JOURNAL DE MATHÉMATIQUES
PURES ET APPLIQUÉES

H. RESAL

Recherches sur l'Electrodynamique

Journal de mathématiques pures et appliquées 3e série, tome 7 (1881), p. 129-146.
<http://portail.mathdoc.fr/JMPA/afficher_notice.php?id=JMPA_1881_3_7_A7_0>

Recherches sur l'Électrodynamique;

PAR M. H. RESAL.

1. Élève de la première division de l'École Polytechnique en 1849, les leçons de Physique de Bravais avaient déterminé en moi une véritable passion pour la théorie de l'Électrodynamique. C'est ainsi que j'ai été conduit à chercher s'il ne serait pas possible d'apporter quelques simplifications dans les calculs assez longs et pénibles d'Ampère, l'illustre fondateur de cette théorie, développée plus tard par plusieurs savants, parmi lesquels Savary et Demonferrand figurent en première ligne. Mes recherches ont abouti dans certaines limites et font l'objet de cette Note; elles ont été adoptées en partie par Bravais dans son cours de 1850, puis publiées plus tard, ou plutôt enterrées, par extrait, dans les *Mémoires de la Société d'émulation du Doubs* (1854). J'ose espérer que cette exhumation sera accueillie avec faveur par quelques-uns de nos lecteurs. J'ai apporté d'ailleurs, dans cette nouvelle rédaction, de notables perfectionnements.

2. *Premiers faits sur lesquels s'appuie l'hypothèse d'Ampère.* — L'expérience nous apprend que :

1° L'action d'un courant rectiligne peut, en toute circonstance, être substituée à celle d'un courant sinueux dont la forme en diffère très peu et dont l'intensité est la même.

2° L'attraction ou la répulsion mutuelle de deux courants agissant l'un sur l'autre se transforme, par un changement de sens dans l'un d'eux, en répulsion ou en attraction.

3° Deux courants rectilignes parallèles s'attirent ou se repoussent selon qu'ils sont de même sens ou de sens contraires.

3. *Conséquence.* — Il résulte du premier de ces faits que, *si l'on considère un courant de forme quelconque comme étant composé d'éléments rectilignes, on peut substituer à chacun de ces éléments un ensemble de courants de même intensité, et dont il est la somme géométrique.*

On voit, d'après ce principe, que l'on arrivera à déterminer l'action réciproque de deux courants de forme quelconque lorsque l'on connaîtra la loi suivant laquelle s'exerce l'action mutuelle de deux éléments de courant.

Pour arriver à la connaissance de cette loi élémentaire, nous admettrons que *l'action ci-dessus s'exerce suivant la droite qui joint les extrémités des deux éléments par lesquelles les courants arrivent* (¹).

Du second des faits ci-dessus énoncés on déduit qu'*un élément de courant ab n'exerce aucune action sur un autre élément de courant $a'b'$ situé dans un plan mené normalement à l'extrémité a du premier, par laquelle arrive le courant.* En effet, si, par exemple, il y avait une attraction dirigée suivant aa', en faisant subir au plan $aa'b'$, entraînant avec lui $a'b'$, une demi-révolution autour de ab, l'action mutuelle resterait toujours une attraction, tandis que l'élément $a'b'$ prendrait, par rapport à ab, une position inverse de celle qu'il avait d'abord : or, d'après l'observation, l'attraction devrait se transformer en répulsion, ce qui est absurde.

4. *Action mutuelle de deux éléments de courants.* — Soient (*fig.* 1)

$ab = ds$, $a'b' = ds'$ deux éléments de courants dont les intensités respectives sont i et i' ;

$r = aa'$ la droite qui joint les extrémités de ces éléments par lesquelles arrivent les courants ;

(¹) Ampère admettait que cette droite joignait les milieux des deux éléments en présence. La différence entre les deux conventions repose sur une subtilité à laquelle il n'y a pas lieu de s'arrêter.

α, α' les angles formés par ab, $a'b'$ avec aa' et $a'a$;
θ l'angle dièdre déterminé par les deux plans baa', $b'a'a$.

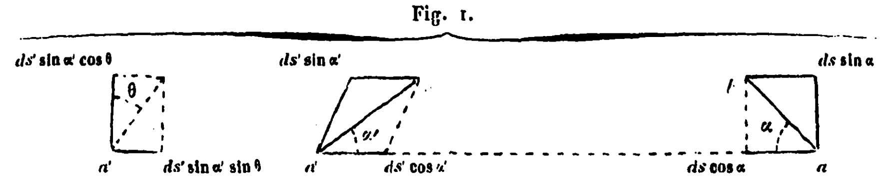
Nous pouvons substituer à l'élément ds ses deux composantes $ds\cos\alpha$, dirigée suivant aa', et $ds\sin\alpha$, dirigée normalement à cette direction. Nous pouvons de même substituer à ds' deux composantes, l'une, $ds'\cos\alpha'$, dirigée suivant $a'a$, et l'autre, $ds'\sin\alpha'$, perpendiculaire à la première.

L'élément $ds'\sin\alpha'$ se décompose en deux autres, l'un, $ds'\sin\alpha'\cos\theta$, parallèle à $ds\sin\alpha$, et l'autre, $ds'\sin\alpha'\sin\theta$, perpendiculaire au plan $a'ab$.

D'après ce que nous avons vu à la fin du n° 3, $ds'\sin\alpha'\sin\theta$ n'exerce aucune action sur $ds\sin\alpha$, $ds\cos\alpha$, et par suite sur ds.

L'action de l'élément $ds'\sin\alpha'\cos\theta$ sur ds se réduit à celle qu'il

Fig. 1.



exerce sur l'élément $ds\sin\alpha$, qui lui est parallèle. Nous supposerons que cette action est proportionnelle au produit des deux éléments et des intensités des courants, et en raison inverse d'une certaine puissance n de la distance r, de sorte que nous pourrons la représenter par

$$(a)\qquad ii'\frac{ds\,ds'\sin\alpha\sin\alpha'\cos\theta}{r^n}.$$

Nous conviendrons de considérer cette même action comme positive si c'est une attraction ou si $ds'\sin\alpha'\cos\theta$ et $ds\sin\alpha$ sont traversés dans le même sens par les courants; le signe du produit $\sin\alpha\sin\alpha'\cos\theta$ fera d'ailleurs connaître s'il s'agit d'une attraction ou d'une répulsion.

Il nous reste maintenant à tenir compte de l'action de $ds'\cos\alpha'$ sur $ds\cos\alpha$. Nous admettrons, comme ci-dessus, que cette action est proportionnelle au produit de ces éléments par ii' et varie en raison inverse de r^n; si nous désignons par k le rapport, supposé constant, entre les actions de deux éléments en ligne droite de sens contraires et de deux éléments parallèles de même sens, toutes choses égales d'ailleurs, nous aurons, pour l'action dont il s'agit,

$$(b) \qquad \frac{kii'ds\,ds'\cos\alpha\cos\alpha'}{r^n}.$$

L'action totale de ds' sur ds ou la somme des expressions (a) et (b) sera ainsi représentée par

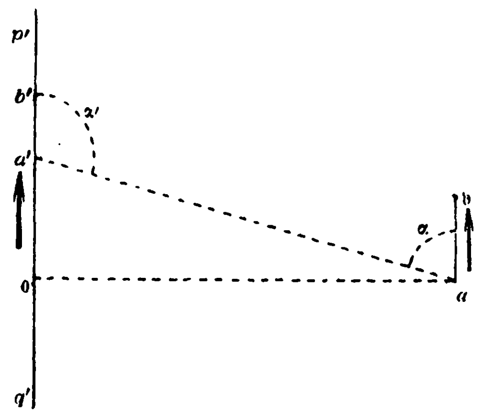
$$(c) \qquad \frac{ii'ds\,ds'}{r^n}(k\cos\alpha\cos\alpha' + \sin\alpha\sin\alpha'\cos\theta).$$

Les hypothèses sur lesquelles repose cette formule ne peuvent recevoir leur justification que par la concordance entre les résultats auxquels elle conduit et ceux que l'on déduit de l'expérience dans tous les cas qui peuvent se présenter.

5. *Détermination de la constante n.* — Ampère a obtenu la valeur de cette constante en partant de ce fait qu'*un courant rectiligne $p'q'$, assez long pour qu'on puisse le considérer comme infini, exerce sur un courant rectiligne fini pq qui lui est parallèle une action qui varie en raison inverse de la distance des deux courants,* action qui est d'ailleurs attractive ou répulsive selon que les courants sont ou non de même sens.

Admettons (*fig.* 2) que pq se réduise à un élément $ab = ds$. Soient

Fig. 2.



$l = Oa$ la distance de a à $p'q'$; $a'b' = ds'$ un élément de $p'q'$. Nous avons $\theta = 0$, et en ce qui concerne ab et $a'b'$,

$$\widehat{baa'} = \alpha, \quad \widehat{b'a'a} = \alpha' = 180^\circ - \alpha, \quad r = aa' = \frac{l}{\sin\alpha},$$
$$s' = Oa' = l\cot\alpha, \quad ds' = -\frac{l\,d\alpha}{\sin^2\alpha}.$$

L'attraction, si l'on admet que les deux courants soient de même sens, de $p'q'$ sur ab sera évidemment dirigée suivant aO, et la formule (c) donne, pour la composante suivant cette dernière direction de l'attraction produite par $a'b'$,

$$-\frac{ii'\,ds}{l^{n-1}}\sin^{n-2}\alpha(-k\cos^2\alpha + \sin^2\alpha),$$

d'où, pour l'action totale exercée par $p'q'$ sur ab,

$$(d) \qquad -\frac{2ii'\,ds}{l^{n-1}}\int_{\frac{\pi}{2}}^{0}\sin^{n-2}\alpha(-k\sin^2\alpha + \sin^2\alpha)d\alpha.$$

Ce résultat, comparé à celui de l'expérience, conduit à poser $n = 2$, et la formule (c) devient ainsi

$$(e) \qquad \frac{ii'\,ds\,ds'}{r^2}(k\cos\alpha\cos\alpha' + \sin\alpha\cos\alpha'\cos\theta).$$

6. *Détermination de la constante k.* — On déduit de l'expérience que *l'action d'un courant fermé sur un courant en arc de cercle est normale à cet arc en son milieu,* et, comme conséquence, que *l'action d'un courant fermé sur un élément de courant est normale à cet élément.*

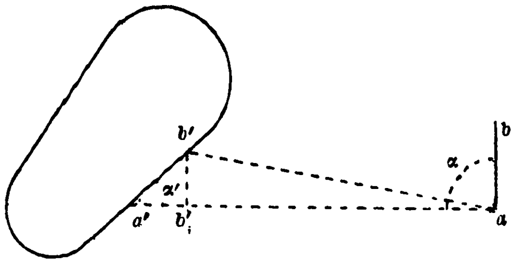
Soient (*fig.* 3)

$a'b' = ds'$ un élément du courant fermé ;
$ab = ds$ l'élément sur lequel agit ce courant ;
b'_1 la projection de b' sur $a'a$.

Conservons d'ailleurs les notations qui précèdent.

En vertu de la formule (e), la composante de l'action exercée

Fig. 3.



par $a'b'$ sur l'élément ab, estimée suivant cet élément, a pour expression

$$\frac{ii'\,ds\,ds'}{r^2}\left(k\cos\alpha\cos\alpha' + \sin\alpha\sin\alpha'\cos\theta\right)\cos\alpha.$$

Or on a

$$ds' = \frac{a'b'_1}{\cos\alpha'} = -\frac{dr}{\cos\alpha'},$$

et l'expression ci-dessus devient

$$(f)\qquad ii'\,ds\left(k\cos^2\alpha\, d\frac{1}{r} - \sin\alpha\cos\alpha\,\mathrm{tang}\,\alpha'\cos\theta\,\frac{dr}{r^2}\right).$$

L'angle trièdre formé par les directions des droites aa', ab', ab donne

$$(g)\qquad \cos\widehat{bab'} = \cos\widehat{baa'}\cos\widehat{b'aa'} + \sin\widehat{baa'}\sin\widehat{b'aa'}\cos\theta.$$

Or on a

$$\widehat{bab'} = \alpha + d\alpha,\quad \cos\widehat{bab'} = \cos\alpha + d\cos\alpha,$$

$$\widehat{b'aa'} = \frac{b'b'_1}{r} = -\frac{dr}{r}\,\mathrm{tang}\,\alpha',$$

et la formule (g) se réduit à la suivante :

$$d\cos\alpha = -\frac{dr}{r}\sin\alpha\,\mathrm{tang}\,\alpha'\cos\theta.$$

En ayant égard à cette relation, l'expression (f) devient

$$ii'\,ds\left(k\cos^2\alpha\,d\frac{1}{r}+\frac{1}{2r}\,d\cos^2\alpha\right).$$

Si l'on intègre cette expression et le premier terme par parties, on trouve, pour un courant quelconque fermé ou non,

$$(h)\qquad ii'\,ds\left[\frac{k}{r}\cos^2\alpha+\left(\frac{1}{2}-k\right)\int\frac{d\cos^2\alpha}{r}\right]+\text{const}\,C.$$

Cette intégrale doit être nulle, en partant d'un point d'un courant fermé pour revenir au même point, quelle que soit la forme du courant ou la relation qui doit exister entre r et α. Or, le premier terme donnant un résultat nul, il faut, pour que le second terme s'annule, que l'on ait

$$k=\frac{1}{2},$$

et alors l'expression (c) se réduit à la suivante:

$$(i)\qquad \frac{ii'\,ds\,ds'}{r^2}\left(\frac{\cos\alpha\cos\alpha'}{2}+\sin\alpha\sin\alpha'\cos6\right).$$

Remarque. — La valeur positive obtenue pour k signifie que l'action mutuelle de deux éléments de courants en ligne droite est une attraction ou une répulsion, selon que les deux courants sont de sens contraire ou de même sens.

7. *Nouvelle expression de l'action mutuelle de deux éléments de courants* — Considérons un courant quelconque non fermé, auquel la formule (h) est applicable. En faisant dans cette formule $k=\frac{1}{2}$, on obtient pour la composante suivant ds de l'action exercée par le courant sur cet élément

$$\frac{ii'}{2}\,\frac{ds}{r}\cos^2\alpha+C.$$

Si le courant se réduit à un élément ds', cette composante se réduit elle-même à

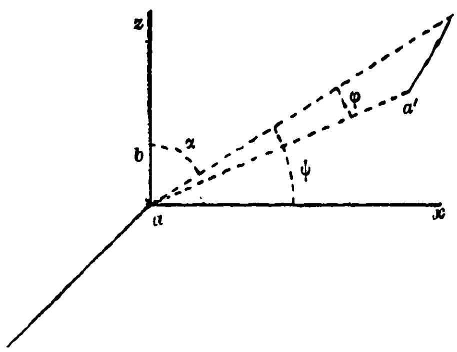
$$\frac{ii'}{2}\, ds\, d\,\frac{\cos^2\alpha}{r}.$$

Enfin l'action totale de ds' sur ds suivant la direction de r a pour expression

$$(2)\qquad \frac{ii'}{2}\,\frac{ds}{\cos\alpha}\, d\,\frac{\cos^2\alpha}{r}.$$

8. *Action d'un courant fermé sur un élément de courant.* — Prenons pour origine des coordonnées (*fig.* 4) l'extrémité a du courant élé-

Fig. 4.



mentaire $ab = ds$, par laquelle arrive le courant, et pour axe des z la direction de ab. Nous rappellerons que l'action résultante exercée par le courant fermé sur ab est située dans le plan xay.

La composante suivant ax de l'action exercée par un élément $a'b'$ de ce courant sur ds est, d'après le numéro précédent,

$$\frac{ii'\,ds}{2\cos\alpha}\cos\widehat{a'ax}\, d\,\frac{\cos^2\alpha}{r}.$$

En intégrant par parties il vient, pour la projection sur ax, de la résultante cherchée,

$$\frac{ii'\,ds}{2}\left(\cos\alpha\cos\widehat{a'ax} - \int\frac{\cos^2\alpha}{r}\, d\,\frac{\cos\widehat{a'ax}}{\cos\alpha}\right)$$

ou simplement

$$(i)\qquad -ii'\frac{ds}{2}\int\frac{\cos^2\alpha}{r}\,d\frac{\cos\widehat{a'ax}}{\cos\alpha},$$

puisque le courant est fermé.

Soient φ l'angle formé par aa' avec sa projection aa'_1 sur le plan xaz; ψ l'angle $\widehat{a'_1ax}$. Les angles trièdres rectangles déterminés par az, aa', aa'_1 et par aa'_1, aa', ax donnent

$$\cos\alpha = \cos\varphi\sin\psi,$$
$$\cos\widehat{a'ax} = \cos\varphi\cos\psi,$$

et l'expression (i) se réduit à la suivante,

$$(3)\qquad ii'\,ds\,A'_y,$$

en posant

$$(4)\qquad \int\frac{1}{2}\frac{r^2\cos^2\varphi\,d\psi}{r^3} = A'_y.$$

Cette intégrale représente la somme des aires élémentaires du cône déterminé par le sommet a et par le courant fermé, projetées sur le plan zax et divisées par r^3.

Si l'on porte à partir du point a, sur la perpendiculaire élevée en ce point à l'aire élémentaire $aa'b'$, une longueur proportionnelle à cette aire divisée par le cube de la distance r, et si A' désigne la somme géométrique de toutes les longueurs semblables, A'_y ne sera autre chose que la projection de A' sur ay.

En désignant par A'_x la projection de A' sur ax, on trouve, de la même manière que ci-dessus, pour la composante de l'action cherchée suivant ay,

$$(3')\qquad ii'_1\,ds\,A'_x$$

On voit, d'après ce qui précède, que le problème proposé se ramène à déterminer A′ en grandeur et en direction, en choisissant convenablement trois axes rectangulaires (qui différeront généralement des précédents), de manière à ramener les calculs à leur plus grande simplicité.

9. *Action sur un élément de courant d'un courant circulaire dont le rayon est très petit par rapport à la distance du centre à l'élément considéré.*

Le problème dont il s'agit se réduit, ainsi que nous venons de le dire, à déterminer les projections de A′ sur trois axes rectangulaires passant par l'extrémité a de l'élément ds.

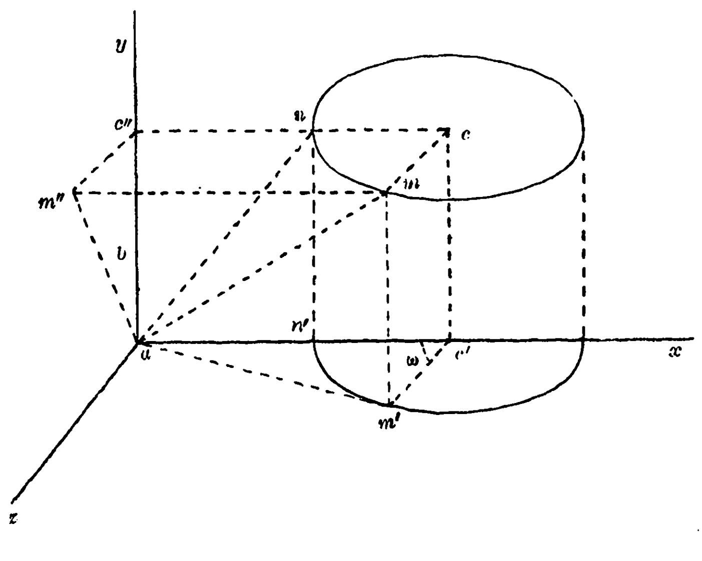
Nous prendrons le plan xaz parallèle à celui du courant circulaire, et nous ferons passer le plan yax par le centre c de la circonférence. Il est évident que l'on a

$$A'_z = 0.$$

Soient

c', m' les projections sur le plan xaz de c et d'un point quelconque m de la circonférence;

Fig. 5.



c'', m'' les projections de c et m sur le plan yaz;
n l'intersection de cc'' avec la circonférence, et n' sa projection sur ax;

ω l'angle $\widehat{ncm} = \widehat{n'c'm'}$;
h la hauteur cc';
ρ' le rayon de la circonférence;
l la distance ac';
$u = \sqrt{l^2 + h^2}$ la distance ac.

Nous admettrons que le courant circulaire aille de la droite vers la gauche, sens qui sera aussi pour nous celui des aires en projection sur les plans coordonnés, comme au numéro précédent.

Nous avons

$$(j) \qquad A'_y = -\int \overline{am}^3\, d\,\text{aire}\, an'm', \quad A'_x = \int \overline{am}^3\, d\,\text{aire}\, am''c''.$$

Or

$$\text{aire}\, an'm' = \text{aire}\, am'c' - \text{aire}\, n'm'c' = \frac{\rho'}{2}(l \sin\omega - \rho'\omega),$$

$$\text{aire}\, am''c'' = h\frac{m''c''}{2} = h\rho'\frac{\sin\omega}{2},$$

d'où

$$(k) \qquad \begin{cases} d\,.\,\text{aire}\, an'm' = \dfrac{\rho'}{2}(l\cos\omega - \rho')\,d\omega, \\ d\,.\,\text{aire}\, am''c'' = \dfrac{\rho' h}{2}\cos\omega\, d\omega. \end{cases}$$

Nous avons en outre, en négligeant les puissances de $\frac{\rho}{h}$, $\frac{\rho}{u}$ supérieures à la première,

$$(l) \qquad \begin{cases} \overline{am}^3 = \left(\overline{am'}^2 + h^2\right)^{-\frac{3}{2}} = (\rho'^2 + l^2 + h^2 - 2l\rho'\cos\omega)^{-\frac{3}{2}} \\ \qquad = (\rho'^2 + u^2 - 2l\rho'\cos\omega)^{-\frac{3}{2}} = u^{-3}\left(1 + \dfrac{3l\rho'}{u^2}\cos\omega\right). \end{cases}$$

En faisant les substitutions (k) et (l) dans les formules (j), puis intégrant entre les limites $\omega = 0$ et $\omega = 2\pi$, en remarquant que $l^2 = u^2 - h^2$, on trouve

$$(5) \qquad \begin{cases} A'_y = -\dfrac{\pi\rho'^2}{u^3}\left(\dfrac{3}{2}\dfrac{l^2}{u^2} - 1\right) = -\dfrac{\pi\rho'^2}{2u^3}\left(1 - \dfrac{3h^2}{u^2}\right), \\ A'_x = \dfrac{3}{2}\pi\rho'^2\dfrac{lh}{u^5}. \end{cases}$$

Soient A'_v la projection de A' sur une droite quelconque av; γ, δ les angles que forme cette droite avec ax et ay. Nous avons

$$A'_v = A'_x \cos\gamma + A'_y \cos\delta = -\frac{\pi\rho'^2}{2u^3}[\cos\delta - 3h(l\cos\gamma + h\cos\delta)],$$

ou, en désignant par p la distance du centre c au plan mené en a normalement à av,

$$(6) \qquad A'_v = -\frac{\pi\rho'^2}{2u^3}\left(\cos\delta - \frac{3ph}{u^2}\right),$$

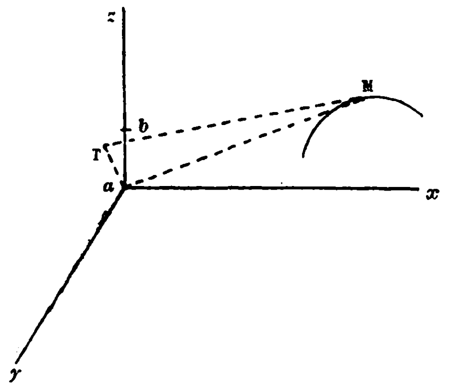
formule dans laquelle il ne faut pas perdre de vue que δ est l'angle que forme av avec l'axe du courant circulaire.

10. *Action d'un solénoïde sur un élément de courant.* — Nous rappellerons qu'un solénoïde peut être considéré comme étant un système de courants circulaires identiques d'un très petit rayon, très peu espacés, normaux à une courbe directrice, quelle qu'elle soit d'ailleurs, et qui est le lieu de leurs centres

Soient (*fig.* 6).

x, y, z les coordonnées d'un point u de la courbe directrice rapportée

Fig. 6.



à trois axes retangulaires ayant a pour origine, l'axe az étant, comme au n° **8**, dirigé suivant ab;

$d\sigma$ l'arc élémentaire de cette courbe;

aT la perpendiculaire abaissée de l'origine a sur la tangente MT en M.

Considérons le courant circulaire dont le centre est M.

Si nous faisons coïncider l'axe av du numéro précédent avec ay, nous aurons

$$\cos\delta = \frac{dy}{d\sigma}, \quad p = y, \quad h = u\cos\widehat{\mathrm{TMO}} = u\frac{du}{d\sigma},$$

et par suite

$$\mathrm{A}'_y = -\frac{\pi\rho'^2}{2u^3}\left(\frac{dy}{d\sigma} - \frac{3y}{u^2}\frac{du}{d\sigma}\right) = -\frac{\pi\rho'^2}{2d\sigma}\left(\frac{dy}{u^3} - 3y\frac{du}{u^4}\right),$$

ou encore

$$(m) \qquad \mathrm{A}'_y = -\frac{\pi\rho'^2}{2d\sigma}d\frac{y}{u^3};$$

on a de même

$$(m') \qquad \mathrm{A}'_x = \frac{\pi\rho'^2}{2d\sigma}d\frac{x}{u^3}.$$

D'après le n° **8**, nous aurons ainsi, pour les composantes suivant ax et ay de l'action du courant circulaire considéré,

$$(n) \qquad -ii'ds\frac{\pi\rho'^2}{2d\sigma}d\frac{y}{u^3},$$

$$(n') \qquad ii'ds\frac{\pi\rho'^2}{2d\sigma}d\frac{x}{u^3}.$$

Soient

g' la distance constante de deux courants circulaires consécutifs;
P', P'_1 les extrémités de la courbe directrice ou les *pôles* du solénoïde;
x', y', u' et x'_1, y'_1, u'_1 les valeurs de x, y, u qui se rapportent respectivement à ces deux points. Nous mesurerons σ à partir de P'.

Le nombre des courants circulaires dont les centres sont situés sur σ est $\frac{\sigma}{g}$ et sur $d\sigma$

$$(p) \qquad \frac{d\sigma}{g} \quad (^1).$$

---

(1) Cette manière de procéder laisse sans doute à désirer lorsque g' n'est pas infiniment petit; mais, lorsqu'il n'en est pas ainsi, on fera tomber toutes les ob-

Posons

$$(7) \qquad \mu' = \frac{i'\pi\rho'^2}{2g'},$$

constante qui ne dépend que de la nature du solénoïde.

En multipliant par la valeur (p) les expressions (n) et (n'), nous obtiendrons, pour les composantes de l'action exercée sur ds par les courants circulaires correspondant à $d\sigma$,

$$(q) \qquad \left\{ \begin{array}{ll} -\mu' i d \frac{y}{u^3} & \text{suivant } ax, \\ \mu' i d \frac{x}{u^3} & \text{suivant } ay. \end{array} \right.$$

En intégrant ces expressions entre les limites qui se rapportent aux points P'_1 et P', nous aurons, pour les composantes suivant ax et ay de l'action cherchée,

$$(8) \qquad \left\{ \begin{array}{l} dX = \mu' i \left(\frac{y'}{u'^3} - \frac{y'_1}{u'^3_1} \right) ds, \\ dY = \mu' i \left(\frac{x'_1}{u'^3_1} - \frac{x'}{u'^3} \right) ds. \end{array} \right.$$

On voit ainsi que cette action ne dépend que des positions relatives des pôles par rapport à ds, et non de la forme de la courbe directrice. On peut même considérer chacun des pôles comme exerçant sur ds une action spéciale, soit par exemple, pour le pôle P',

$$(9) \qquad \left\{ \begin{array}{l} dX' = \mu' i \frac{y'}{u'^3} ds, \\ dY' = -\mu' i \frac{x'}{u'^3} ds. \end{array} \right.$$

---

jections en considérant $d\sigma$, non comme une différentielle, mais comme une longueur assez petite pour que l'on puisse en négliger les puissances supérieures à la première, et assez grande cependant pour comprendre un certain nombre de courants circulaires.

Comment, d'ailleurs, pourrait-on comprendre qu'un parallélépipède élémentaire pût renfermer une certaine quantité de matière nécessairement discontinue, si l'on admettait que ses dimensions fussent nulles, au lieu de les considérer comme très petites, quoique supérieures aux intervalles intermoléculaires.

On déduit de là

$$\frac{dY'}{dX'} = -\frac{x'}{y'},$$

ce qui signifie que *chaque pôle exerce sur l'élément de courant une action normale au plan mené par l'élément et le pôle.*

Si nous faisons passer le plan zOy par ab et P′, l'action exercée par le pôle considéré, que nous représenterons par dR', se réduira à dX', et nous aurons

$$dR' = \mu' i \frac{y'}{u'^3} ds.$$

Si η désigne l'angle formé par ab avec u', on a

$$y' = u' \sin\eta,$$

et, en supprimant l'accent de u devenu inutile, la formule précédente devient

$$(10) \qquad dR' = \mu' i \frac{\sin\eta}{u^2} ds,$$

d'où un théorème qu'il est facile d'énoncer.

11. *Action d'un courant fermé sur l'un des pôles d'un solénoïde.* —

Soient (*fig.* 7)

P′ le pôle considéré ;
$ab = ds$ un élément du courant fermé ;
b' la projection de b sur aP' ;
$d\theta$ l'angle $ab'P'$.

L'action dR exercée par ab sur P′, égale et contraire à dR', est perpendiculaire au plan abP' et a pour expression

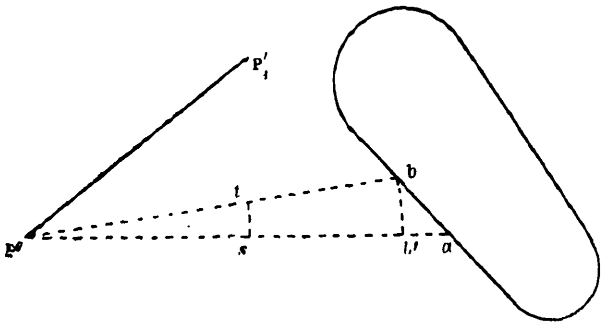
$$(10') \qquad dR = \mu' i \frac{ab \sin baP'}{\overline{aP'}^2} = \mu' i \frac{bb'}{\overline{aP'}^2},$$

ou, comme $bb' = aP'.d\theta$,

$$dR = \mu' i \frac{d\theta}{aP'}.$$

En transportant cette force parallèlement à elle-même en P', il en résultera un couple dont l'axe du moment $\mu' i\, d\theta$ ne sera autre chose que l'élément st, limité par aP', bP', de l'intersection de la sphère dont le centre est P' et le rayon $\mu' i$ avec la surface du cône déterminé par le

Fig. 7.



courant fermé et par le sommet P'. Or, tous les axes tels que st des couples élémentaires déterminant une courbe fermée, l'axe du couple résultant est nul. Donc :

L'action d'un courant fermé sur l'un des pôles d'un solénoïde se réduit à une force passant par ce pôle.

L'action du courant n'est donc autre chose que la résultante des forces dR appliquées en ce point.

L'expression (10') peut se mettre sous la forme suivante, en désignant par $d\mathfrak{a}$ l'aire abc,

$$dR = 2\mu' i \frac{\text{aire}\, abc}{\overline{aP'}^3} = 2\mu' i \frac{d\mathfrak{a}}{\overline{aP'}^3}.$$

Soient P'x, P'y, Pz' trois axes rectangulaires menés par le point P'; $d\mathfrak{a}_x$, $d\mathfrak{a}_y$, $d\mathfrak{a}_z$ les projections de l'aire $d\mathfrak{a}$ sur les plans zP'y, xP'z, yP'x. La composante de dR suivant P'x sera

$$dX = 2\mu' i \frac{d\mathfrak{a}_x}{\overline{aP'}^3},$$

d'où, pour la composante semblable de l'action exercée par le courant,

$$X = 2\mu' i \int \frac{d\mathfrak{a}_x}{\overline{aP'}^3}.$$

Portons sur la normale au plan $bP'a$, à partir de P', une longueur égale à $\frac{d\alpha}{\overline{aP'}^3}$, et soient A la somme géométrique de toutes les droites ainsi obtenues; A_x, A_y, A_z les projections de cette résultante sur $P'x$, $P'y$, $P'z$; nous aurons évidemment

$$(11) \quad \left\{ \begin{array}{l} X = 2\mu' i A_x, \\ \text{et de même} \\ Y = 2\mu' i A_y, \\ Z = 2\mu' i A_z, \end{array} \right.$$

12. *Action d'un solénoïde sur l'un des pôles d'un autre solénoïde.* — Soient

PP_1 le premier solénoïde;
ρ le rayon des courants circulaires qui le constituent;
g l'équidistance de ces courants;
P' le pôle, du second solénoïde $P'P'_1$, que nous avons à considérer.

Soient, de plus, σ l'arc de la courbe directrice de PP_1 mesuré à partir du point P jusqu'à un point M quelconque dont les coordonnées sont x, y, z.

Il est clair, d'après la signification même de A, que A_x sera donné par la formule (m') du n° **10**, en y remplaçant ρ' par ρ et supposant $u = P'M$. Nous avons donc

$$A_x = \frac{\pi\rho^2}{2\,d\sigma}\, d\frac{x}{u^3}.$$

Portons cette valeur dans la première des formules (11), multiplions-la ensuite par le nombre des courants $\frac{d\sigma}{g}$ compris dans $d\sigma$ pour avoir la composante relative à cet élément, et posons

$$\mu = \frac{i\pi\rho^2}{2g};$$

nous obtiendrons

$$(12) \qquad X = 2\mu\mu'\, d\frac{x}{u^3}.$$

Soient

x_0, y_0, z_0 les coordonnées de P;
x_1, y_1, z_1 celles de P_1;
$u_0 = PP'$, $u_1 = P_1P'$;
χ, η, ζ les composantes de l'action totale exercée par PP_1 sur P', estimées suivant $P'x$, $P'y$, $P'z$.

Nous aurons, en intégrant l'équation (12).

$$(10)\quad \left\{\begin{array}{l} \chi = 2\mu\mu'\left(\dfrac{x_1}{u_1^3} - \dfrac{x_0}{u_0^3}\right), \\ \text{et de même} \\ \eta = 2\mu\mu'\left(\dfrac{y_1}{u_1^3} - \dfrac{y_0}{u_0^3}\right), \\ \zeta = 2\mu\mu'\left(\dfrac{z_1}{u_1^3} - \dfrac{z_0}{u_0^3}\right). \end{array}\right.$$

Il résulte de là que P, P_1 exercent sur P' deux actions distinctes $\dfrac{2\mu\mu'}{u_0^2}$, $\dfrac{2\mu\mu'}{u_1^2}$, variant en raison inverse du carré de la distance, dirigées respectivement suivant PP', P_1P', et que si la première, par exemple, est une attraction, l'autre sera une répulsion. Mais, P' exerçant par suite une attraction sur P, P'_1 exercera sur ce pôle une répulsion et une attraction sur P_1.

Il y a donc, en résumé, quatre forces en jeu sur lesquelles il nous paraît inutile d'insister; qu'il nous suffise de rappeler que, en définitive, deux solénoïdes placés à une distance suffisamment grande l'un de l'autre par rapport à leurs diamètres se comportent entre eux comme deux aimants.

Tel est l'exposé succinct de la partie essentielle de la théorie d'Ampère. Nous avons omis à dessein les questions relatives aux actions mutuelles et au mouvement de deux courants rectilignes situés ou non dans un même plan, parallèles ou non, d'un courant circulaire sur son diamètre, etc., questions dont les solutions sont trop simples pour que nous ayons cru devoir nous en occuper.