

Nachweis der relativistischen Masseänderung von schnellen Elektronen durch Elektronenbeugung im Elektronenmikroskop

Ort : Institut für Physik, Labor 403
 Professur *Analytik an Festkörperoberflächen*
 Betreuer: Dr. S. Schulze, Tel.: 531 3204, Büro 455
 Dauer : 2-tägig

Präzisionselektronenbeugung im Durchstrahlungselektronenmikroskop erlaubt die Bestimmung von Netzebenenabständen mit einer Präzision unter 5%. Bei Verwendung einer Eichsubstanz genau bekannter Struktur ist umgekehrt die Elektronenwellenlänge mit ebensolcher Präzision ermittelbar. Damit wird es möglich, schon an Elektronen mit kinetischen Energien unter 100 keV relativistische Masseänderungen festzustellen.

1 Materiewellen

Die Zusammenhänge zwischen den Größen, die die Elektronen im Quantenmodell bzw. im Wellenmodell charakterisieren, werden durch die DE-BROGLIE-Beziehung vermittelt:

$$\lambda = \frac{h}{p}$$

	Teilchenbild	Wellenbild
charakteristische Größen	m, \mathbf{v}	$\lambda, \nu, c_{ph} = \lambda \nu$
Impuls (DE-BROGLIE-Beziehung)	$\mathbf{p} = m\mathbf{v}$	$p = h/\lambda$

1.1 DE-BROGLIE-Wellenlänge von Elektronen bei nichtrelativistischer Geschwindigkeit

Für kleine Beschleunigungsspannungen U_B kann die DE-BROGLIE-Wellenlänge aus dem klassischen Impuls bestimmt werden. Die kinetische Energie E_{kin} eines Elektrons nach Durchlaufen der Beschleunigungsspannung U_B ist

$$E_{kin} = eU_B.$$

In der klassischen Mechanik gilt zwischen Impuls \mathbf{p} und der kinetischen Energie E_{kin} die Beziehung

$$E_{kin} = \frac{\mathbf{p}^2}{2m}$$

Der Impuls \mathbf{p} eines mit U_B beschleunigten Elektrons ist deshalb

$$\mathbf{p} = \sqrt{2meU_B}$$

Unter Verwendung der DE-BROGLIE-Beziehung ergibt sich für die Wellenlänge λ der Materiewelle des Elektrons

$$\lambda = \frac{h}{\sqrt{2meU_B}}$$

Diese Wellenlänge wird auch als DE-BROGLIE-Wellenlänge bezeichnet. Bereits bei $eU_B = 10$ keV erreicht die Geschwindigkeit der Elektronen $v = 0,19 c$. Die dabei auftretende relativistische Massenzunahme ist in obiger Gleichung nicht berücksichtigt. Deshalb muß für größere, in der Elektronenmikroskopie übliche Beschleunigungsspannungen, der Elektronenimpuls relativistisch bestimmt werden.

1.2 DE-BROGLIE-Wellenlänge bei relativistischer Elektronengeschwindigkeit

Für die Gesamtenergie E eines Teilchens gilt

$$E = mc^2 = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}}$$

Dabei ist m_0 die Ruhemasse des Elektrons. Weiterhin gültig bleibt

$$\mathbf{p} = m\mathbf{v}$$

Als Beziehung zwischen der Gesamtenergie E und dem Impuls p gilt daher

$$E^2 = p^2 c^2 + m_0^2 c^4$$

Die Gesamtenergie E setzt sich aus kinetischer Energie $E_{kin} = (eU_B)$ und Ruheenergie $m_0 c^2$ zusammen. Für den Impuls des mit U_B beschleunigten Elektrons ergibt sich:

$$p = \underbrace{\sqrt{2m_0 eU_B}}_{\text{klassisch}} \underbrace{\sqrt{1 + eU_B / 2m_0 c^2}}_{\text{relativistische Korrektur}}$$

Für die DE-BROGLIE-Wellenlänge der Elektronen entsteht folgender Ausdruck:

$$\lambda = \frac{h}{\sqrt{2m_0 eU_B}} \frac{1}{\sqrt{1 + eU_B / 2m_0 c^2}}$$

Für einige Beschleunigungsspannungen sind in der folgenden Tabelle die DE-BROGLIE-Wellenlängen nach der klassischen und nach der relativistischen Rechnung verglichen.

U_B in V	v/c	λ_{klass} in nm	λ_{rel} in nm
1	0,002	1,226 43	1,226 43
100	0,02	0,122 64	0,122 64
10 000	0,19	0,012 26	0,012 20
100 000	0,55	0,003 87	0,003 70
1 000 000	0,94	0,001 23	0,000 87

Im Hinblick auf die im Versuch geforderte Auswertung läßt sich der Ausdruck für λ noch etwas umformen:

$$\lambda \sqrt{eU_B} = \frac{h}{\sqrt{2m_0} \sqrt{1 + eU_B / 2m_0 c^2}}$$

Bis $eU_B = 100$ keV ist die relativistische Korrektur noch klein (<5%), da der Term $eU_B / 2m_0 c^2$ klein gegen 1 ist. Deshalb kann der Wurzelausdruck gemäß

$$(1+x)^{-1/2} = 1 - \frac{1}{2}x + \left(\frac{3}{8}x^2 - \frac{5}{16}x^3 + \dots\right) \quad \text{für alle } |x| < 1$$

nach diesem kleinen Term entwickelt werden.

$$\lambda \sqrt{eU_B} = \frac{h}{\sqrt{2m_0}} \left(1 - \frac{eU_B}{4m_0 c^2}\right) = \frac{h}{\sqrt{2m_0}} - \frac{h}{4m_0 c^2 \sqrt{2m_0}} eU_B$$

Trägt man also $\lambda \sqrt{eU_B}$ über eU_B auf, so sollte sich eine Gerade ergeben.

2 Meß-/Arbeitsprogramm

2.1 Auswertung des Elektronenbeugungsdiagramms

Ermitteln Sie an einer Serie von Präzisionsbeugungsaufnahmen von TlBr bei 40, 60, 80 und 100 keV die Elektronenwellenlängen! Hierzu folgende Überlegungen:

In Abb. 1 wurde der experimentelle Aufbau einer Elektronenbeugungsanordnung auf das Wesentliche reduziert.

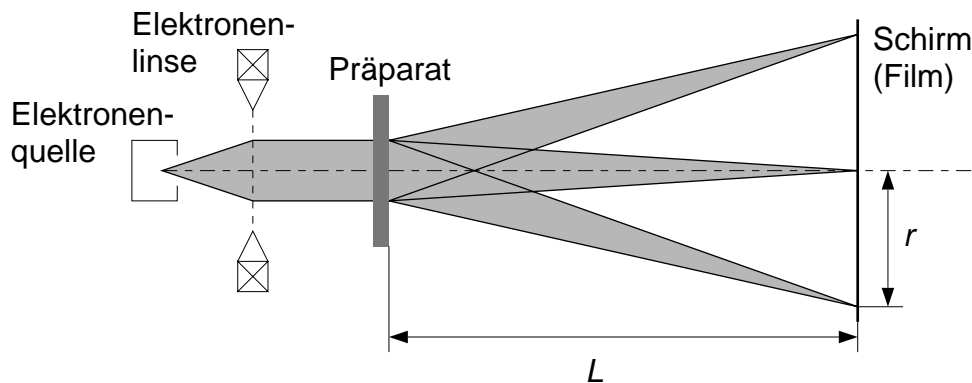


Abb. 1 Elektronenbeugungsanordnung

Der Ablenkwinkel 2ϑ bei gegebener Kameralänge L durch den Ringradius r ausgedrückt werden.

$$\tan 2\vartheta = \frac{r}{L}$$

Wegen der sehr kleinen Ablenkwinkel, die bei der Elektronenbeugung auftreten ($2\vartheta \approx 1$), kann mit guter Genauigkeit der Tangens durch das Argument ersetzt werden, ebenso wird der in der BRAGGSchen Gleichung vorkommende $\sin \vartheta$ gleich ϑ gesetzt. Aus der BRAGGSchen Gleichung wird damit

$$2d\vartheta = n\lambda$$

und aus der oben aufgeführten Beziehung wird

$$2\vartheta = \frac{r}{L}$$

Damit ergibt sich

$$rd = n\lambda L = C$$

Die Größe $C = n\lambda L$ heißt Kamerakonstante und wird experimentell durch Messung der Ringradien r bei einer Substanz mit bekannten Netzebenenabständen d bestimmt. Ist sie bekannt, ergeben sich aus den Ringradien r von einer unbekannt Probe die zugehörigen Netzebenenabstände d .

Durch Division der erhaltenen Kamerakonstanten C durch die am Mikroskop angegebene Kameralänge L ergibt sich die DE-BROGLIE-Wellenlänge der Elektronen bei der eingestellten Beschleunigungsspannung ($n=1$, da nur erste Beugungsordnung beobachtet).

Zur Bestimmung der Wellenlänge bei verschiedenen Beschleunigungsspannungen mit einem TlBr-Präparat empfiehlt es sich, folgende Tabellen anzulegen:

			$L=31,2\text{cm}$	$eU_B=\dots\text{keV}$	
Nr.	(hkl)	Intensität	$r[\text{mm}]$	$d[\text{Å}]$	$C=rd[\text{mm Å}]$
1	(001)			3,98	
2	(011)			2,818	
3	(111)			2,300	
4	(002)			1,9926	
5	(012)			1,7820	
6	(112)			1,6268	
			Mittelwert:		
			Standardabweichung:		
			:		
			$\lambda=C/L:$		

2.2 Regression

Zeigen Sie in einer graphischen Darstellung von $\lambda\sqrt{eU_B}$ als Funktion von eU_B , daß die nichtrelativistische Näherung für die DE-BROGLIE-Wellenlänge nicht ausreicht.

2.3 Ruheenergie

Bestimmen Sie aus dem Anstieg und dem Ordinatenschnittpunkt der Kurve die Ruheenergie m_0c^2 des Elektrons. Errechnen Sie zum Vergleich schon bei der Vorbereitung Ihres Protokolls die Ruheenergie m_0c^2 in keV aus Tabellenwerten für m_0 und c .

3 Stichwortverzeichnis

Durchstrahlungselektronenmikroskopie, Materiewellen, De-Broglie-Wellenlänge, Elektronenbeugung an polykristallinen Schichten im Elektronenmikroskop, BRAGGsche Gleichung, relativistische Masseänderung, Ruheenergie des Elektrons

4 Literaturangaben

- Schulze S.: *Elektronenmikroskopische Strukturanalysemethoden*, Kurzfassung fürs Praktikum -> Literaturliste
- Bergmann, Schaefer: *Lehrbuch der Experimentalphysik*. Bd. 3 Optik. 9. Aufl., Berlin: de Gruyter 1993. (Materiewellen, Elektronenoptik) -> Lesesaal
- Reimer, L.: *Transmission Electron Microscopy*. 3rd ed., Berlin: Springer 1993. (Bildentstehung, Elektron-Objekt-Wechselwirkung, Bildinterpretation) -> Bibliothek
- Weißmantel, Ch., Hamann, C., u.a.: *Grundlagen der Festkörperphysik*. 2. unv. Aufl., Berlin: Dt. Vlg. d. Wiss. 1981. (Kristallstruktur, Strukturfaktor, Beugungsverfahren) -> Bibliothek
- Bergmann, Schaefer: *Lehrbuch der Experimentalphysik*. Bd. 6 Festkörper, Berlin: de Gruyter 1992. (Kristallstruktur) -> Lesesaal
- Bethge, Heidenreich: *Elektronenmikroskopie in der Festkörperphysik*. Berlin: 1982. -> Bibliothek
- Liekfeld: *Elektronenmikroskopie*. Stuttgart: 1979.
- Heimendahl, v.: *Einführung in die Elektronenmikroskopie*. Braunschweig: 1970.

5 Liste der Geräte

1. Durchstrahlungselektronenmikroskop JEM 100 CX
2. Dunkelkammergerätschaften
3. Komparator

6 Wichtige Hinweise

- Die JEM Bedienung muß sich ausschließlich auf die vom Betreuer vorgeführten Arbeitsgänge beschränken. Bei allen Problemen mit der Gerätebedienung ist unverzüglich der Betreuer zu konsultieren.
- Die Filmentwicklung erfolgt nach den in der Dunkelkammer aushängenden Rezepturen. Insbesondere ist die Entwicklerlösung aus 20 ml R09-Entwickler und 100 ml Wasser selbst anzusetzen. Die Planfilme müssen an den Kanten gefaßt werden; Fingerabdrücke auf der fotografischen Emulsion sind zu vermeiden.
- Zur Meßwertauswertung ist die Ermittlung der Parameter einer Regressionsgeraden erforderlich. Dafür können Millimeterpapier oder ein geeigneter Taschenrechner mitgebracht werden.