УДК 517.53

Ю. А. Митропольский, П. М. Тамразов, Л. А. Гудзь

# Исследования В. А. Зморовича в области геометрической теории функций

Доктор физико-математических наук профессор Валентин Анатольевич Зморович — известный советский ученый в области теории функций комплексного переменного. Им опубликовано свыше 120 научных работ, содержащих глубокие результаты теории экстремальных задач в специальных классах аналитических функций и в других областях математики.

Широкую известность и многочисленные приложения в нашей стране и за рубежом получили разработанные В. А. Зморовичем методы структурных формул и алгебраизации вариационных задач для функционалов, определенных на функциях Каратеодори, метод вещественных дифференциальных уравнений для аналитических функций, связанных с функциями Каратеодори, и метод комплексификации ядер интегральных преобразований специальных классов аналитических функций.

Начиная с первой работы основные научные интересы В. А. Зморовича связаны с теорией комформных отображений односвязных и многосвязных областей, с теорией специальных классов аналитических функций и разработкой методов решения экстремальных задач в них. Наибольшее внимание В. А. Зморович уделял трем тесно связанным между собою проблемам.

1. Представимость структурными формулами различных классов аналитических (однолистных или неоднолистных) функций в односвязных и многосвязных областях;
2. Разработка методов экстремизации стилтьесовых функционалов;
3. Решение конкретных задач об экстремумах и областях значений различных функционалов на классах однолистных и многолистных функций.

При решении первой проблемы В. А. Зморович получил важные результаты о характеристическом представлении в виде стилтьесовых интегралов основных специальных классов однозначных регулярных функций в кольце и других областях.

В проблеме 2 разработан и обоснован весьма мощный метод вариации стилтьесовых функционалов, нашедший многочисленные приложения и широкую популярность среди специалистов. Этот метод В. А. Зморович дополнил важными результатами об экстремизации функционалов на регулярных функциях, соответствующих двухскачковым распределениям. Поскольку в некоторых важных и трудных экстремальных задачах теории специальных классов регулярных функций экстремали соответствуют именно двухскачковым распределениям, то тем самым предложено сильное средство решения таких задач.

В проблеме 3 В. А. Зморовичу принадлежит решение ряда интересных и трудных конкретных задач, в которых удалось получить точные оценки и области значений основных функционалов. В частности, он получил точные оценки кривизны линий уровня и ортогональных траекторий в подклассах выпуклых нормированных функций с $p$-кратной симметрией вращения, а также в подклассе нормированных однолистных функций, реализующих отображение $|\zeta| > 1$ на области с выпуклым дополнением.

Важные исследования проведены В. А. Зморовичем по классификации аналитических функций и конформных отображений, введены и глубоко исследованы новые классы и подклассы однолистных функций. Установлены аналоги для многосвязных областей некоторых основных формул представления аналитических функций, в частности аналог формулы Пуассона—Иенсена.

В. А. Зморович разработал метод, получивший название метода структурных формул, для исследования экстремальных свойств различных специальных классов однолистных и многолистных аналитических функций в круге $|z| < 1$ и в круговых областях $0 < |z| < 1$, $|z| > 1$. Этот метод получил многочисленные применения в геометрической теории функций в соединении с эффективным вариационным методом для отыскания экстремумов широкого класса функционалов, предложенного в работе [10]*, и аналога известной формулы Рисса — Херглотца, полученного для кругового кольца в статье [11].

Приведем основной результат работы [11]. Пусть $K(r, R) = \{z : r < |z| < R\}$, $0 < r < R < \infty$,

$$K_q(r) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=-n}^{n} \frac{R + q^{2k} z}{R - q^{2k} z} = \frac{R + r}{R - r} + \sum_{k=1}^{\infty} \left( \frac{R + q^{2k} z}{R - q^{2k} z} - \frac{z + q^{2k} R}{z - q^{2k} R} \right), \quad (1)$$

где $q = \dfrac{r}{R}$ — модуль кольца $K(r, R)$. Классом $C(r, R)$ назовем совокупность всех функций $f(z)$, голоморфных в $K(r, R)$, имеющих в этом кольце положительную вещественную часть и нормированных условием $\dfrac{1}{2\pi i} \displaystyle\int\limits_{|z|=\rho} \frac{f(z)}{z}\, dz = 1$, $r < \rho < R$. Примером функции из $C(r, R)$ является функция $K_q(z)$ вида (1). Класс $C(0, 1)$ совпадает с классом Каратеодори.

Теорема. *Необходимым и достаточным условием принадлежности функции $f(z)$ классу $C(q, 1)$, $0 < q < 1$, является возможность представить ее формулой*

$$f(z) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} K_q(ze^{-i\theta})\, d\mu_1(\theta) + \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} K_q\left(\frac{q}{z} e^{i\theta}\right) d\mu_2(\theta) - 1, \quad (2)$$

*где $\mu_1(\theta)$ и $\mu_2(\theta)$ — функции класса $M[-\pi, \pi]$, $K_q(z)$ определяется формулой (1) при $R = 1$ и интегралы в (2) берутся в смысле Стилтьеса.*

Этот результат дал возможность построить структурные формулы для многих специальных классов однолистных, аналитических функций в круговом кольце и с помощью указанного выше вариационного метода изучить экстремальные свойства этих классов.

* Родственный метод предложил в 1953 г. Г. М. Голузин.

В. А. Зморович обобщил известные интегральные формулы Шварца, Пуассона, Рисса — Херглотца и др. на однолистные $n$-связные области, граница которых состоит из $n$ непересекающихся между собою окружностей. Эти формулы оказались тесно связанными с функциями, осуществляющими однолистное комформное отображение указанных областей на полуплоскость с прямолинейными разрезами, параллельными границе полуплоскости и нашли применение для решения экстремальных задач.

В работах [22, 23, 25] разработан метод экстремизации широкого класса стилтьесовых функционалов на двухскачковых распределениях. Этот метод оказался весьма эффективным и позволил решить несколько задач, ранее не поддававшихся решению.

Для формулировки центральной теоремы этого подхода используем следующие обозначения.

Классом Каратеодори (классом $C$) называют совокупность всех голоморфных в единичном круге функций $p(z)$, имеющих в нем положительную вещественную часть и нормированных условием $p(0) = 1$.

Предположим, что функция $\Phi(\zeta, w)$ задана в области $\{(\zeta, w) : \operatorname{Re}\zeta > 0, |w| < \infty\}$, вещественна, конечна и при любом фиксированном $\zeta$ своей точной верхней или точной нижней грани в любом круге $\{w : |w - w_0| \leqslant R\}$ достигает на его граничной окружности. Обозначим $p(z) = \dfrac{1+z}{1-z}$.

Теорема 2. *Пусть* $0 < r < 1$ *и* $I = \operatorname*{extr}_{f\in C}\operatorname*{extr}_{|z|=r} \Phi(f(z), zf'(z))$. *Тогда* $I$ *достигается на функциях класса* $C$ *вида* $\lambda\dfrac{1+z\varepsilon_1}{1-z\varepsilon_1} + (1-\lambda)\dfrac{1+z\varepsilon_2}{1-z\varepsilon_2}$, *где* $0 \leqslant \lambda \leqslant 1$; $|\varepsilon_1| = |\varepsilon_2| = 1$, *причем* $I = \operatorname*{extr}_{\zeta}\operatorname*{extr}_{w} \Phi(\zeta, w)$, *где* $\zeta$ *изменяется в круге* $\{\zeta : |\zeta - a| \leqslant b\}$, $w$ *(при фиксированном* $\zeta$*) — на окружности* $\left\{w : \left|w - \dfrac{1}{2}(\zeta^2 - 1)\right| = \dfrac{1}{2}(b^2 - |\zeta - a|^2)\right\}$, $a = P(r^2)$, $2b = P(r) - P(-r)$.

Теорема 3. *Пусть на классе* $C$ *задан функционал* $I(f) = \Phi(f(\rho), f'(0))$, *где* $\rho \in (0, 1)$ *фиксировано. Тогда* $\operatorname*{extr}_{f\in C} I(f) = \operatorname*{extr}_{\zeta}\operatorname*{extr}_{w} \Phi(\zeta, w)$, *причем* $\zeta$ *изменяется в круге* $\{\zeta : |\zeta - a| \leqslant b\}$, *а область изменения* $w$ *(при фиксированном* $\zeta$*) — окружность с центром в точке* $c = \dfrac{|\zeta - 1|^2}{b\operatorname{Re}\zeta}$ *и радиусом* $R = (b^2 - |\zeta - a|^2)/(b\operatorname{Re}\zeta)$. *Здесь* $a = P(\rho^2)$, $2b = P(\rho) - P(-\rho)$.

Эти теоремы в настоящее время получили многочисленные применения в Советском Союзе и за рубежом.

Для решения ряда трудных экстремальных задач в специальных классах аналитических функций В. А. Зморович предложил подход, условно названный методом вещественных дифференциальных уравнений. Этот подход состоит в использовании обыкновенных, обычно нелинейных, дифференциальных уравнений 1-го порядка, для которых требуется найти оптимальные в некоторых отношениях решения надлежащим выбором входящих в них вспомогательных функций. Здесь прослеживается связь с проблемами теории оптимального управления. Используя этот метод, удалось также исследовать некоторые новые классы однолистных функций.

В работах [39, 53] известные интегральные преобразования, действующие в специальных классах однолистных функций, обобщены за счет введения в ядра этих преобразований непрерывных и комплексных показателей (вместо целочисленных), а также логарифмических сомножителей. В работе [49] показано, что известная гипотеза А. Маркса неверна не только во всем классе звездных функций, но даже и в подклассе типичных вещественных звездных функций.

Таким образом, в цикле работ по геометрической теории функций В. А. Зморовичу удалось создать эффективные методы решения ряда проблем, разработать удобную для практических приложений методику и тем самым внести значительный вклад в теорию функций.

Труды В. А. Зморовича и созданная им математическая школа по геометрической теории функции получили широкое признание.

Видный ученый, прекрасный педагог, талантливый воспитатель молодежи Валентин Анатольевич широко известен и пользуется заслуженным авторитетом среди научной общественности.

Свое семидесятилетие В. А. Зморович встречает в расцвете творческих сил и активной научно-педагогической деятельности.

Пожелаем Валентину Анатольевичу в связи с 70-летием доброго здоровья и новых творческих успехов.

## СПИСОК ОСНОВНЫХ РАБОТ В. А. ЗМОРОВИЧА ПО ГЕОМЕТРИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ ФУНКЦИЙ


1. Über eine konforme Abbildung.— Записи Харьков. мат. об-ва. Сер. 4, 1934, **9**, с. 29—32.
2. Об одном обобщении конформного отображения Шварца — Кристоффеля.— Тр. КАИ, 1934, **3**, с. 20—26.
3. Дві задачі з обсягу конформних відтворень.— Журн. Ін-ту математики ВУАН, 1935, вип. 3—4, с. 215—222.
4. Конформні відтворення однолистих двозв'язних обсягів.— Наук. зап. КДУ, 1937, **2**, № 3, с. 59—107.
5. О некоторых проблемах теории однолистных функций.— Сообщ. о науч.-иссл. работе Киевского индустриального института, 1940, **2**, с. 3—5.
6. Об обобщении формулы Шварца — Кристоффеля на области, ограниченные кусочно-гладкими кривыми.— В кн.: Юбилейный сборник КПИ. Киев, 1948, с. 643—654.
7. О структурных формулах некоторых классов регулярных однолистных функций.— ДАН СССР, 1950, **72**, №5, с. 833—837.
8. О некоторых новых классах регулярных унивалентных функций.— Изв. КПИ, 1950, **10**, с. 137—140.
9. До теорії узагальнених аналітичних функцій.— Мат. зб.: КДУ, 1951, вип. 5, с. 91 — 97.
10. О структурных формулах некоторых классов аналитических функций, однолистных в круговом кольце.— ДАН СССР, 1952, **86**, №3, с. 465—469.
11. О некоторых вариационных задачах теории однолистных функций.— 1952, **4**, №3, с. 276—298.
12. О некоторых классах аналитических функций, однолистных в круговом кольце.— Мат. сб., 1953, **32**, вып. 3, с. 633—654.
13. О некоторых специальных классах однолистных аналитических в круге функций.— Успехи мат. наук, 1954, **9**, №4, с. 175—182.
14. О структурных формулах теории специальных классов аналитических функций и некоторых их приложениях. Изв. КПИ, 1954, **15**, с. 126—148.
15. О некоторых классах аналитических функций в круговом кольце.— Мат. сб., 1956, **40**, вып. 2, с. 225—238.
16. Про узагальнення інтегральної формули Шварца на $n$-зв'язні кругові області.— Допов. АН УРСР, 1959, №5, с. 489—492.
17. Про узагальнення інтегральної формули Пуассона на $n$-зв'язні кругові області.— Допов. АН УРСР, 1958, №7, с. 698—701.
18. До теорії спеціальних класів однолистих функцій.— Допов. АН УРСР, 1959, №1, с. 5—9.
19. Про границі коливання кривини образу плоскої кривої при однолистих конформних відображеннях.— Допов. АН УРСР, 1959, №4, с. 351—354.
20. К теории специальных классов однолистных функций. II.— Успехи мат. наук, 1959, **14**, вып. 3, с. 137—143.
21. Об одном классе однозначных аналитических функций в круговом кольце.— Изв. КВАИУ, 1960, вып, 1, с, 80—88.
22. К теории специальных классов однолистных функций. II.— Успехи мат. наук, 1959, **1**, вып. 6, с. 169—172.
23. Об одном классе экстремальных задач, связанных с регулярными функциями с положительной вещественной частью в круге $|z| < 1$.— Укр. мат. журн., 1965, **17**, № 4, с. 12—21.
24. Про деякі теореми теорії экстремальних оцінок в спеціальних класах аналітичних функцій.— Допов. АН УРСР Сер А, 1965, № 8, с. 979—983.
25. Про радіус $\vartheta$-спіральності 0-спіральних функцій в колі $|z| < 1$.— Допов. АН УРСР. Сер. А, 1965, № 10, с. 1262—1265.
26. О границах выпуклости звездных функций порядка $\alpha$ в круге и круговой области $0 < |z| < 1$.— Мат. сб., 1965, **68**, № 4, с. 518—526.

27. О границах звездности и однолистности некоторых классов функций, регулярных в круге $|z|<1$.— Укр. мат. журн., 1966, **18**, № 3, с. 28—39.
28. Теорема обертання для класів $S_{\alpha}^{*}(m)$, $\tilde{S}_{n}(m, \alpha, n)$ однолистих в колі $|z|<1$ функцій.— Допов. АН УРСР. Сер. А, 1966, № 9, с. 1117—1120.
29. Об одном классе однолистных отображений кругового кольца.— Изв. АН АзССР. Сер. А, 1967, № 3, с. 17—22 (совм. с Ачиловым Х).
30. Об экстремумах некоторых функционалов, определенных на классе $C$-функций в круге $|z|<1$.— Изв. АН АзССР. Сер. А, 1968, № 2, с. 17—22 (совм. с Ачиловым Х.).
31. О некоторых новых результатах теории экстремальных оценок в специальных классах однолистных функций.— Вестник КПИ. Сер. машиностроения, 1970, № 7, с. 190—193 (совм. с Коробковой И. К.).
32. Про обмежені зірчасті в крузі $|z|<1$ функції.— Допов. АН УРСР. Сер. А, 1972, № 8, с. 691—694 (совм. с Якубенко А. А.).
33. До теорії екстремальних властивостей спеціальних класів конформних відображень.— Допов. АН УРСР, Сер. А, 1972, № 7, с. 597—600 (совм. с Якубенко А. А.).
34. Про один клас однолистих відображень кругового кільця.— Допов. АН УРСР. Сер. А, 1972, № 7, с. 612—615, (совм. с Коробковой И. К.).
35. Про деякі теореми теорії спеціальних класів аналітичних в крузі функцій.— Допов. АН УРСР. Сер. А, 1972, № 5, с. 404—407 (совм. с Якубенко А. А.).
36. Об одном классе регулярных однолистных в круге $|z|<1$ функций.— Вестн. КПИ. Сер. физ. и мат., № 1, 1974, с. 22—25 (совм. с Якубенко А. А.).
37. Про одне узагальнення інтегрального перетворення Бернарді.— Допов. АН УРСР. Сер. А, 1974, № 7, с. 595—597 (совм. с Коробковой И. К. ).
38. К теории аналитических функций с положительной вещественной частью в круге.— Укр. мат. журн., 1974, **26**, № 4, с. 545—550 (совм. с Коробковой И. К.).
39. Про одне застосування інтегрального рівняння Абеля в теорії однолистих функцій.— Допов. АН УРСР. Сер. А, 1975, № 5, с. 397—399 (совм. с Николаевой Р. В.).
40. О некоторых интегральных преобразованиях в классах однолистных функций.— Докл. АН УССР. Сер. А, 1975, № 11, с. 976—978 (совм. с Николаевой Р. В.).
41. Об одном обобщении класса $\alpha$-выпуклых функций Мокану.— В кн.: Математический сборник. Киев: Наук. думка, 1976, с. 254—257 (совм. с Якубенко А. А.).
42. О порядке звездности выпуклых функций порядка $\alpha$.— Докл. АН УССР. Сер. А, 1977, № 7, 584—587 (совм. с Коробковой И. К.).
43. Про деякі точні оцінки в класі $B_0(b)$.— Допов. АН УРСР. Сер. А, 1977, № 8, с. 686— —699 (совм с. Якубенко А. А.).
44. О порядке звездности некоторых подклассов $\alpha$-выпуклых функций при $\alpha \geqslant 0$.— Укр. мат. журн., 1978, **30**, № 4, с. 536—539. (совм. с Коробковой И. К.).
45. О порядке звездности класса $\alpha$-выпуклых функций при $\alpha \leqslant -2$.— В кн.: Математический анализ и теория вероятностей.— Киев: Наук. думка, 1978, с. 63—66 (совм. с Коробковой И. К.).
46. О границе $\alpha$-выпуклости порядка $\gamma$ класса $S_{m}^{'}$.— Докл. АН УССР. Сер. А, 1979, № 3, с. 372—375 (совм. с Якубенко А. А.).
47. Об $\alpha$-выпуклых функциях при $\alpha<0$.— Укр. мат. журн., 1979, **31**, № 4, с. 431—433 (совм. с Похилевичем В. А.).
48. О некоторых теоремах, связанных с гипотезой А. Маркса.— Докл. АН УССР. Сер. А, 1974, № 8, с. 687—691 (совм. с Гудзь Л. А.).
49. Некоторые экстремальные оценки для классов нормированных однолистных функций с фиксированным вторым коэффициентом их тейлоровского разложения.— В кн.: Математический сборник.— Киев: Наук. думка, 1976, с. 68—72 (совм. с Гудзь Л. А.).
50. О гипотезе А. Маркса для класса $m$-кратно симметричных звездных функций в круге $|z|<1$.— Докл. АН УССР. Сер. А, 1976, № 7, с. 587— 590 (совм. с Гудзь Л. А.).
51. К гипотезе А. Маркса для выпуклой оболочки класса звездных в круге функций.— Укр. мат. журн. 1976, **28**, № 3, с. 390—393 (совм. с Гудзь Л. А.).
52. О параметрическом методе решения экстремальных задач теории специальных классов аналитических функций.— Укр. мат. журн., 1978, **30**, № 3, с. 362—367 (совм. с Гудзь Л. А.).
53. О некоторых классах однолистных функций в круге $|z|<1$ и в области $0<|z|<1$.— В кн.: Математический анализ и теория вероятностей. Киев: Наук. думка, 1978, с. 59—63 (совм. с Гудзь Л. А.).
54. Об интегральном преобразовании с логарифмическими ядрами в некоторых классах однолистных функций.— В кн.: Математический анализ и теория вероятностей. Киев: Наук. думка, 1978. с. 66—70 (совм. с Николаевой Р. В.).
55. Обобщение теоремы Мокану — Рида о границе $\alpha$-выпуклости класса звездных функций.— В кн.: Математический анализ и теория вероятностей. Киев: Наук. думка, 1978, с. 70—74 (совм. с Якубенко А. А.).

Институт математики АН УССР
Киевский политехнический институт

Поступила в редакцию
9.1 1979 г.