JOURNAL DE MATHÉMATIQUES PURES ET APPLIQUÉES

H. RESAL

Sur quelques théorèmes de Mécanique

Journal de mathématiques pures et appliquées 3e série, tome 7 (1881), p. 33-48.
<http://portail.mathdoc.fr/JMPA/afficher_notice.php?id=JMPA_1881_3_7_A2_0>

Sur quelques théorèmes de Mécanique;

PAR M. H. RESAL.

I. — *L'accélération d'un point libre, lorsque sa direction est constante, est proportionnelle au rapport du cube de la vitesse du mobile au rayon de courbure de sa trajectoire* ([1]).

Nous remarquerons d'abord que la courbe est plane.

Soient, au bout du temps t, v, ρ, α la vitesse du mobile m, le rayon de courbure de la trajectoire, l'angle formé par la direction de l'accélération φ avec la normale. On a

$$\varphi \cos\alpha = \frac{v^2}{\rho},$$

d'où

$$\varphi = \frac{v^3}{\rho v \cos\alpha}. \tag{1}$$

Or $v\cos\alpha$ est la composante de la vitesse suivant la normale à la direction de l'accélération; elle est donc constante et égale à $v_0 \cos\alpha_0$, l'in-

---

([1]) Ce théorème a été énoncé pour la première fois, à ma connaissance du moins, par M. E.-T. Habich, qui l'a déduit de l'Analyse, dans une brochure intitulée *Études cinématiques*.

dice o se rapportant à un instant déterminé t_0. Nous avons ainsi

$$(2)\qquad \varphi = \frac{v^3}{\rho v_0 \cos\alpha_0},$$

ce qu'il fallait établir.

Remarque. — Soit c la corde du cercle osculateur déterminé par la direction de φ ; on sait que

$$(a)\qquad \varphi = \frac{2v^2}{c};$$

par suite,

$$\frac{\rho}{c} = \frac{v}{2v_0 \cos\alpha_0}.$$

Donc *le rapport du rayon de courbure à la corde interceptée dans le cercle osculateur par la direction de l'accélération est proportionnel à la vitesse.*

Application à la détermination du rayon de courbure de la parabole. — Considérons une parabole décrite par un point matériel pesant m dont la masse est censée égale à l'unité et dont la vitesse initiale v_0 est dirigée suivant l'horizontale m_0y du point de départ m_0. Soient m_0x la verticale de m_0, F le foyer et $2p$ le paramètre de la courbe. On a

$$\alpha_0 = 0,\quad x = \frac{gt^2}{2},\quad y = v_0 t,$$

$$(3)\qquad y^2 = 2\frac{v_0^2}{g}x = 2px,$$

$$(4)\qquad p = \frac{v_0^2}{g}.$$

Le principe des forces vives donne

$$v^2 = v_0^2 + 2gx = g(p + 2x).$$

De l'équation (2) on déduit immédiatement la formule connue

$$\rho = \sqrt{\frac{p+2x}{p}}(p+2x) = 2\sqrt{\frac{\mathrm{F}m}{\mathrm{F}m_0}}\,\mathrm{F}m.$$

II. — *L'accélération d'un point dirigée vers un centre fixe est proportionnelle au cube de la vitesse, au rayon vecteur et à la courbure de la trajectoire.*

Comme dans le cas précédent, la courbe est plane. Soient O le centre fixe, $r = \mathrm{O}m$ le rayon vecteur, α l'angle qu'il forme avec la normale. L'indice o continuera à distinguer les notations qui se rapportent à un instant déterminé défini par la valeur t_0 du temps t. On a, d'après le principe des aires,

$$v_0 r_0 \cos\alpha_0 = vr \cos\alpha,$$

et l'équation (1), qui est générale et applicable dans tous les cas, donne

$$\varphi = \frac{rv^3}{\rho rv \cos\alpha} = \frac{rv^3}{\rho r_0 v_0 \cos\alpha_0}, \tag{5}$$

expression dans laquelle on ne devra considérer que les valeurs absolues de φ, ρ, $\cos\alpha_0$. Le théorème énoncé se trouve ainsi démontré.

Remarque. — Des formules (a) et (5) on déduit

$$\frac{\rho}{c} = \frac{rv}{2r_0 v_0 \cos\alpha_0},$$

d'où un nouveau théorème qu'il est facile d'énoncer.

Applications. — 1° *Rayon de courbure de l'ellipse.* — Considérons l'ellipse comme décrite par un point dont l'accélération est dirigée vers le centre de la courbe et égale au rayon vecteur. Soient $\mathrm{O}x$, $\mathrm{O}y$ les directions de deux demi-axes a, b; A, B les sommets de ces demi-axes. Nous aurons

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -x,$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = -y,$$

d'où, en appelant M, N, M', N' des constantes,

$$x = \mathrm{M}\cos t + \mathrm{N}\sin t + y = \mathrm{M}'\cos t + \mathrm{N}'\sin t.$$

Prenons pour vitesse initiale celle du passage du mobile au point A; nous aurons, en remarquant que $x = a$, $\frac{dx}{dt} = 0$, $y = 0$, $\frac{dy}{dt} = v_0$ pour $t = 0$,

$$x = a\cos t,$$
$$y = v_0 \sin t,$$

d'où

$$v_0 = b$$

et

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

D'ailleurs $\alpha_0 = 0$, $r_0 = a$, $\varphi = r$ et, d'après l'équation des forces vives, $v^2 = v_0^2 - (r^2 - r_0^2) = a^2 + b^2 - r^2$; la formule (5) donne par suite

$$\rho = \frac{(a^2 + b^2 - r^2)^{\frac{3}{2}}}{ab}.$$

2° *Rayon de courbure de l'hyperbole.* — Soient Ox, Oy les directions de l'axe réel $2a$ et de l'axe imaginaire $2b$ de l'hyperbole.

Nous pouvons considérer la courbe comme étant décrite par un point dont l'accélération, dirigée suivant $r = Om$, est égale à ce rayon vecteur. Nous avons ainsi

$$\frac{d^2x}{dt^2} = x,$$
$$\frac{d^2y}{dt^2} = y,$$

d'où

$$x = \mathrm{M}e^t + \mathrm{N}e^{-t},$$
$$y = \mathrm{M}'e^t + \mathrm{N}'e^{-t}.$$

Si nous prenons pour v_0 la vitesse du mobile à son passage à l'un des sommets de l'axe réel, nous avons

$$x = a, \quad \frac{dx}{dt} = 0,$$
$$y = 0, \quad \frac{dy}{dt} = v_0$$

pour $t = 0$, d'où

$$x = \frac{a}{2}(e^t + e^{-t}), \quad y = \frac{v_0}{2}(e^t - e^{-t}),$$

d'où

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{v_0^2} = 1,$$

et, par suite,

$$v_0 = b.$$

On a d'ailleurs

$$\alpha_0 = 0, \quad r_0 = a, \quad \varphi = r, \quad v^2 = v_0^2 + r^2 - r_0^2 = b^2 - a^2 + r^2,$$

et l'équation (5) donne, par suite,

$$\rho = \frac{(r^2 - a^2 + b^2)^{\frac{3}{2}}}{ab}.$$

Dans le cas de l'hyperbole équilatère, on a simplement

$$\rho = \frac{r^3}{a^2},$$

d'où un théorème qu'il est facile d'énoncer.

3° *Rayon de courbure d'une courbe dont l'équation est exprimée en coordonnées polaires.* — Soient r, v, ω, k le rayon vecteur, l'angle polaire, la vitesse angulaire du rayon vecteur et une constante.

D'après le principe des aires, la génération de la courbe dérivera d'une accélération centrale si l'on a

$$v_0 r_0 \cos\alpha_0 = \omega r^2 = k,$$

d'où

$$(6) \qquad \omega = \frac{d\theta}{dt} = \frac{k}{r^2}.$$

L'équation (5) devient alors

$$(5') \qquad \varphi = \frac{rv^3}{\rho k}.$$

On a d'abord

$$(7) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{dr}{dt} &= \frac{dr}{d\theta}\omega = \frac{k}{r^2}\frac{dr}{d\theta}, \\ \frac{d^2r}{dt^2} &= k\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{r^2}\frac{dr}{d\theta}\right) = k\omega\frac{d}{d\theta}\left(\frac{1}{r^2}\frac{dr}{d\theta}\right) = \frac{k^2}{r^2}\left(\frac{1}{r^2}\frac{d^2r}{d\theta^2} - \frac{2}{r^3}\frac{dr^2}{d\theta^2}\right). \end{aligned} \right.$$

La vitesse v étant la résultante de $\frac{dr}{dt}$ et de ωr, il vient

$$(8) \qquad v = \frac{k}{r}\left(\frac{1}{r^2}\frac{dr^2}{d\theta^2} + 1\right)^{\frac{1}{2}}.$$

D'autre part, l'accélération absolue φ n'est autre chose que la résultante de l'accélération relative $\frac{d^2r}{dt^2}$ et de l'accélération d'entraînement $-\omega^2 r$ estimée suivant le rayon vecteur. On a ainsi

$$(9) \qquad \varphi = \frac{d^2r}{d\theta^2} - \omega^2 r = \frac{d^2r}{dt^2} - \frac{k^2}{r^3} = \frac{k^2}{r^3}\left(\frac{1}{r}\frac{d^2r}{d\theta^2} - \frac{2}{r^2}\frac{dr^2}{d\theta^2} - 1\right).$$

Enfin la formule (5') donne, en ayant égard aux valeurs (8) et (9),

$$(10) \qquad \frac{1}{r}\frac{d^2r}{d\theta} - \frac{2}{r^2}\frac{dr^2}{d\theta^2} - 1 = \pm\frac{r}{\rho}\sqrt{\frac{1}{r^2}\frac{dr^2}{d\theta^2} + 1}.$$

Soit $r = a\theta^m$; on a

$$m(m-3)\left(\frac{r}{a}\right)^{-\frac{2}{m}} + 1 = \pm\frac{r}{\rho}\left[m^2\left(\frac{r}{a}\right)^{-\frac{2}{m}} + 1\right]^{\frac{3}{2}}.$$

Lorsque $m = 1$, on trouve la formule connue relative à la spirale d'Archimède :

$$\rho = \frac{(a^2 + r^2)^{\frac{3}{2}}}{2a^2 + r^2}.$$

Pour la spirale hyperbolique, $m = -1$ et

$$\rho = \frac{r(r^2 + a^2)^{\frac{3}{2}}}{a(4r^2 + a^2)}.$$

L'équation $r = ae^{m\theta}$ de la spirale logarithmique et la formule (10) conduisent au résultat connu

$$\rho = r(m^2 + 1)^{\frac{1}{2}}.$$

III. — *Du problème inverse du mouvement d'un point matériel sur une surface de révolution.*

Étant données une surface de révolution et une courbe tracée sur cette surface, la courbe peut être considérée comme étant décrite par un point matériel m qui se déplace sur la section méridienne en même temps que le plan méridien tourne autour de l'axe de révolution. Il y a évidemment entre ces deux mouvements une certaine dépendance qui se déduira de la nature même de la courbe donnée.

Nous pouvons supposer que la masse du point décrivant est égale à l'unité, pour ne pas introduire un facteur commun qui disparaîtrait dans les équations finales.

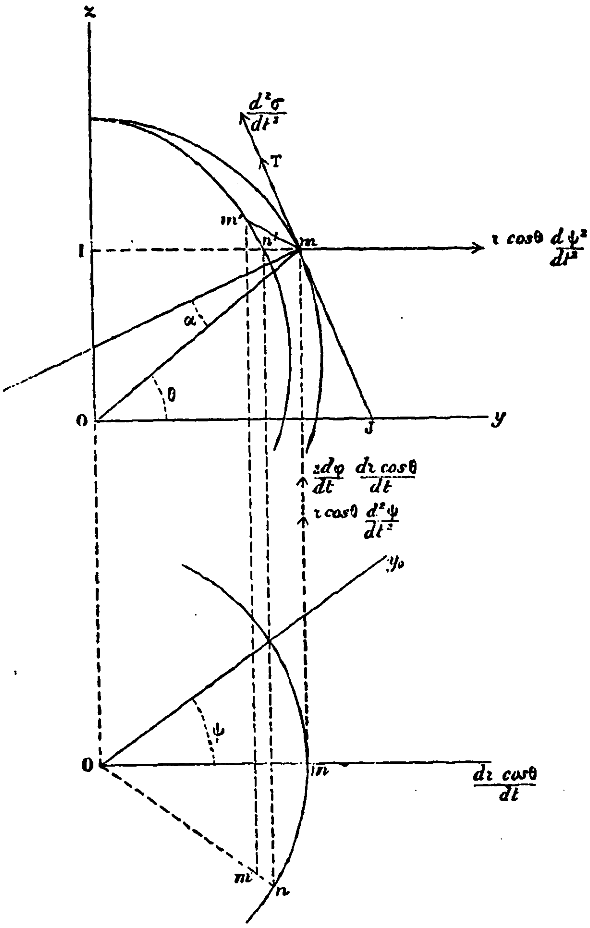
Proposons-nous maintenant de déterminer les conditions que doivent remplir les composantes, suivant la méridienne et la tangente au parallèle, d'une force capable de faire décrire au mobile, dans son double mouvement, la courbe donnée. (Il n'y a pas lieu de s'occuper de la composante normale, qui est complètement arbitraire, pourvu qu'elle soit suffisante pour maintenir le mobile sur la surface.)

Parmi tous les systèmes de ces composantes qui satisfont aux conditions qu'il s'agit de trouver, il y en aura un qui sera plus simple que tous les autres, et c'est ce système qu'il conviendra de choisir.

On évaluera ensuite la *composante géodésique* (perpendiculaire à la vitesse dans le plan tangent), dont on déduira la position du plan osculateur, et par suite le rayon de courbure de la courbe donnée.

Emploi des coordonnées sphériques. — Soient (*fig.* 1)

Fig. 1.



Oz l'axe de révolution;

Oy la perpendiculaire en un point O de cet axe comprise dans le plan du méridien mobile;

ψ l'angle formé par Oy avec l'une de ses positions antérieures bien définie Oy_0 ou, si l'on veut, la longitude du méridien mobile;

m la position du point décrivant correspondant à la longitude ψ, à la latitude $\theta = mOy$ et au rayon vecteur $\iota = Om$;

$mI = \iota\cos\theta$ le rayon du parallèle passant par m;

$d\sigma = \sqrt{d\iota^2 + \iota^2 d\theta^2 + \iota^2\cos^2\theta\, d\psi^2}$ l'arc élémentaire de la section méridienne;

α l'angle formé par la normale à cette courbe avec Om, et qui est déterminé par la relation

$$\tang\alpha = -\frac{1}{\iota}\frac{d\iota}{d\theta}. \tag{1}$$

Soient, de plus,

R le rayon de courbure de la section méridienne;

J l'intersection de la méridienne avec Oy;

T, P les composantes de la force extérieure estimées suivant la méridienne dans le sens de $d\theta$ et la tangente au parallèle dans le sens de ψ.

Nous avons

$$\widehat{mJy} = \theta + 90^\circ - \alpha. \tag{2}$$

Si entre les équations de la courbe donnée on élimine successivement ψ et ι, on obtiendra deux relations de la forme

$$\iota = F(\theta), \tag{3}$$

$$\psi = f(\theta), \tag{4}$$

dont la première n'est autre chose que l'équation polaire de la courbe méridienne.

L'accélération relative de m est $\frac{d^2\sigma}{dt^2}$. Les accélérations apparentes dues à la rotation $\frac{d\psi}{dt}$ sont :

1° L'accélération centrifuge

$$\iota\cos\theta\frac{d\psi^2}{dt^2}, \tag{a}$$

dirigée suivant Im;

2° L'accélération tangentielle d'entraînement changée de sens,

$$\iota \cos\theta \frac{d^2\psi}{dt^2}, \tag{b}$$

dont la direction est opposée à celle de P;

3° L'accélération centrifuge composée, due à la vitesse relative projetée sur le plan de l'équateur

$$\frac{d.m\mathrm{I}}{dt} = \frac{d\iota \cos\theta}{dt},$$

et dont la direction est la même que celle de l'accélération ci-dessus; elle a pour valeur

$$2\frac{d\psi}{dt}\frac{d\iota \cos\theta}{dt}. \tag{c}$$

Le théorème de Coriolis donne, suivant les directions de P et de T,

$$\left\{\begin{aligned} \frac{d^2\sigma}{dt^2} &= \mathrm{T} - \iota\cos\theta\sin(\theta-\alpha)\frac{d\psi^2}{dt^2}, \\ 0 &= \mathrm{P} - \iota\cos\theta\frac{d^2\psi}{dt^2} - 2\frac{d\psi}{dt}\frac{d\iota\cos\theta}{dt}. \end{aligned}\right. \tag{5}$$

Si l'on prend pour variable $\omega = \frac{d\theta}{dt}$ au lieu de t, et que l'on pose $\omega^2 = \varpi$, on reconnaît facilement que ces équations deviennent

$$\mathrm{T} = \varpi\frac{d^2\sigma}{d\theta^2} + \frac{1}{2}\frac{d\varpi}{d\theta}\frac{d\sigma}{d\theta} + \varpi^2\iota\cos\theta\sin(\theta-\alpha)\frac{d\psi^2}{d\theta^2},$$

$$\mathrm{P} = \iota\cos\theta\left(\varpi\frac{d^2\psi}{d\theta^2} + \frac{1}{2}\frac{d\varpi}{d\theta}\frac{d\psi}{d\theta}\right) + 2\varpi\frac{d\psi}{d\theta}\frac{d\iota\cos\theta}{d\theta}.$$

On voit ainsi que ϖ est indéterminé et que l'on obtiendra les expressions les plus simples de T et de P en supposant $\varpi = 1$, ce qui revient à prendre $\theta = t$. On a alors

$$\left\{\begin{aligned} \mathrm{T} &= \frac{d^2\sigma}{d\theta^2} + \iota\cos\theta\sin(\theta-\alpha)\frac{d\psi^2}{d\theta^2}, \\ \mathrm{P} &= \iota\cos\theta\frac{d^2\psi}{d\theta^2} + 2\frac{d\psi}{d\theta}\frac{d\iota\cos\theta}{d\theta}. \end{aligned}\right. \tag{6}$$

En appelant i l'angle formé par la tangente à la courbe donnée avec la méridienne, on a évidemment

$$\iota \cos\theta\, d\psi = \iota\, d\theta \tang i,$$

d'où

$$\tang i = \cos\theta \frac{d\psi}{d\theta}. \tag{7}$$

La composante géodésique de la force extérieure sera

$$S = T\sin i - P\cos i = \cos i (T\tang i - P) \tag{8}$$

Si, au lieu de se donner la relation (4), on veut la déterminer de manière que la courbe soit une ligne géodésique de la surface, elle sera remplacée par $S = 0$ ou par

$$T\tang i = P. \tag{9}$$

Revenons au cas général et désignons par χ l'inclinaison du plan osculateur de la courbe sur le plan normal à cette courbe dont l'élément est désigné par ds. Nous avons

$$ds = \frac{\iota\, d\theta}{\cos i}.$$

La courbure géodésique étant $\frac{\tang\chi}{R}$, il vient, en se reportant à un théorème connu,

$$\frac{\iota^2}{\cos^2 i}\frac{\tang\chi}{R} = S,$$

d'où

$$\tang\chi = \frac{SR\cos^2 i}{\iota^2}. \tag{10}$$

La détermination de l'angle χ conduit naturellement à celle du rayon de courbure de la courbe, qui sera donné par le théorème de Meusnier.

Application aux courbes sphériques. — Nous avons, dans ce cas,

$$\alpha = 0,$$
$$\nu = R = \text{const.},$$
$$\sigma = R\theta.$$

En posant

$$u = \frac{d\psi}{dt},$$

les équations (6) donnent

$$\frac{T}{R} = \sin\theta\cos\theta\, u^2,$$
$$\frac{P}{R} = \cos\theta\frac{du}{d\theta} - 2u\sin\theta.$$

Si la courbe est une loxodromie ou si i est constant, on a, en ayant égard à la formule (7),

$$u = \frac{\operatorname{tang} i}{\cos i}, \quad \frac{du}{d\theta} = \frac{\operatorname{tang} i \sin\theta}{\cos^2\theta},$$
$$\frac{T}{R} = \operatorname{tang}^2 i \operatorname{tang}\theta,$$
$$\frac{P}{R} = -\operatorname{tang} i \operatorname{tang}\theta,$$
$$\frac{S}{R} = \operatorname{tang} i \operatorname{tang}\theta$$

et enfin

$$\operatorname{tang}\chi = \sin i \operatorname{tang}\theta.$$

Cette formule, qui se vérifie pour $i = 0$ et $i = 90°$, c'est-à-dire pour une section méridienne et les parallèles définis par les angles $\pm\theta$, montre que χ *est un côté d'angle droit d'un triangle sphérique, opposé à l'angle* θ, *et dont l'autre côté d'angle droit est* i, d'où une construction que l'on peut facilement effectuer.

Emploi des coordonnées cylindriques. — Soient

z l'ordonnée du mobile m, parallèle à l'axe de révolution Oz;
r le rayon mI du parallèle;

β l'angle TJy formé par la méridienne avec le rayon de l'équateur;

$$(1)\qquad r = \mathrm{F}(z), \quad \psi = f(z)$$

l'équation du méridien et la seconde des équations qui servent à définir la courbe. Nous avons

$$(2)\qquad \operatorname{tang}\beta = \frac{dz}{dr}$$

et, en nous reportant aux formules et notations qui précèdent,

$$(3)\qquad \left\{\begin{aligned} \frac{d^2\sigma}{dt^2} &= \mathrm{T} + r\cos\beta\frac{d\psi^2}{dt^2},\\ \mathrm{o} &= \mathrm{P} - r\frac{d^2\psi}{dt^2} - 2\frac{d\psi}{dt}\frac{dr}{dt}.\end{aligned}\right.$$

En substituant à t la variable $\omega = \frac{dz}{dt} = \sqrt{\varpi}$, ces équations deviennent

$$\mathrm{T} = \varpi\frac{d^2\sigma}{dz^2} + \frac{1}{2}\frac{d\varpi}{dz}\frac{d\sigma}{dz} + \varpi r\cos\beta\frac{d\psi^2}{dz^2},$$
$$\mathrm{P} = r\left(\varpi\frac{d^2\psi}{dz^2} + \frac{1}{2}\frac{d\varpi}{dz}\frac{d\psi}{dz}\right) + 2\varpi\frac{d\psi}{dz}\frac{dr}{dz}.$$

Comme ϖ reste indéterminé, on peut, pour plus de simplicité, le supposer constant et même égal à l'unité, la suppression de l'homogénéité n'offrant aucun inconvénient, puisque dans ce qui suit, comme dans ce qui précède, on ne considérera que des rapports. Il vient alors

$$(4)\qquad \left\{\begin{aligned} \mathrm{T} &= \frac{d^2\sigma}{dz^2} + r\cos\beta\frac{d\psi^2}{dz^2},\\ \mathrm{P} &= r\frac{d^2\psi}{dz^2} + 2\frac{d\psi}{dz}\frac{dr}{dz},\\ \mathrm{S} &= \cos i(\mathrm{T}\operatorname{tang} i - \mathrm{P}),\end{aligned}\right.$$

avec les relations

$$(5)\qquad \operatorname{tang} i = \frac{r\,d\psi}{d\sigma} = \frac{r\dfrac{d\psi}{dz}}{\sqrt{1 + \dfrac{dr^2}{dz^2}}},$$

$$(6)\qquad \operatorname{tang}\chi = \frac{\mathrm{SR}}{\left(1 + \dfrac{dr^2}{dz^2}\right)(r^2 + z^2)}.$$

Dans le cas d'un cylindre de révolution,

$$r = \text{const.},$$
$$d\sigma = dz,$$
$$\operatorname{tang} i = r\frac{d\psi}{dt};$$

par suite,

$$\mathrm{T} = 0,$$
$$\mathrm{P} = r\frac{d^2\psi}{dz^2}.$$

L'équation différentielle des lignes géodésiques est donc $\mathrm{P} = 0$ ou

$$\frac{d^2\psi}{dz^2} = 0,$$

d'où

$$\psi = \mathrm{A}z + \mathrm{C},$$

équation qui représente bien la famille des hélices.

Nous allons appliquer maintenant les formules ci-dessus aux lignes tracées sur un tore.

Soient $b = \mathrm{CO}$ la distance à $\mathrm{O}z$ du centre C du cercle générateur; $m\mathrm{C} = a$ le rayon mené en un point quelconque m de la circonférence; φ l'inclinaison de ce rayon sur OC. Nous supposerons, en nous basant sur les considérations exposées plus haut, $\frac{d\varphi}{dt} = 1$ ou $t = \varphi$. Nous avons

$$r = b + a\cos\varphi, \quad z = a\sin\varphi, \quad d\sigma = a\,d\varphi, \quad \beta = \varphi + 90^\circ.$$

En posant $\frac{d\psi}{d\varphi} = u$, les formules (3) et (5) deviennent

$$\mathrm{T} = (b + a\cos\varphi)\sin\varphi\, u^2,$$
$$\mathrm{P} = (b + a\cos\varphi)\frac{du}{d\varphi} - 2ua\sin\varphi,$$
$$\operatorname{tang} i = \left(\frac{b + a\cos\varphi}{a}\right)u.$$

Nous ne nous occuperons ici que des lignes géodésiques du tore, qui sont données par

$$\left(\frac{b+a\cos\varphi}{a}\right)^2\sin\varphi\,.\,u^3 = (b+a\cos\varphi)\frac{du}{d\varphi} - 2ua\sin\varphi.$$

Si l'on multiplie par u, et que l'on pose $u^2 = v$, on trouve

$$\frac{dv}{d\varphi} - \frac{4av\sin\varphi}{b+a\cos\varphi} - \frac{2(b+a\cos\varphi)}{a}v^2\sin\varphi = 0,$$

d'où, en divisant par v^2,

$$\frac{d\frac{1}{v}}{d\varphi} + \frac{4a\sin\varphi}{b+a\cos\varphi}\frac{1}{v} + \frac{2(b+a\cos\varphi)\sin\varphi}{a} = 0,$$

équation différentielle linéaire en $\frac{1}{v}$ dont l'intégrale est, en désignant par C une constante,

$$\frac{1}{v} = \frac{C}{a^4}(b+a\cos\varphi)^4 - \frac{1}{a^2}(b+a\cos\varphi)^2,$$

d'où

$$d\psi = \frac{a^2 d\varphi}{(b+a\cos\varphi)^2\sqrt{C - \dfrac{a^2}{(b+a\cos\varphi)^2}}},$$

équation dont il nous paraît impossible d'exprimer, en général, l'intégrale au moyen des fonctions connues.

Si $b = 0$ ou s'il s'agit d'une sphère, on a, en remplaçant $C - 1$ par A^2,

$$d\psi = \frac{d\varphi}{\cos^2\varphi\sqrt{A^2 - \tan^2\varphi}},$$

d'où, ε étant une constante,

$$\psi + \varepsilon = \arcsin\frac{\operatorname{tang}\theta}{A}$$

ou

$$\operatorname{tang}\theta = A\sin(\psi+\varepsilon),$$

qui est l'équation polaire la plus générale d'un plan passant par le centre.

Nous ne multiplierons pas davantage les exemples. Qu'il nous suffise d'avoir montré que l'on peut, dans certaines circonstances, tirer un bon parti de la méthode nouvelle que nous venons d'exposer.