

Operatori lineari

Nell'ambito degli spazi di funzioni grande importanza pratica hanno gli operatori lineari. Ad esempio, la derivazione è un operatore lineare che, applicato ad una funzione, dà come risultato un'altra funzione; l'integrazione definita è anch'essa un operatore lineare che, applicato ad una funzione, dà come risultato un numero.

Come è noto, gli operatori lineari fra spazi a dimensione finita sono rappresentati da matrici, e sono applicabili a qualsiasi elemento dello spazio in cui sono definiti.

Nel caso particolare che le dimensioni dello spazio di definizione e dello spazio immagine siano uguali, se la matrice (quadrata) ha determinante non nullo, l'operatore è sia iniettivo (ossia elementi diversi hanno immagini diverse), sia surgettivo (ossia ogni elemento dello spazio immagine può essere ottenuto applicando l'operatore ad un opportuno elemento dello spazio di definizione). Questa affermazione è equivalente al ben noto risultato che un sistema lineare di n equazioni in n incognite con matrice non singolare ha una e una sola soluzione qualunque sia il termine noto. Se invece il determinante è nullo, l'immagine (ossia l'insieme dei valori ottenibili applicando l'operatore a tutto lo spazio di definizione) è un sottospazio chiuso dello spazio immagine.

NOTA Gli operatori lineari fra spazi a dimensione finita sono tutti continui, nel senso che, se \mathbf{A} è un tale operatore e $u^{(k)} \rightarrow u$, allora $\mathbf{A}u^{(k)} \rightarrow \mathbf{A}u$.

Si osservi che per gli operatori lineari la continuità è soddisfatta se $u^{(k)} \rightarrow 0 \Rightarrow \mathbf{A}u^{(k)} \rightarrow 0$. Basta osservare che $u^{(k)} \rightarrow u \Leftrightarrow u^{(k)} - u \rightarrow 0$.

Se l'operatore è definito su uno spazio a dimensione infinita, possono verificarsi situazioni qualitativamente molto diverse.

Si consideri ad esempio in uno spazio di Hilbert \mathbf{H} generato da una base ortonormale $\{e^{(n)} \mid n \in \mathbf{N}\}$ l'operatore lineare \mathbf{A} dello spazio in sé che trasforma $e^{(n)}$ in $ne^{(n)}$, e quindi $\sum a_n e^{(n)}$ in $\sum na_n e^{(n)}$. È chiaro che la condizione $\sum a_n^2 < \infty$ non implica $\sum n^2 a_n^2 < \infty$, e quindi l'operatore non è applicabile a tutti gli elementi dello spazio. D'altra parte l'insieme degli elementi che verificano $\sum n^2 a_n^2 < \infty$ non è un sottospazio chiuso, ma è denso in \mathbf{H} , come si può dedurre dal fatto che è denso in \mathbf{H} il suo sottospazio costituito dalle combinazioni lineari finite degli $e^{(n)}$, come si è già visto.

Se invece si considera l'operatore \mathbf{B} che trasforma $e^{(n)}$ in $e^{(n)}/n$, questo è definito su tutto \mathbf{H} , ma la sua immagine non è tutto \mathbf{H} . Infatti $w = \sum w_n e^{(n)}$ fa parte dell'immagine dell'operatore, allora deve essere $w_n = v_n/n$ con $\sum v_n^2 \equiv \sum n^2 w_n^2 < \infty$. L'immagine dell'operatore è quindi densa in \mathbf{H} , ma non coincide con l'intero spazio.

Come ultimo esempio, si consideri l'operatore \mathbf{C} che trasforma $e^{(n)}$ in $e^{(n+1)}$. Esso è definito su tutto \mathbf{H} , è iniettivo ma non surgettivo: infatti $e^{(1)}$ non fa parte dell'immagine.

Per la classificazione degli operatori lineari, una proprietà importante è la limitatezza. Un operatore lineare \mathbf{A} si dice *limitato* se $k \equiv \sup(\|\mathbf{A}u\|/\|u\|) < \infty$. La definizione ha un senso se è possibile definire una norma sia nello spazio di definizione, sia nello spazio immagine, anche se i due spazi sono differenti. Un caso che si incontra di frequente è quello in cui lo spazio immagine è a dimensione finita; in questo caso $\|\mathbf{A}u\| \equiv |\mathbf{A}u|$.

Gli operatori lineari limitati fra due determinati spazi normati costituiscono a loro volta uno spazio lineare, in cui k soddisfa le proprietà richieste per una norma; si può quindi porre per definizione $\|A\| = k$

Si prova facilmente che un operatore è limitato se e solo se è continuo.

Degli operatori A, B, C visti sopra come esempi, è facile verificare che B e C sono limitati, e quindi continui, mentre A non lo è.

Esempi

Proiettore – Si consideri un sottospazio chiuso \tilde{H} di H , generato dalla base ortonormale $\{f_i\}$, e l'operatore $P: v \mapsto \sum (v, f_i) f_i$. P verifica le seguenti proprietà:

- $P^2 = P$ (ossia, P è *idempotente*). Deriva dal fatto che P , ristretto a \tilde{H} , coincide con l'operatore identità (che trasforma ogni elemento in se stesso).
- $(Pv, w) = \sum (v, f_i)(f_i, w) = (v, Pw)$ (ossia, P è *autoaggiunto*)
- $((I - P)v, Pw) = (v, Pw) - (Pv, Pw) = (v, Pw) - (v, P^2w) = 0$ (ossia, \tilde{H} è ortogonale al suo complemento).

Si noti che ogni vettore $v \in H$ può essere scomposto (in un solo modo) nella somma di due vettori, uno, Pv , appartenente a \tilde{H} , l'altro, $(I - P)v$, appartenente al suo complemento.

Come esempio di proiettore in $L^2([-\pi, \pi])$ si vedano gli operatori che trasformano $f(x)$ nelle sue componenti pari e dispari, ossia rispettivamente $\frac{1}{2}(f(x) + f(-x))$ e $\frac{1}{2}(f(x) - f(-x))$, la prima generata dai soli coseni, la seconda dai soli seni. Entrambi questi sottospazi sono di dimensione infinita.

Integrale – Si consideri in $L^2([-\pi, \pi])$ l'operatore A definito da $(Af)(u) = \int_{-\pi}^u f(t) dt$. A è definito su tutto $L^2([-\pi, \pi])$, e può anche essere espresso da $Af = (f, \chi_u)$, dove $\chi_u(t)$ è la funzione che vale 1 in $[-\pi, u]$ e 0 in $[u, \pi]$. A è limitato, poiché $|(f, \chi_u)| \leq \|f\| \|\chi_u\|$, e $\|\chi_u\| \leq \sqrt{2\pi}$. Quindi $\|Af\|^2 = \int_{-\pi}^{\pi} |(f, \chi_u)|^2 du \leq (2\pi)^2 \|f\|^2$.

Si noti che le funzioni appartenenti all'immagine di A sono continue. Infatti, posto $F = Af$,

$|F(u+h) - F(u)| = \left| \int_u^{u+h} f(t) dt \right| = |(f, \chi_{u+h} - \chi_u)| \leq \sqrt{h} \|f\|$, e quindi $\lim_{h \rightarrow 0} |F(u+h) - F(u)| = 0$. Di conseguenza, A certamente non è surgettivo.

Derivata – In $L^2([-\pi, \pi])$ la derivata comporta una moltiplicazione per n dei coefficienti di seni e coseni, e quindi certamente non è limitata.

Come esempio particolare si consideri la sequenza $f^{(N)}(t) = \sum_1^N \frac{\cos nt}{n}$, che converge, e di

conseguenza $\left\{ \|f^{(N)}\| \right\}$ è limitata, mentre la sequenza delle derivate $f^{(N)'}(t) = -\sum_1^N \sin nt$ non

converge, e $\left\{ \|f^{(N)'}\| \right\}$ non è limitata.

Convoluzione – Sia K una funzione in $L^2([-\pi, \pi])$, prolungata per periodicità a tutto \mathbf{R} , e sia $K_t(u) = K(t-u)$. Si consideri l'operatore $\mathbf{K} : f \mapsto (K_t, f) = \int_{-\pi}^{\pi} K(t-u)f(u)du$. \mathbf{K} è limitato come operatore da $L^2([-\pi, \pi])$ in sé, dato che

$$\|\mathbf{K}f\|^2 = \int_{-\pi}^{\pi} dt |(K_t, f)|^2 \leq \int_{-\pi}^{\pi} dt \|K_t\|^2 \|f\|^2 = 2\pi \|K\|^2 \|f\|^2 .$$

L'ultimo passaggio è giustificato dal fatto che, per la periodicità di K , $\|K_t\|$ è indipendente da t e uguale a $\|K\|$. La funzione K è detta *nucleo di convoluzione*.

Si calcolano ora i coefficienti di Fourier della convoluzione. Posto $g(t) = \int_{-\pi}^{\pi} K(t-u)f(u)du$, si ha

$$g_k = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(t)e^{-ikt} dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} dt e^{-ikt} \int_{-\pi}^{\pi} K(t-u)f(u)du = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} du e^{-iku} f(u) \int_{-\pi}^{\pi} dt e^{-ik(t-u)} K(t-u) = 2\pi f_k K_k .$$

Come esempio di convoluzione si può considerare la *media mobile*. Si definisce media mobile di

f su un intervallo di ampiezza a la funzione $\bar{f}(t) = \frac{1}{a} \int_{t-(a/2)}^{t+(a/2)} f(\tau)d\tau$ (in generale interessano casi

pratici in cui a è piccolo rispetto all'ampiezza del dominio di definizione di f). L'operazione di media mobile può essere vista come una convoluzione con il nucleo $K(t) = \frac{1}{a} \chi_{[-a/2, a/2]}(t)$, dove χ_I è la funzione caratteristica dell'intervallo I , che vale 1 in I e 0 fuori.

Si noti che, poiché $\lim_{k \rightarrow \infty} K_k = 0$, i coefficienti della convoluzione, e della media mobile in particolare, tendono a 0 più rapidamente di quelli della funzione su cui viene applicata l'operazione. In qualche modo, quindi, la convoluzione opera una regolarizzazione.

Come ultimo esempio, si verifica che l'operatore (di proiezione) che trasforma una funzione $f \in L^2([-\pi, \pi])$ nella somma parziale $f^{(N)}$ della sua serie di Fourier può essere espresso come una convoluzione. Infatti

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}a_0 + \sum_1^N a_n \cos nt + \sum_1^N b_n \sin nt &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\tau) \left(\frac{1}{2} + \sum_1^N (\cos n\tau \cos nt + \sin n\tau \sin nt) \right) d\tau = \\ \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\tau) \left(\frac{1}{2} + \sum_1^N \cos n(t-\tau) \right) d\tau &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin(N + \frac{1}{2})(t-\tau)}{\sin \frac{1}{2}(t-\tau)} f(\tau) d\tau . \end{aligned}$$

La sommatoria nell'ultimo passaggio può essere eseguita utilizzando l'espressione esponenziale complessa delle funzioni trigonometriche.

$$\text{NOTA} - \int_{-\pi}^{\pi} K(t-\tau)e^{im\tau} d\tau = \sum K_k \int_{-\pi}^{\pi} e^{ik(t-\tau)} e^{im\tau} d\tau = \sum K_k e^{ikt} \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(m-k)\tau} d\tau = 2\pi K_m e^{imt}$$

Questo risultato si esprime dicendo che e^{imt} è *autofunzione* della convoluzione con *autovalore* $2\pi K_m$. Quindi un operatore di convoluzione, qualunque sia il nucleo in $L^2([-\pi, \pi])$, ha infinite autofunzioni, con una sequenza di autovalori tendente a 0 (eventualmente gli autovalori possono essere nulli).

Gli operatori lineari da uno spazio di Hilbert \mathbf{H} a \mathbf{R} generalmente sono detti *funzionali lineari*.

Ad esempio, sono funzionali lineari i prodotti scalari con un elemento fisso dello spazio, e in particolare gli integrali definiti: $f \mapsto \int_a^b f(t)dt = (f, \chi_{[a,b]})$. In virtù della disuguaglianza di Schwarz, i prodotti scalari sono funzionali lineari continui.

Inoltre, sussiste il *teorema di rappresentazione di Riesz*, in base al quale ogni funzionale lineare continuo su \mathbf{H} può essere espresso come prodotto scalare, ossia esiste $g \in \mathbf{H}$ tale che $Lf = (g, f)$ per ogni $f \in \mathbf{H}$.

Particolare interesse ha il *funzionale di valutazione*: $f \mapsto f(\bar{t})$, dove \bar{t} è un punto fissato.

Come si è visto, in generale in L^2 non è possibile definire le funzioni punto per punto, e quindi il funzionale di valutazione non ha neppure senso. Per una funzione continua, tuttavia, è definito il valore punto per punto, e quindi il funzionale di valutazione è ben definito. Non è però limitato, come si può vedere ad esempio considerando la successione di funzioni

$\left\{ f_n(t) = \left(\frac{1}{1+n^2 t^2} \right)^{1/2} \right\}$, la cui norma in $L^2([-\pi, \pi])$ tende a 0, mentre il valore per $t = 0$ rimane costantemente uguale a 1.

NOTA Se si considera lo spazio lineare delle funzioni continue in un intervallo limitato e chiuso, si vede che il funzionale non lineare $f \mapsto \max |f|$ soddisfa le proprietà di una norma. Se una successione $\{f^{(n)}\}$ converge a f secondo questa norma (che è quella della convergenza uniforme), ossia se $\max |f^{(n)} - f| \rightarrow 0$, allora converge a f anche in L^2 , ma non avviene il viceversa.

Ovviamente secondo questa norma il funzionale di valutazione è limitato, ossia $|f(\bar{t})| \leq k \max |f|$ con $k = 1$.

Stime di funzioni o di loro funzionali a partire da un insieme finito di dati

- Supponiamo che siano noti i valori di n funzionali linearmente indipendenti su uno spazio di Hilbert X : $L_i x = c_i$, ovvero, in notazione vettoriale, $\mathbf{L}x = \mathbf{c}$. In generale la soluzione non è unica, ossia non c'è un unico x che verifica l'uguaglianza. Si cerca quindi una soluzione con proprietà particolari, per esempio quella di minima norma, che corrisponde, negli spazi di funzioni, a condizioni di "regolarità". Per il teorema di Riesz, i funzionali L_i sono rappresentati da vettori $y_i \in X$: $L_i x = (y_i, x)$. Nello spazio lineare generato dagli y_i viene determinato in modo univoco un vettore $\hat{x} = \sum \lambda_j y_j$ tale che $\mathbf{L}\hat{x} = \mathbf{c}$: basta risolvere il sistema lineare $\sum \lambda_j (y_i, y_j) = c_i$ nelle incognite λ_j . Si noti che la matrice $\mathbf{K} : \mathbf{K}_{ij} = (y_i, y_j)$ è non singolare, dato che gli y_i sono linearmente indipendenti, e per di più simmetrica e definita positiva, dato che $\underline{\mu}^T \mathbf{K} \underline{\mu} = \sum \mu_i \mu_j (y_i, y_j) = \left\| \sum \mu_i y_i \right\|^2 > 0$. Sia ora \tilde{x} un altro vettore tale che $\mathbf{L}\tilde{x} = \mathbf{c}$. Allora $\mathbf{L}(\tilde{x} - \hat{x}) = \mathbf{0}$, ossia $(y_i, (\tilde{x} - \hat{x})) = 0$, $i = 1, \dots, n$. Si ottiene $\|\tilde{x}\|^2 = \|\hat{x} + (\tilde{x} - \hat{x})\|^2 = \|\hat{x}\|^2 + \|\tilde{x} - \hat{x}\|^2 + 2 \sum \lambda_i (y_i, (\tilde{x} - \hat{x})) = \|\hat{x}\|^2 + \|\tilde{x} - \hat{x}\|^2 > \|\hat{x}\|^2$, ossia \hat{x} è proprio la soluzione di minima norma. Essendo $\underline{\lambda} = \mathbf{K}^{-1} \mathbf{c}$, si può scrivere $\hat{x} = \mathbf{c}^T \mathbf{K}^{-1} \mathbf{y}$, dove \mathbf{y} è il vettore le cui componenti sono gli $y_i \in X$.
- Si supponga ora che, sempre a partire dagli stessi dati, e quindi dall'equazione $\mathbf{L}x = \mathbf{c}$, si voglia stimare non l'incognita x in sé, ma il valore assunto in x da un funzionale dato L . La stima viene fatta nello spazio generato dagli L_i , che sono gli unici funzionali per cui sono disponibili dei dati: $\hat{L} = \sum \lambda_i L_i$. I coefficienti λ_i sono determinati in modo tale da

minimizzare $\|L - \hat{L}\|$, ossia $\|y_L - \sum \lambda_i y_i\|$, dove y_L è il rappresentatore di Riesz di L . Si ottiene il sistema di equazioni $((y_L - \sum \lambda_i y_i), y_j) = 0$, ossia $\mathbf{K}\underline{\lambda} = (y_L, \mathbf{y})$; quindi $y_{\hat{L}} = \mathbf{y}^T \underline{\lambda} = \mathbf{y}^T \mathbf{K}^{-1}(y_L, \mathbf{y})$ e, di conseguenza, $\hat{L}x = (\mathbf{y}^T, x) \mathbf{K}^{-1}(y_L, \mathbf{y}) = \mathbf{c}^T \mathbf{K}^{-1}(y_L, \mathbf{y})$. Si noti che, nel caso che X sia uno spazio di funzioni e L sia un funzionale di valutazione: $Lx = x(\bar{t})$, si ottiene proprio $\hat{L}x = \hat{x}(\bar{t})$, dove \hat{x} è l'elemento di X stimato nel caso 1. .

3. Si assuma ora che le misure eseguite siano affette da errore; in questo caso non si pretende più che le equazioni $L_i x = c_i$ siano verificate esattamente, ma si introduce un rumore: $L_i x = c_i + v_i$ con matrice di covarianza \mathbf{C}_v (spesso gli errori sono in correlati, e quindi \mathbf{C}_v è diagonale, con elementi diagonali σ_i^2 che sono le varianze degli errori). Si richiede allora la minimizzazione di una forma quadratica ibrida: $M_\alpha(x) = (\mathbf{c} - \mathbf{L}x)^T \mathbf{P}(\mathbf{c} - \mathbf{L}x) + \alpha \|x\|^2$, dove $\mathbf{P} = \mathbf{C}_v^{-1}$. In questo modo si cerca un compromesso fra una buona approssimazione delle misure (gli scarti sono pesati con i reciproci delle varianze degli errori) e la regolarità della soluzione; il coefficiente α definisce il peso relativo di queste due richieste. Preso un qualunque elemento $\tilde{x} \in X$, esso può essere sempre scritto nella forma $\tilde{x} = \sum \lambda_i y_i + h$, con $\mathbf{L}h = 0$, e si verifica facilmente, come nel caso 1., che $M_\alpha(\tilde{x}) = M_\alpha(\sum \lambda_i y_i) + \alpha \|h\|^2 > M_\alpha(\sum \lambda_i y_i)$. Si può quindi scegliere come in precedenza $\hat{x} = \sum \lambda_j y_j$; si ottiene $M_\alpha(\hat{x}) = (\mathbf{c} - \mathbf{K}\underline{\lambda})^T \mathbf{P}(\mathbf{c} - \mathbf{K}\underline{\lambda}) + \alpha \underline{\lambda}^T \mathbf{K} \underline{\lambda}$. La minimizzazione si realizza annullando le derivate rispetto ai λ_j : $-\mathbf{K}\mathbf{P}(\mathbf{c} - \mathbf{K}\underline{\lambda}) + \alpha \mathbf{K} \underline{\lambda} = 0$, da cui $(\mathbf{K} + \alpha \mathbf{P}^{-1}) \underline{\lambda} = \mathbf{c}$. Quindi $\hat{x} = \underline{\lambda}^T \mathbf{y} = \mathbf{c}^T (\mathbf{K} + \alpha \mathbf{C}_v)^{-1} \mathbf{y}$. Per $\alpha = 0$ si ritrova la soluzione del caso 1., che realizza esattamente le condizioni imposte dai dati nello spazio generato dalle y_i . Ponendo $\alpha \neq 0$, si ottiene una soluzione più "liscia", rinunciando a verificare esattamente i dati. Una scelta di questo genere è ragionevole, se è noto a priori che i dati sono affetti da errore, e non è quindi sensato cercare di verificarli esattamente a scapito della regolarità; nulla si può dire tuttavia sulla scelta di α .

ESEMPIO: sia $X = L^2([-\pi, \pi])$; sia l'intervallo $[-\pi, \pi]$ suddiviso in N intervalli disgiunti I_k , e sia $L_k(x) = \int_{I_k} x(t) dt = (x, \chi_{I_k})$ (χ_{I_k} = funzione caratteristica di I_k). Essendo gli intervalli disgiunti, la matrice \mathbf{K} è diagonale, e i suoi elementi diagonali sono $\ell(I_k)$ (lunghezze degli intervalli). Quindi $\hat{x}(t) = \sum c_k \chi_{I_k}(t) / \ell(I_k)$, che è una funzione costante a tratti sugli intervalli I_k , i cui valori sono le medie di x su tali intervalli. Si verifica immediatamente che $L_j(\hat{x}) = c_j$, ossia la funzione stimata verifica esattamente il dato.

Se si vuole invece stimare un funzionale, ad esempio il coefficiente j -esimo dello sviluppo di Fourier, con la procedura 2., si ottiene semplicemente $\hat{x}_j = \sum c_k (\chi_{I_k}, e_j) / \ell(I_k)$.

Applicando la procedura 3., se \mathbf{C}_v è diagonale con elementi σ_k , si ottiene $\hat{x}(t) = \sum c_k \chi_{I_k}(t) / (\ell(I_k) + \alpha \sigma_k)$. In questo caso $L_j(\hat{x}) = c_j \ell(I_j) / (\ell(I_j) + \alpha \sigma_j)$, ossia il dato è verificato solo approssimativamente.

Spazi di Hilbert a nucleo riprodotto (RKHS: *Reproducing Kernel Hilbert Spaces*)

Sia X uno spazio di Hilbert di funzioni, e sia $K(t, t')$, detto *nucleo*, una funzione di 2 variabili tale che, per t fissato, $K(t, \cdot) \in X$ e, posto $y(t) = (K(t, \cdot), x)$, $y \in X \quad \forall x \in X$. Se si verifica che $(K(t, \cdot), x) = x(t) \quad \forall x \in X$, K è detto *nucleo riprodotto* (RK: *reproducing kernel*).

Un esempio immediato si ha se X è a dimensione finita. Infatti in questo caso, se $\{e_n\}$ è una base ortonormale, posto $K(t, t') = \sum e_n(t)e_n(t')$, si ottiene

$$(K(t, \cdot), x) = \sum (K(t, \cdot), e_n) x_n = \sum x_n e_n(t) = x(t).$$

Più in generale, anche in caso di dimensione infinita, se $\{e_n\}$ è una base ortonormale, si ha in ogni caso $(K(t, \cdot), e_n) = e_n(t)$, e quindi deve essere $K(t, t') = \sum e_n(t)e_n(t')$. Ne consegue in particolare che K , se esiste, è unico, ed è simmetrico. In aggiunta, si può scrivere $\|K(t, \cdot)\|^2 = (K(t, \cdot), K(t, \cdot)) = K(t, t)$.

Bisogna d'altra parte osservare che, per avere $K(t, \cdot) \in X$ per t fissato, deve essere $\sum e_n(t)^2 < +\infty$. Questa condizione non è certamente verificata per il sistema ortonormale $\{1/\sqrt{2\pi}, (1/\sqrt{\pi}) \cos nt, (1/\sqrt{\pi}) \sin nt\}$ in $L^2([-\pi, \pi])$, che, di conseguenza, non ammette RK.

Da $(K(t, \cdot), x) = x(t)$ segue $|x(t)| \leq \|K(t, \cdot)\| \|x\|$, ossia il funzionale di valutazione $ev_t : x \mapsto x(t)$ è limitato. Viceversa, se ev_t è limitato, per il teorema di Riesz esiste $K_t \in X$ tale che $x(t) = (K_t, x)$; quindi, se questo è vero per ogni t , esiste un RK.

ESEMPIO. Per presentare un esempio concreto di RKHS, si consideri lo spazio di funzioni $H_0^1([0,1]) = \{x \in W^1([0,1]) \mid x(0) = x(1) = 0\}$ (Dove, come già richiamato, $x \in W^1$ significa che x è derivabile *in senso debole* e che sia x sia la sua derivata debole x' sono in L^2). Si verifica che in $H_0^1([0,1])$ la forma $((x, y)) \equiv \int_0^1 x'(t)y'(t)dt$ è un prodotto scalare. Inoltre

$K(t, t') = \begin{cases} t'(1-t) & \text{per } t' \leq t \\ t(1-t') & \text{per } t' > t \end{cases}$ è un RK. Infatti

$$((K(t, \cdot), x)) = \int_0^1 \frac{\partial}{\partial t'} K(t, t') \cdot x'(t') dt' = \int_0^t (1-t)x'(t') dt' + \int_t^1 -tx'(t') dt' = (1-t)x(t) - t(-x(t)) = x(t).$$

Poiché $\left\{ \frac{\sqrt{2}}{n\pi} \sin n\pi t \right\}$ è una base ortonormale, deve essere $K(t, t') = 2 \sum \frac{\sin n\pi t \sin n\pi t'}{n^2 \pi^2}$.