Variáveis Aleatórias Multidimensionais
Variáveis Contínuas

Duas v.a. contínuas, X e Y. Neste caso, a distribuição conjunta das duas variáveis é caracterizada por uma função f(x, y), chamada função de densidade conjunta de X e Y, satisfazendo:

(a) $f(x, y) \geqslant 0$, para todo par (x, y);

(b) $\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x, y)dxdy = 1$;

(c) $P(a \leqslant X \leqslant b, c \leqslant Y \leqslant d) = \int_a^b\int_c^d f(x, y)dydx$.

A relação (b) nos diz que o volume sob a superfície representada por f(x, y) é igual a 1. A relação (c) dá a probabilidade do par (x, y) estar num retângulo de lado b-a e d-c.

Variáveis Aleatórias Multidimensionais
Variáveis Contínuas

Exemplo 8.14. Suponha que $f(x, y) = 4xy$, $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 1$. Então, (a) está satisfeita e

$$\int_0^1 \int_0^1 4xy\,dx\,dy = 4\int_0^1 x\,dx \int_0^1 y\,dy = 4[x^2/2]_0^1[y^2/2]_0^1 = 1,$$

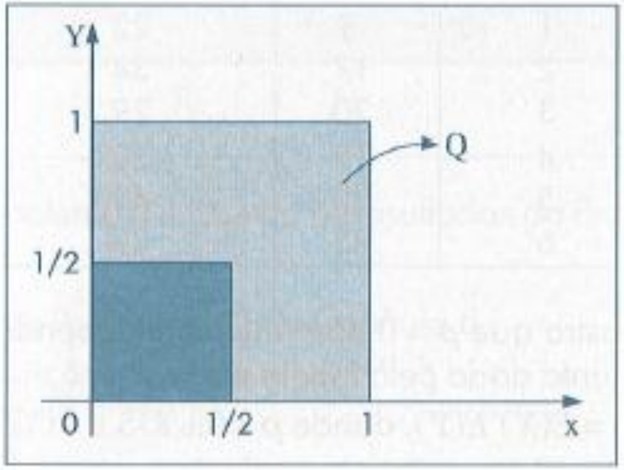
o que mostra que (b) também está satisfeita.

Calculemos $P(X \leq 1/2, Y \leq 1/2)$. A Figura 8.6 mostra o domínio de variação de X e Y e a região para a qual $X \leq 1/2$, $Y \leq 1/2$. Logo, por (c),

$$P(X \leq 1/2, Y \leq 1/2) = P(0 \leq X \leq 1/2, 0 \leq Y \leq 1/2)$$

$$= \int_0^{1/2}\int_0^{1/2} 4xy\,dx\,dy = 4[x^2/2]_0^{1/2}[y^2/2]_0^{1/2} = 1/16.$$

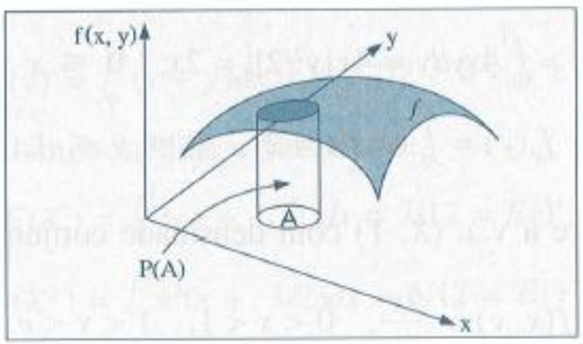
Figura 8.6: Domínio de variação de (X, Y) para o Exemplo 8.14.



Variáveis Aleatórias Multidimensionais
Variáveis Contínuas

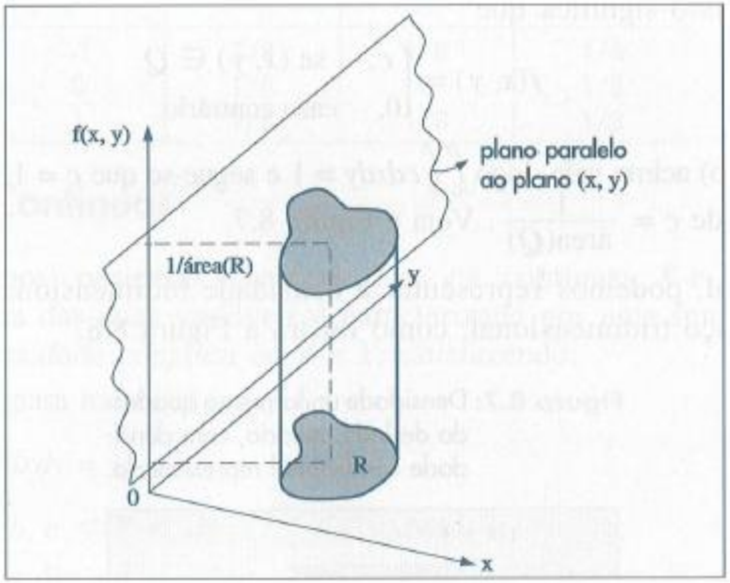
Se A for um evento, então a probabilidade $P((X, Y) \in A)$ será representada pelo volume sob a superfície, delimitado pela região A, no plano (x, y), e pela superfície cilíndrica na Figura 8.8.

Figura 8.8: Densidade como uma superfície no espaço e $P((X, Y) \in A) = P(A)$.



Se a densidade $f(x, y)$ for positiva numa região qualquer R do plano (x, y), uma v.a. diz-se *uniformemente distribuída sobre* R se $f(x, y) = 1/\text{área}(R)$, para $(x, y) \in R$, e $f(x, y) = 0$ nos demais pontos. Veja a Figura 8.9.

Figura 8.9: Distribuição uniforme na região R do plano (x, y).



Variáveis Aleatórias Multidimensionais Variáveis Contínuas

A partir da distribuição conjunta de duas v.a. X e Y, podíamos determinar a distribuição marginal de cada variável.

Definição. Dada a v.a. bidimensional (X, Y), com função densidade de probabilidade conjunta $f(x, y)$, definimos as densidades marginais de X e Y respectivamente por

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y)dy \qquad (8.22)$$

e

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y)dx. \qquad (8.23)$$

Exemplo 8.16. Para as v.a. do Exemplo 8.14, temos

$$f_X(x) = \int_0^1 4xydy = 4x[y^2/2]_0^1 = 2x, \quad 0 \leq x \leq 1,$$

$$f_Y(y) = \int_0^1 4xydx = 2y, \quad 0 \leq y \leq 1.$$

Exemplo 8.17. Considere a v.a. (X, Y) com densidade conjunta

$$f(x, y) = \frac{2x}{y}, \quad 0 < x < 1, \quad 1 < y < e.$$

Então, as densidades marginais são dadas por

$$f_X(x) = \int_1^e \frac{2x}{y}\, dy = 2x[\ell n(y)]_1^e = 2x, \quad 0 < x < 1,$$

$$f_Y(y) = \int_0^1 \frac{2x}{y}\, dx = \frac{2}{y}\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1 = \frac{1}{y}, \quad 1 < y < e.$$

Variáveis Aleatórias Multidimensionais
Variáveis Contínuas

Definição. As variáveis aleatórias X e Y, com densidade conjunta $f(x, y)$ e marginais $f_X(x)$ e $f_y(y)$, respectivamente, são independentes se

$$f(x, y) = f_X(x)\, f_y(y), \text{ para todo par } (x, y). \tag{8.24}$$

Exemplo 8.18. Se a função densidade conjunta de X e Y for dada por

$$f(x, y) = e^{-x-y}, \quad x > 0, y > 0,$$

então é fácil ver que

$$f_X(x) = e^{-x}, \quad x > 0,$$

$$f_Y(y) = e^{-y}, \quad y > 0,$$

de modo que X e Y são independentes.

Variáveis Aleatórias Multidimensionais
Variáveis Contínuas

As definições de covariância, coeficiente de correlação continuam a valer para v.a. bidimensionais contínuas. Portanto, se X e Y são independentes, o coeficiente de correlação entre elas é zero.

$$\text{Cov}(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y)$$

O coeficiente de correlação entre X e Y é dado por

$$\rho(X, Y) = \text{Cov}(X,Y)/[\sigma(X)\sigma(Y)]$$

Variáveis Aleatórias Multidimensionais
Variáveis Contínuas

Exemplo 8.19. Calculemos o coeficiente de correlação entre X e Y, se a densidade conjunta delas for

$$f(x, y) = x + y, \quad 0 < x < 1, \quad 0 < y < 1.$$

Temos que as marginais são dadas por

$$f_X(x) = \int_0^1 (x + y)dy = x + 1/2, \quad 0 < x < 1,$$

$$f_Y(y) = \int_0^1 (x + y)dx = y + 1/2, \quad 0 < y < 1.$$

A partir delas, calculamos médias e variâncias:

$$E(X) = \int_0^1 x(x + 1/2)dx = 7/12 = E(Y),$$

$$E(X^2) = \int_0^1 x^2(x + 1/2)dx = 5/12 = E(Y^2),$$

$$\mathrm{Var}(X) = \mathrm{Var}(Y) = 5/12 - 49/144 = 11/144.$$

Para calcular a covariância entre X e Y necessitamos calcular

$$E(XY) = \int_0^1\int_0^1 xy(x + y)dx\, dy = \int_0^1 (y/3 + y^2/2)\,dy = 1/3.$$

$\mathrm{Cov}(X, Y) = E(XY) – E(X)E(Y) = 1/3 – (7/12)(7/12) = -1/144$

$\rho(X, Y) = \mathrm{Cov}(X,Y)/[\sigma(X)\sigma(Y)] = -1/11$