AUTOVALORI E DIAGONALIZZAZIONE
(IN SPAZI VETTORIALI REALI)

1. ALCUNI RICHIAMI TEORICI

Ci limitiamo a richiamare brevemente alcuni risultati riguardanti matrici *reali* ed endomorfismi di spazi vettoriali *reali*.

1.1. DIAGONALIZZAZIONE DI MATRICI REALI.

Sia $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ una matrice quadrata reale.

Definizione: Il polinomio $P(\lambda) = \det(A - \lambda I)$ è detto ***polinomio caratteristico*** *di* A.
Le radici $\lambda \in \mathbb{C}$ di $P(\lambda)$ si chiamano ***autovalori*** *di* A.

Poiché $P(\lambda)$ ha grado n, le sue radici complesse sono esattamente n, se contate ciascuna secondo la propria molteplicità algebrica[1] (teorema fondamentale dell'algebra). Le sue radici reali, invece, sono al più n e possono essere effettivamente meno di n.

Se λ è autovalore di A, allora il sistema $(A - \lambda I) X = 0$ ha soluzioni non banali (in quanto $\det(A - \lambda I) = 0$), e viceversa. In tal caso, il sottospazio

$$V_\lambda = \{X \in \mathbb{C}^n : (A - \lambda I) X = 0\} \qquad \text{(identifichiamo } \mathbb{C}^n \cong \mathbb{C}^{n,1}\text{)}$$

delle soluzioni di $(A - \lambda I) X = 0$ è detto ***autospazio*** *di* A *relativo all'autovalore* λ; i suoi vettori sono detti ***autovettori***[2] *di* A *relativi all'autovalore* λ. Se $\lambda \in \mathbb{R}$ allora V_λ ammette una base di vettori ad entrate reali e quindi può essere visto come sottospazio di $\mathbb{R}^n$ ($\cong \mathbb{R}^{n,1}$); altrimenti, cioè se $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$, tutti i vettori non nulli di V_λ hanno almeno un'entrata non reale.

Valgono le seguenti proprietà:

- $P(\lambda)$ è sempre della forma
$$P(\lambda) = (-1)^n \lambda^n + (-1)^{n-1} \operatorname{tr}(A) \lambda^{n-1} + ... + \det(A);$$
- se $\lambda_1, ..., \lambda_n$ sono gli autovalori *complessi* di A, ripetuti secondo molteplicità algebrica, allora
$$\boxed{\operatorname{tr}(A) = \lambda_1 + ... + \lambda_n} \quad \text{e} \quad \boxed{\det(A) = \lambda_1 \cdots \lambda_n};$$
- autovettori non nulli relativi ad autovalori distinti sono linearmente indipendenti;
- la somma di autospazi relativi ad autovalori distinti è diretta;
- $\boxed{\dim V_\lambda = n - \rho(A - \lambda I)}$;
- $\boxed{1 \leq \dim V_{A,\lambda} \leq m_\lambda}$ dove m_λ è la molteplicità algebrica dell'autovalore λ come radice di $P_A(\lambda)$.

Definizione: A si dice ***diagonalizzabile su*** $\mathbb{K}$ se esistono $P \in \mathbb{K}^{n,n}$ invertibile e $D \in \mathbb{K}^{n,n}$ diagonale tali che $P^{-1}AP = D$. In tal caso, si dice che P *diagonalizza* A.

[1] Ricordiamo che si dice che una radice λ di un polinomio P ha *molteplicità algebrica* m se e solo se

$$P(x) = (x - \lambda)^m Q(x) \quad \text{con } Q(\lambda) \neq 0$$

(il che significa che l'equazione $P(x) = 0$ ha esattamente m soluzioni uguali a λ).

[2] Va osservato che alcuni autori usano il nome *autovettori* solo per gli elementi *non nulli* di V_λ.

A commento della definizione precedente, osserviamo che:
• poiché $\mathbb{R}^{n,n} \subset \mathbb{C}^{n,n}$, se A è diagonalizzabile su $\mathbb{R}$ allora lo è anche su $\mathbb{C}$ (non vale il viceversa);
• $P^{-1}AP = D$ con P invertibile significa che A e D sono *simili*;
• poiché *matrici simili hanno lo stesso polinomio caratteristico* (e quindi gli stessi autovalori) e *gli autovalori di una matrice diagonale sono gli elementi della sua diagonale* (il che vale per ogni matrice *triangolare*), allora D non può che avere sulla propria diagonale gli autovalori di A;
• le matrici P e D non sono uniche (ma, per l'osservazione precedente, le matrici D possono differire solo per l'ordine con cui gli autovalori di A appaiono sulla diagonale).

Non tutte le matrici sono diagonalizzabili (nemmeno su $\mathbb{C}$) e vale il seguente importante:

Teorema (criterio di diagonalizzabilità): A è diagonalizzabile su $\mathbb{K}$ se e solo se sussitono entrambe le seguenti condizioni:
(i) tutti gli autovalori di A sono in $\mathbb{K}$;
(ii) $\dim V_\lambda = m_\lambda$ per ogni autovalore λ di A.

Nel teorema precedente, si noti bene che:
• la prima condizione è automaticamente verificata se $\mathbb{K} = \mathbb{C}$;
• la seconda condizione è automaticamente verificata se $m_\lambda = 1$ (autovalore semplice).

Altre condizioni necessarie e sufficienti di diagonalizzabilità sono espresse dalla seguente:

Proposizione: Le seguenti affermazioni sono equivalenti:
- A è diagonalizzabile su $\mathbb{K}$;
- esiste una base di $\mathbb{K}^n$ composta da autovettori di A;
- l'unione di basi degli autospazi di A è una base di $\mathbb{K}^n$ (composta da autovettori di A);
- $\mathbb{K}^n$ è somma diretta degli autospazi di A;
- la somma delle dimensioni degli autospazi di A è n.

Concludiamo ricordando la seguente procedura: se A è diagonalizzabile su $\mathbb{K}$, allora una matrice $P \in \mathbb{K}^{n,n}$ che diagonalizza A si ottiene
• determinando una base per ogni autospazio di A (sottospazio di $\mathbb{K}^n$),
• unendone i vettori (il che fornisce sempre una base di $\mathbb{K}^n$),
• disponendoli sulle colonne di P.
In tal modo risulta

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

dove $\lambda_1, ..., \lambda_n$ sono gli autovalori di A, ripetuti secondo la propria molteplicità algebrica ed *ordinati coerentemente con la disposizione degli autovettori sulle colonne di* P (cioè in modo che ciascun autovalore sia relativo all'autovettore disposto sulla corrispondente colonna di P).

1.2. ENDOMORFISMI DI SPAZI REALI DI DIMENSIONE QUALSIASI.

Sia V uno spazio vettoriale su $\mathbb{R}$ e sia $f : V \to V$ un endomorfismo.

Definizione: $\lambda \in \mathbb{R}$ è detto ***autovalore*** *di* f se $\exists \mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ tale che $f(\mathbf{x}) = \lambda \mathbf{x}$.
In tal caso, il sottospazio $V_\lambda := \{\mathbf{x} \in V : f(\mathbf{x}) = \lambda \mathbf{x}\}$ è detto ***autospazio*** *di* f *relativo all'autovalore* λ ed i suoi vettori sono detti ***autovettori***[3] *di* f *relativi all'autovalore* λ.

In altri termini, $\lambda \in \mathbb{R}$ è autovalore di f se e solo se $V_\lambda \neq \{\mathbf{0}\}$.

Ovviamente $V_0 = \ker f$, quindi 0 è autovalore di f se solo se f non è iniettiva. Più in generale, si ha $V_\lambda = \ker(f - \lambda\,\mathrm{id})$ e quindi λ è autovalore di f se e solo se $f - \lambda\,\mathrm{id}$ non è iniettiva.

Risulta sempre che:
• autovettori non nulli relativi ad autovalori distinti sono linearmente indipendenti;
• la somma di autospazi relativi ad autovalori distinti è diretta.

[3] Osserviamo nuovamente che alcuni autori usano il nome *autovettori* solo per gli elementi *non nulli* di V_λ.

1.3. ENDOMORFISMI DI SPAZI REALI DI DIMENSIONE FINITA.

Sia V uno spazio vettoriale reale di dimensione n e sia $f : V \to V$ un endomorfismo.
Fissiamo una base qualsiasi $\mathcal{B}$ di V e sia $M = M_f^{\mathcal{B}} \in \mathbb{R}^{n,n}$ la matrice di f rispetto a $\mathcal{B}$ (si badi bene: *la stessa base va presa sia in partenza che in arrivo*). Risulta che:

- gli autovalori di f sono tutti e soli gli autovalori *reali* di M;
- $V_\lambda = \{\mathbf{x} \in V : (M - \lambda I)[\mathbf{x}]_{\mathcal{B}} = 0\}$, cioè V_λ si identifica, tramite componenti rispetto a $\mathcal{B}$, con l'autospazio della matrice M relativo all'autovalore λ.

Definizione: f si dice ***semplice*** (o ***diagonalizzabile***) se esiste una base di V composta da autovettori di f, ovvero, equivalentemente, rispetto a cui la matrice di f è diagonale.

A commento della definizione precedente, osserviamo esplicitamente l'equivalenza tra le due asserzioni della definizione stessa:

- se $\mathcal{A} = (\mathbf{u}_1, ..., \mathbf{u}_n)$ è una base di V composta da autovettori di f, allora si ha

$$\begin{array}{lll} & f(\mathbf{u}_1) = \lambda_1\mathbf{u}_1 = \lambda_1\mathbf{u}_1 + 0\mathbf{u}_2 + ... + 0\mathbf{u}_n, & \text{cioè } [f(\mathbf{u}_1)]_{\mathcal{A}} = (\lambda_1, 0, ..., 0), \\ & f(\mathbf{u}_2) = \lambda_2\mathbf{u}_2 = 0\mathbf{u}_1 + \lambda_2\mathbf{u}_2 + ... + 0\mathbf{u}_n, & \text{cioè } [f(\mathbf{u}_2)]_{\mathcal{A}} = (0, \lambda_2, ..., 0), \\ (1) & \vdots & \vdots \\ & f(\mathbf{u}_n) = \lambda_n\mathbf{u}_n = 0\mathbf{u}_1 + ... + 0\mathbf{u}_{n-1} + \lambda_n\mathbf{u}_n, & \text{cioè } [f(\mathbf{u}_n)]_{\mathcal{A}} = (0, ..., 0, \lambda_n), \end{array}$$

  e quindi risulta

$$M_f^{\mathcal{A}} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}, \tag{2}$$

  ossia $M_f^{\mathcal{A}}$ è diagonale;
- se rispetto ad una base $\mathcal{A} = (\mathbf{u}_1, ..., \mathbf{u}_n)$ di V la matrice $M_f^{\mathcal{A}}$ è diagonale, cioè del tipo (2), allora le colonne di $M_f^{\mathcal{A}}$ sono le componenti rispetto ad $\mathcal{A}$ di $f(\mathbf{u}_1), ..., f(\mathbf{u}_n)$ e quindi valgono le uguaglianze (1), ossia $\mathbf{u}_1, ..., \mathbf{u}_n$ sono autovettori di f.

Si noti bene che, in ogni caso, gli elementi della diagonale di $M_f^{\mathcal{A}}$ sono gli autovalori di f (eventualmente ripetuti, se più elementi della base $\mathcal{A}$ sono autovettori relativi allo stesso autovalore).

Non tutti gli endomorfismi sono semplici e vale il seguente importante:

Teorema: f è semplice se e solo se la sua matrice rispetto ad una base qualsiasi di V è diagonalizzabile su $\mathbb{R}$.

Altre condizioni necessarie e sufficienti di semplicità sono espresse dalla seguente:

Proposizione: Le seguenti affermazioni sono equivalenti:

- f è semplice;
- l'unione di basi degli autospazi di f è una base di V (composta da autovettori di f);
- V è somma diretta degli autospazi di f;
- la somma delle dimensioni degli autospazi di f è n.