 \text{ kN} \quad \rightarrow \boxed{} \leftarrow$$

ismertté vált. Mivel N_{2x} nagysága és iránya tisztázott a

$$\begin{aligned}\sum X &= 0 \\ N_1 + N_{2x} &= 0\end{aligned}$$

vetületi egyenletből behelyettesítés után nyert

$$N_1 - 16 = 0$$

egyenletből az $N_1 = 16$ kN adódik, azaz az 1-es rúd húzott $\leftarrow \boxed{} \rightarrow$.

Az átmetsző-módszer segítségével meghatározzuk a 8, 9 és 10 jelű rudakban ébredő rúderőt. Ehhez a szerkezet 8, 9 és 10 jelű rúdjánál úgy metszük át a tartót, hogy az két különálló részre esik.

A jobboldali részt elhagyjuk és a fennmaradó részre berajzoljuk az N_8 , N_9 és N_{10} rúderőket. A részszerkezeten a három rúderő lesz az ismeretlen, ezért a korábbiak alapján itt is megfelelő helyre felírt nyomatéki egyenletekkel érdemes dolgozni. Mivel N_9 és N_{10} hatásvonala nem párhuzamos, ezért N_8 számítása a B metszésponton áthaladó síkra merőleges b tengelyre felírt

$$M_b \stackrel{(+)}{=} 0$$

egyenletből történik, ahonnan

$$3 \cdot N_8 - 4 \cdot 4 - 4 \cdot 8 - 4 \cdot 12 = 0.$$

Így $N_8 = 32$ kN eredmény adódik, azaz a 8-as rúd húzott $\leftarrow \boxed{} \rightarrow$.

Az N_8 és N_9 hatásvonala az ábrán látható módon a C pontban metsződik az ide felírt

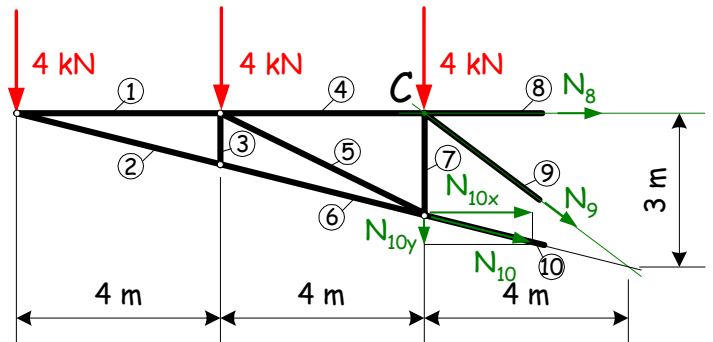
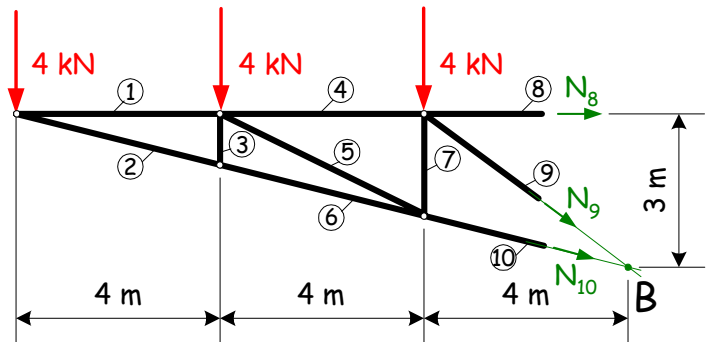
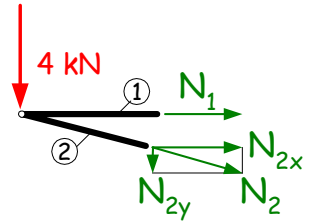
$$M_c \stackrel{(+)}{=} 0$$

egyenletből elvileg az N_{10} számítható. Az N_{10} azonban

nem párhuzamos valamely koordináta-tengellyel, ezért a rúderő felbontásra kerül. Kihhasználva azt, hogy az erő hatásvonala mentén eltolható anélkül, hogy nyomatéka az adott pontra változna, az N_{10} erőt a C pont alatti csomópontban bontjuk fel. Ebből következik az, hogy az N_{10y} hatásvonala áthalad a C ponton, így a c tengelyre csak az N_{10x} ad nyomatékot. Az adódó

$$-2 \cdot N_{10x} - 4 \cdot 4 - 4 \cdot 8 = 0$$

egyenletből pedig kapjuk, hogy $N_{10x} = -24$ kN (\leftarrow).



Az N_{10y} erőkomponens előállítására úgy is történhet, hogy az N_{10} erőt hatásvonalára mentén most a C ponttal egy magasságba toljuk fel, de eljárhatunk a hasonlóságot kihasználva is, azaz

$$\frac{|N_{10y}|}{|N_{10x}|} = \frac{1}{4} \quad \Rightarrow \quad |N_{10y}| = \frac{1}{4}|N_{10x}| = 6 \text{ kN.}$$

Az N_{10y} iránya felfelé mutat, mivel N_{10x} irányát ellentétesen választottuk meg, azaz $N_{10y} = -6 \text{ kN}$ (\uparrow). Innen

$$N_{10} = -\sqrt{(N_{10x})^2 + (N_{10y})^2} = -\sqrt{24^2 + 6^2} \cong -24.74 \text{ kN} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\leftarrow \rightarrow}$$

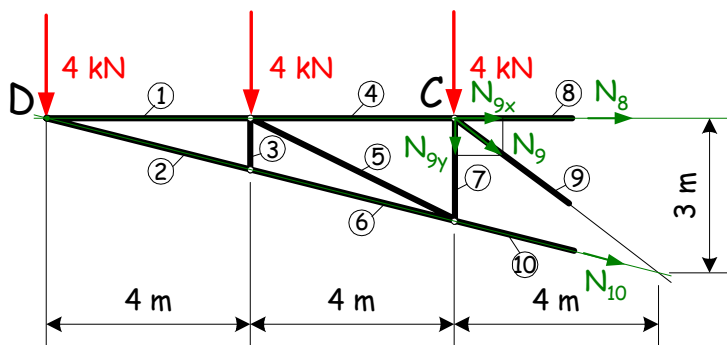
lesz, azaz a 10-es rúd nyomott.

Az N_9 rúderő számítása kétféle módon is történhet. Mivel az N_8 és az N_{10} rúderők már ismertek így csak N_9 két összetevője marad ismeretlen a részszerkezeten, ezért N_9 összetevőit vetületi egyenletek felírásából is meg lehet határozni, ámbar ebben az esetben az ellenőrzési lehetőségünk is elvész.

Az N_{10} számításánál bemutatott technikát követve pedig a keresett N_9 rúderőt a C pontba tolva felbontjuk és az N_8 , N_{10} rúderők hatásvonalának D metszéspontján áthaladó d tengelyre vett

$$M_d \stackrel{(+)}{=} 0$$

nyomatéki egyenletet írjuk fel.



Az így nyert

$$8 \cdot N_{9y} + 4 \cdot 4 + 4 \cdot 8 = 0$$

egyenletből az $N_{9y} = -6 \text{ kN}$ (\uparrow) adódik. Következésképp az N_{9x} és N_9 is előjelet, azaz irányt vált. Hasonlóságot figyelembevéve kapjuk, hogy

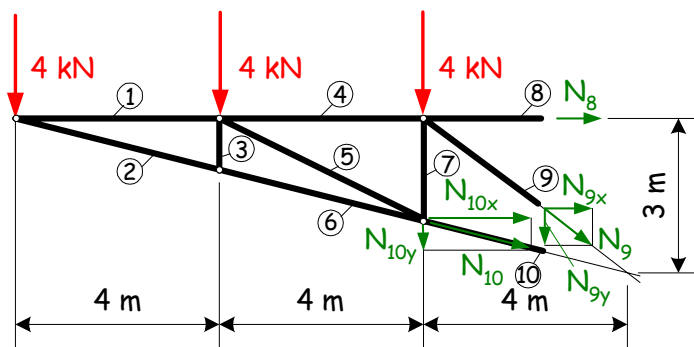
$$\frac{|N_{9x}|}{|N_{9y}|} = \frac{4}{3} \quad \Rightarrow \quad |N_{9x}| = \frac{4}{3}|N_{9y}| = 8 \text{ kN}$$

és $N_{9x} = -8 \text{ kN}$ (\leftarrow). A két összetevő birtokában pedig a 9 jelű rúd egy

$$N_9 = -\sqrt{(N_{9x})^2 + (N_{9y})^2} = -\sqrt{6^2 + 8^2} = -10 \text{ kN} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\leftarrow \rightarrow}$$

nagyságú erővel nyomott rúd lesz.

A számítások ellenőrzése pedig a részszerkezet egyensúlyát kifejező vetületi egyenletekkel lehetséges.



A vonatkozó egyenletek a

$$\begin{array}{l} \sum X \stackrel{?}{=} 0 \\ N_8 + N_{9x} + N_{10x} = 0 \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{és} \\ \text{és} \end{array} \quad \begin{array}{l} \sum Y \stackrel{?}{=} 0 \\ -4 - 4 - 4 - N_{9y} - N_{10y} = 0 \end{array}$$

amelyekbe helyettesítve kapjuk, hogy

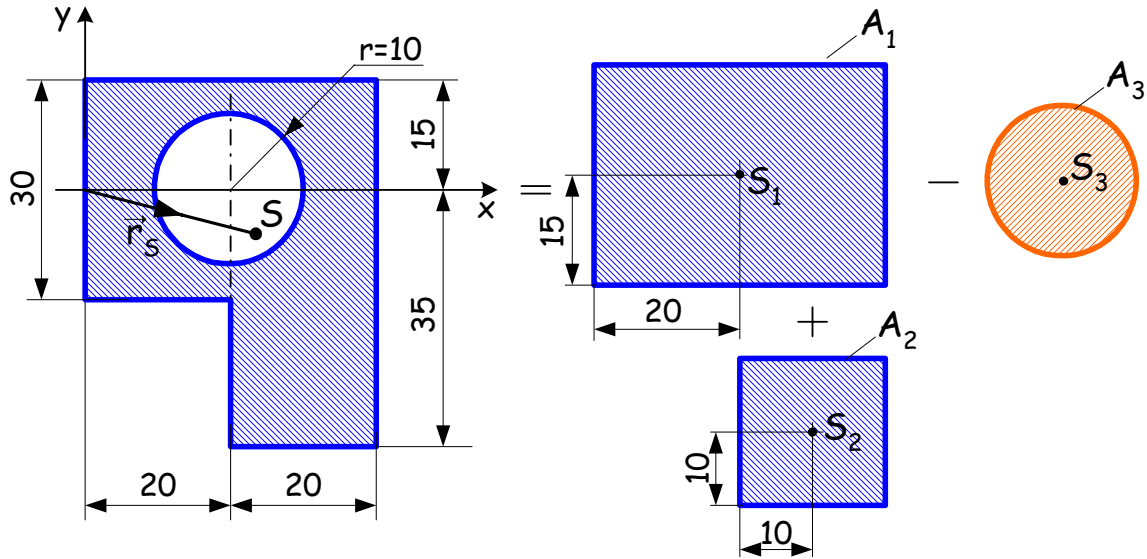
$$32 - 8 - 24 = 0 \quad \text{és} \quad -4 - 4 - 4 + 6 + 6 = 0.$$

A szerkezet többi rúdjában ébredő rúderő a bemutatott módszerekkel számítható.

MEGJEGYZÉS: Előfordul, hogy nem sikerül szétválasztani a szerkezetet úgy, hogy a széteső részeken az ismeretlen rúderők száma kettő vagy három legyen. Ilyenkor a megoldás érdekében az előbbi technikákat vegyítve kell alkalmazni.

Síkidom súlypontja

A síkbeli felületek súlypontjának meghatározását az alábbi példán mutatjuk be (a méretek mm-ben értendőek!):



A felületet egyszerűbb alakzatokra bontjuk, amelyek súlypontja (középpontja) már jól ismert. Ezek területei

$$A_1 = 30 \cdot 40 = 1200 \text{ mm}^2, \quad A_2 = 20 \cdot 20 = 400 \text{ mm}^2 \quad \text{és} \quad A_3 = \frac{20^2 \cdot \pi}{4} = 100\pi \text{ mm}^2 \cong 314.16 \text{ mm}^2$$

nagyságúak, valamint súlypontjaiknak

$$\vec{r}_{S_1} = (20\vec{e}_x) \text{ mm}, \quad \vec{r}_{S_2} = (30\vec{e}_x - 25\vec{e}_y) \text{ mm} \quad \text{és} \quad \vec{r}_{S_3} = (20\vec{e}_x) \text{ mm}$$

a helyvektora az xy koordináta-rendszerben. A megadott alakzat tehát két darab (kék színű) négyzög összegéből és az ebből kivont (piros) körből áll össze. A területek és súlypontok helyvektorait felhasználva az

$$\vec{r}_S = \frac{A_1\vec{r}_{S_1} + A_2\vec{r}_{S_2} - A_3\vec{r}_{S_3}}{A_1 + A_2 - A_3} = \frac{1200 \cdot (20\vec{e}_x) + 400 \cdot (30\vec{e}_x - 25\vec{e}_y) - 314.16 \cdot (20\vec{e}_x)}{1285.84} \cong (23.11\vec{e}_x - 7.77\vec{e}_y) \text{ mm}$$

képlet szerint számítjuk az origóból az alakzat S súlypontjába mutató \vec{r}_S helyvektort.

MEGJEGYZÉS: A számítás általánosítható szimmetrikus részekből felépülő térfogatra, homogén testre és vonalelemre is.

Súrlódás

Nyugalomban lévő, érdes felületű testek érintkezésekor mindig a Coulomb-féle súrlódási törvényt (μ_o nyugvásbeli súrlódási tényezőt) alkalmazzuk az általunk vizsgált statikai feladatokban, ahol az érintkező testek deformációja elhanyagolhatóan kicsi.

Az átadódó erők a testek közös érintkezési síkjába eső F_t komponense és e közös síkra merőleges F_n komponens között fennáll az

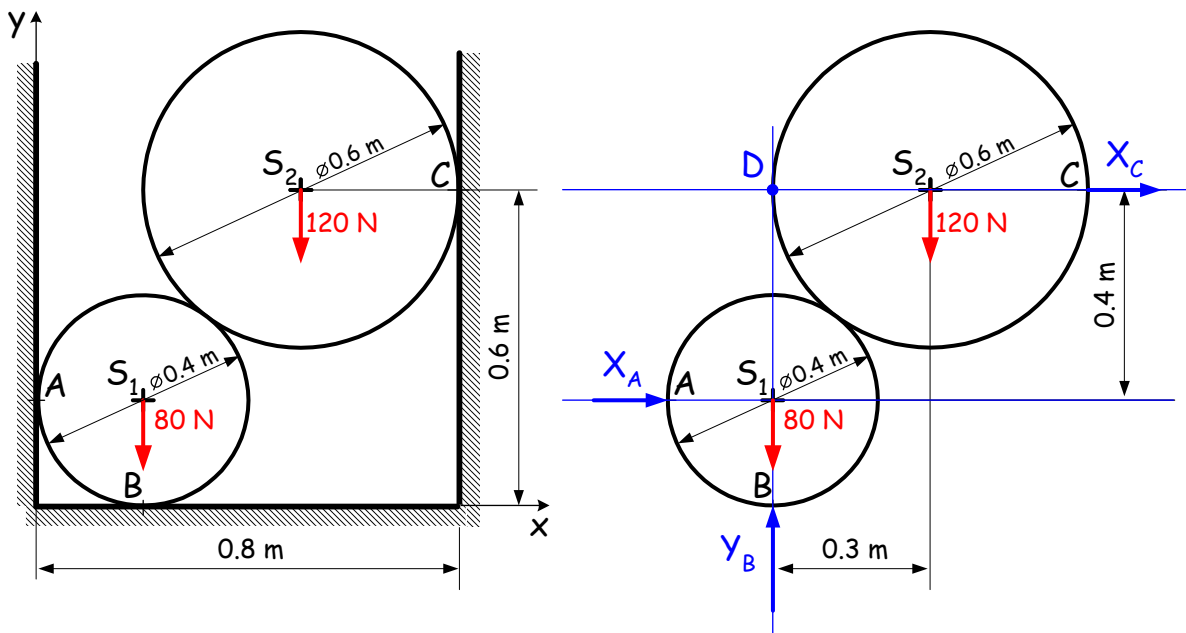
$$F_t \leq \mu_o F_n$$

összefüggés, ahol $0 \leq \mu_o$.

Ha az érintkező felületek simák ($\mu_o = 0$), akkor a testek közt átadódó erők a közös érintkezési síkra mindig merőlegesek.

További összetett szerkezetek

Példa: Két darab hengert az ábrán vázolt módon helyeznek egymásra egy vágatban. Határozzuk meg a támasztóerőket, azaz számítsuk ki számszerűen az \vec{F}_A , \vec{F}_B és \vec{F}_C erőket! Az érintkező felületek simák!



Sima falhoz támaszkodó hengerek esetén és a hengereket együttesen kezelve az adott falszakaszra merőleges X_A , X_C és Y_B összetevők maradnak meg ismeretlenként az \vec{F}_A , \vec{F}_B és \vec{F}_C jelű támasztóerőkben. Ezeket az összetevőket hatásvonalalaikkal együtt (kék színnel) bejelöltük a jobboldali ábrán. Egyszerű geometriai összefüggések által a hatásvonalak egymástól mért távolsága könnyen meghatározható.

A három ismeretlen meghatározásakor elegendő a teljes szerkezet (két henger együttes) egyensúlyát vizsgálni. Egyetlen merev test esetén alkalmazott eljárás itt is érvényes, tehát az X_A és az Y_B hatásvonalának metszéspontjára vett

$$M_{s_1} \stackrel{(+)}{=} 0$$

nyomatéki egyenlet kerül felírásra, azaz

$$0.3 \cdot 120 + 0.4 \cdot X_C = 0.$$

Eredményül az $X_C = -90 \text{ N}$ (\leftarrow) kapjuk. Ehhez hasonlóan az X_C és az Y_B hatásvonalának D metszéspontjára vett

$$M_d \stackrel{(+)}{=} 0$$

nyomatéki egyenletből származtatott

$$0.3 \cdot 120 - 0.4 \cdot X_A = 0$$

egyenletből adódik az $X_A = 90 \text{ N}$ (\rightarrow) eredmény.

Az Y_B komponens számítása pedig a

$$\begin{aligned} \sum Y &= 0 \\ -80 - 120 + Y_B &= 0 \end{aligned}$$

vetületi egyenletből történik. Így $Y_B = 200 \text{ N}$ (\uparrow).

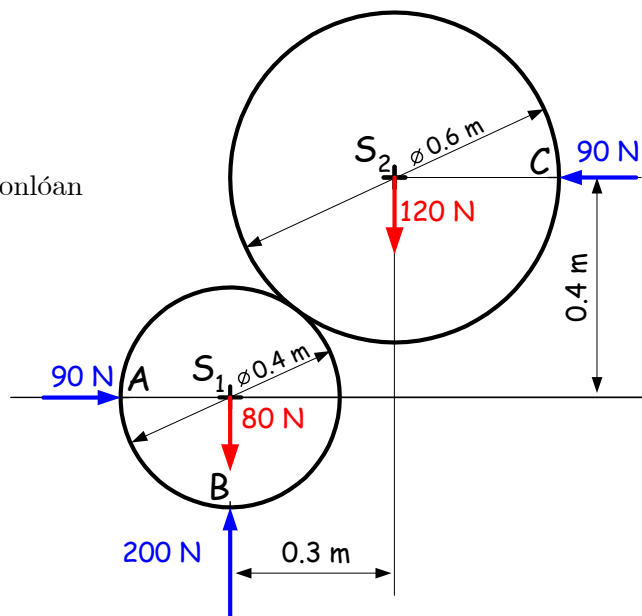
A számítások helyességének ellenőrzésére a fel nem használt $\sum X = 0$ egyenlet szolgál, tehát meggyőződhetünk az x irányú erőkomponensek egyensúlyáról az itt érvényes

$$X_A + X_C \stackrel{?}{=} 0$$

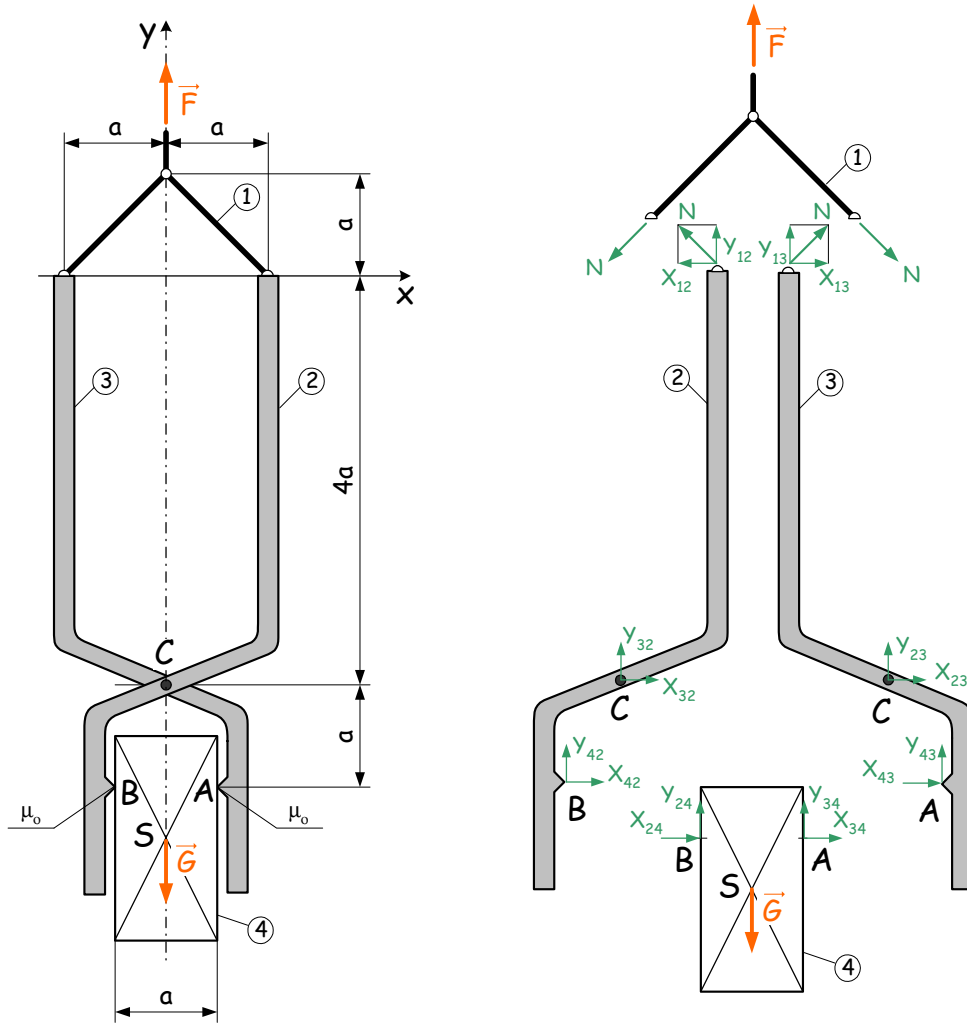
egyenletet véve alapul.

Végeredményül kapjuk, hogy

$$\vec{F}_A = (90\vec{e}_x) \text{ N}, \quad \vec{F}_B = (200\vec{e}_y) \text{ N} \quad \text{és} \quad \vec{F}_C = (-90\vec{e}_x) \text{ N}.$$



Példa: Az ábrán látható megfogószerkezet egy $|\vec{G}|$ súlyú testet tart $|\vec{G}| = |\vec{F}| = 50$ kN erővel; $\mu_o = 0.4$. Képes-e megtartani a vázolt kialakítású fogó a $|\vec{G}|$ súlyú testet?



Az 1, 2, 3 és 4 jelű, külön-külön is kirajzolt szerkezeti részekre a szétszedés miatt megjelenő belső erőket (zöld színnel) berajzoljuk úgy, hogy pozitívnak tételezünk fel minden olyan erőkomponenst, amelynek az iránya nem egyértelmű.

Az 1 jelű rúdszerkezet erőjátékának tisztázásakor vegyük észre azt, hogy azonos nagyságú $N = 25\sqrt{2}$ kN rúderők ébrednek. A későbbiek miatt a rúderők felbontásra kerülnek:

$$X_{21} = 25 \text{ kN} \quad (\longrightarrow), \quad Y_{21} = -25 \text{ kN} \quad (\downarrow), \quad X_{31} = -25 \text{ kN} \quad (\longleftarrow) \quad \text{és} \quad Y_{31} = -25 \text{ kN} \quad (\downarrow).$$

A 4 jelű testet vizsgálva a fennálló szimmetria miatt az $Y_{34} = Y_{24}$ összefüggés érvényes, így a 4 jelű részre felírt

$$Y_{34} + Y_{24} - 50 = 0$$

vetületi egyenletből az $Y_{34} = Y_{24} = 25$ kN (\uparrow) eredmény adódik.

A szerkezet y tengelyre vett szimmetriája okán most elegendő a 2 és 3 jelű részek közül csak az egyik (mondjuk a 3 jelű) rész egyensúlyát vizsgálni. Figyelembevétel az előző eredményeket a következőket írhatjuk fel:

$$X_{13} = -X_{31} = 25 \text{ kN} \quad (\longrightarrow), \quad Y_{13} = -Y_{31} = 25 \text{ kN} \quad (\uparrow) \quad \text{és} \quad Y_{43} = -Y_{34} = -25 \text{ kN} \quad (\downarrow).$$

Így a 3 jelű részen csak az X_{23} , Y_{23} és X_{43} maradt ismeretlen.

Ezek közül az X_{23} , Y_{23} hatásvonala a C pontban metsződik. Így a c tengelyre vett

$$M_c \stackrel{(+)}{=} 0$$

nyomatéki egyenlet, azaz a

$$25 \cdot 4a + 25 \cdot a + 25 \cdot \frac{a}{2} - X_{43} \cdot a = 0$$

szolgáltatja az $X_{43} = 137.5 \text{ kN}$ (\rightarrow) megoldást. Felírva az

$$\frac{|Y_{43}|}{|X_{43}|} = \frac{25}{137.5} = 0.18 < \mu_o$$

összefüggést belátható az, hogy a fogószerkezet megtartja a terhet.

A 3 jelű szerkezeti részen található még ismeretlen összetevők a vetületi egyenletekből adódnak, azaz az

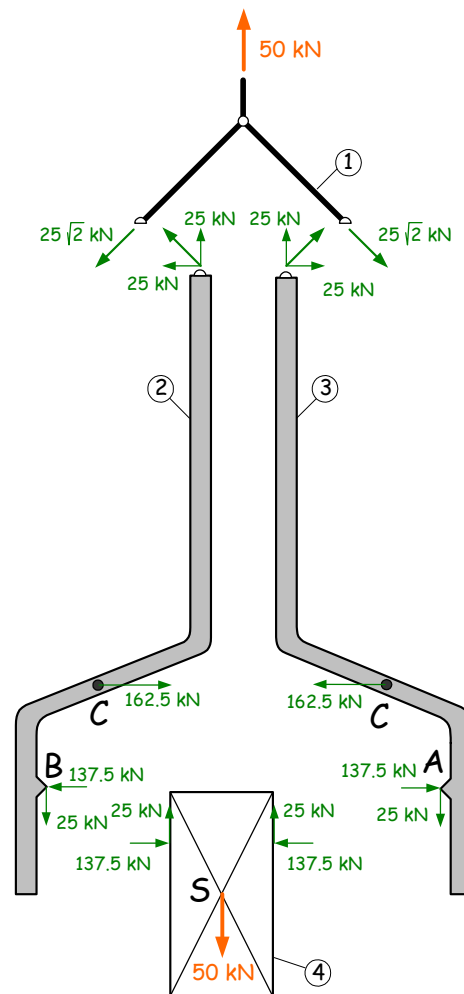
$$\begin{aligned} Y_{13} + Y_{23} + Y_{43} &= 0 \\ 25 + Y_{23} - 25 &= 0 \\ Y_{23} &= 0, \end{aligned}$$

valamint az

$$\begin{aligned} X_{13} + X_{23} + X_{43} &= 0 \\ 25 + X_{23} + 137.5 &= 0 \\ X_{23} &= -162.5 \text{ kN} \end{aligned}$$

eredményekre jutunk.

A C jelű csuklópontban, azaz 2 és 3 jelű rész kapcsolódásánál, az átadódó erő 162.5 kN nagyságú lesz, Tehát a későbbiekben olyan összekötőelemet kell majd választani, amely ezt az igénybevételt elviseli.



Rudak igénybevétele

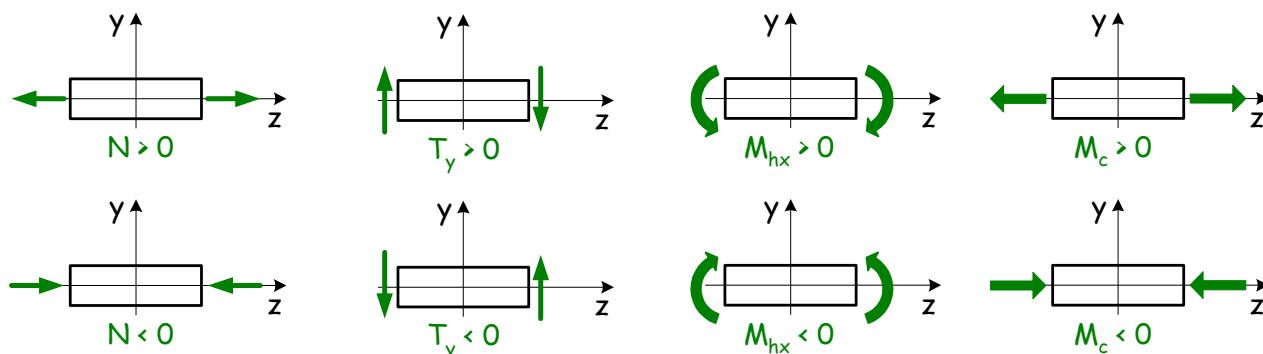
A továbbiakban **prizmatikus rudak**, azaz egyenes középvonallal és állandó keresztmetszettel bíró rudak, igénybevételeit vizsgáljuk meg.

A vizsgált tartót egy tetszőleges K keresztmetszetben átvágjuk és az egyik részét elhagyjuk. Az elhagyott rész hatása a megtartott részre a keresztmetszet felületén megoszló belső erőrendszerként jelentkezik. A belső erőrendszernek a K keresztmetszet S súlypontjába redukált \vec{F}_S eredőjének és \vec{M}_S nyomatékának koordinátáit értjük a K keresztmetszet **igénybevétele** alatt.

Igénybevételek előjelszabálya

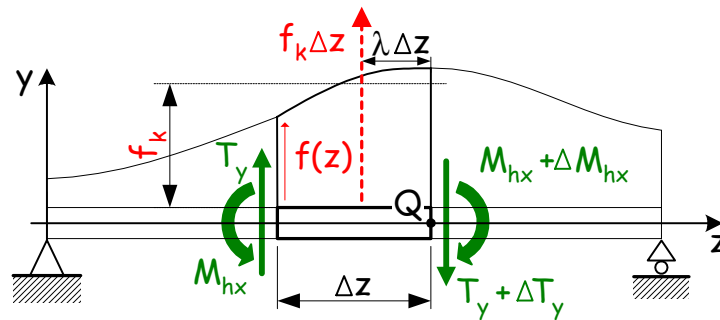
Az \vec{F}_S eredőnek keresztmetszet síkjába eső koordinátája a T jelű nyíróerő, a síkra merőleges pedig az N rúderő lesz. Az \vec{M}_S nyomatékvektor síkba eső összetevője az M_h hajlítónyomaték, a síkra merőleges pedig az M_c csavarónyomaték.

Megállapodás szerint az ábrákon rögzített előjelszabályok alapján állapítjuk meg a feladatokban előforduló igénybevételek előjelét:



Az egyenes középvezetű tartók egyensúlyi egyenletei

Az ábrán látható kéttámaszú tartó egy Δz hosszúságú szakaszának egyensúlyát vizsgáljuk:



A szakasz egyensúlyát a kétvégén berajzolásra került belső erőrendszer biztosítja. Feltételezésünk szerint ezek pozitív igénybevételeket jelentenek.

Az y irányba vett

$$T_y + f_k \Delta z - (T_y + \Delta T_y) = 0$$

$$\frac{\Delta T_y}{\Delta z} = f_k$$

vetületi egyenletből a $\lim_{\Delta z \rightarrow 0}$ határátmenet képzésével jutunk a

$$\frac{dT_y}{dz} = f(z)$$

összefüggésre.

A szakasz jobboldali végén kijelölt Q ponton áthaladó síkra merőleges tengelyre vett

$$T_y \Delta z - M_{hx} + f_k \Delta z (\lambda \Delta z) + M_{hx} + \Delta M_{hx} = 0$$

$$\frac{\Delta M_{hx}}{\Delta z} = -(T_y + f_k (\lambda \Delta z))$$

nyomatéki egyenletből a $\lim_{\Delta z \rightarrow 0}$ határátmenet képzésével a

$$\frac{dM_{hx}}{dz} = -T_y$$

összefüggés adódik.

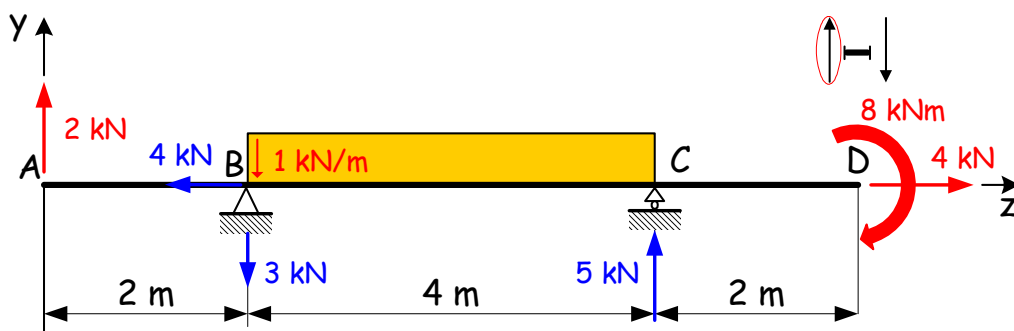
Ezeket az egyenleteket, az egyensúlyi egyenlet differenciális alakjait, a tartó tengelye mentén 0 és z között integrálva nyerjük a

$$T_y(z) - T_o = \int_{\zeta=0}^z f(\zeta) d\zeta \quad \text{és} \quad M_{hx}(z) - M_{hx0} = - \int_{\zeta=0}^z T_y(\zeta) d\zeta$$

összefüggéseket, azaz az egyensúlyi egyenlet integrálalakjait. Ezek ismerete módot ad igénybevételi ábrák rajzolására.

Igénybevételi ábrák

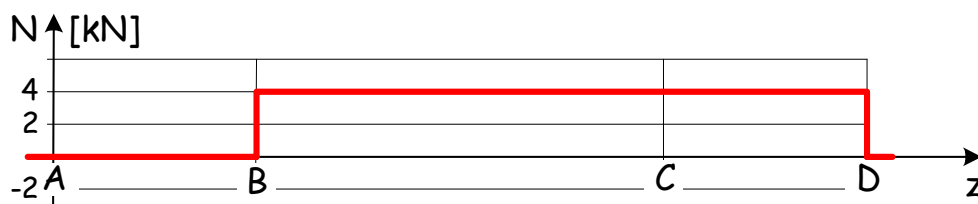
Az ábrarajzolás bemutatására kiválasztott kéttámaszú tartó támasztóerői már ismertek és kék színnel berajzolásra kerültek az alábbi ábrán.



Síkbeli, z tengelyű, egyenes vonalú tartók igénybevételi ábráinak szerkesztése az igénybevételek előjel szabályainak figyelembevételével történik.

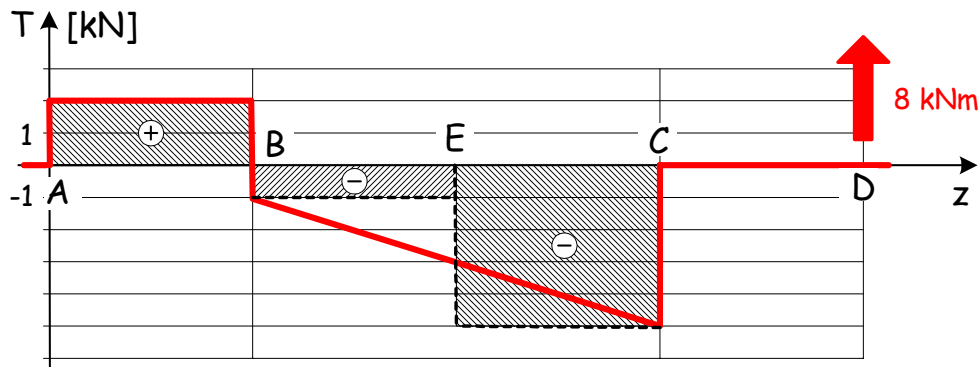
A gerendán balról jobbra, z tengely mentén haladunk és közben szakaszonként vizsgáljuk az igénybevételeket. A tartó z irányú (rúd irányú) erővel terhelt, ezért a **rúderő ábra** rajzolással kezdünk.

- Az A keresztmetszet és a B^- keresztmetszet (B ponttól egy kicsit balra lévő keresztmetszet) között nincs rúderő, ezért ezen az $\overline{AB^-}$ szakaszon az $N(z)$ függvény zérus értékű lesz.
- A B pontban a z tengelyiránnyal ellentétes irányba mutató 4 kN nagyságú koncentrált erő van, amely a rúd jobb végén, a D keresztmetszetben ható, vele ellentétes irányú, szintén 4 kN nagyságú erővel tart egyensúlyt. A koncentrált erő az $N(z)$ ábrán mindig szakadást okoz. Ezért a B keresztmetszetenél 4 kN-ra, D -ben pedig vissza 0 -ra ugrik a függvény. A \overline{BD} szakaszt a két erő húzza, ezért a rúderő állandó $N = 4$ kN nagyságú lesz ezen a szakaszon.



A tartót rá merőleges erők is terhelik, ezért $T(z)$ **nyíróerő ábra** rajzolható. Ismét a gerenda balvégétől, az A pontból kiindulva kezdjük meg a $T(z)$ függvény ábrázolását.

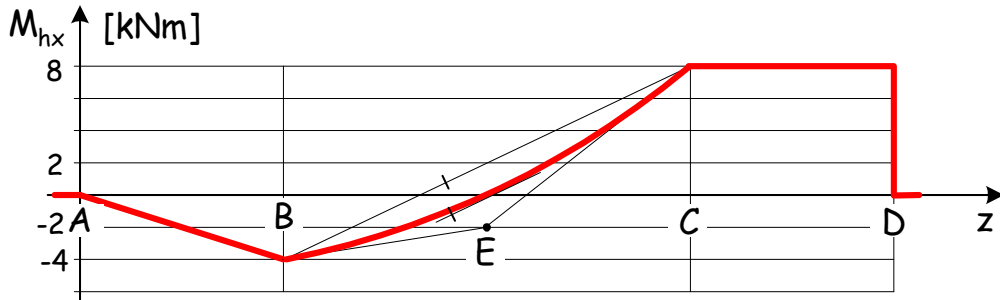
- Az y irányú koncentrált erők az ábrázolt $T(z)$ függvény szakadását idézik elő, ezért az A pontban jelentkező 2 kN (\uparrow) erő miatt az A keresztmetszetenél az induló 0 értékű függvény 2 kN-ra ugrik. Az A^+ és B^- keresztmetszetek közötti rúdszakasz függőlegesen terheletlen, ezért az $\overline{A^+B^-}$ szakaszon a függvényváltozás értéke nulla, tehát ott a függvényérték állandó 2 kN lesz.



- B pontban ható 3 kN (\downarrow) támasztóerő komponens miatt ismét ugunk a függvényértékkel -1 kN-ra. A $\overline{B^+C^-}$ szakaszon 1 kN/m (\downarrow) intenzitású megoszló erő van. A szakasz hossza 4 m, így $4 \cdot (-1) = -4$ kN a változás mértéke. B -ben a függvény -1 kN értékű a 4 m hosszúságú $\overline{B^+C^-}$ szakaszon a változás -4 kN, ezért C^- -ben a nyíróerő -5 kN lesz.
- A C pontbeli 5 kN (\uparrow) nagyságú támasztóerővel visszatérünk a nullába. C^+ és D keresztmetszetek között nem találhatók függőleges hatásvonalú erők, ezért a $\overline{C^+D}$ szakaszon a függvényváltozás értéke nulla, tehát ott a függvény állandó zérus értékű lesz. Az ábrán megjelenik még a D keresztmetszetben a 8 kNm nagyságú nyomatékból származó területvektor. A területvektor irányát az öt helyettesítő erőpár baloldali erővektorának iránya szolgáltatja. (A vonatkozó erőpár az első ábrán berajzolásra került!)

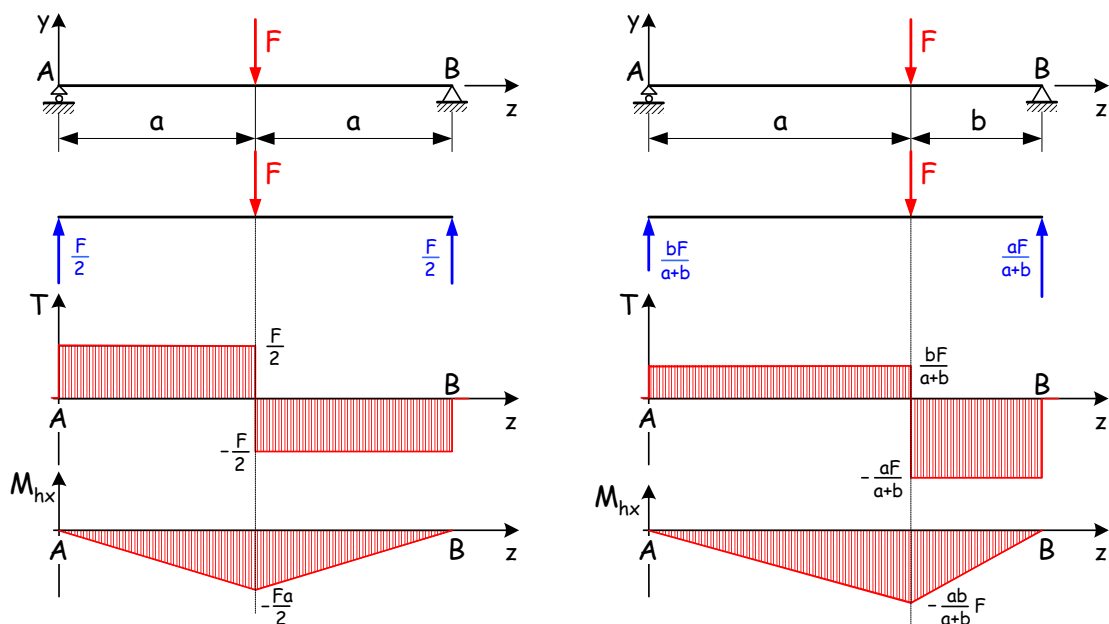
Az M_{hx} **hajlítónyomatéki ábra** szerkesztése közvetlenül a nyíróerő ábrából lehetséges. Az egyensúlyi egyenletnek megfelelően az $M_{hx}(z)$ folytonos függvény adott szakaszon történő változása az adott szakaszra vonatkozó $T(z)$ függvény alatti terület mínusz egyszeres nagyságával (adott szakaszon vett határozott integráljával) lesz egyenlő. Ha a tartó balvégén nincs terhelésként előírt nyomaték, akkor az M_{hx} függvény nullából indul, majd a gerenda végén oda is tér vissza.

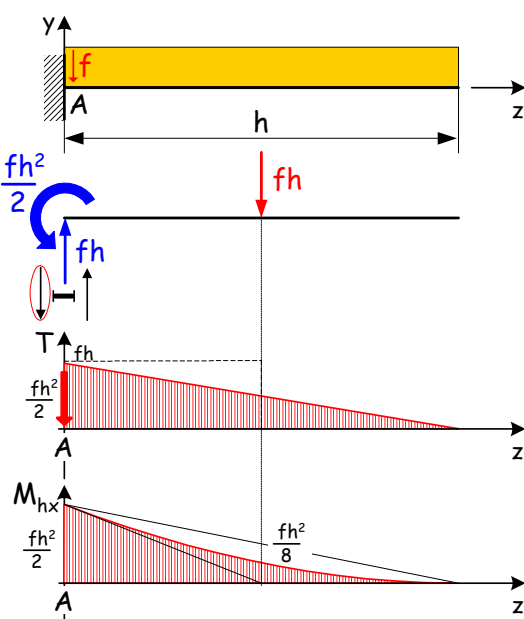
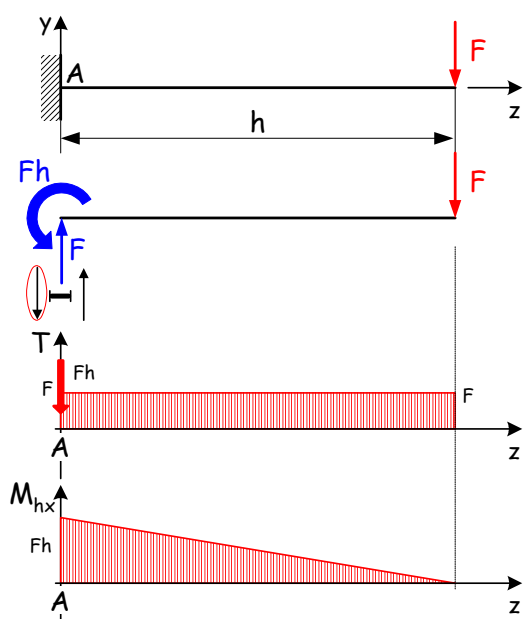
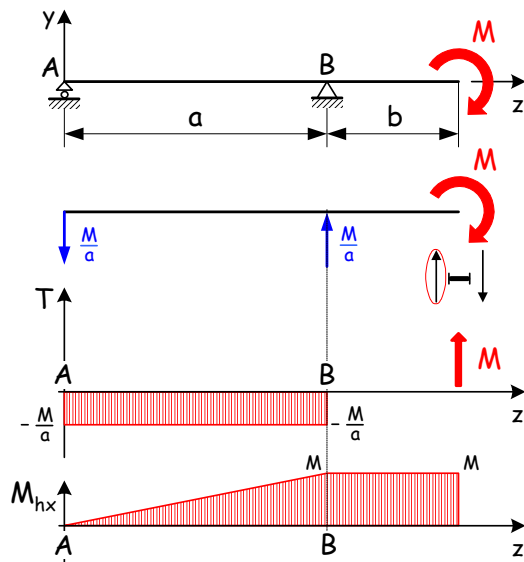
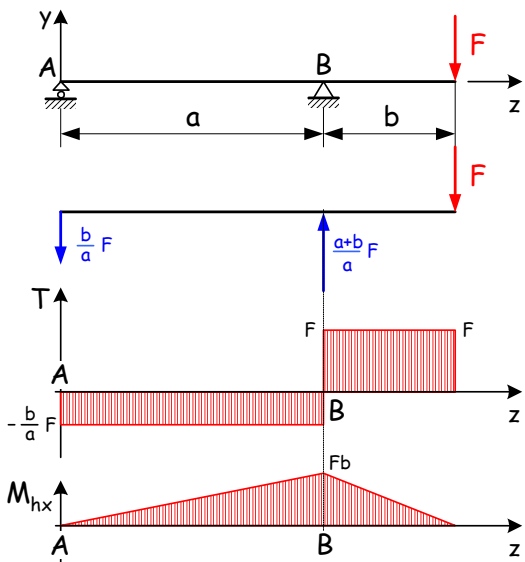
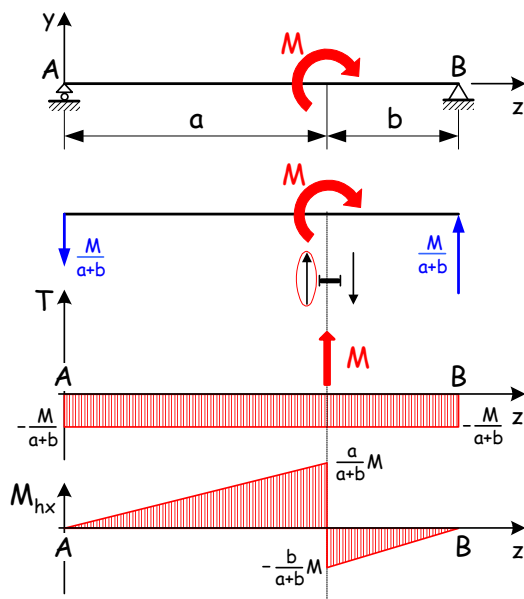
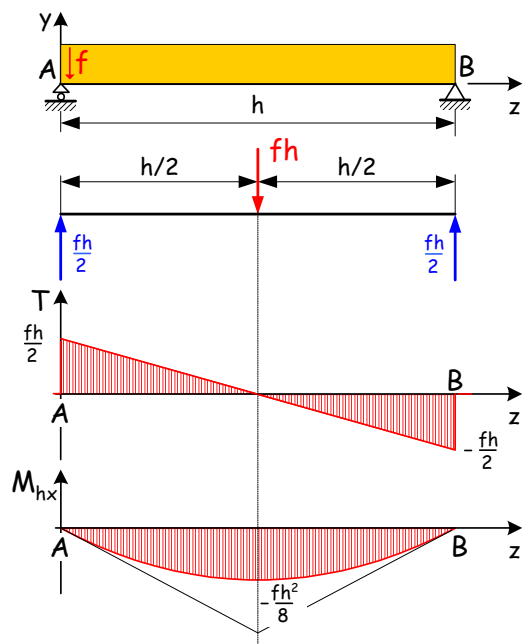
- A 2 m hosszúságú \overline{AB} szakaszon vett $T(z)$ függvényérték állandó (2 kN), így a szakaszon vett $T(z)$ függvény alatti (ábrán besrafozott) terület $2 \cdot 2 = 4$ kNm nagyságú. Ez terület a z tengely feletti (pozitív), ezért negatív megváltozást (-4 kNm) okoz az \overline{AB} szakaszon lineáris M_{hx} függvényben. Így $M_{hx}(z_B) = 0 - 4$ kNm = -4 kNm.



- A \overline{BC} szakaszon lineáris $T(z)$ okán az M_{hx} függvény parabolát ír le e szakasz felett. E parabolát három pont és három érintő segítségével lehet megadni, ezért a szerkesztés az ún. területkiegyenlítés elve szerint történik: A \overline{BC} szakaszt megfelezzük (E pont) és a szakasz kezdő- és végpontjánál lévő $T(z_B) = -1$ kN és $T(z_C) = -5$ kN függvényértékeknél egy-egy vízszintest húzunk. Az előálló és a T ábrán besrafozott negatív területnek számító téglalapok $1 \cdot 2 = 2$ kNm és $5 \cdot 2 = 10$ kNm nagyságúak. Az M_{hx} rajzolását folytonos vonallal az $M_{hx}(z_B) = -2$ kNm függvényértéknél folytatjuk a következők szerint. A \overline{BE} szakaszon 2 kNm az M_{hx} függvény változásának mértéke, azaz E pontnál -2 kNm-nél jelet teszünk és ezt összekötve vékony vonallal a B pontbeli függvényértékkel megkapjuk a B pontbeli érintőt. A függvény megváltozása 10 kNm az \overline{EC} szakaszon, így $M_{hx}(z_C) = 8$ kNm. Összekötve egy vékony vonallal az E -nél rajzolt jelet a C pontban vett M_{hx} függvényértékeket ismét nyerünk egy parabolaérintőt C -ben. A harmadik pont és érintő úgy áll elő, hogy a $M_{hx}(z_B) = -2$ kNm és $M_{hx}(z_C) = 8$ kNm függvényértékeket összekötő vonal és a szakaszfelező metszéspontjánál leolvasott 2 kNm-ből levonom az E pontnál vett 2 kNm, azaz $M_{hx}(z_E) = 0$ a függvényérték az érintő pedig párhuzamos az előbbi összekötővonallal.
- A \overline{CD} szakaszon nincs tengelyirányra merőleges erő tehát a függvény változás nulla, tehát 8 kNm-nél vízszintes vonalat húzok D -ig. A D -nél megjelenő nyomatékból származó területvektor miatt a nyomatéki ábrában szakadás lesz. A területvektor felfele mutat, ezért negatív változást okoz és így a tartóvégén visszatértünk 0-ba.

Egyszerű terhelésekhez tartozó igénybevételi ábrák





Ajánlott irodalom

- [1.] Égert J. Statika, Miskolci Egyetemi Kiadó, Miskolc, 1997.
- [2.] Mechanikai Tanszék Munkaközössége. Mechanikai Példatár I., TankönyvKiadó, Budapest, 1980.
- [3.] Mechanikai Tanszék Munkaközössége. Mechanikai Példatár II., TankönyvKiadó, Budapest, 1990.