ИНСТИТУТ СОЦИАЛЬНО-ЭКОНОМИЧЕСКИХ ПРОБЛЕМ АН СССР

На правах рукописи

МНЕВ Николай Евгеньевич

УДК 513.84:513.6+519.1

ТОПОЛОГИЯ МНОГООБРАЗИЙ КОМБИНАТОРНЫХ ТИПОВ ПРОЕКТИВНЫХ КОНФИГУРАЦИЙ И ВЫПУКЛЫХ МНОГОГРАННИКОВ

01.01.04 - геометрия и топология

Диссертация на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:
доктор физико-математических
наук, профессор ВЕРШИК А.М.

Ленинград 1986

О Г Л А В Л Е Н И Е

ВВЕДЕНИЕ

Многие задачи проективной, комбинаторной и выпуклой геометрии, оптимизации и математической экономики приводят к задаче об изучении топологии пространств конфигураций и многогранников того или иного комбинаторного типа, других комбинаторно заданных многообразий. Такие проблемы возникают, например, при изучении полей конфигураций и многогранников в векторных расслоениях над гладкими многообразиями и естественно появляются в геометрии, оптимальном управлении, вариационном исчислении. Задача систематического анализа этих проблем поставлена А.М.Вершиком /см., напр., [3] /.

По-видимому, до последнего времени не было работ, посвященных общим проблемам топологии пространств конфигураций или многогранников фиксированного комбинаторного типа. Простейшей по постановке задачей этого круга является задача о вычислении компонент связности пространств всех вещественных матриц фиксированного размера, с фиксированными знаками всех миноров. В 30-х годах близкие вопросы изучались Штейницем и Радемахером /теорема о связности пространства трехмерных выпуклых многогранников фиксированного комбинаторного типа /см. [28]//, Уитни и Маклейном /теория матроидов, реализуемость матроида матрицей над полем /см. [31],[24]//.

В диссертации получен ответ на вопрос о том, какими могут быть пространства вещественных конфигураций и многогранников одного комбинаторного типа. Показано, что класс таких пространств совпадает с классом вещественных элементарных полуалгебраических многообразий, заданных над $\mathbb{Q}$.

Определим основные объекты. Проективной конфигурацией точек назовем упорядоченный набор точек проективного пространства $P^d_{\mathbb{R}}$ /кратные точки возможны/. Пространство проективных конфигураций из n точек $P^d_{\mathbb{R}}$ естественно отождествить с $(P^d_{\mathbb{R}})^n$. Две проективные конфигурации $X, Y \in (P^d_{\mathbb{R}})^n$, $X = (x_1, \dots, x_n)$, $Y = (y_1, \dots, y_n)$ комбинаторно эквивалентны, если для любого $S \subset \overline{1:n}$ подконфигурации $\{x_i\}_{i \in S}$, $\{y_i\}_{i \in S}$ определяют проективные подпространства одной размерности в $P^d_{\mathbb{R}}$. Таким образом, возникает стратификация пространства $(P^d_{\mathbb{R}})^n$, обозначаемая $Tp(n,d)$; ее страт, по определению, есть комбинаторный тип /к.тип/ проективных конфигураций точек. Аналогичным образом можно определить конфигурации точек и их к.типы в аффинном и линейном пространствах, а также двойственные объекты - конфигурации проективных, аффинных, линейных гиперплоскостей и их к.типы.

Рассмотрим пространство d-мерных выпуклых многогранников в $\mathbb{R}^d$ с n перенумерованными вершинами. Обозначим его через $pol(n,d)$. Пространство $pol(n,d)$ можно рассматривать как полуалгебраическое подмножество $(\mathbb{R}^d)^n$. Напомним /см. [21]/, что два многогранника комбинаторно эквивалентны, если соответствие между вершинами, сохраняющее нумерацию, индуцирует изоморфизм решеток граней. Комбинаторная эквивалентность порождает стратификацию $Tpol(n,d)$ пространства $pol(n,d)$.

Страт $Tpol(n,d)$ будем называть к.типом выпуклых многогранников.

Наиболее интересными являются грубые комбинаторные типы и их топология. Грубые к.типы - к.типы конфигураций, точки которых находятся в общем положении, и к.типы симплициальных выпуклых многогранников.

ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

К.типы проективных конфигураций точек естественно подразбиваются на ориентированные к.типы /ор.к.типы/, являющиеся объедивениями целых компонент соответствующих к.типов. Ор.к.типы удобно определяются в двойственных терминах – в терминах конфигураций проективных гиперплоскостей / h -конфигураций/. Две h -конфигурации $(A_1,\ldots,A_n)$, $(B_1,\ldots,B_n)$ в $P^d_{\mathbb{R}}$ гомеоморфны, если существует гомеоморфизм $P^d_{\mathbb{R}}$ на себя переводящий A_i в B_i при $i\in\overline{1:n}$. Класс эквивалентности по этому отношению – топологический тип h -конфигураций, прообраз его при естественной двойственности – ор.к.тип конфигураций точек. Получаем стратификацию $Tpo(n,d) > Tp(n,d)$ пространства $(P^d_{\mathbb{R}})^n$ по ор.к.типам. Зафиксируем в $P^d_{\mathbb{R}}$ проективный базис – конфигурацию из $d+2$ точек в общем положении. Базисной конфигурацией называем конфигурацию из $(P^d_{\mathbb{R}})^n$, первые $d+2$ точки которой совпадают с базисом. На пространстве базисных конфигураций $\ell c(n,d)$ стратификации $Tp(n,d)$ и $Tpo(n,d)$ индуцируют стратификации $T\ell(n,d)$ и $T\ell o(n,d)$, не базисные к.типы и базисные ор.к.типы конфигураций. Базисные к.типы и ор.к.типы можно рассматривать как фактопространства соответствующих элементов $Tp(n,d)$ и $Tpo(n,d)$ по естетсвенному действию $PGL_d(\mathbb{R})$.

Базисный ор.к.тип, как легко установить, всегда некоторое, заданное над $\mathbb{Q}$, элементарное полуалгебраическое /т.е. определенное системой равенств и строгих неравенств/ подмножество главного аффинного множества пространства $\ell c(n,d)$. Грубый базисный ор.к.тип – открытое подмножество $\ell c(n,d)$.

Диссертация, в основном, посвящена доказательству двух теорем, достаточно полно характеризующих класс многообразий ориентированных комбинаторных типов проективных конфигураций.

Т е о р е м а В. Для всякого натурального k , всякого элементарного подмножества N пространства $\mathbb{R}^k$, заданного над $\mathbb{Q}$, найдется базисный ор.к.тип ξ проективных конфигураций в $P^2_{\mathbb{R}}$, стабильно эквивалентный N ■. /Под стабильной эквивалентностью мы здесь понимаем существование кусочно-бирегулярного, заданного над $\mathbb{Q}$, гомеоморфизма между ξ и $N \times \mathbb{R}^i$, для некоторого i /.

Т е о р е м а С. Для всякого натурального k, всякого открытого элементарного подмножества L пространства $\mathbb{R}^k$, заданного над $\mathbb{Q}$, найдется грубый базисный ор.к.тип проективных конфигураций в $P^2_{\mathbb{R}}$, стабильно эквивалентный L. ■

Важным следствием теорем В, С является

Т е о р е м а Е.

1. Для всякого натурального k, всякого элементарного подмножества N пространства $\mathbb{R}^k$, заданного над $\mathbb{Q}$, найдется натуральное число d и к.тип d-мерных выпуклых многогранников с $d+4$ вершинами, стабильно эквивалентный $N \times GL_d(\mathbb{R})$.

2. Для всякого натурального k, всякого открытого элементарного подмножества L пространства $\mathbb{R}^k$, заданного над $\mathbb{Q}$, найдется натуральное число d и к.тип симплициальных d-мерных выпуклых многогранников с $d+4$ вершинами стабильно эквивалентный $L \times GL_d(\mathbb{R})$. ■

Теоремы В и С влекут, разумеется, аналогичные теоремы для d-мерных конфигураций точек при $d \geq 2$ и для топологических типов h-конфигураций.

Отметим, что теорема С и то обстоятельство, что конфигурации сопоставляемых нами элементарным множеством ор.к.типов не имеют нетривиальных комбинаторных автоморфизмов, опровергают гипотезу Б.Грюнбаума [22] о связности топологических типов неупорядоченных h-конфигураций.

Отметим также, что к.типы трехмерных многогранников в /см., ниже/ и к.типы d-мерных многогранников с $d+3$ вершинами тривиальны /т.е. стабильно эквивалентны $GL_3(\mathbb{R})$ и $GL_d(\mathbb{R})$ соответственно/. Известен нетривиальный пример к.типа четырехмерных многогранников с десятью вершинами /§II/. Грубые ор.к.типы плоских конфигураций из n точек тривиальны при $n \leq 7$, это показано в недавней работе С.М.Финашина [13]. Первый нетривиальный пример был построен автором для $n = 19$ /§ II/.

Теоремы B, C, E являются естественным продолжением результатов Маклейна [24] и Штейница-Радемахера [28]. Кратко остановимся на обнаруженных ими фактах.

1. Рассмотрим матрицу $d \times n$ над полем $\mathbb{F}$. В множестве $\overline{1:n}$ номеров столбцов отметим подмножества, отвечающие линейно зависимым наборам столбцов. Подобные системы подмножеств конечного множества заведомо удовлетворяют ряду простых аксиом. Так получаются матроиды на множестве. В 1939 г. в работе [31] Х.Уитни ввел понятие матроида и поставил вопрос об описании матроидов, реализуемых матрицами над данным полем. В настоящее время проблема решена только для полей Галуа $GF(2)$, $GF(3)$. Еще в 1936 г. Маклейн указал на естественную связь матроидов с абстрактными проективными конфигурациями и получил теорему, объясняющую, отчасти, трудности возникающие при попытках решить проблему Уитни. Пользуясь простыми конструкциями, восходящими к "алгебре вурфов" фон Штаудта Маклейн поставил в соответствие всякому набору полиномов с рациональными коэффициентами матроид, реализуемость которого над полем $\mathbb{F} \supset \mathbb{Q}$ влечет наличие общего нуля в поле $\mathbb{F}$ у данного набора полиномов. /Отметим, что для нас множество всех реализаций одного матроида над данным полем - к.тип векторных конфигураций. Аналогичным образом матроид можно сопоставлять проективной конфигурации, после чего их к.типы - в точности множества всех конфигураций, отвечающих одному матроиду. Векторные к.типы отли-

чаются от соответствующих проективных тривиальным прямым сомножителем. Проблема Уитни - проблема пустых страт в комбинаторных стратификациях/.

2. В книге [28] Штейниц и Радемахер рассмотрели к.типы трехмерных многогранников и, в качестве следствия классической теоремы Штейница о граничных комплексах трехмерных многогранников, получили теорему: Всякий к.тип трёхмерных выпуклых многогранников с неупорядоченными вершинами связен /по модулю зеркальных от ражений/ в топологии Хаусдорфа. Доказательство этой теоремы содержит доказательство стабильной эквивалентности $GL_3(\mathbb{R})$ любого к.типа трехмерных многогранников с упорядоченными вершинами.

КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ ГЛАВ

П е р в а я г л а в а содержит основные определения, формулировки теорем А, В, С и план их доказательства.

В т о р а я г л а в а посвящена полусвободным комбинаторным типам конфигураций и их связи со схемами вычисления регулярных отображений, заданных над $\mathbb{Z}$. В ней обсуждается конструкция, формализующая подход Маклейна. На основе ее анализа впоследствии /Гл. II/ строится доказательство теорем В, С. Полусвободный к.тип конфигураций - инвариатное переосмысление понятия построения с помощью линейки "в общем положении". В § 3 получаем Л е м м у 3.3.I, утверждающую, что для всякого полусвободного ор.к.типа найдется стабильно эквивалентный ему грубый ор.к.тип базисных конфигураций. § 4 посвящен определению схем вычисления регулярных отображений и их атрибутов. Схему вычисления регулярного отображения $F : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^m$, заданного над $\mathbb{Z}$, естественно себе представлять в виде формул /со скобками/, выражающих координатные функции F в виде частично упорядоченной /по "росту слов"/ последовательности сумм, разностей и произведений регулярных функций исходящей из координатных функций $x_1, \dots, x_k$ на $\mathbb{R}^k$ и постоянной функции $\equiv 1$.

Например, для $F: \mathbb{R}^1 \to \mathbb{R}^1$, $F = 2x^2 - x + 1$, формула $F = ((1+1)\cdot x - 1)\cdot x + 1)$ определяет некоторую схему вычисления. В § 5 мы определяем основную конструкцию, сопоставляющую схеме вычисления Φ регулярного отображения $F: \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^m$, заданного над $\mathbb{Z}$, матроид M^Φ и бирегулярное вложение $P^\Phi: \mathbb{R}^k \times (\mathbb{R}^*)^{e(\Phi)} \to \mathcal{F}^\Phi$, где $\mathcal{F}^\Phi$ - замыкание к.типа, отвечающего M^Φ ; образ P^Φ составлен из целых к.типов.

Третья глава посвящена собственно доказательству теорем B, C. В первую очередь, со схемой вычисления Φ отображения F канонически связана стратификация $\Sigma(\Phi, F)$ пространства аргументов F . Страт выделяется фиксацией естественного полного упорядочения на множестве значений всех входящих в схему Φ регулярных функций /порядка "значений промежуточных вычислений по схеме Φ "/. В § 6 мы получаем на основании результатов § 5 теорему A - уточнение теоремы Маклейна и важную <u>Лемму 6.2</u>: Для всякого страта δ стратификации $\Sigma(\Phi, F)$ найдется ор. к.тип базисных конфигураций $\beta(\delta) \subset \operatorname{im} P^\Phi$ стабильно эквивалентный δ .

При этом, если страт δ открыт, то ор.к.тип $\beta(\delta)$ можно выбрать полусвободным.■

Стабильную эквивалентность индуцирует отображение P^Φ . Сочетание леммы 6.2 с леммой 3.3.I сводит доказательство теорем B,C к проблеме описания класса возможных стабильных типов стратов стратификаций Σ , порожденных схемами вычисления регулярных отображений. Таким образом, доказательство теорем B, C опирается на

Теорему D /§ 7/: Для всякого натурального числа k

и всякого элементарного подмножества M пространства $\mathbb{R}^k$, заданного над $\mathbb{Z}$, найдется регулярное отображение G, заданное над $\mathbb{Z}$, его схема вычисления Ψ и страт $\gamma \in \Sigma(\Psi, G)$ стабильно эквивалентный M. При этом, если M открыто, то и страт γ можно выбрать открытым.

Схема вычисления Φ отображения F невырождена в точке $x \in \mathbb{R}^k$, если мы на каждом шаге вычисления в точке x значений координатных функций отображения F по схеме Φ получаем новое число. В § 7 доказательство теоремы D сводится к проблеме существования у отображений специального вида схем вычислений, невырожденных в специальной точке. Далее /§ 8/ мы показываем, что обобщенные схемы Горнера этих отображений обладают нужным свойством.

В § 9 мы приводим грубые оценки на число точек конфигураций тех к.типов, которые мы сопоставляем элементарным полуалгебраическим множествам в теоремах А, В, С.

Четвертую главу мы начинаем с доказательства теоремы Е /§ 10/. Теорема Е получена с помощью известной редукции вопроса о d-мерных многогранниках с $d+4$ вершинами к вопросу о трехмерных диаграммах Гейла.

В книге [21] изложен принадлежащий М.Перлю пример к.типа выпуклых многогранников, не имеющего точки над $\mathbb{Q}$. Пример основан на сопоставлении конкретному комбинаторному типу плоских конфигураций стабильно эквивалентного ему к.типа диаграмм Гейла. Это построение обобщено до конструкции, сопоставляющей любому ор. к.типу плоских базисных конфигураций стабильно эквивалентный к.тип диаграмм Гейла. После этого теорема Е оказывается следствием теорем В, С.

В § II мы приводим конкретные примеры ор.к.типов конфигураций с нетривиальной топологией. Там же отмечается топологическая нетривиальность к.типа четырехмерных многогранников с десятью верминами построенного в [23] для других целей.

В § 12 рассматривается /без подробных доказательств/ связь между задачей описания минимальной стратификации Уитни множества критических по Парето точек гладкого отображения и задачей описания комбинаторных стратификаций пространств проективных и векторных конфигураций.

Пусть $\varphi: X^n \to \mathbb{R}^m$ – гладкое отображение n -мерного многообразия без края X^n в $\mathbb{R}^m$, где $n \geq m$. Точка $x \in X^n$ называется <u>критической по Парето для</u> φ, если $0 \in \mathrm{cone}(\{(d\varphi_i)_x\}_{i=1}^m)$, где $(d\varphi_i)_x \in T_x^* X^n$. Известно, что для φ общего положения множество $\Theta(\varphi)$ всех критических по Парето точек отображения φ обладает минимальной стратификацией Уитни $\Sigma_w(\varphi)$. А.М.Вершиком было предположено, что страты этой стратификации выделяются комбинаторными инвариантами конфигураций $\{(d\varphi_i)_x\}_{i=1}^m$. Это предположение подтверждается для "хороших" сочетаний m и n.

Удается ввести отношение комбинаторной t -эквивалентности векторных конфигураций, порождающее комбинаторную стратификацию $\Sigma_t(\varphi)$ множества $\Theta(\varphi)$. Оказывается, что при $n > \frac{4}{3}m - \frac{16}{3}$ для отображения φ общего положения стратификация $\Sigma_t(\varphi)$ совпадает с $\Sigma_w(\varphi)$ /Теорема F /. С другой стороны, при любых n и m $\Sigma_w(\varphi)$ мельче, чем $\Sigma_t(\varphi)$. Отсюда с помощью теоремы B можно вывести, что для любого элементарного полуалгебраического многообразия N найдутся n и m при которых задача вычисления $\Sigma_w(\varphi)$ для отображения $\varphi: X^n \to \mathbb{R}^m$ общего положения содержат в себе, по сути, задачу вычисления минимальной стратификации Уитни многообразия N.

Основные результаты диссертации опубликованы в работах [17], [18], [19].

ГЛАВА I

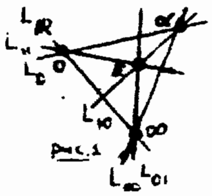
ОБЩИЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ И ФОРМУЛИРОВКИ

§ I. Векторные, проективные, базисные конфигурации и их комбинаторные типы. /Определения, элементарные свойства, связи/.

I°. Основные геометрии / $V^3_{\mathbb{R}}$, $P^2_{\mathbb{R}}$, стандартный проективный базис $P^2_{\mathbb{R}}$ /. I.I°. Стандартное неоднородное представление $P^2_{\mathbb{R}}$ в $\mathbb{R}^3$ и стандартные неоднордные координаты в $P^2_{\mathbb{R}}$. 2°. Векторные, проективные и базисные конфигурации. 3°. Матроиды и комбинаторные геометрии. 4°. Алгебраические множества и их морфизмы /стабильная эквивалентность/. 5°. Комбинаторные типы конфигураций. 6°. Комбинаторный род конфигураций. 7°. Ориентированные комбинаторные типы конфигураций. 8°. Связи между векторными, проективными и базисными ориентированными комбинаторными типами конфигураций.

I°. Основные геометрии. Пусть $V^3_{\mathbb{R}}$ - вещественное векторное трехмерное пространство, $P^2_{\mathbb{R}}$ - вещественная проективная плоскость.

Предположим, что в $V^3_{\mathbb{R}}$ и $P^2_{\mathbb{R}}$ зафиксированы базисы /векторный и проективный - четверка точек в общем положении, соответственно/. Тогда мы можем отождествить $V^3_{\mathbb{R}}$ с пространством $\mathbb{R}^3$, и представлять себе $P^2_{\mathbb{R}}$ в виде пространства прямых инцидентных нулю в $\mathbb{R}^3$. Стандартный базис в $P^2_{\mathbb{R}}$ - точки $\{e_0, e_\infty, e_\alpha, e_E\}$ с однородными координатами $e_0 = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$, $e_\infty = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$, $e_\alpha = \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$, $e_E = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$. Раз и навсегда зафиксируем эти обозначения для точек стандартного базиса $P^2_{\mathbb{R}}$ и, кроме того, положим $I = \{0, \infty, \alpha, E\}$ - множество индексов точек стандартного базиса.



Пометим шесть прямых инцидентных точкам базиса: $L_u = e_0 \cdot e_E$, $L_{\mathbb{R}} = e_0 \cdot e_\infty$, $L_0 = e_0 \cdot e_\alpha$, $L_\infty = e_\alpha \cdot e_\infty$ /рис. I/, $L_{1,0} = e_\alpha \cdot e_E$, $L_{0,1} = e_\infty \cdot e_E$.

Каждой такой прямой L_i соответствует аффинная подплоскость A_i плоскости $P^2_{\mathbb{R}}$, получающаяся удалением прямой L_i.

I.I^0. Стандартное неоднородное представление $P^2_{\mathbb{R}}$ в $\mathbb{R}^3$ и стандартные неоднородные координаты на проективной плоскости. Определим инъективное отображение $p\vartheta: P^2_{\mathbb{R}} \to \mathbb{R}^3$ следующим образом: точке $p \in P^2_{\mathbb{R}}$ сопоставим:

I. Точку $p\vartheta(p) \in \mathbb{R}^3$, являющуюся пересечением прямой соответствующей p с плоскостью $x_3 = 1$, в случае, когда $p \in A_\infty$.

2. Точку $p\vartheta(p) \in \mathbb{R}^3$, являющуюся пересечением прямой соответствующей p с плоскостью $x_2 = 1$, в случае, когда $p \in L_\infty \setminus e_\infty$.

3. $p\vartheta(e_\infty) = \left(\begin{smallmatrix}1\\0\\0\end{smallmatrix}\right) \in \mathbb{R}^3$.

Стандартными неоднородными координатами точек $p \in P^2_{\mathbb{R}}$ будем называть вектор-столбец координат точки $p\vartheta(p) \in \mathbb{R}^3$.

2^0. Векторные, проективные и базисные конфигурации. Векторной конфигурацией точек, занумерованных множеством S, будем называть набор точек $\{c_i\}_{i\in S} \subset \mathbb{R}^3$, $c_i \neq \left(\begin{smallmatrix}0\\0\\0\end{smallmatrix}\right)$ при всех $i \in S$, $\dim \operatorname{lin}(\{c_i\}_{i\in S}) = 3$ /среди точек могут оказаться совпадающие/.

Множество векторных конфигураций с топологией и евклидовой структурой $(\mathbb{R}^3)^S$ будем называть пространством векторных конфигураций и обозначать $vc(S)$.

Аналогично определяется пространство проективных конфигураций $pc(S)$ с топологией $(P^2_{\mathbb{R}})^S$.

Пусть $I \subset S$, $I = \{0, \infty, \alpha, E\}$. Базисными проективными конфигурациями точек, занумерованных множеством S, мы назовем конфигурации $c \in pc(S)$ такие, что $c_0 = e_0$, $c_\infty = e_\infty$, $c_\alpha = e_\alpha$, $c_E = e_E$, где $\{e_0, e_\infty, e_\alpha, e_E\}$ – стандартный базис

$P^2_{\mathbb{R}}$. Пространство базисных проективных конфигураций с топологией $pc(S\setminus I)$ обозначим $\mathcal{B}c(S)$.

Векторная конфигурация естественно отождествляется с матрицей $3\times|S|$ со столбцами занумерованными S. При этом $vc(S)$ отождествляется с пространством вещественных $3\times|S|$ матриц ранга три без нулевых столбцов.

Базисной конфигурации $c\in\mathcal{B}c(S)$ нам удобно сопоставлять векторную конфигурацию $pv(c)=\{pv(c_i)\}_{i\in S}\in vc(S)$ и, соответственно, матрицу стандартных неоднородных координат точек c_i. На комбинаторных типах базисных конфигураций, которыми мы будем заниматься впоследствии, это сопоставление есть бирегулярный изоморфизм на образ /предложение I,5.2/.

<u>3°. Матроиды и комбинаторные геометрии.</u> Пусть S - множество. Под матроидом на множестве S мы будем всегда понимать плоские матроиды, т.е. матроиды ранга три. Множество всевозможных плоских матроидов на S обозначим через $\mathcal{M}(S)$.

Мы будем широко пользоваться различными эквивалентными определениями матроидов /в терминах баз, циклов, зависимых и независимых множеств, ранговой функции/, введенными в [31] /см. так же [1] /. Тривиальную комбинаторную геометрию $R(S)\in\mathcal{M}(S)$, всякая тройка комбинаторных точек которой является базой, называем "грубой". Множество всевозможных комбинаторных геометрий на множестве S обозначаем через $\mathcal{G}(S)$.

<u>4°. Алгебраические множества, заданные над подполем, и их морфизмы.</u> Рассмотрим $\mathbb{F}\supset\mathbb{G}$ - поля характеристики ноль, $k=d\cdot m$. Квазипроективным /соответственно, квазиаффинным/ подмножеством пространства $(P^d_{\mathbb{F}})^m$ / $\mathbb{F}^k$/, заданным над $\mathbb{G}$, мы называем подмножество $(P^d_{\mathbb{R}})^m$ / $\mathbb{F}^k$/ вида $\{x \mid f_1(x)=0,\dots,f_e(x)=0,f_{e+1}(x)\neq 0,\dots,f_n(x)\neq 0\}$ где $f_i\in\mathbb{G}[X_1,\dots,X_k]$ / f_i - однородны по нужным группам переменных/ при $i\in 1:n$. Если множество задано только равенствами, то мы называем его аффинным /проективным/, заданным

над $\mathbb{G}$. В качестве морфизмов таких множеств мы всегда рассматриваем регулярные отображения, заданные над $\mathbb{G}$.

Особое значение для нас представляет случай $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ и $\mathbb{G} = \mathbb{Q}$. <u>Элементарным подмножеством пространства</u> $\mathbb{R}^k$, заданным над $\mathbb{Q}$, мы называем всякое подмножество $\mathbb{R}^k$ вида $\{x \mid f_1(x) = 0, \ldots, f_e(x) = 0, f_{e+1}(x) > 0, \ldots, f_n(x) > 0\}$, где $f_i \in \mathbb{Q}[x_1, \ldots, x_k]$ при $i \in 1:n$. Если элементарное множество задано только строгими неравенствами, мы называем его <u>открытым</u>. Для квазиалгебраических и элементарных вещественных множеств мы будем, кроме регулярных отображений, рассматривать непрерывные в сильной топологии кусочно-регулярные отображения, заданные над $\mathbb{Q}$. /Основной пример-отображение, координатными функциями которого является максимум набора значений регулярных функций, заданных над $\mathbb{Q}$ /.

Бирегулярный изоморфизм алгебраических множеств, заданных над $\mathbb{G}$, мы будем обозначать значком $\underset{\mathbb{G}}{\cong}$ $(\cong)$. Кусочно-бирегулярный гомеоморфизм вещественных элементарных множеств, заданных над $\mathbb{Q}$, -значком $\underset{\mathbb{Q}}{\simeq}$ $(\simeq)$. Помимо этого, для элементарных множеств мы введем понятие стабильной эквивалентности. Множества M_1, M_2, заданные над $\mathbb{Q}$, <u>стабильно эквивалентны</u>, если $M_1 \underset{\mathbb{Q}}{\simeq} M_2 \times \mathbb{R}^i$ для некоторого i. Стабильную эквивалентность элементарных множеств заданных над $\mathbb{Q}$ обозначаем значком $\underset{\mathbb{Q}}{\approx}$ $(\approx)$.

<u>5⁰. Комбинаторные типы конфигураций.</u>

5.1. Каждой конфигурации $c \in vc(S)$ /соответственно, $pc(S)$, $bc(S)$ / канонически сопоставляется матроид $m(c) \in \mu(S)$: $J \subset S$ - независимое подмножество в $m(c)$ тогда и только тогда, когда точки $\{c_j\}_{j \in J}$ находятся в общем положении. Две конфигурации c_1, c_2 - <u>комбинаторно эквивалентны</u>, если $m(c_1) = m(c_2)$. Множество комбинаторно эквивалентных векторных /проективных, базисных/ конфигураций называем <u>комбинаторным типом /к. типом/ векторных /проективных, базисных/ конфигураций</u>. Множество к.типов векторных /проективных, базисных/ конфигураций, точки которых занумерованы элементами S, обозначаем $Tv(S)$ /$Tp(S)$, $Tb(S)$/. Каждой конфигурации c соответствует единственный векторный /проективный, базисный/ к.тип $tv(c)$ /$tp(c)$, $tb(c)$/, в котором она лежит. Мы полагаем всякий раз, что $\varnothing \in Tv(S), Tp(S), Tb(S)$. Естественно определяются отображения $Tv: \mu(S) \to Tv(S)$, $M: Tv(S) \to \mu(S)$, дополняющие каждое по отдельности диаграмму /рис. 2а/ до коммутативной /рис. 2б/.

$$\begin{tikzcd} \mu(S) & & Tv(S) \\ & vc(S) \arrow[ul] \arrow[ur] & \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} \mu(S) \arrow[rr, shift left, "Tv"] & & Tv(S) \arrow[ll, shift left, "M"] \\ & vc(S) \arrow[ul] \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

рис.2а рис.2б

Аналогичным образом определяются диаграммы /рис. 3/, /рис. 4/

$$\begin{tikzcd} \mu(S) \arrow[rr, shift left, "Tp"] & & Tp(S) \arrow[ll, shift left, "M"] \\ & pc(S) \arrow[ul, "m"] \arrow[ur, "tp"'] & \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} \mu(S) \arrow[rr, shift left, "Tb"] & & Tb(S) \arrow[ll, shift left, "M"] \\ & bc(S) \arrow[ul, "m"] \arrow[ur, "tb"'] & \end{tikzcd}$$

рис 3 рис 4

Комбинаторные типы векторных/ проективных, базисных/ конфигураций задаются условиями равенства и неравенства нулю определителей, составленных из векторов /однородных/ координат точек конфигураций в пространствах $vc(S)$ /$pc(S)$, $bc(S)$/, и являются там, тем самым, квазиаффинными /квазипроективными/ алгебраическими подмножествами, заданными над $\mathbb{Q}$.

<u>5.2. Предложение I.5.2.</u> Всякий базисный комбинаторный тип конфигураций является квазиаффинным множеством, заданным над $\mathbb{Q}$

<u>Доказательство.</u> Рассмотрим конфигурацию $c \in bc(S)$, $c = \{c_i\}_{i \in S}$, $S \supset I$. Пусть $\overline{\ell}_\infty \subset S$ - множество индексов точек c лежащих на L_∞, т.е. $\overline{\ell}_\infty$ - прямая матроида $m(c)$, содержащая точки α, ∞. Пусть $\overline{e}_\infty \subset S$ - множество индексов точек c, совпадающих с точкой $e_\infty = c_\infty$. Возьмем конфигурацию c' комбинаторно эквивалентную c. Это означает, в частности, что $c'_i \in L_\infty$ тогда и только тогда, когда

$i \in \overline{\ell}_\infty$ и $c'_i = c'_\infty = e_\infty$ тогда и только тогда, когда $i \in \overline{e}_\infty$. Рассмотрим главное аффинное подмножество $A_{m(c)}$ в $\ell c(S) \cong (P^2_{\mathbb{R}})^{S \setminus I}$
$A_{m(c)} = \{ d \in \ell c(S) \mid d_i \in A_\infty \Leftrightarrow i \in S \setminus \overline{\ell}_\infty,\ d_i \in A_{\mathbb{R}} \Leftrightarrow i \in \overline{\ell}_\infty \setminus \overline{e}_\infty,$
$d_i \in A_c \Leftrightarrow i \in \overline{e}_\infty \}$. Из вышесказанного следует, что базисный к.тип $t\ell(c)$ полностью содержится в $A_{m(c)}$. Список "стандартных координат" /п. I.I^0/ точек c есть в точности вектор канонических аффинных координат c в $A_{m(c)}$. Комбинаторный тип в этих координатах задается равенством и неравенством нулю миноров матриц стандартных координат конфигурации /см. 2^0/ и является квазиаффинным подмногообразием в $A_{m(c)}$ заданным над $\mathbb{Q}$. ■

В п. 7^0 будет показано, что проективный к.тип бирегулярно изоморфен некоторому квазиаффинному множеству в том случае, когда соответствующий ему матроид содержит хотя бы одну четверку комбинаторных точек в общем положении /т.е. ранга 3/. Без этого ограничения утверждение может оказаться неверным.

<u>5.3. Грубые комбинаторные типы.</u> Векторную /соответственно, проективную, базисную/ конфигурацию, точки которой находятся в общем положении, называем <u>грубой</u>. Грубой конфигурации $c \in \mathfrak{v}c(S)$ /$pc(S)$, $\ell c(S)$/ соответствует грубая комбинаторная геометрия $m(c) = \mathcal{R}(S) \in \mathcal{M}(S)$ /см. 3^0/.

Существует единственный комбинаторный тип грубых конфигураций $R\mathfrak{v}(S) = \mathcal{J}_{\mathfrak{v}}(\mathcal{R}(S))$ / $R_p(S) = \mathcal{J}_p(\mathcal{R}(S))$, $R\ell(S) = \mathcal{J}\ell(\mathcal{R}(S))$, который мы и будем называть <u>грубым к.типом векторных /проективных, базисных/</u> конфигураций.

<u>6^0. Комбинаторный род конфигураций.</u> Пусть $A \in \mathcal{M}(S)$. <u>Комбинаторным родом</u> векторных /соответственно, проективных, базисных/ конфигураций, соответствующим A, будем называть множество всех конфигураций $c \in \mathfrak{v}c(S)$ / $pc(S)$, $\ell c(S)$ / таких, что точки c_i, c_j, c_k - коллинеарны, если $\{i, j, k\}$ - зависимое множество в /обратное не обязательно имеет место/. Комбинаторный род является

аффинным /проективным/ подмножеством $vc(S)$ /$pc(S)$, $\ell c(S)$/ .
Обозначим комбинаторный род, соответствующий матроиду A через $\mathfrak{F}v(A) \subset vc(S)$ /$\mathfrak{F}p(A) \subset pc(S)$, $\mathfrak{F}\ell(A) \subset \ell c(S)$ /.
Очевидно, что $\mathfrak{F}v(A) \supset \mathfrak{J}v(A)$ /$\mathfrak{F}p(A) \supset \mathfrak{J}p(A)$, $\mathfrak{F}\ell(A) \supset \mathfrak{J}\ell(A)$/.
Вообще говоря, $\mathfrak{F}v(A)$ /$\mathfrak{F}p(A)$, $\mathfrak{F}\ell(A)$/ шире, чем замыкание $\mathfrak{J}v(A)$ /$\mathfrak{J}p(A)$, $\mathfrak{J}\ell(A)$/ даже в топологии Зарисского.

Множество комбинаторных родов векторных /проективных, базисных/ конфигураций обозначим $Fv(S)$

Возникают аналогичные введенным в п. 5^0 диаграммы:

$$\begin{tikzcd} \mu(S) \arrow[r, shift left, "\mathfrak{F}v"] & Fv(S) \arrow[l, shift left] \\ & vc(S) \arrow[ul, "m"] \arrow[u, "fv"'] \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} \mu(S) \arrow[r, shift left, "\mathfrak{F}p"] & Fp(S) \arrow[l, shift left] \\ & pc(S) \arrow[ul, "m"] \arrow[u, "fp"'] \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} \mu(S) \arrow[r, shift left, "\mathfrak{F}\ell"] & F\ell(S) \arrow[l, shift left] \\ & \ell c(S) \arrow[ul, "m"] \arrow[u, "f\ell"'] \end{tikzcd}$$

<u>Замечание.</u> Следует отметить, что всевозможные комбинаторные роды конфигураций с точностью до тривиального сомножителя есть всевозможные детерминантные многообразия /см. [20] / - координатные сечения вложения Плюккера многообразия Грассмана в проективное пространство.

<u>7^0. Ориентированные к.типы конфигураций.</u>

<u>7.1. Ориентированные матроиды и проективно ориентированные матроиды.</u> Упорядоченной тройке точек пространства $\mathbb{R}^3$ естественно приписывается ориентация: $or(x_1, x_2, x_3) = \operatorname{sign} \det \| x_1, x_2, x_3 \|$.

В соответствии с этим назовем ориентированным матроидом на множестве S пару (A, φ) , где $A \in \mu(S)$, φ - отображение $(S)^3 \to \mathbb{Z}_2 \cup \{0\}$ /$\mathbb{Z}_2 = \{\pm 1\}$/ , обладающее следующими свойствами:

I. $\varphi(i,j,k) = 0$ тогда и только тогда, когда $\{i,j,k\}$ зависимо в A , или эквивалентное условие:

I'. $\varphi(i,j,k) \neq 0$ тогда и только тогда, когда $\{i,j,k\}$ - база A .

2. Для всякой подстановки трех элементов σ , $\varphi(\sigma(i,j,k)) =$

$= \mathrm{sign}\,\sigma \cdot \varphi(i,j,k)$.

Здесь $\mathrm{sign}\,\sigma = 1$, если σ - четная, $\mathrm{sign}\,\sigma = -1$, если σ - нечетная. Функции $(S)^3 \to \mathbb{Z}_2 \cup \{0\}$, обладающие свойствами I, 2, будем называть ориентациями A. Ориентации φ_1, φ_2 матроида A будем называть проективно эквивалентными, если найдется отображение $\xi : S \to Z_2$ такое, что

$\varphi_1((i,j,k)) = \xi(i)\cdot\xi(j)\cdot\xi(k)\cdot\varphi_2(i,j,k)$, при всех $(i,j,k) \subset (S)^3$

Пару $(A, \bar{\varphi})$, где $\bar{\varphi}$ - класс проективной эквивалентности ориентации A, называем проективно ориентированным матроидом.

Множество ориентированных матроидов обозначим через $\mu_o(S)$ множество проективно ориентированных матроидов через $\mu_{po}(S)$.

<u>7.2. Ориентированные векторные комбинаторные типы конфигураций.</u> Каждой конфигурации $c \in vc(S)$ можно сопоставить ориентированный матроид $mo(c) \in \mu_o(S)$:

$mo(c) = (m(c), vo(c))$, где $vo(c) : (S)^3 \to \mathbb{Z}_2 \cup \{0\}$

$vo(c)(i,j,k) = or(c_i, c_j, c_k)$.

Разбиение $vc(S)$ на <u>ориентированные комбинаторные типы</u> /ор.к.типы/ порождает полуалгебраическую стратификацию $Tvo(S)$ пространства $vc(S)$. Каждый страт - элементарное полуалгебраическое множество, задаваемое условиями на знаки определителей, составленных из вектор-столбцов координат точек конфигураций. Стратификация $Tvo(S)$ есть естественное измельчение стратификации $Tv(S)$. Возникает треугольник естественных отображений /рис. 5/.

$$\begin{tikzcd} \mu_o(S) \arrow[rr, shift left, "J_{vo}"] & & Tvo(S) \arrow[ll, shift left] \\ & vc(S) \arrow[ul, "mo"] \arrow[ur, "to"'] & \end{tikzcd}$$

<u>рис. 5</u>

Ориентированные матроиды $\Gamma \in \mathcal{M}_o(S)$ такие, что $\Gamma = (\mathcal{R}(S), \varphi)$, называем грубыми. Множество грубых матроидов обозначим через $\mathcal{R}_o(S)$, соответствующее разбиение к.типа $\mathcal{R}_v(S)$ на грубые ориентированные к.типы обозначим $\mathcal{R}_{vo}(S)$.

7.3. Ориентированные базисные к.типы. Аналогично предыдущему случаю, конфигурации $c \in bc(S)$, $S \supset I$ сопоставим ориентированный матроид $mo(c)$:

$$mo(c) = (m(c), bo(c)), \quad bo(c) : (S)^3 \to \mathbb{Z}_2 \cup \{0\},$$

$$bo(c)((i,j,k)) = \mathrm{or}\, \| vp(c_i), vp(c_j), vp(c_k) \|,$$

где $pv : P^2_{\mathbb{R}} \to \mathbb{R}^3$ - стандартное представление. Возникает стратификация $\mathcal{T}bo$ пространства $bc(S)$ на ориентированные комбинаторные типы. В соответствии со сказанным в п. 5.2, страты являются элементарными полуалгебраическими многообразиями, заданными над $\mathbb{Q}$ и эта стратификация измельчает стратификацию $\mathcal{T}b(S)$. Соответствующий треугольник отображений представлен на рис. 6.

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{M}_o(S) \arrow[r, shift left, "\mathcal{T}b_o"] & T b_o(S) \arrow[l, shift left, "M_o"] \\
& bc(S) \arrow[ul, "mo"] \arrow[u, "tb_o"']
\end{tikzcd}$$

Рис.6

7.4. Ориентированные проективные комбинаторные типы конфигураций. Возьмем конфигурацию $c \in pc(S)$. Каждая расстановка направляющих единичных векторов на прямых, соответствующих точкам конфигурации c порождает некоторую ориентацию матроида $m(c)$, всевозможные расстановки порождают класс проективной эквивалентности ориентаций $po(c)$. Таким образом, c можно поставить в соответствие проективно ориентированный матроид $mpo(c) = (m(c), po(c))$. Возникает стратификация $\mathcal{T}po$ пространства $pc(S)$ на ориентированные проективные к.типы конфигураций. Стандартный треугольник отображений на /рис. 7/.

$$\begin{tikzcd} \mathcal{M}pc(S) \arrow[r, shift left] & Tpc(S) \arrow[l, shift left] \\ & pc(S) \arrow[ul] \arrow[u] \end{tikzcd}$$

рис.7

Существенно заметить, что полярная двойственность на проективной плоскости, сопоставляющая конфигурации точек и конфигурацию прямых, переводит наш ориентированный проективный комбинаторный тип конфигурации в топологический тип конфигураций прямых /см. [22] /. Этот факт отмечается в [12] .

8°. Связи между векторными, проективными и базисными ориентированными к.типами конфигураций. Определим ряд отображений:

8.1. $vp: vc(S) \to pc(S)$ сопоставляет набору векторов $\{c_i\}_{i \in S}$ набор натянутых на них прямых. /Напомним, что по определению $vc(S)$, $c_i \neq 0$ при всех $i \in S$ /.

8.2. Пусть $I \subset S$, I, как всегда, $= \{0, \infty, \alpha, E\}$. Рассмотрим $pc(S,I) \subset pc(S)$, $pc(S,I)$ - множество всех проективных конфигураций, у которых точки с индексами из I находятся в общем положении. Определим отображение

$$pb: pc(S,I) \to bc(S).$$

Хорошо известно, что для любых двух пар упорядоченных четверок точек, находящихся в общем положении на проективной плоскости, существует единственный автоморфизм плоскости, переводящий одну четверку точек в другую. / 4 - транзитивность группы $PGL_2(\mathbb{R})$ /. Таким образом, для всякой конфигурации существует единственный автоморфизм $A_d \in PGL_2(\mathbb{R})$ такой, что $A_d((d_\infty, d_\alpha, d_0, d_E)) = (e_\infty, e_\alpha, e_0, e_E)$

Определим $pb(d) = \{A_d(d_i)\}_{i \in S} \in bc(S)$.

8.3

Определим $vb: vc(S,I) \to bc(S)$

/тут $\vartheta c\,(S,I)$ / - множество всех векторных конфигураций, у которых точки с индексами из I находятся в общем положении/

$$\vartheta b = \vartheta p|_{\vartheta c(S,I)} \circ pb$$

8.4. Введенные отображения связаны коммутативной диаграммой /рис. 8/.

$$\begin{tikzcd}
 & \mu(S) & \\
\vartheta c(S,I) \arrow[ur, "m"] \arrow[rr, "\vartheta p"] \arrow[dr, "\vartheta b"'] & & pc(S,I) \arrow[ul, "m"'] \arrow[dl, shift left, "pb"] \\
 & bc(S) \arrow[uu, "m"] \arrow[ur, shift left, "m"] &
\end{tikzcd}$$

Наиболее существенно то, что отображения не меняют соответствующего матроида. А это значит, что комбинаторный тип переходит в комбинаторный тип, отвечающий тому же матроиду. В частности, грубый тип переходит в грубый.

Для нас наибольший интерес представляет поведение $\overset{\text{ор.}}{\text{к}}$.типов по отношению к нашим отображениям.

ЛЕММА I.8.4.

I. Для любого $\alpha \in T\vartheta o(S)$, $\vartheta p(\alpha) \in Tpo(S)$

/т.е. образ векторного ориентированного к.типа при отображении ϑp - целый проективный ор.к.тип./При этом $\alpha \xrightarrow{\vartheta p} \vartheta p(\alpha)$ - тривиальное регулярное расслоение со слоем $\mathbb{R}^S$ и к.тип α бирегулярно изоморфен $\vartheta p(\alpha) \times \mathbb{R}^S$.

2. Для любого $\beta \in Tpo\ (S,I)$, $pb\,(\beta) \in Tbo\ (S)$;

при этом $\beta \xrightarrow{pb} pb\,(\beta)$ тривиальное главное регулярное $PGL_2(\mathbb{R})$ расслоение и к.тип β бирегулярно изоморфен $pb\,(\beta) \times PGL_2(\mathbb{R})$

3. Для любого $\alpha \in T\vartheta o\ (S,I)$, $\vartheta b\,(\alpha) \in Tbo\ (S)$

при этом $\alpha \xrightarrow{\vartheta b} \vartheta b\ (\alpha)$ - тривиальное регулярное расслоение со слоем $PGL_2(\mathbb{R}) \times \mathbb{R}^S$ и к.тип α бирегулярно изоморфен $\vartheta b(\alpha) \times PGL_2(\mathbb{R}) \times \mathbb{R}^S$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО содержится в [12] .■

§ 2. Формулировки основных теорем и проект доказательства.

0^0. Формулировки теорем А, В, С.

ТЕОРЕМА А. Для любого натурального k и любого аффинного подмножества M пространства $\mathbb{R}^k$, заданного над $\mathbb{Q}$, найдется комбинаторный род базисных конфигураций и составленное из целых к.типов, открытое по Зарисскому подмножество в нем, бирегулярно изоморфное M. /См. определение бирегулярного изоморфизма алгебраических множеств, заданных над $\mathbb{Q}$, в п. 4^0 § I/.

СЛЕДСТВИЕ. Для любого натурального числа k и любого M - аффинного подмножества $\mathbb{R}^k$, заданного над $\mathbb{Q}$, найдутся:

1. Комбинаторный род векторных конфигураций и составленное из целых к.типов, открытое по Зарисскому подмножество в нем, бирегулярно изоморфное $M \times (\mathbb{R}^*)^\ell \times PGL_2(\mathbb{R})$ при некотором ℓ.

2. Комбинаторный род проективных конфигураций и составленное из целых к.типов, открытое по Зарисскому подмножество в нем, бирегулярно изоморфное $M \times PGL_2(\mathbb{R})$.

ТЕОРЕМА В. Для любого натурального числа k и любого элементарного подмножества N пространства $\mathbb{R}^k$, заданного над $\mathbb{Q}$, найдется ориентированный комбинаторный тип базисных конфигураций, стабильно эквивалентный N. /См. определение стабильной эквивалентности элементарных множеств, заданных над $\mathbb{Q}$ в п. 4^0 § I/.

СЛЕДСТВИЕ. Для любого натурального k и любого элементарного подмножества N пространства $\mathbb{R}^k$, заданного над $\mathbb{Q}$, найдутся ориентированный к.тип векторных конфигураций и ориентированный к.тип проективных конфигураций, стабильно эквивалентные $N \times PGL_2(\mathbb{R})$.

ТЕОРЕМА С. Для любого натурального k и любого открытого элементарного подмножества L пространства $\mathbb{R}^k$, заданного над $\mathbb{Q}$, найдется грубый ориентированный к.тип базисных конфигураций, стабильно эквивалентный L.

СЛЕДСТВИЕ. Для любого натурального k и любого L -открытого элементарного подмножества пространства $\mathbb{R}^k$ найдутся: грубый ор.к.тип векторных конфигураций и грубый ор.к.тип проективных конфигураций, стабильно эквивалентные $L \times PGL_2(\mathbb{R})$.

I°. Замечания.

1. Теорема A верна при замене $\mathbb{R}$ на произвольное поле $\mathbb{F}$ и $\mathbb{Q}$ на простое подполе поля $\mathbb{F}$.

2. Теорема C верна для множеств L, заданных над $\mathbb{R}$, поскольку любое открытое элементарное множество L в $\mathbb{R}^k$ можно аппроксимировать стабильно эквивалентным ему элементарным множеством, заданным над $\mathbb{Q}$.

3. Мы ограничиваемся случаем плоских конфигураций и их комбинаторных типов. Все определения и предположения § I естественно обобщаются на многомерный случай, и для d -мерных конфигураций при $d \geq 2$ теоремы A /соответственно, B, C/ остаются справедливыми. Конструкция дополнения плоской базисной конфигурации до d -мерной с сохранением,с точностью до бирегулярной /стабильной/ эквивалентности, многообразия /ориентированного/ комбинаторного типа тривиальны.

2°. План доказательства теорем A, B, C. Схемой вычисления регулярного отображения $F: \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^m$, заданного над $\mathbb{Z}$, мы называем представление координатных функций отображения F в виде суперпозиции элементарных бинарных функций $Y+Z$, $Y-Z$, $Y \cdot Z$, координатных функций $X_1, \ldots, X_k$ на $\mathbb{R}^k$ и постоянной функции $\equiv 1$ /см. [8] /. /Например, для $F: \mathbb{R}^1 \to \mathbb{R}^1$, $F = 2x^2 - x + 1$ формула $F = (((1+1) \cdot x - 1) \cdot x + 1)$ определяет некоторую схему вычисления. Подробное определение в п. 4^0 § 4./

Хорошо известна простая конструкция, сопоставляющая схеме Φ вычисления регулярного отображения F полусвободную /п. 1.5^0 § 3/ к.геометрию G^{Φ}. Данная конструкция используется в [24], [22] но, к сожалению, формально точное ее описание автору обнаружить не удалось.

Смысл конструкции состоит в обобщении "построений с помощью линейки" суммы и произведений точек проективной прямой, принадлежащей аксиоматической проективной плоскости. Эти построения восходят к Фон-Штаудту и используются в старых доказательствах теоремы Веблена-Янга о координатизации аксиоматической проективной плоскости. Итерируя построения Фон-Штаудта в соответствии со схемой Φ, мы получим "построение значения регулярного отображения F", естественно определяющее к.геометрию G^{Φ} /"построение с помощью линейки" и есть, собственно, комбинаторная геометрия с дополнительной структурой - порядком на комбинаторных точках, удовлетворяющим некоторым аксиомам /см. § 3 п. 1.3 : "свободное расширение геометрии"//.

Пусть $\mathcal{F}^{\Phi}$ - комбинаторный род базисных конфигураций, отвечающий комбинаторной геометрии G^{Φ}. Возникает естественное би-регулярное вложение $P^{\Phi}: \mathbb{R}^k \times (\mathbb{R}^*)^{\ell(\Phi)} \to \mathcal{F}^{\Phi}$, подробно изучая которое /§§ 5, 6/ мы получаем, с одной стороны, доказательство теоремы А, с другой стороны, лемму 6.2 /§ 6/. <u>Лемма 6.2</u> утверждает: Для всякого страта γ стратификации $\Sigma(\Phi)$ пространства $\mathbb{R}^k$ /тут $\Sigma(\Phi)$ - канонически связанная со схемой вычисления отображения полуалгебраическая стратификация пространства аргументов/ найдется ор.к.тип $\beta(\gamma) \in \mathcal{F}(\Phi)$ стабильно эквивалентный γ, причем, если страт γ открыт в $\mathbb{R}^k$, то к.тип $\beta(\gamma)$ можно выбрать полусвободным /см. п. 1.5 § 3/. /Стабильную эквивалентность индуцирует вложение P^{Φ}./

Сравнение Леммы 6.2 с Леммой 3.3.I, утверждающей, что для всякого полусвободного ориентированного к.типа найдется стабильно эквивалентный ему грубый к.тип конфигураций, окончательно сводит доказательство теорем B, C к проблеме описания класса возможеных стабильных типов страт стратификаций Σ, порожденных схемами вычисления регулярных отображений. Доказательство теорем B, C таким образом, опирается на теорему D /§ 7/:

Для любого натурального числа i и всякого элементарного полуалгебарического подмножества M пространства $\mathbb{R}^i$, заданного над $\mathbb{Q}$, надутся q, m, отображение $G\colon \mathbb{R}^q \to \mathbb{R}^m$, заданное над $\mathbb{Q}$, его схема вычисления Φ и страт $\gamma \in \Sigma(\Phi)$ стабильно эквивалентный M. При этом, если M – открыто в $\mathbb{R}^i$, то и страт γ можно выбрать открытым в $\mathbb{R}^q$.

Доказательству теоремы D посвящены § 7 и § 8. В § 7 достаточно традиционной локализацией мы сводим проблему доказательства теоремы D к совершенно локальному вопросу о поведении схем вычисления регулярных отображений в точке, сформулированному в Лемме 8.I /§ 8/.

Лемма 8.I доказывается элементарно-алгебраическими приемами. Подробнее план доказательства теоремы D изложен в п. 3^0§ 7.

Благодаря тому, что все доказательства теорем A, B, C конструктивны, мы можем выписать оценки /очень грубые/ на число точек конфигураций тех комбинаторных типов, которые мы сопоставляем алгебраическим множествам, в терминах параметров регулярных отображений, задающих алгебраические множества. Оценки приведены в § 9.

Г Л А В А 2

ПОЛУСВОБОДНЫЕ КОМБИНАТОРНЫЕ ТИПЫ КОНФИГУРАЦИЙ; КОНСТРУКЦИЯ: "СХЕМА ВЫЧИСЛЕНИЯ РЕГУЛЯРНОГО ОТОБРАЖЕНИЯ - МАТРОИД"

§ 3. Полусвободные конфигурации и их комбинаторные типы. Эквивалентность полусвободных к.типов грубым.

0°. План доказательства леммы об эквивалентности. I°. Свободные расширения к.геометрий. 2°. Инвариантные перестройки базисных конфигураций. 3°. Эквивалентность полусвободных к.типов грубым.

0°. План доказательства леммы об эквивалентности. Свободное расширение комбинаторной геометрии, определяемое в п. I.3, есть естественное инвариантное обобщение процедуры "построения с помощью линейки"; оно часто возникает в теории модулярных решеток и аксиоматической проективной геометрии /см. [10], [11] /.

Пункт I° посвящен определению свободных расширений к.геометрий и их частного случая - "полусвободных комбинаторных геометрий". Нас интересуют ориентированные комбинаторные типы полусвободных конфигураций /т.е. конфигураций с полусвободной геометрией инцидентностей между точками и прямыми/ и их соотношение с ориентированными к.типами грубых конфигураций. Основной результат параграфа состоит в том, что, оказывается, каждому ор.к.типу полусвободных конфигураций можно сопоставить стабильно эквивалентный ему ор.к.тип грубых конфигураций. /Пункт 3°, лемма 3.3.I/.

Доказательству этого факта способствует наличие удобного порядка на точках полусвободной конфигурации - "порядка последовательного построения". Порядок согласован с комбинаторикой конфигурации так, что мы можем, двигаясь по точкам от последней к младшим, "расшевелить" конфигурацию /с помощью перестроек, обсуждаемых в п. 2°/. При этом, на каждом шаге мы получаем "более грубую" конфигурацию, ор.к.тип которой стабильно эквивалентен ор.к.типу исходной.

I°. Свободные расширения комбинаторных геометрий.

I.I. Обозначения. I. Для комбинаторной геометрии $A \in \mathcal{G}(S)$ и подмножества множества его комбинаторных точек $J \subset S$ обозначим через A_J подгеометрию геометрии A натянутую на J, т.е. $A_J \in \mathcal{G}(J)$, $\{i,j,k\}$ - база A_J тогда и только тогда, когда $\{i,j,k\}$ - база A для всякого набора $\{i,j,k\} \subset J$.

2. Обозначим через $\mathcal{L}(A) \subset 2^S$ множество всех комбинаторных прямых геометрии A. Обозначим через $\mathcal{L}(A)_J$ множество всех к.прямых геометрии A, содержащих не менее двух к.точек из J.

I.2. Определение. I. К.прямую к.геометрии будем называть собственной, если она содержит не менее трех к.точек /т.е. содержит двумерный цикл/.

2. К.точку геометрии назовем собственной, если она инцидентна хотя бы одной собственной прямой.

3. К.точки геометрии, не являющиеся собственными, называем грубыми.

4. Собственные к.точки геометрии, инцидентные в точности одной собственной прямой, называем полугрубыми.

I.3. Определение. Пусть A - к.геометрия, $A \in \mathcal{G}(J)$, p - некоторый символ, $p \notin J$.

I. К.геометрию $B \in \mathcal{G}(J \cup p)$ называем свободным расширением геометрии A, если $B_J = A$, и существуют в точности две прямые из $\mathcal{L}(B)_J$, инцидентные p /т.е. p инцидентна ровно двум собственным прямым B /.

2. Пусть S - некоторое множество, $S \supset J$, $B \in \mathcal{G}(S)$. Говорим, что B - свободное расширение A, если $B_J = A$ и на $S \setminus J$ существует строгий линейный порядок: $(S \setminus J) = (p_1, \dots, p_n)$ такой, что $B_{(J \cup \{p_1,\dots,p_i\})}$ - свободное расширение $B_{(J \cup \{p_1,\dots,p_{i-1}\})}$ для $i \in \overline{1:n}$.

3. Если $B \in \mathcal{G}(S)$, $J \subset S$ и B - свободное расширение B_J, то множество к.точек B_J будем называть основанием матроида B. Определение согласовано с [10] , [11].

I.4. Определение. Пусть $A \in \mathcal{G}(J)$, $S \supset J$. Матроид $B \in \mathcal{G}(S)$ называется грубым расширением A , если $B_J = A$ и все точки из $S \setminus J$ грубы в B .

Замечание. Пусть $S \supset K \supset J$, $A \in \mathcal{G}(S)$, A - грубое расширение A_K , A_K - свободное расширение $(A_K)_J = A_J$, тогда A - свободное расширение $A_{J \cup (S \setminus K)}$. Это следует непосредственно из определений.

I.5. Определение. Комбинаторная геометрия $A \in \mathcal{G}(S)$ называется полусвободной, если она является свободным расширением к.геометрии, каждая собственная точка которой /кроме, возможно, фиксированной четверки/, инцидентна единственной собственной прямой. /Т.е. полугруба/.

Конфигурацию, к.тип конфигураций, ориентированный к.тип конфигураций называем полусвободными, если соответствующие им геометрии полусвободны.

Замечание. Очевидно, что свободное расширение полусвободной геометрии - полусвободная геометрия.

В силу Замечания из п. I.4, грубое расширение полусвободной геометрии есть так же полусвободная геометрия.

I.6. Операция склейки точек комбинаторной геометрии. Пусть $A \in \mathcal{G}(S)$ - к.геометрия, $r, s \in S$, $r \neq s$. Допустим, что выполнено следующее условие: Для любой пары прямых ℓ_1, ℓ_2 такой, что $r \in \ell_1$, $s \in \ell_2$, верно: либо $\ell_1 \cap \ell_2 = \emptyset$, либо $((\ell_1 \supset \{r, s\}) \vee (\ell_2 \supset \{r, s\}))$
Заменим в списке прямых геометрии A всюду r на s . Нетрудно проверить, что новый список задает к.геометрию $\tilde{A} \in \mathcal{G}(S \setminus r)$.

2°. Инвариантные перестройки базисных конфигураций. В данном мы исследуем несколько способов добавления-удаления точек базисной конфигурации, не меняющих стабильного типа соответствующих конфигурациям многообразий ориентированных комбинаторных типов.

2.I. Операция исключения одной точки для базисных конфигураций и их ориентированных комбинаторных типов. Рассмотрим пространство $\mathcal{B}c(S)$ /см. п. 2° § I/. Как всегда, предположим, что $S \supset I$, $I = \{0, \alpha, E, \infty\}$ - множество символов, помечающих точки базиса.

Зафиксируем $t \in S \setminus I$.

Рассмотрим проекцию $ex_t : \mathcal{B}c(S) \to \mathcal{B}c(S \setminus t)$:

$ex_t(\{c_i\}_{i \in S}) = \{c_i\}_{i \in S \setminus t}$. Проекция ex_t индуцирует отображения $\mathcal{E}x_t : \mu_o(S) \to \mu_o(S \setminus t)$,

$$Ex_t : T\mathcal{B}o(S) \to T\mathcal{B}c(S \setminus t)$$

для которых коммутативна диаграмма:

$$\begin{array}{ccccc}
\mu_o(S) & & & & T\mathcal{B}o(S) \\
 & \overset{\mu_o}{\nwarrow} & \mathcal{B}c(S) & \overset{t_c}{\nearrow} & \\
\downarrow{\scriptstyle \mathcal{E}x_t} & & \downarrow{\scriptstyle ex_t} & & \downarrow{\scriptstyle Ex_t} \\
\mu_o(S \setminus t) & & & & T\mathcal{B}o(S \setminus t) \\
 & \overset{\mu_o}{\nwarrow} & \mathcal{B}c(S \setminus t) & \overset{t_o}{\nearrow} &
\end{array}$$

/см. п. 7.I § I и пункт I.I° наст. параграфа/.

2.2. Условия стабильной эквивалентности ор.к.типов α и $Ex_t(\alpha)$. Возьмем $\alpha \in T\mathcal{B}o(S)$. Изучим отображение $\varphi : ex_t|_\alpha : \alpha \to Ex_t(\alpha)$. Отображение φ, вообще говоря, не эпиморфизм. Для $c \in Ex_t(\alpha)$ $\varphi^{-1}(\alpha) = \{x \in \mathcal{B}c(S) \mid x_i = c_i$ при $i \neq t$, $x_t \in S_\varphi(c)\}$, где $S_\varphi(c) = \{y \in P^2_{\mathbb{R}} \mid or(y, c_k, c_e) = \alpha_{or}(t, k, e)$ для любых $\{k, e\} \in S \setminus t\}$.

/ α_{or} – ориентация матроида $Mo(\alpha)$, соответствующего ор.к.типу α, т.е. $Mo(\alpha) = (M(\alpha), \alpha_{or})$ /. Может оказаться, что $S_\varphi(c) = \emptyset$ и это означает, что $c \notin \mathrm{im}\,\varphi$.

Множество $S_\varphi(c)$ всегда можно считать выпуклым множеством, лежащим в аффинной плоскости $A_\infty = P^2_{\mathbb{R}} \setminus L_\infty$ в случае, когда $t \in \overline{e}_\infty(M(\alpha))$, в аффинной плоскости $A_{\mathbb{R}}$, когда $t \in \overline{e}_\infty(M(\alpha)) \setminus \overline{e}_\infty(M(\alpha))$, и в аффинной плоскости A_0, когда $t \in \overline{e}_\infty(M(\alpha))$ /см. доказательство предложения I,5.2/. Всякий раз множество S_φ в соответствующей аффинной плоскости есть пересечение какого-то числа аффинных полупространств и какого-то числа аффинных прямых.

В дальнейшем все рассмотрения мы будем проводить для конфигураций и к.типов, отвечающих комбинаторным геометриям. /Т.е. предполагать, что конфигурации не имеют кратных точек/.

Рассмотрим три случая:

2.2.I. К.точка t груба в геометрии $M(\alpha) \in \mathcal{G}(S)$. В этом случае $S_\varphi(c)$ – либо открытый выпуклый многогранник, либо $S_\varphi(c) = \emptyset$. Следовательно, $\varphi^{-1}(c)$ – тоже либо открытый выпуклый многогранник, либо пусто /см. рис. 9.I/.

2.2.2. В случае, когда к.точка t инцидентна ровно одной собственной прямой геометрии $M(\alpha)$, множество $S_\varphi(c)$ – либо открытый отрезок, либо $\emptyset$ и, следовательно, $\varphi^{-1}(c)$ – либо открытый отрезок, либо $\emptyset$ /см. рис. 9.2/.

2.2.3. В случае, когда к.точка t инцидентна более чем одной собственной прямой геометрии, множество $S_\varphi(c)$ – либо точка, либо $\emptyset$ и, следовательно $\varphi^{-1}(c)$ – точка, либо $\emptyset$. /См. рис. 9.3/.

Рассуждениями, стандартными для теории полей выпуклых многогранников /см. [3]/. Легко проверяется, что φ -тривиаль-

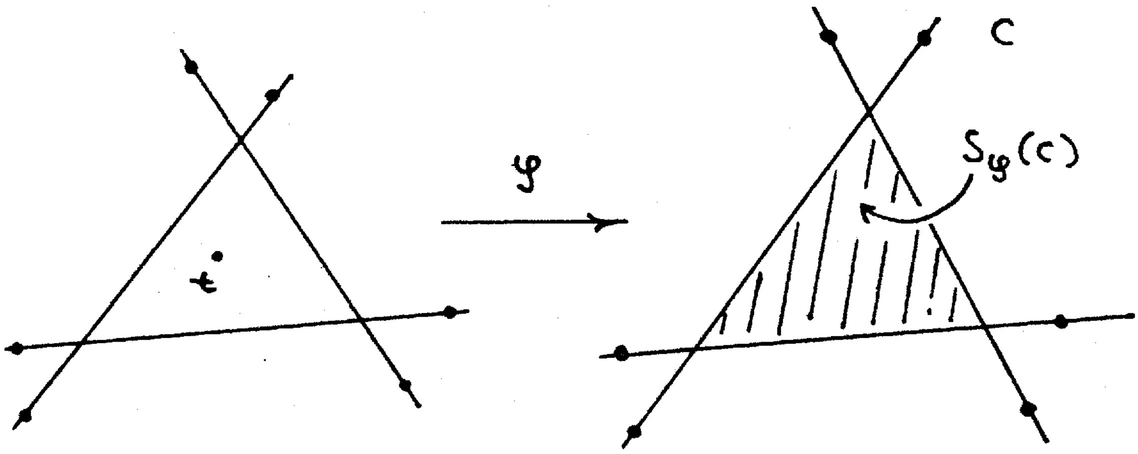


рис. 9.I

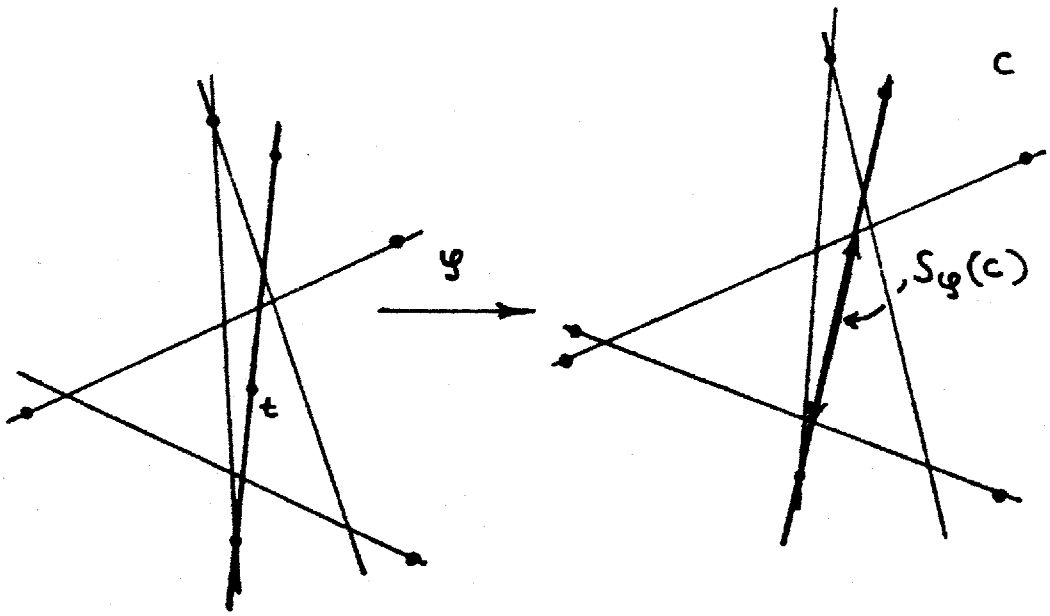


рис. 9.2

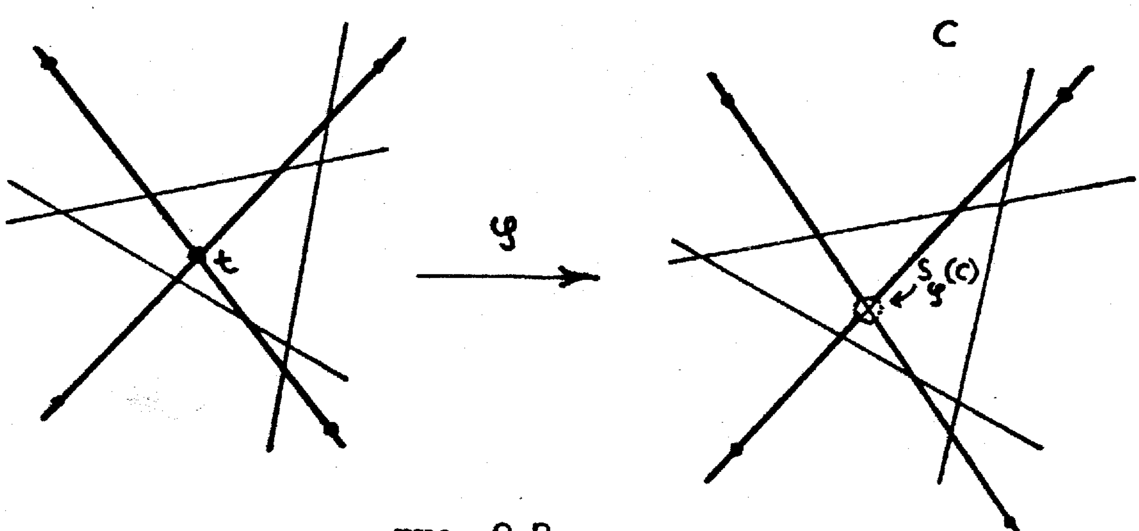


рис. 9.3

ное регулярное расслоение над образом со слоем гомеоморфным $\mathbb{R}^2$ в случае I, $\mathbb{R}^1$ в случае 2 и $\mathbb{R}^0$ /точка/ в случае 3. При этом, в случае I: $\alpha \simeq \operatorname{im}(\varphi)\times\mathbb{R}^2$, в случае 2: $\alpha\simeq \operatorname{im}\varphi\times\mathbb{R}^1$, в случае 3: $\dot\alpha\simeq \operatorname{im}(\varphi)$.

Таким образом, верно следующее

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3, 2,2. Если для всякого $c\in Ex_t(\alpha)$ множество $S_\varphi(c)=\{y\in P^2_{\mathbb{R}} \mid or(y,c_k,c_r)=\alpha_{or}(t,k,r)$ для любых $\{k,r\}\in S\setminus t\}\neq\emptyset$, то $\alpha\simeq Ex_t(\alpha)\in Tb_0(S\setminus t)$.

<u>2.3. Четыре инвариантные перестройки, индуцированные исключением точки.</u> Пусть $d=\{d_i\}_{i\in S}\in b_c(S)$.

Определим множество $S_d(d_t)$:

I случай: $d\notin L_\infty$. Тогда положим:

$$S_d(d_t)=\{x\in P^2_{\mathbb{R}} \mid or(x,d_k,d_r)=or(d_t,d_k,d_r)$$

для всех $\{k,r\}\subset S\setminus t$ таких, что $or(d_t,d_k,d_r)\neq 0$, т.е. d_t, d_k, d_r не коллинеарны.$\}$.

2 случай: $d_t\in L_\infty$. В этом случае положим $S_d(d_t)=\{x\in P^2_{\mathbb{R}} \mid$ $\mid or(x,d_k,d_r)=or(d_t,d_k,d_r)$ для всех $\{k,r\}\subset S\setminus t$, таких, что $or(d_t,d_k,d_r)\neq 0\}\cup\{x\in P^2_{\mathbb{R}} \mid or(x,d_k,d_r)=-or(d_t,d_k,d_r)$ для всех $\{k,r\}\subset S\setminus t$, таких, что $or(d_t,d_k,d_r)\neq\emptyset\}$.

Множество $S_d(d_t)$ можно понимать как звезду точки d_t в комплексе, порождаемом на плоскости прямыми и точками конфигурации /см. рис. 14.I/. Легко показать, что $S_d(d_t)$, вместе со своим замыканием $\overline{S}_d(d_t)$, лежит по меньшей мере в одной из аффинных плоскостей A_0, $A'_{\mathbb{R}}$, A_∞, A_{11}, A_{10}, $A_{0,1}$, и там $S_d(d_t)$ – открытое выпуклое множество, а $\overline{S}_d(d_t)$ – выпуклый многогранник. Кроме того, если $\overline{S}_d(d_t)$ лежит в какой-то из этих плоскостей A_i, то для всякой конфигурации $b\in t_0(d)$: $\overline{S}_b(b_t)\subset A_i$.

2.3.I. ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3,2.3.I. Пусть $d=\{d_i\}_{i\in S}\in b_c(S)$, $t\in S\setminus T$, $j\in S\setminus t$. Предположим, что тройка (d,t,j)

такова, что: I. d_t - грубая точка d.

2. d_j лежит в $\overline{S}_d(d_t)$.

Тогда $to(d) \simeq to(ex_t(d)) = Ex_t(to(d))$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Возьмем $p \in to(ex_t(d))$, $\varphi = ex_t|_{to(d)} : to(d) \to$ $\to to(ex_t(d))$. Из пустоты $\varphi_\varphi(p)$, возможности ограничиться рассмотрениями в аффинной плоскости $A_{\mathbb{R}}$ или Λ_∞ и теоремы Хелли [6] немедленно выводится, что найдутся $k, \ell \in S \setminus \{t, j\}$, такие, что $or(p_j, p_k, p_\ell) \neq or(c_j, c_k, c_\ell)$ и, следовательно, $p \in Ex_t(to(c))$ /см. рис. 10/. После этого ссылка на предложение 3,2.2 завершает доказательство. ∎

Следующие три предложения есть также следствия теоремы Хелли в подходящей аффинизации проективной плоскости и Предложения 3.2.2.

2.3.2. ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3,2.3.2. Пусть $d = \{d_i\}_{i \in S} \in \mathcal{B}c(S)$ $t \in S \setminus I$, $j \in S \setminus t$ и при этом тройка (d, t, j) такова, что:

I. Точка d_t инцидентна единственной собственной прямой L конфигурации d,

2. $d_j \in \overline{S}_d(d_t) \cap L$. Тогда $to(d) \approx to(ex_t(d)) = Ex_t(to(d))$ /см. рис. II/. □

2.3.3. ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3,2.3.3. Пусть $d = \{d_i\}_{i \in S} \in \mathcal{B}c(S)$, $t \in S \setminus I$, $u, v \in S \setminus t$, $u \neq v$ и при этом четверка (d, t, u, v) такова, что:

I. Точка d_t инцидентна единственной собственной прямой L конфигурации d;

2. $d_u, d_v \in \overline{S}_d(d_t)$ и

3. d_u, d_v отделены друг от друга прямой L в $\overline{S}_d(d_t)$.

Тогда $to(d) \approx to(ex_t(d)) = Ex_t(to(d))$ /см. рис. 12/. □

2.3.4. ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3,2.3.4. Пусть $d = \{d_i\}_{i \in S} \in \mathcal{B}c(S)$;

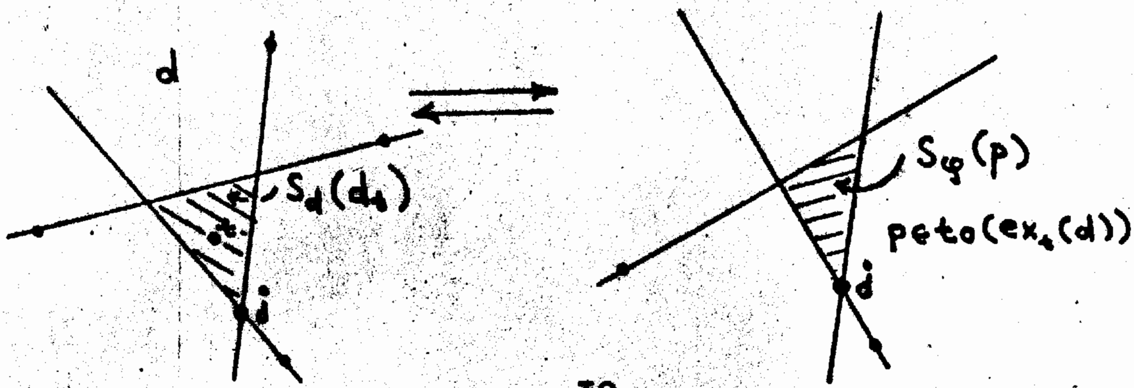


рис. I0

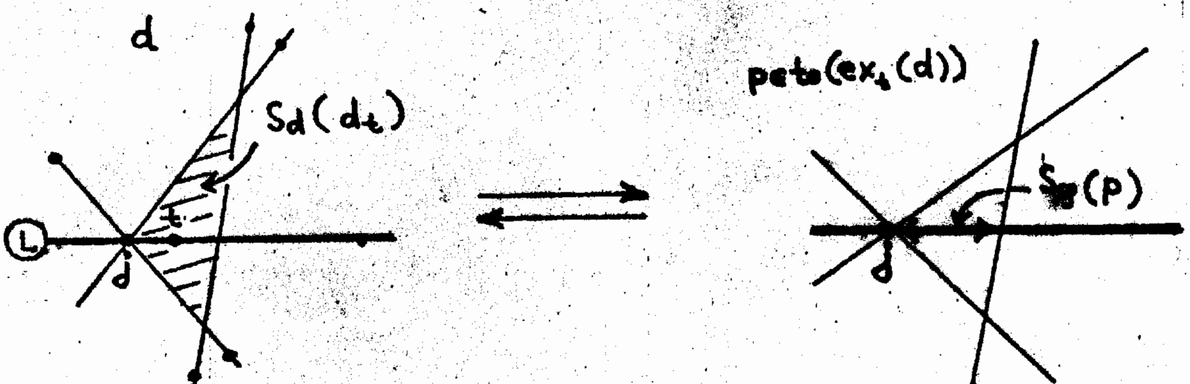


рис. II

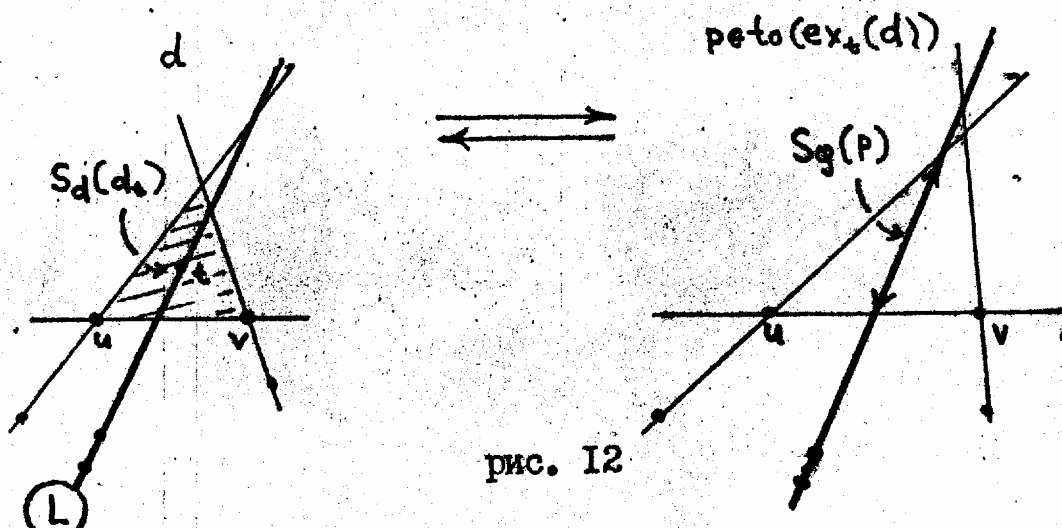


рис. I2

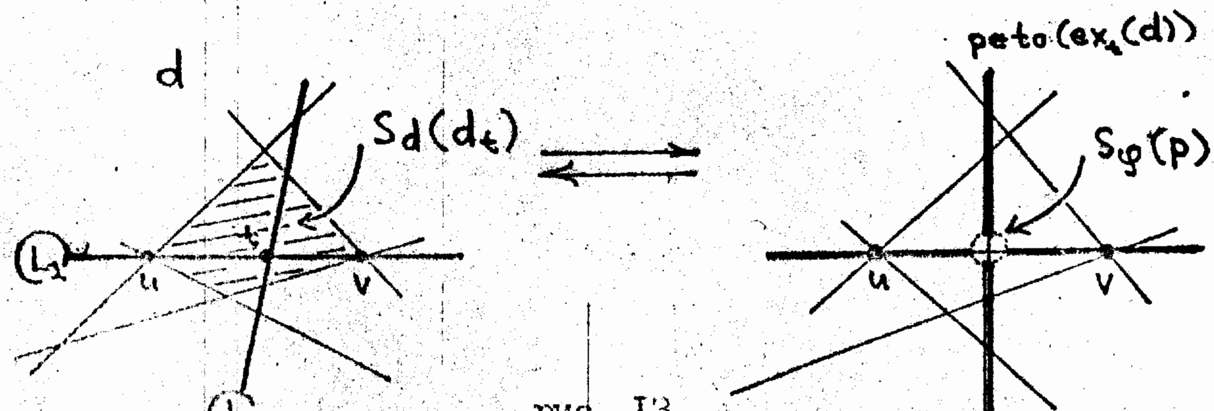


рис. I3

$t \in S \setminus I$; $u, v \in S \setminus t$; $u \neq v$, и при этом четверка (d, t, u, v) такова, что:

I. Точка d_t инцидентна в точности двум собственным прямым L_1 и L_2 конфигурации d .

2. $c_u, c_v \in \overline{S}_d(d_t)$

3. c_u, c_v инцидентны L_1 и отделены друг от друга прямой L_2 в $\overline{S}_d(d_t)$. Тогда $t_0(d) \approx t_0(ex_t(d)) = Ex_t(t_0(d))$ /см. рис. 13/. □

2.4. Еще три инвариантные перестройки, индуцированные предыдущими.

2.4.I. Введем полезный инвариант матроида - комбинаторную коразмерность.

Для матроида $A \subset \mathcal{M}(S)$ положим $\mathrm{codim}(A) = \sum_{\ell \in \mathcal{L}(A)} |\ell| - 2|\mathcal{L}(A)|$ /$|\ |$ здесь, как и всюду, обозначает мощность множества/. /Ср. [10] стр. 118/

Для конфигурации $c \in \mathcal{B}c(S)$ положим, естественно, $\mathrm{codim}(c) = \mathrm{codim}(m(c))$. С помощью коразмерности удобно оценивать степень близости матроида к грубой комбинаторной геометрии / $\mathrm{codim}(A) = 0$ тогда и только тогда, когда $A = R(S)$ /.

Кроме того, нетрудно показать, что $\mathrm{codim}(A)$ является хорошей верхней оценкой для коразмерности подмногообразий $\mathcal{J}\ell(A)$ и $\mathcal{J}\ell_0(A)$ в пространстве $\mathcal{B}c(S)$ /нам, однако, это не пригодится/.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.2.4.I. Пусть $c \in \mathcal{B}c(S)$, $c = \{c_i\}_{i \in S}$, $t \in S \setminus I$, пара (c, t) удовлетворяет условию: точка c_t инцидентна в точности двум собственным прямым L_1 , L_2 конфигурации c . Пусть u, v - новые индексы, $u, v \notin S$. Тогда на плоскости найдутся точки c_u , c_v такие, что конфигурация $c' = (c \setminus c_t) \cup \{c_u, c_v\} \in \mathcal{B}c\{(S \setminus t) \cup (u, v)\}$ удовлетворяет следующим условиям:

а/ точки c_u, c_v полугрубы в c^1,

б/ $to(c^1) \approx to(c)$,

в/ $codim(c^1) = codim(c)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Выберем точку c_u таким образом, что:

1. $c_u \in S_c(c_t)$,

2. $c_u \in \ell_u(L_1)$

3. $c_u \neq c_t$ /рис. 14.2/. Такая точка всегда найдется, поскольку $S_c(c_t)$ - открыто, $L_1 \cap S_c(c_t) \neq \emptyset$. Рассмотрим конфигурацию $c^1 = c \cup c_u$. Из определения $S_c(c_t)$ следует, что точка c_u полугруба в c^1 и тройка (c^1, u, t) удовлетворяет условиям предложения 3.2.3.2. /рис. 14.1; 14.2/ Следовательно, $to(c^1) \approx to(c)$.

Выберем точку c_v такую, что:

1. $c_v \in \ell_u(L_1)$

2. $c_v \in S_{c^1}(c_t)$

3. $c_v \neq c_t$

4. c_v отделена от c_u прямой $\ell_u(L_1)$ в $\overline{S}_{c^1}(c_t)$. /рис. 14.3/.

Положим $c^2 = c^1 \cup c_v$. Такая точка всегда найдется и она полугруба в конфигурации c^2. Тройка (c^2, v, t) удовлетворяет условиям предложения 3.2.3.2, следовательно, $to(c^2) \approx to(c^1) \approx to(c)$. Но четверка (c^2, t, u, v) удовлетворяет условию предложения 3.2.3.4 /рис. 14.4, 14.5/, следовательно, для $c^1 = c^2 \setminus c_t$: $to(c^1) \approx to(c^2) \approx to(c)$.

2.4.2. ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.2.4.2. Пусть $c \in \mathcal{B}c(S)$, $t \in S \setminus I$, пара (c, t) удовлетворяет следующему условию: c_t - полугруба в c /т.е. инцидентна единственной собственной прямой L /. Возьмем u, v - новые индексы: $u, v \in S$. Тогда найдутся точки c_u, c_v такие, что конфигурация $c^1 = (c \setminus c_t) \cup \{c_u, c_t\} \in \mathcal{B}c((S \setminus t) \cup \{u, v\})$ удовлетворяет условиям:

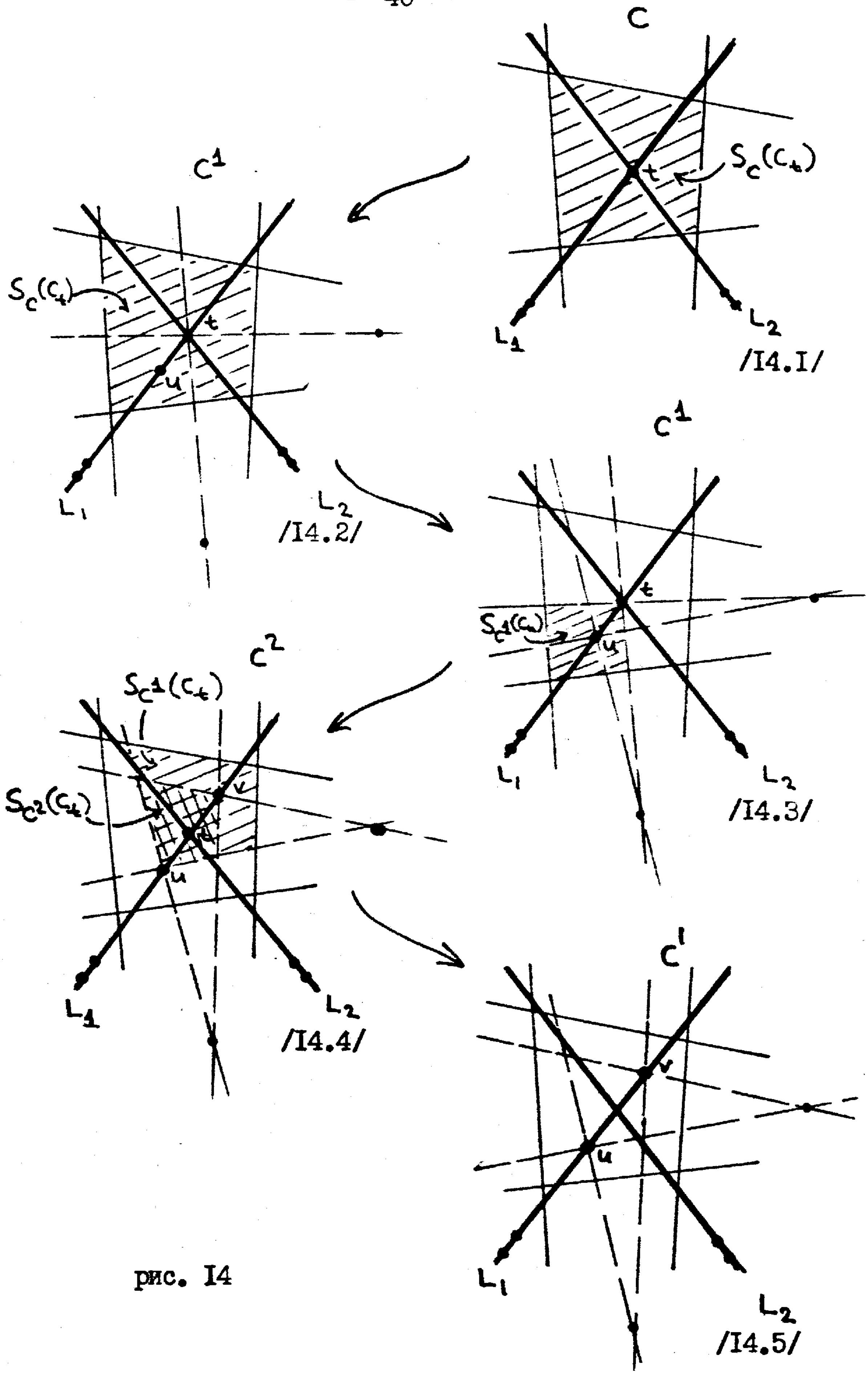

C
$S_c(c_t)$
t
L_1
L_2
/I4.I/
C^1
$S_c(c_t)$
t
u
L_1
L_2
/I4.2/
C^1
$S_{C^1}(c_u)$
t
u
L_1
L_2
/I4.3/
C^2
$S_{C^1}(c_t)$
$S_{C^2}(c_t)$
v
u
L_1
L_2
/I4.4/
C^1
v
u
L_1
L_2
/I4.5/

рис. I4

г/ Точки c_u, c_v грубы в c',

д/ $to(c') \approx to(c)$

е/ $codim(c') = codim(c) - 1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Заметим сразу, что свойство е/ есть следствие определения c' и г/. Выберем точку $c_u \in S_c(c_t)$ такую, что c_u груба по отношению к c. Такая найдется, поскольку множество негрубых точек ~~замкнуто~~ алгебраически замкнуто в $S_c(c_t)$ /см. рис. 15.I/. Положим, $c^1 = c \cup c_u$. Тройка (c^1, u, t) удовлетворяет условиям предложения 3,2.3.I /рис. 15.2/ следовательно, $to(c^1) \approx to(c)$.

Выберем точку $c_v \in S_{c^1}(c_t)$ так, чтобы c_v была груба по отношению к c^1, c_v отделялась от c_u прямой $\ell_{u}(t)$. /Рис. 15.3/

Положим, $c^2 = c^1 \cup c_v$. Тройка (c^2, v, t) удовлетворяет условиям предложения 3,2.3.I. Следовательно, $to(c^2) \approx to(c^1) \approx to(c)$.

В то же время четверка (c^2, t, v, u) удовлетворяет условиям предложения 3,2.3.3 /рис. 12 / и, поэтому, для $c' = c^2 \setminus c_t$ $to(c') \approx to(c) \approx to(c)$. □

2.4.3. ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3,2.4.3. Пусть $c \in \mathcal{C}(S)$, $t \in S \setminus t$, пара (c, t) удовлетворяет условию предложения 3,2.4.I. Пусть k, ℓ, m, n - новые индексы, $k, \ell, m, n \notin S$. Тогда найдутся точки c_k, c_ℓ, c_m, c_n такие, что конфигурация $c' = (c \setminus c_t) \cup \{c_k, c_\ell, c_m, c_n\}$ удовлетворяет условиям:

ж/ точки c_k, c_ℓ, c_m, c_n грубы в c',

з/ $to(c') \approx to(c)$,

и/ $codim(c') = codim(c) - 2$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно предложению 3,2.4.I, найдутся точки c_u и c_v, $u, v \in S$, такие, что для $c^1 = c \setminus c_t$ выполнены условия а/, б/, в/, предложения 3,2.4.I.

После этого пара (c^1, u) удовлетворяет условиям предложения 3,2.4.2 и, следовательно, найдутся c_k, c_ℓ такие, что для $c^2 = (c^1 \setminus c_u) \cup \{c_k, c_\ell\}$ верно: c_k, c_ℓ - грубы в

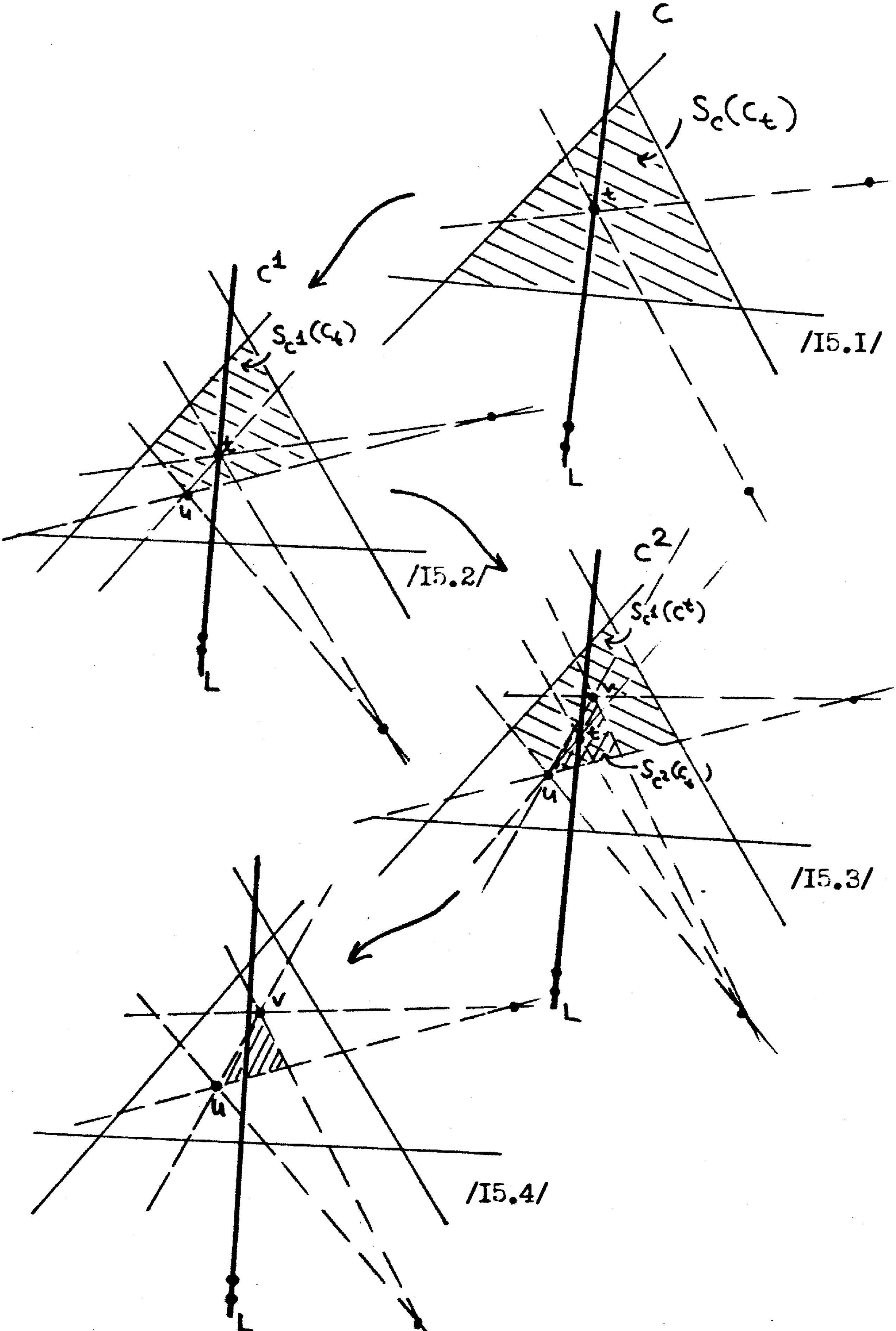


рис. I5

$to(c^2) \approx to(c^1) \approx to(c)$, $codim(c^2) = codim(c^1) - 1 =$
$= codim(c) - 1$

Далее, пара (c^2, v) удовлетворяет условиям предложения 3,2.4.2, следовательно, найдутся C_m, C_n такие, что для $c' = (c^2 \setminus C_n) \cup (C_m, C_n)$ верно: C_m, C_n – грубы в C'; $to(c') \approx to(c^2) \approx to(c)$; $codim(c') =$
$= codim(c^2) - 1 = codim(c) - 2$

3°. Эквивалентность полусвободных ориентированных комбинаторных типов грубым.

3.I. ЛЕММА 3,3.I.

I. Для всякого полусвободного ориентированного комбинаторного типа базисных конфигураций $\alpha \in T\mathcal{B}_0(S)$ найдется множество индексов T и грубый ор.к.тип базисных конфигураций $\beta \in R\mathcal{B}_0(T)$ такой, что $\alpha \approx \beta$.

2. Предположим, что $M(\alpha) = A \in \mu(S)$, $I \subset J \subset S$, J – основание A, удовлетворяющее требованиям определения I.5, т.е. любая собственная к.точка геометрии A_J /за исключением, быть может, к.точек из I / – полугруба, и A – свободное расширение A_J.

Тогда, для мощности множества T имеет место оценка:

$$|T| \leq 3|S| + \sum_{\ell \in \mathcal{L}(A_J)} |\ell| - 2|\mathcal{L}(A_J)| .$$

Доказательство леммы индуктивно по $codim\, A = \sum_{\ell \in \mathcal{L}(A)} |\ell| - 2|\mathcal{L}(A)|$. Заметим, что поскольку $|\ell| \geq 2$, условие $codim(A) = 0$ означает, что $|\ell| = 2$ для всякой к.прямой $\ell \in \mathcal{L}(A)$ и, следовательно, $A = R(S)$ – грубая к.геометрия.

В случае, когда $codim(A) > 0$ мы покажем, как по α построить к.тип α' такой, что $\alpha' \approx \alpha$, α' сам удовлетворяет условиям леммы, $\operatorname{codim}(\alpha') < \operatorname{codim}(\alpha)$. Возникает, таким образом, конечный алгорифм, строящий по α грубый ор.к.тип β, удовлетворяющий утверждению леммы.

Пусть $\prec$ – строгий порядок на $S \setminus I$, из определения 3,I.3 продолжим его как-нибудь на J так, чтобы всякий элемент из $I \subset J$ оказался меньше произвольного элемента из $J \setminus I$ и любой элемент J оказался меньше любого элемента $S \setminus J$. Пусть m – максимальный элемент S в смысле $\prec$.

Рассмотрим два случая:

I. $\operatorname{codim}(A) > 0$ и $m \in S \setminus J$. Возьмем какую-нибудь конфигурацию $c \in \alpha$. В соответствии с определением 3,I.3, точка c_m инцидентна ровно двум собственным прямым конфигурации c. Следовательно, пара (c, c_m) удовлетворяет условиям предположения 3,2.4.3 т.е. найдутся точки $(c_{i_1}, c_{i_2}, c_{i_3}, c_{i_4})$ / $i_1, i_2, i_3, i_4 \notin S$ / такие, что конфигурация $c' = (ex_m(c)) \cup \{c_{i_1}, c_{i_2}, c_{i_3}, c_{i_4}\} \in$ $\mathcal{B}c(S \setminus t) \cup \{i_1, i_2, i_3, i_4\}$ удовлетворяет следующим условиям:

$to(c') \approx to(c) \approx \alpha$, $\operatorname{codim}(c') = \operatorname{codim}(c) - 2 =$
$= \operatorname{codim}(A) - 2$,

точки $c_{i_1}, c_{i_2}, c_{i_3}, c_{i_4}$ - грубы в c'. По замечанию из 3,I.4 $m(c') \in \mu(S \cup \{i_1, i_2, i_3, i_4\})$ - полусвободная геометрия с базой $J \cup \{i_1, i_2, i_3, i_4\}$.

2. $\operatorname{codim}(A) > 0$ и $m \in J$, тогда в соответствии с 3,I.3 $J = S$ и, значит, $S \setminus I$ содержит только грубые и полугрубые к.точки. Если $S \setminus I$ содержит только грубые к.точки, то к.точки из I также грубы /поскольку находятся в общем положении по определению/, $\operatorname{codim}(A) = 0$. Таким образом, в данном случае $S \setminus I$ содержит полугрубую к.точку m. Возьмем $c = \{c_i\}_{i \in S} \in \alpha$. Пара (c, c_m) удовлетворяет условию предложения 3,2.4.2. Следовательно, найдутся точки $c_u, c_v\ (u, v) \notin S$ такие, что конфигурация $c' = (ex_m(c)) \cup \{c_u, c_v\}$ удовлетворяет усло-

виям: C_u, C_v - грубы в C', $to(C') \simeq to(C)$, $\operatorname{codim}(m(C)) = \operatorname{codim}(A) - 1$. Геометрия $m(C')$ очевидным образом полусвободна.

Оценка получается тривиальным и рассмотром алгорифма.

§ 4. Схемы вычисления регулярных отображений.

1°. Свободная алгебра слов. 2°. Схемы вычисления элементов поля. 3°. Регулярные отображения и алгебраические множества. 4°. Схема вычисления рационального отображения, неприводимые схемы /формулы/.

5°. Комбинаторная стратификация пространства аргументов, связанная со схемой вычисления отображения регулярного отображения $F: \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^m$.

1°. Свободная алгебра слов. Пусть есть раз и навсегда зафиксированный набор бинарных операций $\mathfrak{F} = \{+, -, \times, :\}$ и какое-то множество $\mathcal{A}$. Определим алгебру $\mathfrak{M}(\mathcal{A})$ с операциями из $\mathfrak{F}$. /Тут "алгебра" в смысле универсальной алгебры/. Рассмотрим следующие множества слов в алфавите $\{\mathcal{A}, \mathfrak{F}, (,)\}$:

$\mathfrak{M}_1 = \mathcal{A}$, - "слова длины 1".

. . . .

$$\mathfrak{M}_i(\mathcal{A}) = \{(A \circ B) \mid A, B \in \bigcup_{j=1}^{i-1} \mathfrak{M}_j(\mathcal{A}),$$

причем A или $B \in \mathfrak{M}_{i-1}$; $\circ \in \mathfrak{F}\}$ -"слова длины i".

. . . .

На множестве $\mathfrak{M}(\mathcal{A}) = \bigcup_{i=1}^{\infty} \mathfrak{M}_i(\mathcal{A})$ операции определяются естественно: $\circ(C, D) = (C \circ D)$, для любых $\circ \in \mathfrak{F}$, $C, D \in \mathfrak{M}(\mathcal{A})$.

Получившаяся алгебра $\mathfrak{M}(\mathcal{A})$ есть "свободная алгебра слов" /см. [2] /.

необходимые атрибуты $\mathfrak{M}(\mathcal{A})$ таковы: для всякого $A \in \mathfrak{M}(\mathcal{A})$

множество всех элементов $\mathfrak{A}(\mathcal{A})$, являющихся подсловами слова A обозначим $Sw(A)$. Положим $Sw_i(\mathcal{A}) = Sw(A) \cap \mathfrak{A}_i(\mathcal{A})$. Каждому $A \in \mathfrak{A}(\mathcal{A})$ соответствует единственная тройка $(A_\ell, A_r, \underset{A}{\circ})$, где $A_\ell, A_r \in Sw(A), \underset{A}{\circ} \in \mathfrak{F}$ такая, что $A = (A_\ell \underset{A}{\circ} A_r)$. На $\mathfrak{A}(\mathcal{A})$ есть два естественных порядка: линейный порядок по длине слов и частичный строгий порядок по включению в качестве подслова /порядок по "росту слов"/.

2^0. Схемы вычисления элементов поля. Рассмотрим поле $\mathbb{F}$ как универсальную алгебру с операциями из $\mathfrak{F} = \{+, -, \times, :\}$, удовлетворяющими стандартным аксиомам. Присоединим к полю несобственный элемент $\{\infty\}$ и формально продолжим операции на $\mathbb{F} \cup \{\infty\}$. Полагаем $a : 0 = a \circ \infty = \infty \circ a = \infty$ для всех $a \in \mathbb{F} \cup \{\infty\}$, $\circ \in \mathfrak{F}$.

Пусть $\mathcal{A} \subset \mathbb{F}$. Рассмотрим алгебру $\mathfrak{A}(\mathcal{A})$ и естественное отображение $\sigma : \mathfrak{A}(\mathcal{A}) \to \mathbb{F} \cup \{\infty\}$. Для $A \in \mathfrak{A}_1(\mathcal{A})$ положим $A^\sigma = A$. Для $A \in \mathfrak{A}_i(\mathcal{A})$, $A = (A_\ell \circ A_r)$ положим $A^\sigma = A_\ell^\sigma \underset{A}{\circ} A_r^\sigma$. Элементы множества $\mathfrak{S}(A) = \mathbb{F}^{(\sigma^{-1})} \subset \mathfrak{A}(\mathcal{A})$ будем называть схемами вычисления элементов поля $\mathbb{F}$ в алгебре $\mathfrak{A}(\mathcal{A})$. Для $f \in \mathbb{F}$ элементы множества $f^{(\sigma^{-1})} \subset \mathfrak{S}(\mathcal{A})$ будем называть схемами вычисления f в $\mathfrak{A}(\mathcal{A})$. Схеме $A \in \mathfrak{S}(\mathcal{A})$ сопоставим, кроме множества $Sw(A)$ множество $SF(A) = Sw^\sigma(A) \subset \mathbb{F}$.

3^0. Регулярные отображения и алгебраические множества. Элементарные полуалгебраические множества. Пусть $\mathbb{F} \subset \mathbb{G}$ – бесконечные поля характеристики 0. Кольцо регулярных функций $p : \mathbb{G}^k \to \mathbb{G}$, заданных полиномами из $\mathbb{F}[x_1, \dots, x_k]$ обозначаем $\mathbb{G}_{\mathbb{F}}[x_1, \dots, x_k]$. Поле рациональных функций $\varphi : \mathbb{G}^k \to \mathbb{G}$, заданных элементами $\mathbb{F}(x_1, \dots, x_k)$ обозначаем $\mathbb{G}_{\mathbb{F}}(x_1, \dots, x_k)$. Всегда считаем фиксированным стандартное вложение $\mathbb{G}_{\mathbb{F}}[x_1, \dots, x_k] \hookrightarrow \mathbb{G}_{\mathbb{F}}(x_1, \dots, x_k)$. Множества регулярных и рациональных отображений $\mathbb{G}^k \to \mathbb{G}^m$, заданных над $\mathbb{F}$ обозначаем $\mathbb{G}^m_{\mathbb{F}}[x_1, \dots, x_k]$ и $\mathbb{G}^m_{\mathbb{F}}(x_1, \dots, x_k)$ соответственно.

Пусть $H \in G^m_{\mathbb{F}}[X_1, \ldots, X_k]$,
$H = (H_1, \ldots, H_m)$;

Обозначим через H_0 аффинное алгебраическое множество:
$\{x \mid x \in \mathbb{F}^k,\ H^i(x) = 0 \text{ при } i \in \overline{1:m}\}$

Кроме того, если $\mathbb{F} \subset G$ - упорядоченные поля, то для всякого $J \subset \overline{1:m}$ обозначим через H_+^J элементарное полуалгебраическое множество $\{x \mid x \in G^k,\ H_i(x) = 0 \text{ при } i \in J,\ H_i(x) > 0$ при $i \in \overline{1:m} \setminus J\}$.

4°. Схема вычисления рационального отображения, неприводимые схемы /формулы/

4.1. Пусть $H = (H_1, \ldots, H_m) \in \mathbb{F}^m(X_1, \ldots, X_k)$, $\mathcal{A} \subset \mathbb{F}(X_1, \ldots, X_k)$. Набор слов $A = (A_1, \ldots, A_m) \in \mathfrak{N}^m(\mathcal{A})$ назовем схемой вычисления H в алгебре $\mathfrak{N}(\mathcal{A})$, если A_i - схема вычисления H_i в $\mathfrak{N}(\mathcal{A})$ /см. п. 2°/. Для $A \in \mathfrak{N}^m(\mathcal{A})$ положим $SW(A) = \bigcup_{i=1}^{m} SW(A_i) \subset \mathfrak{N}(\mathcal{A})$, $SF(A) = (SF(A))^{\sigma} = \bigcup_{i=1}^{m} SF(A_i) \subset \mathbb{F}(X_1, \ldots, X_k)$. Определение схемы вычисления рационального отображения получаем отождествлением $G^m_{\mathbb{F}}(X_1, \ldots, X_k)$ с $\mathbb{F}(X_1, \ldots, X_k)$.

4.2. Говорим, что схема вычисления A рационального отображения H неприводима, если для любых слов $B, C \in SW(A)$: $B^{\sigma} \neq C^{\sigma}$, т.е. $\sigma : SW(\mathcal{A}) \to SF(\mathcal{A})$ - биекция. /Такую схему иногда называют "формулой"/[8]//.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4,4.2. Для любого рационального отображения $H \in G^m_{\mathbb{F}}(X_1, \ldots, X_k)$ и любой его схемы вычисления Φ в $\mathfrak{N}(\mathcal{A})$ найдутся h, отображение $L \in G^h_{\mathbb{F}}(X_1, \ldots, X_k)$ и его схема вычисления Ψ в $\mathfrak{N}(\mathcal{A})$ такие, что $SF(\Psi) = SF(\Phi)$ и Ψ - неприводима.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим отображение $H^{\Phi} : G^k \to G^{SF(\Phi)}$: $H^{\Phi}_f(X_1, \ldots, X_k) = f(X_1, \ldots, X_k)$ при всех $f \in SF(\Phi)$. Построим для H^{φ} неприводимую схему вычисления $\widetilde{\Phi} \in \mathcal{O}\mathcal{l}^{SF(\Phi)}(\mathcal{A})$

Положим: $SF = SF(\Phi)$, $Sw = Sw(\Phi)$. Возьмем какое-нибудь сечение $\mu : SF \to Sw$ отображения $\sigma : Sw \to SF$, т.е. $\sigma \circ \mu = id_{SF}$. Тогда, каждому $f \in SF$ можно единственным образом сопоставить тройку (f_e, f_r, o_f) : $f_e = \sigma((\mu f)_e)$, $f_r = \sigma((\mu f)_r)$, $o_f = o_{\mu(f)} \in \{+, \times, -, :\}$. Очевидно, что $f = \sigma(\mu(f)) = \sigma((\mu f_e) c_{\mu f} (\mu f_r))$ $f_e \, c_f \, f_r$. Положим $U = \mu(SF) \subset SW$, $SF_i = \sigma(U \cap \mathcal{O}\mathcal{l}_i(\mathcal{A}))$ $SF_i \cap SF_j = \emptyset$ при $i \neq j$ в силу биективности σ на U. Тогда $SF_1 = SF \cap \mathcal{A}$.

Положим для $f \in SF_1$: $\widetilde{\varphi}_f = f \in \mathcal{A}$,

- -

- ,

для $f \in SF_i$: $\widetilde{\varphi}_f = (\widetilde{\varphi}_{f_e} \, c_f \, \widetilde{\varphi}_{f_r}) \in \mathcal{O}\mathcal{l}_i(\mathcal{A})$,

- -

Очевидно, что схема $\widetilde{\Phi} = \{\widetilde{\varphi}_f\}_{f \in SF}$ отображения H^{φ} удовлетворяет утверждению предложения, т.е. $SF(\widetilde{\Phi}) = SF$ и $\widetilde{\Phi}$ – неприводима. □

4.3. СЛЕДСТВИЕ. Если рациональное отображение $H \in \mathbb{G}^m(x_1, \dots, x_k)$ обладает схемой вычисления в $\mathcal{O}\mathcal{l}(\mathcal{A})$, то оно обладает неприводимой схемой вычисления в $\mathcal{O}\mathcal{l}(\mathcal{A})$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $H = (H_1, \dots H_m)$. Возьмем отображение H^{φ} и его схему вычисления $\widetilde{\Phi}$ из доказательства предложения для какой-нибудь схемы вычисления Φ отображения H, $\Phi \in \mathcal{O}\mathcal{l}^m(\mathcal{A})$.

В качестве схемы возьмем $(\widetilde{\varphi}_{H_1}, \dots, \widetilde{\varphi}_{H_m}) \in \mathcal{O}\mathcal{l}^m(\mathcal{A})$. □

5°. Комбинаторная стратификация пространства аргументов, связанная со схемой вычисления регулярного отображения. В данном пункте мы интересуемся случаем $\mathbb{G} = \mathbb{R}$, $\mathbb{F} = \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$.

Пусть $H = (H_1, \dots, H_m) \in \mathbb{R}^m_{\mathbb{Q}}[x_1, \dots, x_k]$ т.е. H – регулярное отображение $\mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^m$, заданное над $\mathbb{Q}$. Пусть

$\mathcal{A} \subset \mathbb{R}_{\mathbb{Q}}[x_1,\dots,x_k]$, $A \in \mathfrak{M}^m(\mathcal{A})$ — схема вычисления отображения H в $\mathfrak{M}(\mathcal{A})$. Рассмотрим множество $\mathrm{reg}(A) \subset \mathbb{R}^k$: $\mathrm{reg}\,A = \{x \mid x \in \mathbb{R}^k$, все функции из $SF(A)$ регулярны в точке $x\}$.

Пусть $\Theta(A)$ — множество всевозможных линейных порядков на $SF(A)$.

Каждой точке $x \in \mathrm{reg}(A)$ можно сопоставить линейный пяорядок $\mathrm{ord}(x) \in \Theta(A)$ естественным образом: для $f, g \in SF(A)$: $f \leq_{\mathrm{ord}(x)} g$ тогда и только тогда, когда $f(x) \leq g(x)$. Возникает отношение эквивалентности на $\mathrm{reg}\,A$: $x \underset{A}{\sim} y$ тогда и только тогда, когда $\mathrm{ord}(x) = \mathrm{ord}(y)$ или, что то же самое, $\mathrm{sign}\,(f(x)-g(x)) = \mathrm{sign}(f(y)-g(y))$ для любых $f, g \in SF(A)$.

Классы эквивалентности — элементарные алгебраические подмножества $\mathrm{reg}(A)$, заданные над $\mathbb{Q}$, составляют некоторую стратификацию $\Sigma(A)$ пространства $\mathrm{reg}(A)$.

Возникает треугольник отображений, аналогичный треугольникам § I.

$$
\begin{tikzcd}
\Theta(A) \arrow[r, shift left] & \Sigma(A) \arrow[l, shift left] \\
\mathrm{reg}\,A \arrow[u, "\mathrm{ord}"] \arrow[ur, "\mathrm{str}"'] &
\end{tikzcd}
$$

/Здесь str — отображение, ставящее в соответствие точке из $\mathrm{reg}\,A$ страт стратификации $\Sigma(A)$, в котором она лежит./ Страты $\Sigma(A)$, являющиеся открытыми подмножествами $\mathbb{R}^k$, называем грубыми. Очевидно, что грубым стратам соответствуют строгие линейные порядки в $\Theta(A)$.

§ 5. Сопоставление матроида схеме вычисления регулярного отображения.

1^0. Теорема Веблена-Юнга и построения Фон-Штаудта. 2^0. Основные свойства геометрий G^+, G^-, G^x, $G^:$ и отвечающих им множеств конфигураций; отображения P^+, P^-, P^x, $P^:$. 3^0. Определение матроида M^φ, отвечающего схеме φ вычисления регулярного отображения и свойства множества конфигураций Θ^φ. Изоморфизм P^φ. Неприводимые схемы и полусвободные геометрии./3.0. Неформальное описание. 3.1. Формальное определение./4^0. Техническое предложение.

1^0. Теорема Веблена-Юнга и построения Фон-Штаудта.

1.1. Рассмотрим наш фиксированный проективный базис $\{e_0, e_E, e_\infty, e_\lambda\}$ в $P^2_{\mathbb{R}}$. Теорема Веблена-Юнга о координатизации аксиоматической проективной плоскости/[29],[14]/позволяет ввести на точках прямой $L_{\mathbb{R}} \setminus e_\infty$ структуру поля $\mathbb{R}$ специфическим образом - с помощью построений сумм и произведений точек $L_{\mathbb{R}} \setminus e_\infty$, восходящих к"алгебре вурфов" Фон-Штаудта. Координатой точки $\ell \in L_{\mathbb{R}} \setminus e_\infty$ становится значение двойного отношения $R(\ell) = R(\ell, e_1, e_0, e_\infty)$ $/e_1 = ((e_0 \cdot e_E) \cap L_{\mathbb{R}})/$

Построения и им обратные доставляют нам четыре элементарные полусвободные комбинаторные геометрии G^+, G^x, G^-, $G^:$, соответствующие элементарным схемам вычисления $(x+y)$, $(x*y)$, $(x-y)$, $(x:y)$ /п. 1.2/. В п. 2^0 вводятся необходимые нам атрибуты этих геометрий: геометрии G^o, $o \in \{+,x,-,:\}$ отвечает к.род базисных конфигураций $\mathcal{F}^o = \mathcal{F}\ell(G^o)$ и выделенное открытое подмножество в нем Θ^o, составленное из целых ориентированных комбинаторных типов. Удобным инструментом исследования к.типов, составляющих Θ^o, является явно описываемый бирегулярный изоморфизм $P^{\circ}: \mathcal{H}^{\circ} \to \Theta^{\circ}$, где $\mathcal{H}^{\circ}$, с точностью до прямого сомножителя, есть пространство аргументов элементарного рационального отображения $\mathbb{R}^2 \xrightarrow{x \circ y} \mathbb{R}$.

I.2°. Рассмотрим к.геометрии: $G^{+} \in \mu(S^{+})$, представленную рис. I6; $G^{\times} \in \mu(S^{\times})$, представленную рис. I7; $G^{-} \in \mu(S^{-})$, представленную рис. I8, $G^{:} \in \mu(S^{:})$, представленную рис. I9. Здесь

$S^{+} = \{I, x, y, x+y, 1, A, B, C\}$, $S^{\times} = \{I, x, y, x \cdot y, 1, A, B, C, D\}$, $S^{-} = \{I, x, y, x-y, 1, A, B, C\}$

$S^{:} = \{I, x, y, x:y, 1, A, B, C, D\}$ — множества символов-к.точек наших геометрий. Эти геометрии полусвободны /п. I.5 § 4/, основанием всякий раз является $B = \{I, x, y, A\}$, порядок $\underset{\circ}{\leqslant}$ на $S^{\circ} \setminus B$ при $\circ \in \{+, -, \times, :\}$, требуемый определением полусвободной геометрии, указан на рисунках.

<u>2°. Основные свойства геометрий G^{+}, G^{-}, $G^{\times}$, $G^{:}$ и отвечающих им множеств конфигураций. Отображения P^{+}, P^{-}, $P^{\times}$, $P^{:}$</u>

В данном пункте все определения и свойства формулируются одновременно для $\circ = +, -, \times, :$. Особенности, касающиеся случая (:) выделяются в квадратных скобках.

2.I. Геометриям отвечают к.роды базисных конфигураций $\mathcal{F}\ell(G^{\circ})$. Положим $\Theta^{\circ} = \{c \mid c \in \mathcal{F}\ell(G^{\circ}), c_x, c_y \neq c_{\infty}, [c_y = c_{\infty}], c_A \neq c_{\alpha}, c_o\}$

Положим, кроме того, $\mathcal{H}^{+} = \mathcal{H}^{\times} = \mathcal{H}^{-} = \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^{*}$, $\mathcal{H}^{:} = \mathbb{R} \times (\mathbb{R}^{*})^2$.

Свойства Θ°, оправдывающие возможность введения структуры поля на $L_{\mathbb{R}} \setminus e_{\infty}$ с помощью построений таковы:

I. Для любых $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ $[x, y \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{*}]$ найдется конфигурация $c \in \Theta^{\circ}$ такая, что $R(c_x) = x$, $R(c_y) = y$ /см. п. I°/.

2. Для любой конфигурации $c \in \Theta^{\circ}$: $R(c_{x \circ y}) = R(c_x) \circ R(c_y)$.

Стандартные неоднородные координаты точки, лежащей на $L_{\mathbb{R}} \setminus e_{\infty}$, имеют вид $\binom{x}{1}$, $x \in \mathbb{R}$; заметим, что $R\left(\binom{x}{1}\right) = x$. Для точек, лежащих на $L_o \setminus e_{\alpha}$ и имеющих, следовательно, стандартные координаты ви-

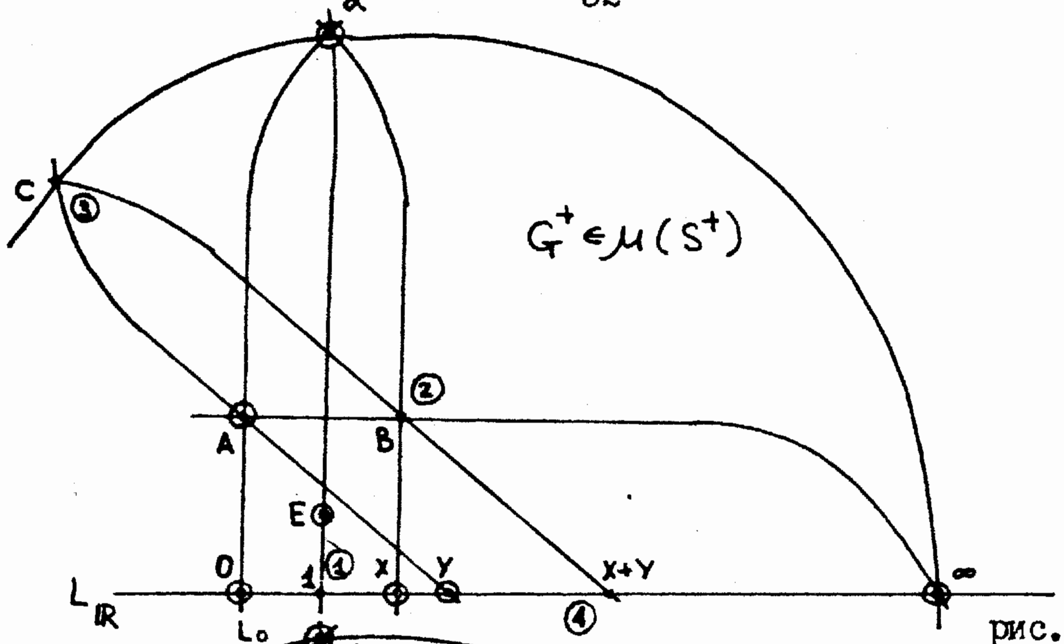


рис. I6

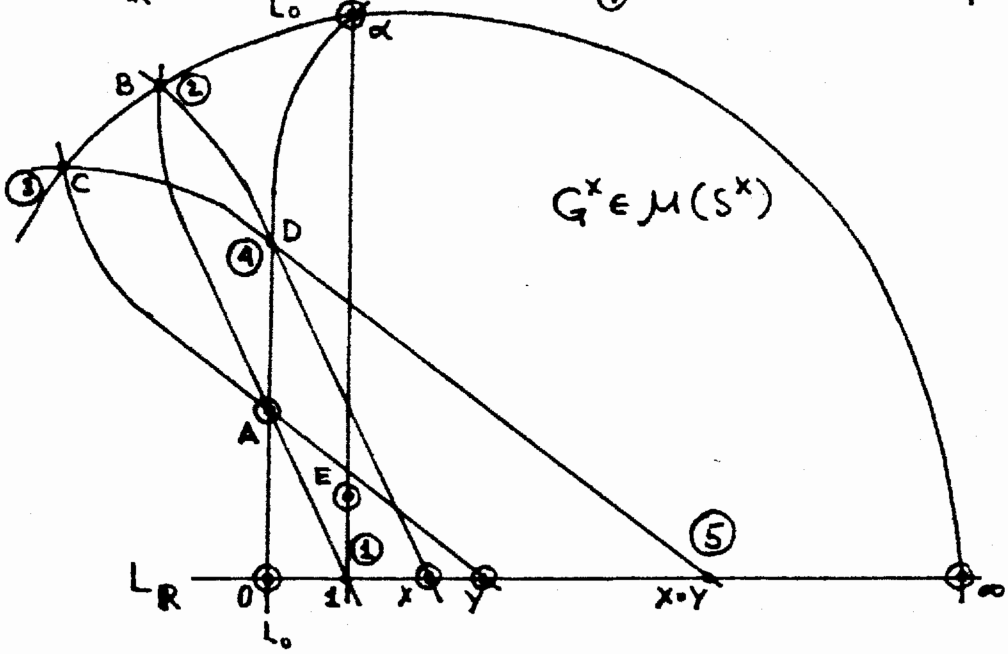


рис. I7

⊙ - точки базы геометрии

.① - порядок на точках, требуемый определением полусвободной геометрии.

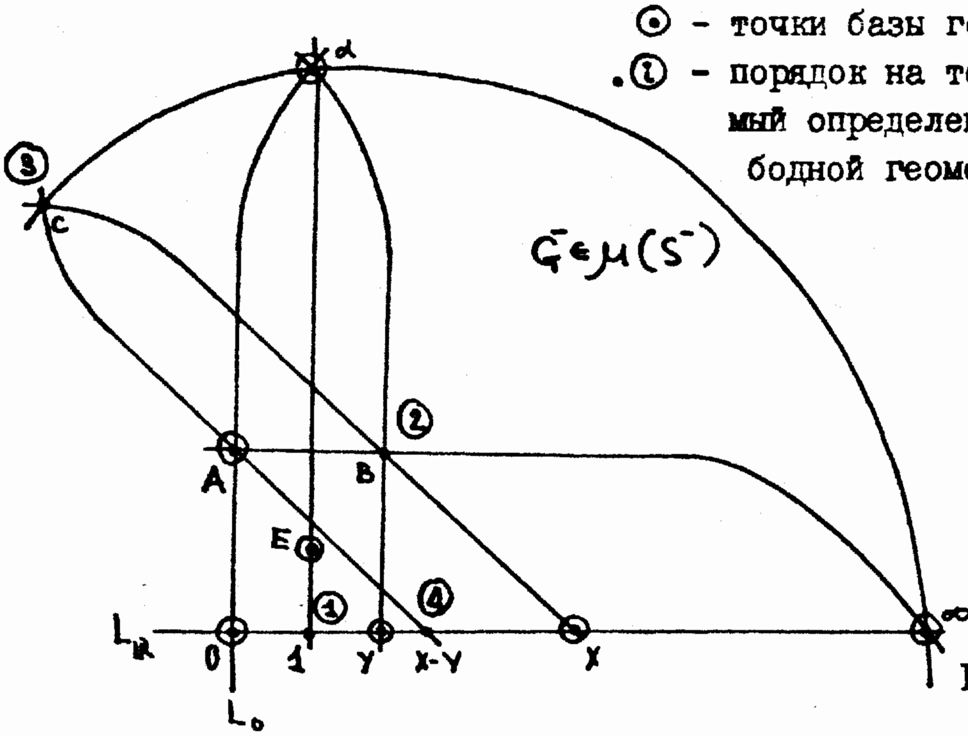


рис. I8

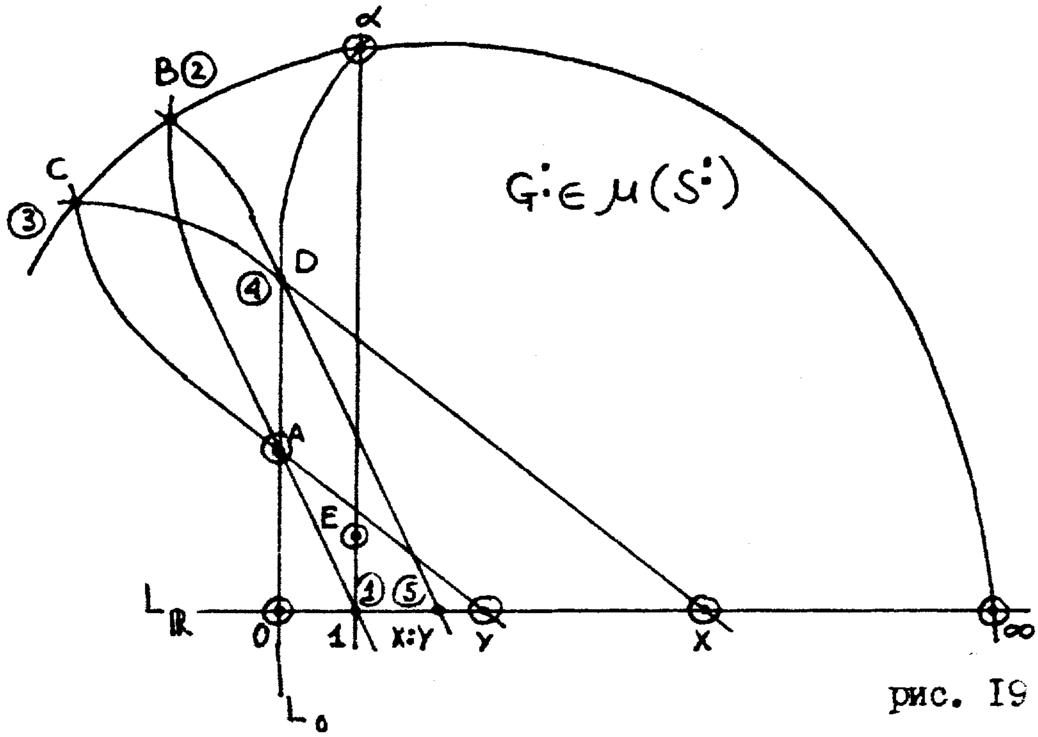


рис. I9

$\{P_i^o(x,y,a)\} =$

o \ i	∞	α	0	E	X	Y	1	(X∘Y)	A	B	C	D
+	1 0 0	0 1 0	0 0 1	1 1 1	x 0 1	y 0 1	1 0 1	$x+y$ 0 1	0 a 1	x a 1	$-\frac{y}{a}$ 1 0	
−	-‖-	-‖-	-‖-	-‖-	-‖-	-‖-	-‖-	$x-y$ 0 1	0 a 1	y a 1	$\frac{y-x}{a}$ 1 0	
×	-‖-	-‖-	-‖-	-‖-	-‖-	-‖-	-‖-	$x\cdot y$ 0 1	0 a 1	$-\frac{1}{a}$ 1 0	$-\frac{y}{a}$ 1 0	0 $a\cdot x$ 1
:	-‖-	-‖-	-‖-	-‖-	-‖-	-‖-	-‖-	$\frac{x}{y}$ 0 1	0 a 1	$-\frac{1}{a}$ 1 0	$-\frac{y}{a}$ 1 0	0 $a\cdot\frac{x}{y}$ 1

табл. I

да $\binom{0}{a}{}_1$, положим, по определению, $R\left(\binom{0}{a}{}_1\right)=a$.

2.2. Свойства I,2 геометрии G^0 объясняются справедливостью следующего, нужного нам, предложения:

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5,2.2. Для любой конфигурации $c\in\Theta^0$ **стандартные координаты** c_i, $i\in S^0$ **есть функции от** $R(c_x)$, $R(c_y)$, $R(c_A)$, представленные на таблице I. Точнее, всякому $i\in S^0$ соответствует отображение $P_i^c:\mathcal{H}^c\to P^2_{\mathbb{R}}$ такое, что для любой конфигурации $c\in\Theta^0$: $c_i=P_i^0(R(c_x),R(c_y),R(c_A))$ при всех $i\in S^0$.

Кроме того, отображение $P^0:\mathcal{H}^0\to \mathcal{C}c(S^0)$, $P^0=\{P_i^0\}_{i\in S^0}$ доставляет бирегулярный изоморфизм между $\mathcal{H}^0$ и Θ^c. □

2.3. Рассмотрим конфигурацию $c\in\Theta^0$, $o\in\{+,-,\times,:\}$. Пусть $c=P^0(x,y,a)$, где a - трансцендентно над $\mathbb{Q}(x,y)$. Конфигурация c, вообще говоря, может содержать кратные точки.

Положим для $i,j\in S^0$: $i\sim j$ тогда и только тогда, когда $c_i=c_j$. Пусть $\langle i\rangle$-класс эквивалентности индекса i, $\tilde S^0=S^0/\sim$. Рассмотрим конфигурацию $\tilde c\in \mathcal{C}c(\tilde S^0)$: $\tilde c_{\langle i\rangle}=c_i$ при $i\in S^0$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5,2.3. Конфигурация $\tilde c$ полусвободна с основанием $\langle B\rangle$ и порядком $\underset{0}{\leq}$ на $\tilde S^0\setminus\langle B\rangle$: $\langle i\rangle\underset{0}{\leq}\langle j\rangle$ тогда и только тогда, когда $i\underset{0}{\leq}j$.

3^0. Определение матроида, соответствующего схеме вычисления регулярного отображения и свойства отвечающего ему множества конфигураций.

3.0. Неформальное описание. Возьмем отображение $F:\mathbb{R}^k\to\mathbb{R}^m$ и его схему вычисления $\Phi\in\mathcal{O}l(o,x_1,\dots,x_k)$. Итерируя построение сумм, произведений, разности и частных в порядке роста подслов Φ, мы можем получить построение значений координатных функций отображения F исходя из набора точек с координатами $x_1,\dots,x_k$ на прямой $L_{\mathbb{R}}$. На каждом шаге, соответствующем подслову $\xi\in SW(\Phi)$, мы произвольным образом выбираем точку $a_\xi\in L_0\setminus\{e_0,e_\infty\}$ и получаем точку на $L_{\mathbb{R}}$ с координатой $f^{\sigma}(x_1,\dots,x_k)$ /независимо от выбора a_{ξ} /. Так мы доберемся до $F_1(x_1,\dots,x_k),\dots,F_m(x_1,\dots x_k)$.

Если взять $(x_1^*,\dots,x_k^*,\{a_{\xi}^*\}_{\xi\in Sw(\Phi)})$ алгебраически независимыми над $\mathbb{Q}$, то в результате построения возникает некоторая конфигурация, матроид M^{Φ} которой мы и хотим сопоставить Φ. Если схема Φ - неприводима, то полученная конфигурация окажется полусвободной /порядок на точках и прямых - естественный порядок построения/.

Матроиду M^{Φ} соответствует комбинаторный род базисных конфигураций $\mathcal{F}^{\Phi}$ и выделенное открытое подмножество в нем Θ^{Φ}, составленное из целых комбинаторных типов, которые мы и хотим изучать. Инструмент для этого доставляет бирегулярный изоморфизм $P^{\Phi}: \mathcal{H}^{\Phi} \to \Theta^{\Phi}$, естественно "склеенный" из отображений P° $\circ\in\{+,\times,-,:\}$ /п. 2° наст. §/. Здесь $\mathcal{H}^{\Phi}$, с точностью до прямого сомножителя, пространство аргументов отображения F. В следующем параграфе будет понято, что изоморфизм P^{Φ} фактически превращает стратификацию $\Sigma(\Phi)$ пространства $\mathbb{R}^K$ /см. 5° § 4/ в стратификацию Θ^{Φ} на ориентированные комбинаторные типы. Формальное же определение M^{Φ} и его атрибутов нам удобнее начать с построения специального множества символов S^{Φ}, которыми мы хотим помечать к.точки матроида /в него будут входить и подслова из $Sw(\Phi)$ для маркировки точек, приходящихся на прямую $L_{\mathbb{R}}$ /. Затем, мы явно выпишем отображение $P^{\Phi}: \mathcal{H}^{\Phi}\to \mathcal{B}c(S^{\Phi})$ через отображения P°, $\circ\in\{+,\times,-,:\}$ и определим M^{Φ} как общую точку этого отображения.

<u>3.I. Формальное определение.</u> Пусть $F\in\mathbb{R}^m_{\mathbb{Q}}[X_1,\dots,X_k]$ - регулярное отображение, заданное над $\mathbb{Q}$; Φ - схема вычисления F в $\mathcal{O}\!\mathcal{T}(0,1,X_1,\dots,X_k)$ /см. п. 4.I § 4/.

Положим $\overline{Sw}(\Phi) = Sw(\Phi)\setminus\{0,1,X_1,\dots,X_k\}$, положим $\overline{S}^{\circ}=S^{\circ}\setminus\{I,1,X,Y,X\circ Y\}$. Напомним, кроме того, что по определению схемы вычисления, каждому $f \in \overline{Sw}(\Phi)$ соответствует единственная тройка (f_ℓ, f_r, o_f), где $f_\ell, f_r \in Sw(\Phi)$, $o_f \in \{+,-,\times,:\}$ такая, что $f = (f_\ell \, o_f \, f_r)$ и, соответственно, $f^\sigma = (f_\ell)^\sigma o_f (f_r)^\sigma$.

Определим абстрактное множество символов S^Φ, на котором мы впоследствии введем структуру матроида, отвечающего Φ. Каждому $f \in \overline{Sw}(\Phi)$ сопоставим множество символов $S^f = \{f, \{(i,f)\}_{i \in \overline{S}^{c_f}}\}$. Положим $S^\Phi = \{I, 1, x_1, \ldots x_k, \bigcup_{f \in \overline{Sw}(\Phi)} S^f\}$.

Рассмотрим $\ell c(S^\Phi)$ и отображение $P^\Phi : \mathcal{H}^\Phi \to \ell c(S^\Phi)$, где $\mathcal{H}^\Phi = reg\, \Phi \times (\mathbb{R}^*)^{\overline{Sw}(\Phi)}$ /см. рис. 20/. Пусть $(\overline{X}, \overline{A}) = (x_1, \ldots x_k, \{A_f\}_{f \in \overline{Sw}})$ - переменный вектор над $\mathcal{H}^\Phi$.

Положим: $P_i^\Phi(\overline{x}, \overline{A}) \equiv e_i$

при $i \in I = \{0, \alpha, E, \infty\}$

$$P_f^\Phi(\overline{x}, \overline{A}) = \begin{bmatrix} f^\sigma(\overline{x}) \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \in L_{\mathbb{R}} \qquad \text{при } f \in Sw(\Phi) \setminus 0$$

$$P_{(i,f)}^\Phi(\overline{x}, \overline{A}) = P^{c_f}(f_\ell^\sigma(\overline{x}), f_r^\sigma(\overline{x}), A_f)$$

при $(i,f) \in \bigcup_{\mathfrak{k} \in \overline{Sw}(\Phi)} (S^{\mathfrak{k}} \setminus \mathfrak{k})$

/P^{c_f} определены таблицей I /см. предложение 5,2.2//. Возьмем точку $(\overline{x}^*, \overline{a}^*) \in \mathcal{H}^\Phi$ так, чтобы набор элементов $\mathbb{R}$ $(x_1^*, \ldots, x_k^*, \{a_f^*\}_{f \in \overline{Sw}(\Phi)})$ оказался алгебраически независимым над $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$.

Возьмем конфигурацию $c^* = P^\Phi(\overline{x}^*, \overline{a}^*) \in \ell c(S^\Phi)$. Схеме Φ сопоставим матроид $M^\Phi = m(c^*) \in \mathcal{M}(S^\Phi)$ /см. п. 5.I § I/. Впоследствии /Предложение 5,4.3/ будет показано, что определение M^Φ корректно и зависит только от Φ.

3,2. Для каждого слова $f \in \overline{Sw}(\Phi)$ рассмотрим диаграмму отображений D_f :

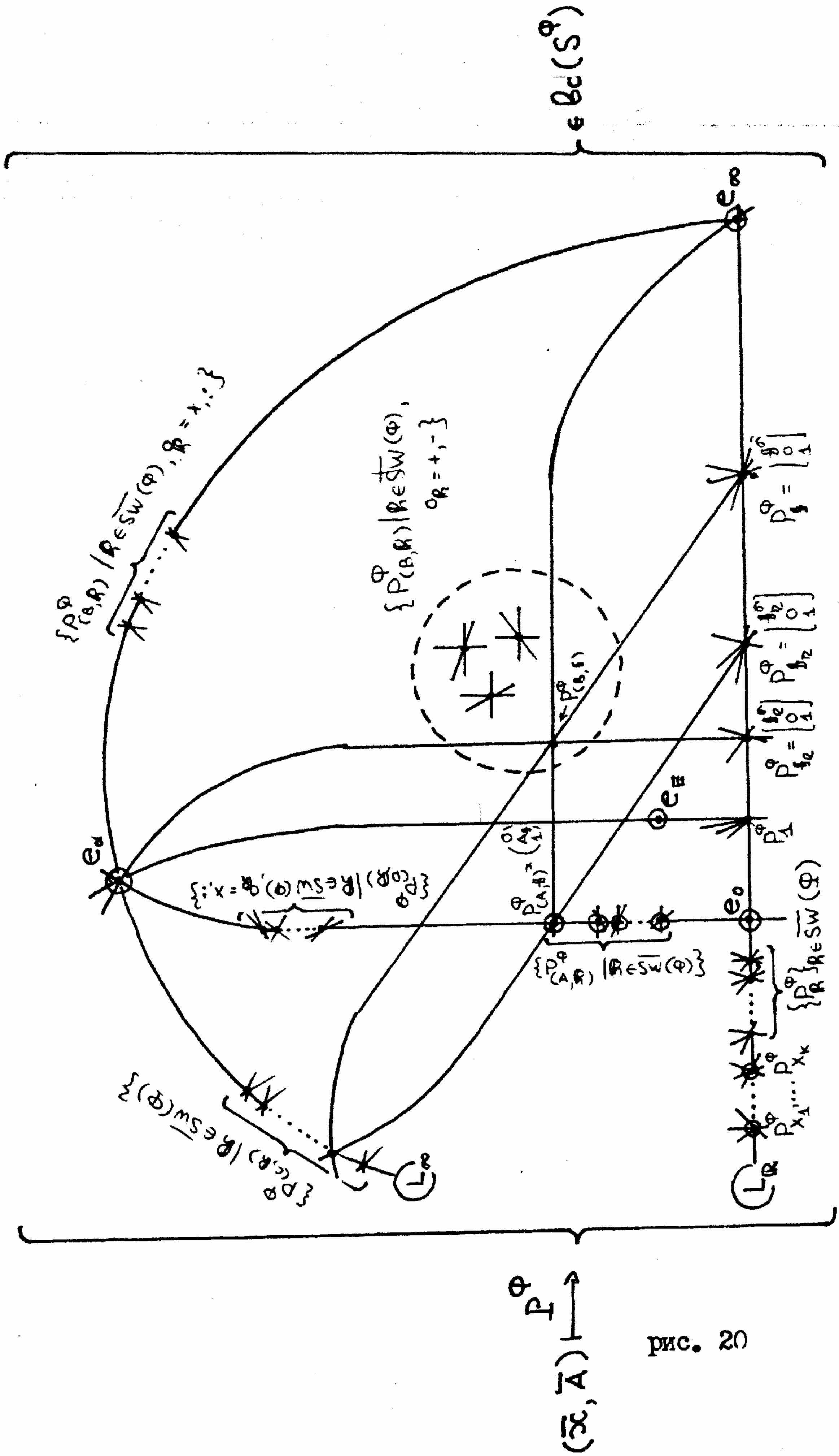


рис. 20

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{H}^{\varphi} & \xrightarrow{P^{\varphi}} & \mathcal{B}c\,(S^{\varphi}) \\ \downarrow{\scriptstyle \xi_f} & & \downarrow{\scriptstyle sub_f} \\ \mathcal{H}^{o_f} & \xrightarrow{P^{o_f}} & \mathcal{B}c\,(S^{o_f}) \end{array}$$

, где sub_f – отображение вырезания подконфигурации: для $c \in \mathcal{B}c\,(S^{\varphi})$

$(sub_f(c))_i = c_i = e_i$ при $i \in I$,

$(sub_f(c))_x = c_{f_\ell}$,

$(sub_f(c))_y = c_{f_2}$,

$(sub_f(c))_1 = c_1 = \binom{1}{1}$,

$(sub_f(c))_{x c_f y} = c_f$,

$(sub_f(c))_i = c_{(i,f)}$ при $i \in S^{o_f} \setminus \{x, y, x c_f y, 1, I\}$,

а $\xi_f(\bar{x}, \bar{A}) = (f_\ell^{\sigma}(\bar{x}), f_2^{\sigma}, A_f) \in \mathcal{H}^{o_f}$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5.3.2. Для каждого $f \in \overline{Sw}(\varphi)$ диаграмма D_f коммутативна.

Доказательство следует непосредственно из вида отображений P^{φ} и P^{o} при $o \in \{+, \times, -, :\}$. □

3.3. Рассмотрим комбинаторный род базисных конфигураций $\mathcal{F}^{\varphi} = \mathcal{F}_{\mathcal{B}}(M^{\varphi}) = \mathcal{F}_{\mathcal{B}}(c^*)$, соответствующий матроиду M^{φ} /см. п. 6° § I/ и Θ^{φ} – открытое по Зарисскому подмножество в $\mathcal{F}^{\varphi}$:

$\Theta^{\varphi} = \{c \in \mathcal{F}^{\varphi} \mid c_f \neq e_\infty$ при всех $f \in Sw(\varphi)$ и

$c_{(A,f)} \neq e_0, e_\alpha$ при всех $f \in \overline{Sw}(\varphi)\}$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5.3.3. а/ Θ^{φ} – объединение целых базисных к.типов; б/ для всякого $c \in \Theta^{\varphi}$, $f \in Sw(\varphi)$:

$R(c_f) = f^{\sigma}(R(c_{x_1}), \ldots, R(c_{x_k}))$.

в/ $im\, P^{\varphi} = \Theta^{\varphi}$, $P^{\varphi}: \mathcal{H}^{\varphi} \to \Theta^{\varphi}$ – бирегулярный изоморфизм и c^* – общая точка Θ^{φ} .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Утверждение а/ следует из определения Θ^{Φ}. Докажем б/. Возьмем $c \in \Theta^{\Phi}$, $\mathfrak{s} \in \overline{Sw}(\Phi)$. В силу коммутативности диаграммы $D_{\mathfrak{s}}$ и того обстоятельства, что $\mathrm{im}\, P^{O_{\mathfrak{s}}} = \Theta^{O_{\mathfrak{s}}}$ /Предложение 5.2.2/, имеем: $sub_{\mathfrak{s}}(c^{*}) \in \Theta^{O_{\mathfrak{s}}}$. Сравнивая определения $\Theta^{O_{\mathfrak{s}}}$ и Θ^{Φ} и то, что конфигурация $sub_{\mathfrak{s}}(c)$ лежит в комбинаторном роде $f\ell(sub_{\mathfrak{s}}(c^{*})) \subset \mathfrak{F}^{O_{\mathfrak{s}}}$ получаем, что $sub_{\mathfrak{s}}(c)$ так же лежит в $\Theta^{O_{\mathfrak{s}}}$. Следовательно, по Предложению 5.2.2, имеем: $R(c_{\mathfrak{s}}) = R(c_{\mathfrak{s}_{\ell}}) \circ_{\mathfrak{s}} R(c_{\mathfrak{s}_2})$. Далее, индукцией по росту подслов схемы Φ получаем б/.

Докажем в/. Покажем сначала, что $\Theta^{\Phi} \subset \mathrm{im}\, P^{\Phi}$. Возьмем $c, \mathfrak{s}$ - те же, что и в доказательстве б/. Совершенно аналогичными рассуждениями получаем, что для всякого индекса $(i, \mathfrak{s}) \in S^{\mathfrak{s}} \setminus \mathfrak{s}$:

$$c_{(i,\mathfrak{s})} = P_i^{O_{\mathfrak{s}}}\left(R(c_{\mathfrak{s}_{\ell}}), R(c_{\mathfrak{s}_2}), R(c_{(A,\mathfrak{s})})\right) =$$
$$= P_i^{O_{\mathfrak{s}}}\left(\mathfrak{s}_{\ell}^{\sigma}(R_{\bar{x}}(c)), \mathfrak{s}_2^{\sigma}(R_{\bar{x}}(c)), R(c_{(A,\mathfrak{s})})\right), \text{ где}$$
$$R_{\bar{x}}(c) = (R(c_{x_1}), \ldots, R(c_{x_k})).$$

Само утверждение б/ означает, что $c_{\mathfrak{s}} = \begin{bmatrix} \mathfrak{s}^{\sigma}(R_{\bar{x}}(c)) \\ \circ \\ 1 \end{bmatrix}$ и, кроме того, что $R_x(c) \in ug\,\Phi$. Стало быть, $(R_x(c), \{R(c_{(A,\mathfrak{s})})\}_{\mathfrak{s} \in \overline{Sw}(\Phi)}) = R(c) \in \mathcal{H}^{\Phi}$ и $c = P^{\Phi}(R(c)) \in \mathrm{im}\, P^{\Phi}$.

Покажем, что $\Theta^{\Phi} \supset \mathrm{im}\, P^{\Phi}$.

Рассмотрим $\check{S}^{\Phi} = S^{\Phi} \setminus (\{x_1, \ldots, x_k\} \cup \{(A, \mathfrak{s})\}_{\mathfrak{s} \in \overline{Sw}(\Phi)})$ и отображение $\check{P}^{\Phi}: \mathcal{H}^{\Phi} \to Bc(S^{\Phi}); \check{P}_i^{\Phi}(\bar{x}, \bar{A}) = P_i^{\Phi}(\bar{x}, \bar{A})$ при $i \in \check{S}^{\Phi}$.

Разложим P^{Φ} в коммутативную диаграмму:

$$\begin{tikzcd} \mathcal{H}^{\Phi} \arrow[r, "P^{\Phi}"] \arrow[dr, "\gamma"'] & Bc(S^{\Phi}) \\ & \mathcal{H}^{\Phi} \times Bc(\check{S}^{\Phi}) \arrow[u, "\xi"'] \end{tikzcd}$$

, где $\gamma(\bar{x}, \bar{A}) =$
$$= ((\bar{x}, \bar{A}), \check{P}^{\Phi}(\bar{x}, \bar{A}))$$

- канонический бирегулярный изоморфизм прообраза регулярного отображения $\check{P}^{\varphi}$ на его график, а ξ - мономорфизм:

$\xi_i((\bar{x},\bar{A}),d) = d_i$; при $i \in \check{S}^{\varphi}$

$\xi_{x_j}((\bar{x},\bar{A}),d) = \begin{bmatrix} x_j \\ c \\ 1 \end{bmatrix} = P^{\varphi}_{x_j}(\bar{x},\bar{A})$ при $j = 1,\dots,k$

$\xi_{(A,f)}((\bar{x},\bar{A}),d) = \begin{bmatrix} c \\ A_f \\ 1 \end{bmatrix} = P^{\varphi}_{(A,f)}(\bar{x},\bar{A})$ при $f \in \overline{Sw}(\Phi)$

Диаграмма коммутативна, а это означает, что $im(\gamma) =$ (график $(\check{P}^{\varphi})) \cong im\, P^{\varphi}$. Следовательно, $c^* \in im\, P^{\varphi}$ - общая точка $im\, P^{\varphi}$.

Отсюда получаем, что $c^* \in im\, P^{\varphi} \subset$ /алгебраическое замыкание c^* / $\subset \mathcal{F}^{\varphi}$, поскольку $\mathcal{F}^{\varphi}$ - замкнутое по Зарисскому множество в $G_i(S^{\varphi})$. Сравнивая P^{φ} и Θ^{φ} имеем: $im\, P^{\varphi} \subset \Theta^{\varphi}$. □

3.4. ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5.3.4. Если схема Φ неприводима, то матроид M^{φ} - полусвободная комбинаторная геометрия.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Неприводимость Φ означает, в частности, что для любых $f, g \in Sw(\Phi) : f^{\sigma}(x^*) \neq g^{\sigma}(x^*)$. Тривиальными рассмотрениями устанавливаются следующие факты:

I. Для $i,j \in S^{\varphi} : c^*_i \neq c^*_j$, если $i \neq j$; т.е. M^{φ} - комбинаторная геометрия. Положим $\overline{\overline{S}}^{f} = S^{f} \setminus (A,f)$. Положим $B = \{I, x_1,\dots x_k, \{(A,f)\}_{f \in \overline{Sw}(\Phi)}$ и $D = \{1, \bigcup_{f \in Sw(\Phi)} \overline{\overline{S}}^{f}\}$.

Тогда $S^{\varphi} = B \cup D$, $B \cap D = \varnothing$.

Введем на $\overline{Sw} \cup \{1\}$ линейный строгий порядок $\underset{w}{<}$, согласованный с естественным порядком по росту слов.

2. Пусть $i \in \overline{\overline{S}}^{f}$, i,j,k - попарно различны, $i,j,k \in B \cup \{1, \bigcup_{\substack{R \in \overline{Sw}(\Phi) \\ R \leq f}} \overline{\overline{S}}^{R}\}$. Тогда, из того обстоятельства, что c^*_i, c^*_j, c^*_k - коллинеарны, следует, что прямая $lin(c^*_i, c^*_j, c^*_k)$ является собственной прямой подконфигурации $\{c^*_i\}_{i \in \{I,1,f_1,f_2,S^f\}}$ /ср. с диаграммой D_5 из п. 4.2/.

Определим на множестве $\mathcal{Q}$ порядок $\underset{\varphi}{<}$. Положим: для $f,g \in \overline{Sw}(\Phi) \cup \{1\}$: $f \underset{\varphi}{<} g$ тогда и только тогда, когда $f \underset{w}{<} g$.

Положим: для любых $f, g \in \overline{Sw}(\varphi)$, любых $i \in \overline{\overline{S}}^{f}, j \in \overline{\overline{S}}^{g}$: $i \underset{\varphi}{\leq} j$ тогда и только тогда, когда $f \underset{\varphi}{\leq} g$. Положим, кроме того, для всякого $i \in \overline{\overline{S}}^{f}$, $i \neq f$: $i \underset{\varphi}{\leq} f$ и для любых $(i, f), (j, f) \in \overline{\overline{S}}^{f} \setminus f$ $(i, f) \underset{\varphi}{\leq} (j, f)$ тогда и только тогда, когда $i \underset{f}{\leq} j$.

Утверждения I, 2 в сочетании с предложением 5.3.2 показывают, что конфигурация C^* с порядком $\underset{\varphi}{\leq}$ на $D = S^{\varphi} \setminus B$ удовлетворяет определению I.3 § 3 и является свободным расширением своей подконфигурации C^*_B. C^*_B, очевидным образом удовлетворяет требованию к основанию в определении I.5 § 3 и, следовательно, M^{φ} является полусвободной геометрией с основанием B и порядком $\underset{\varphi}{\leq}$ на $S^{\varphi} \setminus B$. □

4°. Техническое предложение.

4.I. Немного поправим отображение P^o при $o \in \{+, -, \times, :\}$. Определим $\hat{P}^o : \mathcal{M}^o \to \mathcal{K}(S^o)$:

при $o \in \{+, -\}$ положим $\hat{P}^o_c(x, y, A) = A \cdot P^o_c(x, y, A)$

$$\hat{P}^o_i(x, y, A) = P^o_i(x, y, A) \text{ при } i \in S^o \setminus c$$

при $o \in \{\times, :\}$ положим $\hat{P}^o_i(x, y, A) = A \cdot P^o_i$ при $i = B, C$

$$\hat{P}^o_i(x, y, A) = P^o_i \text{ при } i \in S^o \setminus \{B, C\}$$

/см. табл. I/.

Определим отображение $\hat{P}^{\varphi} : \mathcal{M}^{\varphi} \to \mathcal{K}(S^{\varphi})$:

$$\hat{P}^{\varphi}_i(\bar{x}, \bar{A}) = P^{\varphi}_i(\bar{x}, \bar{A}) \quad \text{при } i \in I \cup Sw(\varphi)$$

$$\hat{P}^{\varphi}_{(i,f)}(\bar{x}, \bar{A}) = \hat{P}^{o_f}_i(f^{\varphi}_{e}(\bar{x}), f^{\varphi}_{r}(\bar{x}), A_f)$$

при $(i, f) \in \bigcup_{R \in \overline{Sw}(\varphi)} (S^R \setminus R)$

Сопоставим каждому $\beta = (i, j, k) \in (S^{\varphi})^3$ функцию $\hat{d}_{\beta} = \det \| \hat{P}^{\varphi}_i, \hat{P}^{\varphi}_j, \hat{P}^{\varphi}_k \|$.

Мы хотим установить вид $\hat{d}_{\beta}$ как элемента $\mathbb{Q}(\bar{x}, \bar{A})$.

4.2. ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5,4.2. Для всякого $\beta = (i,j,k) \in (S^{\varphi})^3$ найдутся попарно различные элементы $A_\beta^1, A_\beta^2, A_\beta^3 \in \{\{A_f\}_{f\in \overline{Sw}(\varphi)}, 1\}$ и некоторые функции $\{f_\beta^\ell, g_\beta^\ell, h_\beta^\ell\}_{\ell=1,2,3} \subset SF(\varphi) = (Sw(\varphi))^\sigma$ такие, что $d_\beta = A_\beta^1 \cdot h_\beta^1 (f_\beta^1 - g_\beta^1) + A_\beta^2 \cdot h_\beta^2 (f_\beta^2 - g_\beta^2) +$
$+ A_\beta^3 \cdot h_\beta^3 (f_\beta^3 - g_\beta^3)$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим описанное в утверждении множество элементов $\mathbb{Q}(\overline{x}, \overline{A})$ через $\mathcal{L}$. Обозначим через S_1^φ множество $\{I, Sw(\varphi) \setminus 0\}$ и через S_2^φ множество $\bigcup\limits_{k\in Sw(\varphi)} \overline{S}^k$, где $\overline{S}^k = S^k \setminus k$. Тогда $S^\varphi = S_1^\varphi \cup S_2^\varphi$, $S_1^\varphi \cap S_2^\varphi = \varnothing$.

Интерес представляет случай, когда i, j, k — попарно различны. Переберем ряд возможностей для расположения подмножества $\{i,j,k\}$ в множестве S^φ, которые исчерпают все расположения.

I случай: $(i,j,k) \in (S_1^\varphi)^3$, т.е.
$\hat{P}_i, \hat{P}_j, \hat{P}_k \in \left\{ \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}f\\0\\1\end{pmatrix} \right\}_{f\in SF(\varphi)}$

Возможны ситуации:

$$d_{ijk} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \in \mathcal{L} \quad , \quad d_{ijk} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & f \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \in \mathcal{L}$$

$$d_{ijk} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & f \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \in \mathcal{L} \quad ; \quad d_{ijk} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & f \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = f - 1 \in \mathcal{L}$$

$$d_{ijk} = \begin{vmatrix} \varepsilon & f_1 & f_2 \\ 1 & 0 & 0 \\ \varepsilon & 1 & 1 \end{vmatrix} = f_2 - f_1 \in \mathcal{L} \qquad \text{при } \varepsilon = 0, 1$$

$$d_{ijk} = \begin{vmatrix} f_1 & f_2 & f_3 \\ 0 & 0 & 0 \\ \varepsilon & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \in \mathcal{L} \qquad \text{при } \varepsilon = 0, 1$$

Далее мы будем представлять $\hat{P}_i$, $i \in S^\varphi$ в следующем общем виде $\hat{P}_i = \begin{pmatrix} (2\varepsilon_i - 1) f_i \\ A^i \cdot h_i \\ \varepsilon_i \end{pmatrix}$, где $\varepsilon_i = 0, 1$, $f_i, h_i \in SF(\varphi)$,
$A^i \in \{\{A_f\}_{f\in \overline{Sw}(\varphi)}, \{1\}\}$

Тогда d_{ijk} имеет вид $-A^i \ell_i((2\varepsilon_j-1)\varepsilon_k f_j - 2(\varepsilon_k-1)\varepsilon_j f_k) + A^j \ell_j((2\varepsilon_i-1)\varepsilon_k f_i - (2\varepsilon_k-1)\varepsilon_i f_k) - A^k \ell_k((2\varepsilon_i-1)\varepsilon_j f_i - (2\varepsilon_j-1)\varepsilon_i f_j)$

2 случай: $i \in \overline{S}^t$ для некоторого $t \in \overline{Sw}(\Phi)$, $j,k \notin \overline{S}^t$ и для любого $r \in \overline{Sw}(\Phi)$ пара $(j,k) \notin (\overline{S}^r)^2$.

Это означает, в частности, что A^i, A^j, A^k - можно считать попарно различными и $A^i \neq 1$ /исключением мог бы быть случай $d_{ijk} = \begin{vmatrix} (2\varepsilon_i-1)f_i & 1 & 0 \\ A^i\ell_i & 1 & 1 \\ \varepsilon_i & 1 & 0 \end{vmatrix} = \varepsilon_i-(2\varepsilon_i-1)f_i$, но с ним все благополучно/.

Возможны ситуации:

I. $\varepsilon_j = 0$, $\varepsilon_k = 0$

Тогда $d_{ijk} = A^j \ell_j \varepsilon_i f_k - A^k \ell_k \varepsilon_i f_j \in \mathcal{L}$ при $\varepsilon_i = 0, 1$;

2. $\varepsilon_j = 0$, $\varepsilon_k = 0$,

Тогда $d_{ijk} = A^i \ell_i f_j + A^j \ell_j ((2\varepsilon_i-1)f_i - \varepsilon_i f_k) - A^k \ell_k \varepsilon_i f_j \in \mathcal{L}$ при $\varepsilon_i = 0, 1$;

3. $\varepsilon_j = 1$, $\varepsilon_k = 0$ - случай, симметричный 2.

4. $\varepsilon_j = 1$ $\varepsilon_k = 1$

Тогда $d_{ijk} = A^i \ell_i (f_j - f_k) + A_j \ell_j((2\varepsilon_i-1)f_i - \varepsilon_i f_k) - A^k \ell_k ((2\varepsilon_i-1)f_i - \varepsilon_i f_j) \in \mathcal{L}$ при $\varepsilon_i = 0, 1$

3 случай: $i,j \in \overline{S}^t$ при некотором $t \in \overline{Sw}(\Phi)$, $k \notin \overline{S}^t$

Это означает, в частности, что $A^i = A^j \neq 1$, $A^k \neq A^i$

Рассмотрим ситуации:

I. $\ell_i \neq 1$, $\ell_j = 1$, $\varepsilon_j = 0$

Это возможно только при $o_t \in \{\times, :\}$ и тогда $f_i = 0$, $\ell_i \cdot f_j \in SF$, $\varepsilon_i = 1$. В этом случае

$d_{ijk} = A^i(\varepsilon_k f_j \ell_i - (2\varepsilon_k-1)f_k) - A^k \ell_k f_j$ при $\varepsilon_k = 0, 1$;

2. $\ell_i \neq 1$, $\ell_j = 1$, $\varepsilon_j = 1$, тогда $o_t' \in \{\times, :\}$, $f_j = f_i = 0$, $\varepsilon_i = 1$. В этом случае

$d_{ijk} = A^i(2\varepsilon_k-1)\cdot f_k(\ell_i - 1) \in \mathcal{L}$ при $\varepsilon_k = 0, 1$

3. $h_i \neq 1$, $h_j \neq 1$ - такая ситуация не встречается.

4. $h_i = 1$, $h_j \neq 1$ - ситуация, симметричная I.

5. $h_i = 1$, $h_j = 1$, $\varepsilon_i = \varepsilon_j = 0$, тогда
$d_{ijk} = A^i(\varepsilon_k t_j - \varepsilon_k t_i) \in \mathcal{L}$ при $\varepsilon_k = 0, 1$;

6. $h_i = 1$, $h_j = 1$, $\varepsilon_i = 0$, $\varepsilon_j = 1$, $o_t \in \{\times, :\}$ тогда $t_j = 0$ и
$d_{ijk} = A^i((2\varepsilon_k - 1)t_k - \varepsilon_k t_i) + A^k h_k t_i \in \mathcal{L}$ при $\varepsilon_k = 0, 1$;

7. $h_i = 1$, $h_j = 1$, $\varepsilon_k = 0$, $\varepsilon_j = 1$, $o_t \in \{+, -\}$, тогда
$t_i + t_j \in SF(\Phi)$, и
$d_{ijk} = -A^i(\varepsilon_k(t_j + t_i) - 2(\varepsilon_k - 1)t_k) + A^k h_k t_i \in \mathcal{L}$

при $\varepsilon_k = 0, 1$;

8. $h_i = 1$, $h_j = 1$, $\varepsilon_i = 1$, $\varepsilon_j = 1$ - случай, аналогичный 6, 7.

9. $h_i = 1$, $h_j = 1$, $\varepsilon_i = 1$, $\varepsilon_j = 1$, тогда
$d_{ijk} = -A^i(\varepsilon_k t_j - \varepsilon_k t_i) + A^k h_k (t_i - t_j) \in \mathcal{L}$
при $\varepsilon_k = 0, 1$

4 случай: $i, j, k \in \overline{S}^t$ при некотором $t \in \overline{Sw}(\Phi)$.
Это означает, в частности, что $A_i = A_j = A_k$. Возможны ситуации: $O_t \in \{+, -\}$

I. , тогда $\{i, j, k\} = \{(A, t), (B, t), (C, t)\}$, т.е. можно считать, что $h_i = h_j = h_k = 1$, $t_j = 0$, $\varepsilon_i = 0$, $\varepsilon_j = \varepsilon_k = 1$

В этом случае $d_{ijk} = A^i t_k \in \mathcal{L}$

2. $o_t \in \{\times, :\}$, $\varepsilon_i = \varepsilon_j = 0$. Тогда необходимо: $\varepsilon_k = 1$, $t_k = 0$, $h_i = h_j = 1$. В этом случае
$d_{ijk} = A^i(1 - t_i) \in \mathcal{L}$

3. $o_t \in \{\times, :\}$, $\varepsilon_i = \varepsilon_j = 1$. Тогда, можно считать, что $h_i \cdot t_k \subset SF(\Phi)$ $h_j = 1$, $\varepsilon_k = 0$, $t_i = t_j = 0$.
В этой ситуации $d_{ijk} = A_i(h_i \cdot t_k - t_k) \in \mathcal{L}$

4. Случай $o_t \in \{\times, :\}$, $\varepsilon_i = 0$, $\varepsilon_j = 1$ и случай $\varepsilon_i = 1$, $\varepsilon_j = 0$ учитываются в 2, 3.

ГЛАВА 3

ДОКАЗАТЕЛЬСТВА ОСНОВНЫХ ТЕОРЕМ

§ 6. Доказательство теоремы А. Связь между стратификацией пространства аргументов, порожденной схемой вычисления регулярного отображения и ориентированными к.типами конфигураций. I°. Доказательство теоремы А. 2°. Лемма о связи. 2.I. План доказательства леммы. 2.2. Доказательство леммы.

I°. Доказательство теоремы А.

ФОРМУЛИРОВКА: Для любого натурального числа k и любого аффинного подмножества M пространства $\mathbb{R}^k$, заданного над $\mathbb{Q}$, найдется комбинаторный род базисных конфигураций и составленное из целых к.типов, открытое по Зарисскому подмножество в нем, бирегулярно изоморфное M .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Допустим, что $M = F_0$, где $F \in \mathbb{R}^m_{\mathbb{Z}}[x_1, \dots, x_k]$, $F = (F_1, \dots, F_m)$, не умаляя общности считаем, что $F_i \neq F_j$ при $i \neq j$ и $\deg F_i > 0$.

Выберем для F некоторую схему вычисления $\Phi = (\varphi_1, \dots, \varphi_m)$ в $\mathfrak{N}(0, 1, x_1, \dots, x_k)$, не содержащую делений /см. п. 4.I § 4/. Не умаляя общности, можем полагать, что схема Φ - неприводима /см. следствие предложения 4,4.2/, и что ${}^o\varphi_i = +$ при $i \in \overline{1:m}$. Тогда $\mathrm{reg}\,\Phi = \mathbb{R}^k$, $\mathcal{H}^\Phi = \mathbb{R}^k \times (\mathbb{R}^*)^{\overline{sw}(\Phi)}$ - бирегулярный изоморфизм /см. п. 3 § 5/. Кроме того, по предложению 5,3.4 μ^Φ - полусвободная геометрия.

Возьмем общую точку $(\bar{x}^*, \bar{y}^*)$ пространства $\mathcal{H}^\Phi$ и конфигурации $c^* = P^\Phi(\bar{x}^*, \bar{a}^*) \in \mathcal{C}_c(S^\Phi)$ /см. п. 3.I § 5/. По определению, $m(c^*) = \mu^\Phi$, следовательно, c^* - полусвободна с базой $B \subset S^\Phi$ и порядком $\leq_\Phi$ на точках $S^\Phi \setminus B$ из доказательства 5,3.4. Пусть $(\varphi_i)_e = g_i$, $(\varphi_i)_r = R_i$, т.е. $\varphi_i = (g_i + R_i) \in \overline{sw}(\Phi)$. Тогда, в силу полусвободности c^* и структуры порядка $\leq_\Phi$ на $S^\Phi \setminus B$, каждая точка $c^*_{\varphi_1}, \dots, c^*_{\varphi_m}$ конфигурации c^* инцидентна в точности двум собственным прямым конфигурации c^* . Именно, точка $c^*_{\varphi_i} = \begin{pmatrix} F_i(x^*) \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ инцидентна прямой $L_{\mathbb{R}}$ и прямой $L_{\varphi_i} = C^*_{(c,\varphi_i)} \cdot C^*_{(B,\varphi_i)} = \begin{pmatrix} -\frac{g_i^c(x^*)}{a^c_{\varphi_i}} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} R^c_i(x^*) \\ a^c_{\varphi_i} \\ 1 \end{pmatrix}$ В силу случая 3.6 доказательства предложения 5,4.2:

Не умаляя общности, мы можем предполагать, что

$g_i, R_i \neq \varphi_j$ для всех $i \neq j$, $i, j \in \overline{1:m}$

В этом случае ни одна из точек $C^*_{(c,\varphi_i)}, C^*_{(B,\varphi_i)}$ не лежит на прямой, инцидентной нулю, либо на прямой, инцидентной C_{φ_j} при $i \neq j$. Поэтому, в соответствии с п. 1.6 § 3, мы можем последовательно отождествить к.точки $\varphi_1, \dots, \varphi_k$ матроида M^φ с к.точкой 0 и получить при этом новый матроид $M^\varphi_0 \in \mu(S^\varphi)$.

Рассмотрим $\Theta^\varphi_0 = \mathcal{F}^\varphi(M^\varphi_0) \cap \Theta^\varphi$ - открытое множество в $\mathcal{F}(M^\varphi_0)$. Тогда $(P^\varphi)^{-1}(\Theta^\varphi_0) = \{(\bar{x}, \bar{a}) \in \mathbb{R}^k \times (\mathbb{R}^*)^{\overline{sw}(\varphi)} \mid x_0 \in F_0, \bar{a} \in (\mathbb{R}^*)^{\overline{sw}(\varphi)}\} = F_0 \times (\mathbb{R}^*)^{\overline{sw}(\varphi)}$

Таким образом, мы получили матроид M^φ_0, соответствующий ему замкнутый к.род базисных конфигураций $\mathcal{F}(M^\varphi)$ и в нем открытое по Зарисскому подмножество Θ^φ_0, бирегулярно изоморфное $F_0 \times (\mathbb{R}^*)^{\overline{sw}(\varphi)}$. Доказан, тем самым, факт чуть более слабый, чем требуется в условии теоремы А. Дополнительными рутинными рассмотрениями можно показать, что множество $\bar{\Theta}^\varphi_0 = \{c \in \Theta^\varphi_0 \mid$ $c_{(A,j)} = L_0 \cap (c_E \cdot c_\infty)$ при всех $j \in \overline{sw}(\varphi)\} = \{c \in \Theta^\varphi_0 \mid R(c_{(A,j)}) = 1$ для всех $j \in \overline{sw}(\varphi)\} \underset{P^\varphi}{\cong} \{(\bar{x}, \bar{1}) \in \mathbb{R}^k \times (\mathbb{R}^*)^{\overline{sw}(\varphi)} \mid \bar{x} \in F_0, \bar{1} = \{1_j\}_{j \in \overline{sw}(\varphi)}\}$ Есть так же открытое подмножество некоторого комбинаторного рода конфигураций, содержащегося в $\mathcal{F}^\varphi$. □

2°. Лемма о связи между стратификацией пространства аргументов, порожденной схемой вычисления регулярного отображения и ориентированными комбинаторными типами конфигураций.

ЛЕММА 6,2. I. Для всякого $F \in \mathbb{R}^m_{\mathbb{Q}}[x_1, \dots, x_k]$ - регулярного отображения $\mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^m$, заданного над $\mathbb{Q}$, любой схемы вычисления φ отображения F в $\mathcal{O}(0, 1, x_1, \dots, x_k)$, любой страты $\gamma \in \Sigma(\varphi)$, найдется ориентированный к.тип базисных конфигураций $\beta(\gamma) \in T\ell_0(w(\gamma))$, стабильно эквивалентный γ. При этом

$$|w(\gamma)| \leq |S^\varphi| \leq 2\cdot|Sw(\varphi)| + 2|\varphi|^+ + 3|\varphi|^\times - k + 1$$

где $|\varphi|^+$ - число сложений и вычитаний в схеме φ, $|\varphi|^\times$ - число умножений и делений.

2. Если страта γ - груба, а схема φ - неприводима, то ориентированный к.тип $\beta(\gamma)$ оказывается полусвободным.

Утверждение 2 леммы в сочетании с леммой 3,3.I дает

Следствие. В предположениях п. 2 Леммы 6.2 найдется грубый ориентированный к.тип базисных конфигураций $\mathcal{X}(\gamma) \in R\ell_e(v(\gamma))$ стабильно эквивалентный γ и при этом

$$|v(\gamma)| \leq 5|Sw(\varphi)| + 6|\varphi|^+ + 9|\varphi|^\times - 3k - 3$$

2.I. План доказательства леммы. Возьмем $F \in \mathbb{R}^m_{\mathbb{Q}}[x_1,\dots,x_k]$, φ схему вычисления F в $\mathcal{O}(c, 1, x_1, \dots, x_k)$, страту $\gamma \in \Sigma(\varphi)$ /см. п. 5° § 4/. Пусть $\underset{\gamma}{\leq}$ - линейный порядок на $SF(\varphi)$, соответствующий γ /т.е. для любых $x \in \gamma$, $f, g \in SF(\varphi)$: $f(x) \leq g(x)$ тогда и только тогда, когда $f \underset{\gamma}{\leq} g$ /. Пусть $\underset{\eta}{<}$ - какой-нибудь строгий линейный порядок на $\overline{Sw}(\varphi)$. Возьмем $\beta = (i, j, k) \in (S^\varphi)^3$. С помощью предложения 5,4.2 мы установим, что для любой точки $\bar{x} \in \gamma$ функция $or(P_i^\varphi(\bar{x}, \bar{A}), P_j^\varphi(\bar{x}, \bar{A}), P_k^\varphi(\bar{x}, \bar{A}))$ аргумента $\bar{A} = \{A_f\}_{f \in \overline{Sw}(\varphi)}$ при $A_f \gg \sum_{g \underset{\eta}{<} f} A_g > 0$ стабилизируется на некотором, не зависящем от x, значении $s_\beta(\gamma, \eta)$. Затем мы покажем, что множество $\beta(\gamma) = \{c \mid c \in \Theta^\varphi,\ or(c_j, c_i, c_k) = s_{(j,i,k)}(\gamma, \eta)$ при всех $(i, j, k) \in (S^\varphi)^3\}$ есть целый ориентированный к.тип, стабильно эквивалентный γ, $\beta(\gamma) \in T\ell_0(S^\varphi)$. Оценка из утверждения леммы получается простым подсчетом числа элементов S^φ.

2.2. Доказательство леммы.

2.2.I. Возьмем $\beta = (i,j,k) \in (S^\varphi)^3$, $(\bar{x},\bar{a}) \in \mathcal{H}^\varphi$. Введем обозначение $or_\beta(\bar{x},\bar{a}) = or\left(P_i^\varphi(\bar{x},\bar{a}), P_j^\varphi(\bar{x},\bar{a}), P_k^\varphi(\bar{x},\bar{a})\right) =$

$= \mathrm{sign}\det\|P_i^\varphi(\bar{x},\bar{a}), P_j^\varphi(\bar{x},\bar{a}), P_k^\varphi(\bar{x},\bar{a})\|$

/см. п. 7.3 § I/. Рассмотрим преобразование $\hat{P}^\varphi$ отображения P^φ из п. 4.I § 5. Очевидно, что при $a_f > 0$ для всякого $f \in \overline{Sw}(\varphi)$:

$$or_\beta(\bar{x},\bar{a}) = or\left(\hat{P}_i^\varphi(\bar{x},\bar{a}), \hat{P}_j^\varphi(\bar{x},\bar{a}), \hat{P}_k^\varphi(\bar{x},\bar{a})\right)$$

2.2.2. Положим $\mathcal{H}^\gamma = \gamma \times (\mathbb{R}_+)^{Sw(\varphi)} \subset \mathcal{H}^\varphi$, где $\mathbb{R}_+ = \{a \in \mathbb{R} \mid a > 0\}$. Возьмем $(\bar{x},\bar{a}) \in \mathcal{H}^\gamma$ и конфигурацию $c \in to(P^\varphi(\bar{x},\bar{a}))$. Предложение 5,3.3. а/ гарантирует в этом случае, что $c \in \Theta^\varphi$. Пусть $(\bar{y},\bar{b}) = (P^\varphi)^{-1}(c) \in \mathcal{H}^\varphi$. Покажем, что тогда $(\bar{y},\bar{b}) \in \mathcal{H}^\gamma$. Действительно, по определению базисного ор.к.типа, $or_{f,g,\alpha}(\bar{x},\bar{a}) = or_{f,g,\alpha}(\bar{y},\bar{b})$ для любых $f,g \in \overline{Sw}(\varphi) \subset S^\varphi$. Но $or_{f,g,\alpha}(\bar{x},\bar{a}) =$
$= \mathrm{sign}\det\begin{Vmatrix} f^\varphi(\bar{x}) & g^\varphi(\bar{x}) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{Vmatrix} = \mathrm{sign}\left(g^\varphi(\bar{x}) - f^\varphi(\bar{x})\right)$. Следовательно, $\mathrm{sign}(g^\varphi(\bar{y}) - f^\varphi(\bar{y})) = \mathrm{sign}(g^\varphi(\bar{x}) - f^\varphi(\bar{x}))$ при всех $f,g \in SF(\varphi)$, а это означает, что $\bar{y} \in \gamma$. Аналогично, $or_{((A,f),0,\infty)}(\bar{y},\bar{b}) =$

$$= \mathrm{sign}\det\begin{Vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ b_f & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{Vmatrix} = -\,\mathrm{sign}\, b_f$$

Следовательно, $\mathrm{sign}\, b_f = \mathrm{sign}\, a_f$ при всех $f \in \overline{Sw}(\varphi)$, а это значит, что $\bar{b} \in (\mathbb{R}_+)^{\overline{Sw}(\varphi)}$.

Таким образом, для всякого $(\bar{x},\bar{a}) \in \mathcal{H}^\gamma$:

$$to\left(P^\varphi(\bar{x},\bar{a})\right) \subset \Theta^\varphi \text{ и } (P^\varphi)^{-1}\left(to(P^\varphi(\bar{x},\bar{a}))\right) \subset \mathcal{H}^\gamma$$

2.2.3. Предложение 5,4.2 в сочетании с замечанием из п. 2.2.I доказательства показывает, что для любого $\beta \in (S^\varphi)^3$, $or_\beta(\bar{x},\bar{a})$ либо $\equiv const = \delta_\beta$ при всех $(\bar{x},\bar{a}) \in \mathcal{H}^\gamma$ /обозначим множество таких β через B_c /, либо нетривиально линейно зависит от $\bar{a}$ при $\beta \in B_V = (S^\varphi)^3 \setminus B_c$. Возьмём какой-нибудь строгий линейный порядок $\underset{\eta}{<}$ на $\overline{Sw}(\varphi)$. Для $\beta \in B_V$ обозначим через $i(\beta)$ старший в смысле $\underset{\eta}{<}$ элемент $\overline{Sw}(\Phi)$ среди всех $f \in \overline{Sw}(\Phi)$ таких, что $or_n(\overline{x},\overline{a})$ нетривиально зависит от a_f. Тогда, в соответствии с утверждением предложения 5,4.2, при $\beta \in B_v$, $(\overline{x},\overline{a}) \in \mathcal{H}^{\gamma}$, $or_{n\beta}(\overline{x},\overline{a})$ имеет вид: $sign(a_{i(\beta)} \cdot \ell_\beta(\overline{x}) \cdot (f_\beta(\overline{x}) - g_\beta(\overline{x})) + \sum_{\substack{j \in \overline{Sw}(\varphi) \\ j \underset{\eta}{<} i}} a_i \cdot \varphi_{j,\beta}(\overline{x}))$,

для некоторых $\ell_\beta, f_\beta, g_\beta, \varphi_{j,\beta}$ - регулярных функций на γ, причем $\ell_\beta \underset{\gamma}{\neq} 0$, $f_\beta \underset{\gamma}{\neq} g(\beta)$

2.2.4. Положим для $\beta \in B_v$ $\Delta_\beta = sign(\ell_\beta(\overline{x})(f_\beta(x) - g_\beta(x)))$ при некотором /а, следовательно, и при любом/ $\overline{x} \in \gamma$. Получаем: для всех $(\overline{x},\overline{a}) \in \mathcal{H}^{\gamma}$, $\beta \in B_v$ верно следующее: $or_{n\beta}(\overline{x},\overline{a}) = \Delta(\beta)$ тогда и только тогда, когда

$$a_{i(\beta)} > \frac{\sum_{j \underset{\eta}{<} i(\beta)} a_j \cdot \varphi_{j,\beta}(\overline{x})}{\ell_\beta(\overline{x})(f_\beta(\overline{x}) - g_\beta(\overline{x}))} = \Psi_{i(\beta)}(\overline{x}, \{a_j\}_{j \in \overline{Sw}(\varphi)}, j < i(\beta))$$

где $\Psi_{i(\beta)}$ - функция, линейная по $\overline{a}$, регулярная по $\overline{x} \in \gamma$. Рассмотрим $\overline{\Psi}_i(\overline{x}, \{\overline{a}_j\}_{j \in Sw(\varphi)}, j \underset{\eta}{<} i) = \max\{\{\Psi_{i(\beta)}(\overline{x},\overline{a}) \mid \beta \in B_v, i(\beta) = i\}, 0\}$ при всех $i \in Sw(\Phi)$.

Функция $\overline{\Psi}_i(\overline{x},\overline{a})$ - неприрывна и кусочно-регулярна при $(x,a) \in \mathcal{H}^{\gamma}$. Рассмотрим множества

$$U^{\gamma}_{\overline{x}} = \{\overline{a} \in \mathbb{R}^{\overline{Sw}(\varphi)} \mid a_i > \overline{\Psi}_i(\overline{x}, \{a_j\}_{j \underset{\eta}{<} i}),$$

для любого $i \in \overline{Sw}(\varphi)$ $\}$. $U^{\gamma}_{\overline{x}}$ - непустое, открытое, выпуклое многогранное подмножество в $(\mathbb{R}_+)^{Sw(\varphi)}$ при $\overline{x} \in \gamma$. /Выпуклость и многогранность следуют из линейности Ψ_i по $\overline{a}$ /.

2.2.5. Получили следующее:

$\{(x,\overline{a}) \in \mathcal{H}^{\gamma} \mid or_n(\overline{x},\overline{a}) = \Delta_\beta$ при всех $\beta \in (S^{\varphi})^3\} = U^{\gamma}$.

Следовательно, в соответствии с п. 2.2.2 доказательства, U^{γ} - есть полный прообраз целого ориентированного к.типа $\beta(\gamma) \in T\ell_0(S^{\varphi})$, $\beta(\gamma) \subset \Theta^{\varphi}$ при бирегулярном изоморфизме P^{φ}.

Для завершения доказательства утверждения I леммы 6.2 остается заметить, что, в силу кусочно-регулярности непрерывных функций $\overline{\Psi}_i$ и непустоты открытых, выпуклых многогранных множеств $U^{\gamma}_{\bar{x}}$ при $\bar{x} \in \gamma$, U^{γ} кусочно-бирегулярно гомеоморфно $\gamma \times R^{\overline{\varsigma\omega}(\varphi)}$, и, следовательно, $\beta(\gamma) \cong U^{\gamma} \approx \gamma$.

2.2.6. Если страта γ - груба, то U^{γ} - открытое подмножество, следовательно $\beta(\gamma) = P^{\varphi}(U^{\gamma})$ - открытое подмножество неприводимого многообразия $\mathcal{C}^{\Phi} \subset \mathcal{C}\ell(S^{\varphi})$, а это означает, что $M(\beta(\gamma)) = M^{\Phi}$. Предложение 5,3.4 гарантирует нам, что в случае неприводимости схемы Φ, M^{Φ} - полусвободная к.геометрия, следовательно, и $M(\beta(\gamma))$ - полусвободная к.геометрия, что доказывает справедливость утверждения 2 леммы 6.2. □

§ 7. Основная теорема о схемах вычисления отображений. Сведение основной теоремы к основной лемме. Доказательство теорем B, C.

0°. Формулировка теоремы D. 1°. Доказательство теорем B,C /по модулю теоремы D /. 2°. Замечание о том, что можно не заботиться о неприводимости возникающих схем вычисления отображений. 3°. План доказательства теоремы D. 4°. Локализация задачи. 5°. Одно специальное расширение регулярного отображения. 6°. Завершение локализации задачи.

0°. **ТЕОРЕМА D**. 1. Для всякого элементарного полуалгебраического множества M, заданного над $\mathbb{Q}$, найдутся $q, m \in \mathbb{N}$, отображение $G \in \mathbb{R}^m_{\mathbb{Q}}[Y_1,\dots,Y_q]$, его неприводимая схема вычисления $\Phi \in \sigma\!\pi^m(0,1,x_1,\dots,x_m)$ и страта $\gamma \in \Sigma(\varphi)$, стабильно эквивалентная M.

2. Если множество M - открыто /т.е. задано только строгими

неравенствами/, то страту γ можно выбрать грубой.

<u>1°. Доказательство теорем B, C.</u> Справедливость теорем B, C следует из сравнения теоремы D с леммой 6,2.

<u>2°. Замечание о неприводимости.</u> Если мы найдем отображение G и его схему вычисления Φ, удовлетворяющие всем требованиям теоремы D, кроме неприводимости схемы Φ, то с помощью предложения 4,4,2 мы тут же построим новое отображение и его неприводимую схему, удовлетворяющую требованиям теоремы. Таким образом, о неприводимости возникающей схемы можно специально не заботиться.

<u>3°. Эскиз доказательства теоремы D.</u> Пусть $M = H_+^I$, где $H \in \mathbb{R}^n_{\mathbb{Q}}[x_1, \dots, x_p]$, т.е. $M = \{x \mid x \in \mathbb{R}^p, H_i(x) = 0$ при $i \in I$, $H_i(x) > 0$ при $i \in \overline{1:n} \setminus I\}$.

Поместим M на плоскость $x_{p+1} = 1$ в $\mathbb{R}^{p+1}$ и рассмотрим его коническую оболочку с вершиной в нуле. Получим новое элементарное полуалгебраическое множество M_1, $\overset{\text{бирегулярно}}{\text{изоморфное}}$ $M \times \mathbb{R}$, причем $\mathrm{cone}_0(M_1)$ - конус множества M_1 в точке 0 совпадает с M_1 и, следовательно, стабильно эквивалентен M. Хорошо известно, что конус в точке полуалгебраического множества гомеоморфен пересечению множества с малой выпуклой окрестностью этой точки, и кусочно-бирегулярно гомеоморфен, если окрестность, например, кубическая. Достаточно, таким образом, построить какое-нибудь отображение $G \in \mathbb{R}^m_{\mathbb{Q}}[y_1, \dots, y_m]$, точку $y^* \in G_0$ и множество $J \subset \overline{1:p}$ такие, что:

1. $\mathrm{cone}_{y^*} G_+^J \simeq \mathrm{cone}_0 M_1$

2. найдется схема вычисления Φ отображения G и страта γ из $\Sigma(\Phi)$, устроенная как пересечение $\mathrm{cone}_{y^*} G_+^J$ с достаточно малой кубической окрестностью y^* /при этом надо, чтобы $J = \emptyset$ при $I = \emptyset$ /.

Мы введем некоторое специальное преобразование $\widetilde{H}$ отображения H и параметрическое семейство точек y_θ таких, что $y_\theta \in (\widetilde{H})_0$ и $\mathrm{cone}_{y_\theta} \widetilde{H}^{I}_{+} = \mathrm{cone}_c M_1$.

Основное свойство вводимых объектов состоит в том, что найдя какую-нибудь Ψ - невырожденную в точке y_{θ^*} схему вычисления отображения $\widetilde{H}$ /определение 4.I/, мы, с помощью операций из предложений 7,4.3 и 7,6.2, можем четверку $\widetilde{H}, \Psi, y_{\theta^*}, I$ немного поправить так, что они будут удовлетворять требованиям I/, 2/.

Свойство невырожденности схемы в точке y_θ, есть свойство набора значений функций из $SF(\Psi)$ в точке y_θ. /Необходимо, чтобы при вычислении отображения в данной точке по данной схеме, значения всех промежуточных вычислений находились в возможно более общем положении /по возможности, были попарно различны//. А это уже совсем локальное свойство. Координаты точек y_θ есть регулярные функции от вектора вещественных переменных θ. В силу этого обстоятельства, проблема существования для конкретной схемы вычисления Ψ отображения $\widetilde{H}$ значения параметра θ^* такого, что Ψ невырождена в точке y_{θ^*}, есть алгебраический вопрос о структуре конкретной системы полиномов.

Следующий параграф /§ 8/ посвящен доказательству в указанном ключе того, что искомое θ^* всегда найдется для несколько модифицированной схемы Горнера вычисления отображения $\widetilde{H}$, какое бы мы ни взяли H.

4⁰. Локализация задачи.

4.I. Определения. Пусть $E \in \mathbb{R}^m_{\mathbb{Q}}[Y_1, \ldots, Y_e]$, $E = (E_1, \ldots, E_m)$ - регулярное отображение $\mathbb{R}^e \to \mathbb{R}^m$, заданное над $\mathbb{Q}$. Пусть

$y^* \in E_0$, Ψ - схема вычисления E в $\mathfrak{M}(\mathcal{A})$, $\mathcal{A} \subset \mathbb{R}_{\mathbb{Q}}[y_1, \dots, y_e]$. Говорим, что Ψ <u>невырождена</u> в точке y^* , если:

1. $x^* \in \operatorname{reg} \Psi$ /см. п. 5 § 4/,
2. Для любых $f, g \in SF(\Psi)$, $f \neq g$ равенство $f(x^*) = g(x^*)$ возможно только при $\{f, g\} \in \{E_1, \dots, E_n, 0\} = SF_c(\Psi)$
3. $y_i \notin SF_c(\Psi)$ при $i \in \overline{1:e}$

Говорим, что Ψ - <u>знакопостоянна</u> на множестве $V \subset \mathbb{R}^k$, если V помещается в страту стратификации $\Sigma(\Psi)$.

4.2. Пусть $M = H_+^I$, $H \in \mathbb{R}^n[x_1, \dots, x_p]$, $I \subset \overline{1:n}$ т.е. $M = \{x \mid x \in \mathbb{R}^p, \ H_i(x) = 0 \text{ при } i \in I, \ H_i(x) > 0 \text{ при } i \in \overline{1:n} \setminus I\}$ /ситуация п. 2 теоремы D означает, что $I = \emptyset$ /. Рассмотрим отображение $H^1 \in \mathbb{R}_{\mathbb{Q}}^{n+1}[x_1, \dots, x_{p+1}]$:

$$H_i^1(x_1, \dots, x_{p+1}) = x_{p+1}^{\deg H_i} \cdot H_i\left(\frac{x_1}{x_{p+1}}, \dots, \frac{x_p}{x_{p+1}}\right) \text{ при } i \in \overline{1:n},$$

$$H_{n+1}^1(x_1, \dots, x_{p+1}) = x_{p+1} .$$

Множество $(H^1)_+^I$ бирегулярно изоморфно $(H_+^I) \times \mathbb{R}^+$. Изоморфизм доставляет отображение

$$(x_1, \dots, x_p, x_{p+1}) \longmapsto \left(\left(\frac{x_1}{x_{p+1}}, \dots, \frac{x_p}{x_{p+1}}\right), x_p\right)$$

При этом, $\operatorname{cone}_0 (H^1)_+^I = (H^1)_+^I \approx H_+^I$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 7.4.3. Предположим, что нашлись $E \in \mathbb{R}_{\mathbb{Q}}^m[y_1, \dots, y_e]$, $y^* \in E_0$, $J \subset \overline{1:m}$, Ψ - схема вычисления E в $\mathfrak{M}(0, 1, y_1, \dots, y_e)$ и $V(y^*)$ - окрестность точки y^* в $\mathbb{R}^e$ такие, что

1/ Ψ - невырождена в точке y^* ,

2/ Ψ - знакопостоянна на $V(y^*) \cap E_+^J$,

3/ $\operatorname{cone}_0 (H^1)_+^I \approx \operatorname{cone}_{y^*} E_+^J$

4/ если $I = \emptyset$, то $J = \emptyset$.

Тогда найдутся G, Φ, γ , удовлетворяющие требованиям теоремы D .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

4.3.1. Конус полуалгебраического множества в точке гомеоморфен пересечению множества с достаточно малой выпуклой окрестностью данной точки.

Возьмем окрестность $U(y^*) \subset (V(y^*) \cap \mathcal{U}_y \Psi)$ такую, что для всякой выпуклой окрестности $U_1(y^*) \subset U(y^*)$: $\mathrm{cone}_{y^*} E^J_+ \simeq E^J_+ \cap U_1$

4.3.2. Пусть страта $\mathcal{S} \in \Sigma(\Psi)$ такова, что $V(y^*) \cap E^J_+ \subset \mathcal{S}$ /найдется по определению п. 4.I и условию 2 предложения/. Пусть $\underset{\mathcal{S}}{\leq}$ порядок на $SF(\Psi)$, соответствующий страте $\mathcal{S}$, т.е. для всякого $y \in \mathcal{S}$ и любых $f, g \in SF(\Psi)$, $f \neq g$ верно: $f(y) \leq g(y)$ тогда и только тогда, когда $f \underset{\mathcal{S}}{\leq} g$.
Пусть g_i - ближайший больший элемент $SF(\Psi)$ к Y_i в смысле $\underset{\mathcal{S}}{\leq}$, а g_i - ближайший меньший. В силу невырожденности Ψ в точке y^* : $f_i(y^*) < y^*_i < g_i(y^*)$ при $i \in 1:\ell$
Более того, найдутся рациональные числа $\lambda_1, \ldots, \lambda_{2\ell}$ такие, что

а/ $f_i(y^*) < \lambda_i < y^*_i < \lambda_{\ell+i} < g_i(y^*)$ для $i \in \overline{1:\ell}$

б/ Куб $K(y^*) = \{y \in \mathbb{R}^\ell \mid \lambda_i < y_i < \lambda_{\ell+i}$ при $i \in 1:\ell\} \subset U(y^*)$

в/ Для всякого $y \in K \cap E^J_+$, всякого $i \in \overline{1:\ell}$:
$g_i(y) > \lambda_{\ell+i}$, $f_i(y) < \lambda_i$.

В силу выбора $U(y^*)$, множество $K(y^*) \cap E^J_+ \simeq \mathrm{cone}_{y^*} E^J_+$ и, следовательно, по з/ - стабильно эквивалентно $\mathrm{cone}_0 (H^1)^I_+$ и M.

4.3.3. Остается немного поправить отображение E и его схему так, чтобы у нового отображения и новой схемы была страта, эквивалентная $K(y^*) \cap E^J_+$.

Рассмотрим новое отображение $G \in \mathbb{R}^{m+2\ell}_{\mathbb{Q}} [Y_1, \ldots, Y_\ell, A]$,

$G_1(y_1, \ldots, y_\ell, a) = E_1(y_1, \ldots, y_\ell)$,

- -

$G_m(y_1, \ldots, y_\ell, a) = E_m(y_1, \ldots, y_\ell)$,

$G_{m+1}(y_1, \ldots, y_\ell, a) = \lambda_1$,

- -

$G_{m+\ell}(y_1, \ldots, y_\ell, a) = \lambda_{2\ell}$.

Пусть $|\lambda_i| = \dfrac{\lambda_i^1}{\lambda_i^2}$, где $\lambda_i^1, \lambda_i^2 \in \mathbb{N}$. Положим
$M_1 = \max \{ |\lambda_i^j| \mid \lambda_i^j > 0 \ \ j = 1,2 \ ; \ i = 1,2,\dots,2e \}$
$M_2 = \max \{ |\lambda_i^j| \mid \lambda_i^j < 0 \ , \ j = 1,2, \ , \ i \in 1:2e \}$

Определим схему вычисления Φ отображения G в $\mathcal{O}\mathcal{I}^{m+2e}(0,1,y_1,\dots,y_e$
следующим образом: $\Phi_1 = \Psi_1,\dots,\Phi_m = \Psi_m$ для $i = 1,\dots,2e$

положим:

$$\Phi_{m+i} = \begin{cases} \dfrac{(\dots((\overbrace{a+a)+a)+\dots+a}^{\lambda_i^1})}{(\dots((\underbrace{a+a)+a)+\dots+a}_{\lambda_i^2})} & \text{при } \lambda_i > 0 \\ \\ \dfrac{(\dots((\overbrace{a+a)+a)+\dots+a}^{\lambda_i^1})}{(\dots((0-\underbrace{a)-a)-\dots-a}_{\lambda_i^2})} & \text{при } \lambda_i < 0 \end{cases}$$

Легко видеть, что $SF(\Phi) = SF(\Psi) \cup \{ \lambda_1,\dots,\lambda_{2e}, a,$

$2a,\dots, M_1\cdot a, -a, -2a,\dots, -M_2\cdot a \}$

Возьмем точку $(y', a') \in \mathbb{R}^e \times \mathbb{R}$ такую, что

$y' \in K(y^*) \cap E_+^J \ , \ a' > \max\limits_{f \in SF(\Psi)} |f(y')|$.

Пусть γ - страта $\Sigma(\Phi)$, содержащая эту точку. По построению $\gamma = \{ (y,a) \mid y \in K(y^*) \cap E_+^J \ , \ a > \max\limits_{y \in SF(\Psi)} f(y) \}$.

Стало быть, γ кусочно-бирегулярно гомеоморфна $K(y^*) \cap E_+^J \times \mathbb{R}$ и, следовательно, стабильно эквивалентна $K(y^*) \cap E_+^J$.

4.3.4. По построению, если $J = \emptyset$, то $\dim \gamma = e+1$
а это означает, что γ - грубая страта стратификации $\Sigma(\Phi)$.
Таким образом, G, Φ, γ - удовлетворяют требованиям утверждения теоремы D. $\square$

5°. Одно специальное расширение регулярного отображения.

5.1. Рассмотрим множество $\overline{At}_k(\mathbb{R})$, состоящее из пар (a,t), где a - нижнетреугольная вещественная $k\times k$ матрица, t - вектор из $\mathbb{R}^k$.

Пространство $\overline{At}_k(\mathbb{R})$ можно отождествить с $\mathbb{R}^{\mathcal{P}_k}$, где $\mathcal{P}_k = \{(i,j) \mid i=1,\dots,k,\ j\le i\} \cup \{1,\dots,k\}$. $\overline{At}_k(\mathbb{R})$ действует на $\mathbb{R}^k$ аффинными преобразованиями: $x_{(a,t)} = a\cdot(x+t)$ для всякого $x\in\mathbb{R}^k$.

Пусть $At_k(\mathbb{R}) \subset \overline{At}_k(\mathbb{R})$ - множество невырожденных нижнетреугольных аффинных преобразований. Это - открытое квазиаффинное подмножество в $\overline{At}_k(\mathbb{R})$. На $At_k(\mathbb{R})$ определим структуру группы: $(a,t)\cdot(\ell,u) = (a\ell,\ u+\ell^{-1}t)$,

$$(a,t)^{-1} = (a^{-1}, -at)\ ,\quad e = (E,0)\,.$$

Действие $At_k(\mathbb{R})$ на $\mathbb{R}^k$ согласовано с групповой структурой на $At_k(\mathbb{R})$.

5.2. Пусть $F\in\mathbb{R}^m_{\mathbb{Q}}[x_1,\dots,x_k]$ - регулярное отображение, заданное над $\mathbb{R}^m_{\mathbb{Q}}$. Сопоставим ему новое отображение $\hat F:\mathbb{R}^k\times\overline{At}_k(\mathbb{R})\times\mathbb{R}^m\times\mathbb{R}^{k+1}\to\mathbb{R}^m$ следующим образом:

$$\hat F(x,\nu,\alpha,\beta) = (\alpha_1\cdot F(x_\nu),\dots,\alpha_m\cdot F(x_\nu)),$$

$$\hat F\in\mathbb{R}^m_{\mathbb{Q}}[x_1,\dots,x_k,\ \{N_j\}_{j\in\mathcal{P}_k},\ A_1,\dots A_m,\ B_1,\dots,B_{k+1}]$$

Вид этого несколько искусственного расширения отображения F будет оправдан в § 8 тем, что для него удобно анализировать схему Горнера.

5.3. Обозначим $\mathbb{D}_{k,m} = At_k(\mathbb{R})\times\mathbb{R}^m_1\times\mathbb{R}^{k+1}$.

/Здесь $\mathbb{R}^m_1 = \{(\alpha_1,\dots,\alpha_m)\in\mathbb{R}^m \mid \alpha_i>1$ при $i\in\overline{1:m}\}$ /

Сопоставим точке $x^*\in F_0$ семейство точек $\{y_\theta(x^*)\}_{\theta\in\mathbb{D}_{k,m}}$ следующим образом: положим $y_{\nu,\alpha,\beta}(x^*) = (x^*_{\nu^{-1}},\nu,\alpha,\beta)\in$ $\in\mathbb{R}^k\times\mathbb{D}_{k,m}$.

Очевидно, что $y_\Theta(x^*) \in (\hat{F})_0$ при всех $\Theta \in \mathbb{D}_{k,m}$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 7.5.3. $\mathrm{cone}_{\,y_\Theta(x^*)}(\hat{F})^I_+$ бирегулярно изоморфен $\mathrm{cone}_{x^*}(F^I_+) \times \mathbb{R}^{\mathcal{P}_k} \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^{k+1}$ при любых $I \subset \overline{1:m}$, $\Theta \in \mathbb{D}_{k,m}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим регулярное отображение
$\varphi : \mathbb{R}^k \times \mathbb{D}_{k,m} \to \mathbb{R}^k \times \mathbb{D}_{k,m}$, $\varphi(x,\nu,\alpha,\beta) = (x_\nu,\nu,\alpha,\beta)$
φ переводит $(\hat{F})^I_+ \cap \mathbb{D}_{k,m}$ в $F^I_+ \times \mathbb{D}_{k,m}$. Кроме того, $\varphi(y_{\nu,\alpha,\beta}(x^*)) = (x^*,\nu,\alpha,\beta)$. Стало быть, $\mathrm{cone}_{\,y_{\nu\alpha\beta}(x^*)}(\hat{F})^I_+ \cong$
$\cong (\mathrm{cone}_{x^*} F^I_+) \times (\mathrm{cone}_\nu \, At_k(\mathbb{R})) \times (\mathrm{cone}_\alpha \, \mathbb{R}^m_1) \times (\mathrm{cone}_\beta \, \mathbb{R}^{k+1}) \cong$
$\cong (\mathrm{cone}_{x^*} F^I_+) \times \mathbb{R}^{\mathcal{P}_k} \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^{k+1}$ □

6^0. Локализация задачи /завершение/.

6.I. Мы продолжаем преобразования нашего исходного отображения H и множества $M = H^I_+$ из условия теоремы D, начатые в п. 4.2 настоящего параграфа.

Возьмем отображение H^1 из п. 4.2 , $H^1 \in \mathbb{R}^{n+1}_{\mathbb{Q}}[x_1,\dots,x_{p+1}]$ Построим новое отображение $H^2 \in \mathbb{R}^{n+1}_{\mathbb{Q}}[x_1,\dots,x_{p+1}]$. Пусть для простоты $I = \overline{1:r} \subset \overline{1:p}$, где $r \le n$. Положим :

$$H^2_j = H^1_j \qquad \text{при } j \in \overline{1:r+1}$$
$$H^2_j = H^1_{r+1} \cdot \ldots \cdot H^1_j \qquad \text{при } j \in \overline{r+2:n+1}$$

Очевидно, что $0 \in (H^2)_0$, $(H^2)^I_+ = (H^1)^I_+$ и $\mathrm{cone}_0(H^2_+) = \mathrm{cone}_0(H^1_+) \approx M$.

6.2. ПРЕДЛОЖЕНИЕ 7,6.2. Пусть нашлись $(\nu^*,\alpha^*,\beta^*) \in \mathbb{D}_{p+1,n+1}$ и Ψ - схема вычисления отображения $\widehat{(H^2)}$ в $\mathfrak{A}(0,1,x_1,\dots,x_{p+1},\{\nu_j\}_{j\in\mathcal{P}_{p+1}},A_1,\dots A_{n+1},B_1,\dots,B_{p+2}\}$ невырожденная в точке $y^* = y_{\nu^*,\alpha^*,\beta^*}(0)$ /см. п. 5^0 наст. §/. Тогда найдется окрестность $V(y^*)$ такая, что пятерка $\widehat{(H^2)}$, y^* ,

. I , Ψ , $V(y^*)$ удовлетворяют предположениям I/ - 4/ предложения 7,43

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. I. Предположение I/ предложения 4.3 входит в условия; предположения 3/ следует из определения H^2 и предложения 5.3 настоящего параграфа. Предположение 4/ выполняется автоматически, поскольку $J=I$. Остается доказать предположение 2/.

2. Положим $E = \widehat{(H^2)}$. Сразу же заметим, что по определению H^2 и по определению расширения $H^2 \mapsto \widehat{H^2}$ /п. 5°/, множество $(\widehat{H^1})^I_+$ совпадает с множеством E^I_+ .

3. По определению:

$$E_j(x,\nu,\alpha,\beta) = \alpha_j \cdot H^1_j(x_\nu) \qquad \text{при } j \in \overline{1:r}$$

$$\text{и } E_j(x,\nu,\alpha,\beta) = \alpha_j \cdot H^1_{r+1}(x_\nu) \cdot \ldots \cdot H^1_{n+1}(x_\nu), \qquad \text{при } j \in \overline{r+1:n+1}$$

Таким образом, $E_j(x,\nu,\alpha,\beta) = \widehat{(H^1)}_j(x,\nu,\alpha,\beta)$, при $j \in \overline{1:r}$ и

$$E_j(x,\nu,\alpha,\beta) = \frac{1}{\alpha_{r+1} \cdot \ldots \cdot \alpha_{j-1}} \cdot \widehat{(H^1)}_{r+1}(x,\nu,\alpha,\beta) \cdot \ldots \cdot \widehat{(H^1_j)}(x,\nu,\alpha,\beta),$$

при $j \in \overline{r+1:n+1}$

В соответствии с п. 5° $\widehat{(H^1)}_j(y^*) = 0$ при $j \in \overline{1:n+1}$.

Кроме того, по определению $y^* = (0_{(\nu^*)-1}, \nu^*, \alpha^*, \beta^*)$, где $\alpha_i > 1$ при $i \in \overline{1:n+1}$. Следовательно, найдется окрестность $U(y^*)$ точки y^* такая, что для всякой точки $y' = (x', \nu', \alpha', \beta') \subset U(y^*)$ $\alpha'_i > 1$ при всех $i \in \overline{1:n+1}$ и $\widehat{(H^1)}_j(y') < 1$.

С другой стороны, $\widehat{H'}_j(y') > 0$, при всех $y' \in E^I_+$, $j \in \overline{r+1:n+1}$ /в силу п. 2 доказательства/. Следовательно, $0 = E_1(y') = \ldots = E_r(y') < E_{r+1}(y') < \ldots < E_{n+1}(y')$, при всех $y' \in E^I_+ \cap U(y^*)$.

4. Ψ невырождена в точке y^* , т.е. для $f, g \in SF(\Psi)$, $f \neq g$ верно: $f(y^*) = g(y^*)$ тогда и только тогда, когда $\{f,g\} \subset \{E_1, \ldots E_{n+1}, 0\} = SF(\Psi)$ и, кроме того, все функции из $SF(\Psi)$ регулярны в точке y^* .

Следовательно, найдется окрестность $W(y^*)$ точки y^* такая, что $f(y')>g(y')$ тогда и только тогда, когда $f(y^*)>g(y^*)$ для любых $y^*\in W(y^*)$, любых $f,g\in SF(\Psi)$, $\{f,g\}\subset SF(\Psi)_0$, $f\neq g$. Положим $V(y^*)=U(y^*)\cap W(y^*)$.

5. Получилось, что при всяком $y'\in V(y^*)\cap E^I_+$

а/ $0=E_1(y')=\ldots=E_\ell(y')<E_{h+1}(y')<\ldots<E_{\ell+1}(y')$ /п. 3 доказательства/,

б/ $\operatorname{sign}(f(y')-g(y'))=\operatorname{sign}(f(y^*)-g(y^*))$, для любых $f,g\in SF(\Psi)$, $f\neq g$, $\{f,g\}\notin SF(\Psi)_0$ /п. 4 доказательства/.

Таким образом, для любых $y_1',y_2'\subset V(y^*)\cap E^I_+$, любых $f,g\in SF(\Psi)$, $f\neq g$, верно:

$\operatorname{sign}(f(y_1')-g(y_1'))=\operatorname{sign}(f(y_2')-g(y_2'))$.

Это и означает, что Ψ законопостоянна на множестве $V(y^*)\cap E^I_+$. □

§ 8. Основная лемма о схемах вычисления отображений. Завершение доказательства теоремы.

I°. Формулировка основной леммы. 2°. Завершение доказательства теоремы D /по модулю основной леммы/. 3°. Переход к полю функций. 4°. План доказательства леммы 8,I. 5°. Доказательство леммы 8.I.

I°. Формулировка основной леммы.

ЛЕММА 8,I. Для всякого $F\in\mathbb{R}^m_{\mathbb{Q}}[x_1,\ldots,x_k]$ такого, что $0\in F_0$, найдется Φ - схема вычисления отображения $\widehat{F}$ в $\mathfrak{A}(0,1,x_1,\ldots,x_k,\{N_i\}_{i\in\Omega_k},A_1,\ldots,A_m,B_1,\ldots,B_{k+1}\}$ и точка $\theta^*\in\mathbb{D}_{k,m}$ такие, что Φ невырождена в точке $y_{\theta^*}(\Phi)$.

ЗАМЕЧАНИЕ. Расширение отображения $F\mapsto\widehat{F}$ и его атрибуты определяются в п. 5° § 7, невырожденность схемы вычисления отображения в точке - в п. 4.1 § 7.

2°. Завершение доказательства теоремы D. Согласно утверждению леммы 8.1, всегда найдутся $(\nu^*, \alpha^*, \beta^*)$, Ψ, удовлетворяющие предположениям предложения 7,6.2. Предложения 7,6.2 и 7,4.3, и замечание п. 2 § 7 гарантируют нам в этом случае существование G, φ, γ, удовлетворяющих утверждениям теоремы D.

3°. Переход к полю функций. Обозначим через $x = (x_1, \dots, x_k)$ переменный элемент $\mathbb{R}^k$, $\mathcal{N} = \left[\begin{bmatrix} N_{11} & 0 \\ N_{k1} & N_{kk} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} N_1 \\ \vdots \\ N_k \end{bmatrix}\right]$ -

- переменный элемент $\overline{At}_k(\mathbb{R})$, $\mathcal{A} = (A_1, \dots, A_m)$ - переменный элемент $\mathbb{R}^m$ и $\mathcal{B} = (B_1, \dots, B_{k+1})$ - переменный элемент $\mathbb{R}^{k+1}$.

Отождествим $\mathbb{Q}^m(\mathcal{N}, \mathcal{A}, \mathcal{B})(x)$ с множеством рациональных отображений $\mathbb{Q}^k(\mathcal{N}, \mathcal{A}, \mathcal{B}) \to \mathbb{Q}(\mathcal{N}, \mathcal{A}, \mathcal{B})$.

Пусть $i : \mathbb{Q}(\mathcal{N}, \mathcal{A}, \mathcal{B})(x) \to \mathbb{R}_{\mathbb{Q}}(\mathcal{N}, \mathcal{A}, \mathcal{B}, x)$ - тривиальный изоморфизм. Продолжим его до отображения $\bar{i} : \mathbb{Q}(\mathcal{N}, \mathcal{A}, \mathcal{B})(x) \cup \{\infty\} \to$ $\to \mathbb{R}_{\mathbb{Q}}(\mathcal{N}, \mathcal{A}, \mathcal{B}, x) \cup \{\infty\}$, полагая $\bar{i}(\infty) = \infty$, и рассмотрим коммутативную диаграмму:

$$\begin{tikzcd}
 & \mathcal{O}\!\iota(0, 1, \mathcal{N}, \mathcal{A}, \mathcal{B}, x) \arrow[dl, "\sigma_1"'] \arrow[dr, "\sigma_2"] & \\
\mathbb{Q}(\mathcal{N}, \mathcal{A}, \mathcal{B})(x) \cup \{\infty\} \arrow[rr, "\bar{i}"] & & \mathbb{R}_{\mathbb{Q}}(\mathcal{N}, \mathcal{A}, \mathcal{B}, x) \cup \{\infty\}
\end{tikzcd}$$

где σ_1, σ_2 - отображения из п. 2° § 4.

Таким образом, слово в $\mathcal{O}\!\iota(0, 1, \mathcal{N}, \mathcal{A}, \mathcal{B}, x)$ можно воспринимать и как схему вычисления элемента $\mathbb{Q}(\mathcal{N}, \mathcal{A}, \mathcal{B})(x)$, и как схему вычисления элемента $\mathbb{R}_{\mathbb{Q}}(x, \mathcal{N}, \mathcal{A}, \mathcal{B})$. Рассмотрим точку $T = (-N_1, \dots, -N_k) \in \mathbb{Q}^k(\mathcal{N}, \mathcal{A}, \mathcal{B})$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 8,3.1. Пусть $f \in \mathbb{Q}(\mathcal{N}, \mathcal{A}, \mathcal{B})(x)^{\bullet}$, $T \in f_0$. Пусть Ψ - схема вычисления отображения f в $\mathcal{O}\!\iota(0, 1, \mathcal{A}, \mathcal{B}, x)$, невырожденная в точке T, тогда

1/ для всякого $\Theta = (\nu, \alpha, \beta) \in \mathbb{D}_{k,m}$:

$y_\Theta(0) \in (i(f))$.

2/ Найдется $\Theta^* \in \mathbb{D}_{k,m}$ такое, что Ψ невырождена в точке $y_{\Theta^*}(0)$, как схема вычисления $i(f)$.

Доказательства обеих утверждений тривиальны.

В качестве Θ^* достаточно взять точку $\mathbb{D}_{k,m}$, координаты которой алгебраически независимы над $\mathbb{Q}$.□

4°. План доказательства леммы 8.I. Рассмотрим коммутативную диаграмму:

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{Q}^m(\mathcal{N})(x) \arrow[r, "\varphi^m_{\mathcal{B}}"] & \mathbb{Q}^m(\mathcal{N},\mathcal{B})(x) \arrow[r, "\varphi^m_{\mathcal{A}}"] & \mathbb{Q}^m(\mathcal{N},\mathcal{A},\mathcal{B})(x) \arrow[d, "i^m"] \\
& \mathbb{R}^m_{\mathbb{Q}}(x) \arrow[ul, "\varphi^m_{\mathcal{N}}"] \arrow[u, "\varphi^m_{\mathcal{N}\mathcal{B}}"] \arrow[ur, "\varphi^m_{\mathcal{N}\mathcal{B}\mathcal{A}}"] \arrow[r, "\wedge"] & \mathbb{R}^m_{\mathbb{Q}}(x,\mathcal{N},\mathcal{A},\mathcal{B})
\end{tikzcd}$$

где $H \mapsto \hat{H} \in \mathbb{R}^m_{\mathbb{Q}}(x,\mathcal{N},\mathcal{A},\mathcal{B})$ наше отображение из п. 5° § 5 :

$H = (H_1(x), \ldots, H_m(x)) \in \mathbb{R}^m_{\mathbb{Q}}(x)$,

$\hat{H} = (A_1 \cdot H_1(x_{\mathcal{N}}), \ldots, A_m \cdot H_m(x_{\mathcal{N}}))$;

$\varphi^m_{\mathcal{N}}(H) = (H_1(x_{\mathcal{N}}), \ldots, H_m(x_{\mathcal{N}})) \in \mathbb{Q}^m(\mathcal{N})(x)$;

$\varphi^m_{\mathcal{B}}$ - тривиальное вложение;

$\varphi^m_{\mathcal{A}}(K) = (A_1 \cdot K_1(x), \ldots, A_m \cdot K_m(x))$.

В силу предложения 3.I, для того, чтобы доказать лемму, нам достаточно построить схему вычисления отображения $\varphi^m_{\mathcal{N}\mathcal{B}\mathcal{A}}(F)$ в $\mathfrak{A}(0,1,\mathcal{N},\mathcal{A},\mathcal{B},x)$, невырожденную в точке T.

План дальнейших действий состоит в следующем:

Предложение 8,5.I сводит вопрос к построению невырожденных в точке T схем вычисления координатных функций отображения $\varphi^m_{\mathcal{N}\mathcal{B}}(F)$. Предложение 8,5.2 сводит вопрос к более простому чем невырожденность, свойству схем Горнера координатных функций $\varphi^m_{\mathcal{N}}(F)$.

В предложении 8.5.3 доказывается необходимое свойство схем Горнера координатных функций $\varphi_{\mathcal{N}}(F)$.

5⁰. Доказательство леммы 8.I.

5.I. ПРЕДЛОЖЕНИЕ 8.5.I. Пусть $L=(L_1,\dots L_m)\in\mathbb{Q}^m[\mathcal{N}][x]\subset\mathbb{Q}^m(\mathcal{N},\mathcal{B})(x)$; $L_j=\sum\limits_{i_1,\dots,i_k} \ell^j_{i_1\dots i_k} x_1^{i_1}\cdots x_k^{i_k}$ при $j\in\overline{1:m}$; $\ell^j_{i_1,\dots,i_k}\in\mathbb{Q}[\mathcal{N}]$; $T\in L_0$.

Пусть для каждого L_j нашлась схема $\overline{L}_j$ в $\mathfrak{N}(\{\ell^j_{i_1,\dots,i_k}\}_{(i_1,\dots,i_k)},\mathcal{B},x)$ со следующими свойствами:

I. $\overline{L}_j$ невырождена в точке $T=(-N_1,\dots,-N_k)$. Введем обозначения: $\widetilde{SF}=\bigcap\limits_{j=1}^{m} SF(\overline{L}_j)$, $\widetilde{SF}_j=\widetilde{SF}(\overline{L}_j)\setminus SF$.

2. Функции из $\widetilde{SF}(\overline{L}_j)$ нетривиально, линейно, однородно зависят от $\{\ell^j_{(i_1\dots i_k)}\}_{(j,i_1,\dots,i_k)}$.

Тогда для $\varphi^m_{\mathcal{A}}(L)$ найдется схема вычисления Ψ в $\mathfrak{N}(0,1,\mathcal{N},\mathcal{A},\mathcal{B},x)$, невырожденная в точке T.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Зафиксируем для каждого $\ell^j_{i_1,\dots,i_k}$ какую-нибудь схему вычисления $\overline{\ell}^j_{i_1,\dots,i_k}$ в $\mathfrak{N}(0,1,\mathcal{N},\mathcal{B})$. После этого заменим в каждой схеме $\overline{L}^j$ подслово $\ell^j_{i_1,\dots,i_k}$ на подслово $(A_j\times\overline{\ell}^j_{i_1,\dots,i_k})$ при всех $j,(i_1,\dots,i_k)$. Набор получившихся слов $(\Psi_1,\dots,\Psi_m)\in\mathfrak{N}(0,1,\mathcal{N},\mathcal{A},\mathcal{B},x)$ и есть нужная схема вычисления $\Psi^m_{\mathcal{A}}(L)$. $SF(\Psi)=(\bigcup\limits_{j=1}^{m}\{(A_j-h)\}_{h\in SF_j})\cup\widetilde{SF}$; Невырожденность Ψ в точке T немедленно следует из I/ и вида $SF(\Psi)$. □

5.2. Схема Горнера вычисления значений регулярной функции.

Пусть $\mathbb{F}$ - поле, $x_1, \ldots, x_k$ - набор независимых переменных. Рассмотрим отображения:

$$K_t : \mathbb{F}[x_\ell, \ldots, x_k] \to \mathbb{F}[x_{\ell+1}, \ldots, x_k],$$

для всех $\ell = 1, \ldots, k;\ t = 0, 1, \ldots$ /Считаем, что $\mathbb{F}[x_{k+1}] = \mathbb{F}$ /.

Для $f \in \mathbb{F}[x_\ell, \ldots, x_k]$ полагаем, что $k_t(f)$ - коэффициент полинома f при x_ℓ^t /т.е. при степени t переменной с младшим индексом/.

Если $f = \sum\limits_{(i_\ell, \ldots, i_k)} f_{i_\ell, \ldots, i_k} x_\ell^{i_\ell} \cdot \ldots \cdot x_k^{i_k}$, где $f_{i_1, \ldots, i_\ell} \in \mathbb{F}$

то $K_t(f) = \sum\limits_{(j_{\ell+1}, \ldots, j_k)} f_{t, j_{\ell+1}, \ldots, j_k} \cdot x_{\ell+1}^{j_{\ell+1}} \cdot \ldots \cdot x_k^{j_k} \in \mathbb{F}[x_{\ell+1}, \ldots, x_k]$.

Схему Горнера вычисления полинома $f \in \mathbb{F}[x_\ell, \ldots, x_k]$ в алгебре $\mathfrak{M}(\{f_{i_\ell, \ldots i_k}\}_{(i_\ell, \ldots i_k)}, x_\ell, \ldots, x_k) = \mathfrak{M}\langle f \rangle$ определим рекурентным соотношением:

$$\mathcal{G}(f) = (\mathcal{G}(K_0(f)) + x_\ell \times (\mathcal{G}(K_1(f)) + \ldots + x_\ell \times \mathcal{G}(K_{\deg_{x_\ell} f}(f)) \ldots)),$$

при этом, для $g \in \mathbb{F}$: $\mathcal{G}(g) = g$.

Положим, для $t = 1, \ldots, \deg_{x_\ell}(f) - 1$:

$$\mathcal{P}_t(f) = (\mathcal{G}(K_{(\deg_{x_\ell} f) - t}(f) + x_\ell \times (\mathcal{G}(K_{(\deg_{x_\ell} f) - t + 1}(f)) + \ldots +$$
$$+ x_\ell \times \mathcal{G}(K_{\deg_{x_\ell} f}(f)) \ldots)).$$

Кроме того, положим

$$\mathcal{R}_t(f) = x_\ell \times \mathcal{P}_t(f) \qquad \text{при} \quad t \in \overline{1 : \deg(f) - 1},$$

и

$$\mathcal{R}_0(f) = x_\ell \times \mathcal{G}(K_{\deg_{x_\ell} f}(f)).$$

Вычислим для $H \in \mathbb{F}[x_1, \ldots, x_k]$, $H = \sum\limits_{(i_1, \ldots i_k)} h_{i_1, \ldots i_k} x_1^{i_1} \cdot \ldots \cdot x_k^{i_k}$, множества $SW(\mathcal{G}(H)) \subset \mathfrak{M}\langle H \rangle$ и $SF(\mathcal{G}(H)) \subset \mathbb{F}[x_1, \ldots, x_k]$.

Для $\ell \leq k$, $i_1, \ldots i_\ell \in \mathbb{N}$ определим

$$K_{i_1, \ldots i_\ell}(H) = K_{i_\ell}(K_{i_{\ell-1}}(\ldots K_{i_2}(K_{i_1}(H)) \ldots)) \in \mathbb{F}[x_1, \ldots, x_k]$$

$$\mathcal{G}_{i_1, \ldots, i_\ell}(H) = \mathcal{G}(K_{i_1, \ldots i_\ell}(H)) \in \mathfrak{M}\langle H \rangle.$$

$\mathcal{P}_{i_1,\dots,i_e}(H) = \mathcal{P}_{i_e}(K_{i_1,\dots,i_{e-1}}(H)) \in \mathcal{O}\langle H\rangle$

$\mathcal{R}_{i_1,\dots,i_e}(H) = \mathcal{R}_{i_e}(K_{i_1,\dots,i_{e-1}}(H)) \in \mathcal{O}\langle H\rangle$

Положим, кроме того $D_{i_1,\dots,i_e}(H) = \deg_{x_{e+1}} K_{i_1,\dots,i_e}(H)$,

$D(H) = \deg_{x_1} H$.

Определим для каждого $\ell \in 1\cdot k$ множества целочисленных мульти-индексов:

$Ik_\ell(H) = \{(i_1,\dots,i_\ell) \mid 0 \le i_j \le D_{i_1,\dots,i_{j-1}}$ при $j = 1,\dots,\ell\}$,

$IP_\ell(H) = \{(i_1,\dots,i_\ell) \mid (i_1,\dots,i_{\ell-1}) \in Ik_{\ell-1}, 1 \le i_\ell \le D_{i_1,\dots,i_{\ell-1}} - 1\}$,

$IR_\ell(H) = \{(i_1,\dots,i_\ell) \mid (i_1,\dots,i_{\ell-1}) \in Ik_{\ell-1}, 0 \le i_\ell \le D_{i_1,\dots,i_{\ell-1}} - 1\}$.

Тогда $Sw(\mathcal{G}(H)) = \{\mathcal{G}(H), \bigcup_{\ell=1}^{k} Sw^\ell(\mathcal{G}(H)), x_1,\dots,x_k\} \subset \mathcal{O}\langle H\rangle$,

где $Sw^\ell(\mathcal{G}(H)) = \{\mathcal{G}_\alpha(H)\}_{\alpha\in Ik_\ell} \cup \{\mathcal{P}_\alpha(H)\}_{\alpha\in IP_\ell} \cup \{\mathcal{R}_\alpha(H)\}_{\alpha\in IR_\ell}$.

$$SF(\mathcal{G}(H)) = \{H, \bigcup_{\ell=1}^{k} SF^\ell(\mathcal{G}(H)), x_1,\dots,x_k\},$$

где $SF^\ell(\mathcal{G}(H)) = \{K_\alpha(H)\}_{\alpha\in Ik_\ell} \cup \{P_\alpha(H)\}_{\alpha\in IP_\alpha} \cup \{R_\alpha(H)\}_{\alpha\in IR_\ell}$

$K_{i_1,\dots,i_\ell}(H) = (\mathcal{G}_{i_1,\dots,i_\ell}(H))^\sigma = \sum h_{i_1,\dots,i_\ell, j_{\ell+1},\dots,j_k} x_{\ell+1}^{j_{\ell+1}} \cdots x_k^{j_k}$,

$P_{i_1,\dots,i_\ell}(H) = (\mathcal{P}_{i_1,\dots,i_\ell}(H))^\sigma = \sum_{j=0}^{i_\ell} x_{\ell+1}^{j} \cdot K_{i_1,\dots,i_{\ell-1},(D_{i_1,\dots,i_{\ell-1}} - i_\ell + j)}(H)$,

$R_{i_1,\dots,i_\ell}(H) = (\mathcal{R}_{i_1,\dots,i_\ell}(H))^\sigma = \sum_{j=0}^{i_\ell} x_{\ell+1}^{j+1} \cdot K_{i_1,\dots,i_{\ell-1},(D_{i_1,\dots,i_{\ell-1}} - i_\ell + j)}(H)$.

5.3. ПРЕДЛОЖЕНИЕ 8.5.3. Пусть $L \in \mathbb{Q}[\omega][x]$, $T \in L_c$, $\deg L > 0$, $L = \sum_{(i_1,\dots,i_k)} \ell_{i_1,\dots,i_k} x_1^{i_1} \cdots x_k^{i_k}$, $\ell_{i_1,\dots,i_k} \in \mathbb{Q}[\omega]$

Предположим, что схема Горнера L в $\mathcal{O}\langle L\rangle$ обладает следующими свойствами:

1. Для всякого $h \in SF(\mathcal{G}(L)) \setminus L$: $h(T) \notin \mathbb{Q}$;

2. $(K_{i_1,\dots,i_{\ell-1},(D_{i_1,\dots,i_{\ell-1}} - t)}(L))(T) \neq (P_{i_1,\dots,i_{\ell-1},t}(L))(T)$,

при всех ℓ, t; $(i_1,\dots,i_{\ell-1})$;

3. $(K_{i_1,\dots,i_{\ell-1},(D_{i_1,\dots,i_{\ell-1}} - t)}(L))(T) \neq (R_{i_1,\dots,i_{\ell-1},t}(L))(T)$,

при всех ℓ, t, $(i_1,\dots,i_{\ell-1})$

4. Для любых $h_1 \in SF^{\ell}(\mathscr{G}(L))$, $h_2 \in SF^{m}(\mathscr{G}(L))$, $m \neq \ell$: $h_1(T) \neq h_2(T)$ в том случае, если h_1 или h_2 нетривиально зависит от x и $h_1 \neq h_2$;

5. Для всякого $h \in SF(\mathscr{G}(L))$: $h(T) \neq -N_i$, если $h \neq X_i$.

Тогда для функции $\varphi_{\mathcal{B}}(L)$ найдется схема вычисления Ψ в $\mathfrak{N}(\{e_{i_1,\dots,i_k}\}_{(i_1,\dots,i_k)}, \mathcal{B}, x)$, удовлетворяющая требованиям предложения 8.5.I.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Построим схему Ψ вычисления $\varphi_{\mathcal{B}}(L)$ в два этапа:

I. Заменим в схеме $\mathscr{G}(L) \in \mathfrak{N}(\{e_{i_1,\dots,i_k}\}_{(i_1,\dots,i_k)}, x)$ каждое подслово X_i на $(X_i : B_i)$ для $i \in \overline{1:k}$.

2. Заменим в получившейся таким образом схеме каждое подслово $e_{i_1,\dots,i_k}$ на подслово

$$((\underbrace{B_1 \times (B_1 \times \dots \times (B_1}_{i_1} \times (\underbrace{B_2 \times \dots \times (B_2}_{i_2} \times (B_3 \times \dots \times (\underbrace{B_k \times \dots \times (B_k}_{i_k} \times (B_{k+1} \times e_{i_1,\dots,i_k})) \dots) \dots) \dots)) \dots)) : B_{k+1})$$

и, тем самым, получим схему Ψ вычисления $\varphi_{\mathcal{B}}(L)$ в $\mathfrak{N}(\{e_{i_1,\dots,i_k}\}_{(i_1,\dots,i_k)}, \mathcal{B}, x)$. Множество $SF(\Psi)$ состоит из девяти подмножеств $\mathbb{Q}(\mathcal{N}, \mathcal{B})(x)$:

/I/ $\varphi_{\mathcal{B}}(L) = L$,

/2/ $\{B_1^{i_1} \cdot \ldots \cdot B_\ell^{i_\ell} \cdot K_{i_1,\dots,i_\ell}(L)\}_{\ell=1,\dots,k}$, $(i_1,\dots,i_\ell) \in IK_\ell(L)$,

/3/ $\{B_1^{i_1} \cdot \ldots \cdot B_\ell^{i_{\ell-1}} \cdot B_\ell^{D_{i_1\dots i_\ell}-t} \cdot P_{i_1,\dots,i_{\ell-1},t}(L)\}_{\ell=1,\dots,k}$, $(i_1,\dots,i_{\ell-1},t) \in IP_\ell(L)$,

/4/ $\{B_1^{i_1} \cdot \ldots \cdot B_\ell^{D_{i_1\dots i_{\ell-1}}-t-1} \cdot R_{i_1,\dots,i_{\ell-1},t}\}_{\ell=1,\dots,k}$, $(i_1,\dots,i_{\ell-1},t) \in IR_\ell(L)$,

/5/ $\{\frac{X_i}{B_i}\}_{i=1,\dots,k}$,

/6/ $\{X_i\}_{i=1,\dots,k}$,

/7/ $\{B_i\}_{i=1,\dots,k}$,

/8/ $\{B_1^{j_1} \cdot \ldots \cdot B_k^{j_k} \cdot B_{k+1} \cdot e_{i_1,\dots,i_k}\}_{(i_1,\dots,i_k)}$, $j_z \in \begin{cases} \{0\} & \text{при } j_{z+1} < i_{z+1} \\ \{0, i_z\} & \text{при } j_{z+1} = i_{z+1} \end{cases}$

/9/ $\{e_{i_1,\dots,i_k}\}_{(i_1,\dots,i_k)}$.

Проверка невырожденности Ψ в точке T сводится к разбору сорока пяти различных вариантов /каждый вариант-сравнени значений в точке T элемента из группы (i) с элементом группы (j). На табл. 2 изображена матрица 9х9, столбцы и строки которой занумерованы нашими группами полиномов. В клетке $((i),(j))$ указана причина, в соответствии с которой не совпадающие функции из групп $(i),(j)$ принимают в точке T различные значения. /Значения рассматриваются, напомним, как элементы $\mathbb{Q}(\delta,\mathcal{B})$ ./

Таблица 2

	/I/	/2/	/3/	/4/	/5/	/6/	/7/	/8/	/9/
/I/	I	I	I	I	I	I	I	I	I
/2/		I,4	I,2,4	I,3,4	I	5	I	I	I,4
/3/			I,4	I,4	I	5	I	I	I,4
/4/				I,4	I	5	I	I	I,4
/5/					I	I	ж	I	I
/6/						5	ж	I	5
/7/							жж	жж	жж
/8/								жж	жж
/9/									жж

Цифры в клетках таблицы означают номера предположений относительно $\mathcal{G}(L)$ из условия предложения. /ж/ - всегда одна из сравниваемых функций нетривиально зависит от параметра, от которого другая не зависит. /жж/ - функции , значения которых мы сравниваем, являются константами в $\mathbb{Q}(\delta,\mathcal{B})$.

5.4. ПРЕДЛОЖЕНИЕ 8.5.4. Пусть $F \in \mathbb{R}_{\mathbb{Q}}[x]$, $\deg F > 0$.

Тогда для $\varphi_\nu(F) \in \mathbb{Q}[\nu][x]$ и его схемы Горнера справедливы предположения I/ - 5/ предложения 8.5.3.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 5.4.1. Рассмотрим, как в п. 5° § 5, действие $At_k(\mathbb{Q}(\nu))$ на $\mathbb{Q}^k(\nu)$. Определим согласованное с этим действием действие $At_k(\mathbb{Q}(\nu))$ на $\mathbb{Q}(\nu)(x)$:

$$L_B(x) = L(x_B) \qquad \text{для } B \in At_k(\mathbb{Q}(\nu)),\ L \in \mathbb{Q}(\nu)(x)$$

Тогда $L_{B\cdot C} = (L_C)_B = L(x_{B\cdot C})$. Напомним, что $\nu = \left(\begin{pmatrix} N_{11} & & \mathbb{O} \\ & \ddots & \\ N_{k1} & \cdots & N_{kk}\end{pmatrix}, \begin{pmatrix} N_1 \\ \vdots \\ N_k\end{pmatrix}\right)$ мы рассматриваем как элемент $At_k(\mathbb{Q}(\nu))$.

Отождествим $F \in \mathbb{R}_\mathbb{Q}(x)$ с его образом при тривиальном вложении $\mathbb{R}_\mathbb{Q}[x] \cong \mathbb{Q}[x] \subset \mathbb{Q}(\nu)(x)$. Тогда $\varphi_\nu(F) = F_\nu$. Нас, стало быть, интересует схема Горнера F_ν как функции $(\mathbb{Q}(\nu))^k \to \mathbb{Q}(\nu)$ и свойства множества значений функций из $SF(F_\nu)$ в точке $T = \mathbb{O}_{\nu^{-1}} = (-N_1, \ldots, -N_k) \in (\mathbb{Q}(\nu))^k$

5.4.2. Рассмотрим в $At_k(\mathbb{Q}(\nu))$ наборы элементов $\{\nu_i\}_{i=0}^k$, $\{\nu^i\}_{i=0}^k$:

$$\nu_i = \left(\begin{pmatrix} 1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & \mathbb{O} & \\ & & 1 & 0 & & & \\ & & 0 & N_{i,i} & 0 & & \\ & & 0 & N_{i+1,i} & 1 & & \\ & \mathbb{O} & \vdots & \vdots & & \ddots & \\ & & 0 & N_{k,i} & 0 & & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ N_i \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}\right), \quad \nu^i = \left(\begin{pmatrix} N_{11} & & & & & \\ N_{21} & N_{22} & & & \mathbb{O} & \\ \vdots & & \ddots & & & \\ \vdots & & & N_{i,i} & & \\ N_{i+1,1} & \cdots & & N_{i+1,i} & 1 & \\ \vdots & & & \vdots & \mathbb{O} & \ddots \\ N_{k,1} & \cdots & & N_{k,i} & & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} N_1 \\ N_2 \\ \vdots \\ N_i \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}\right),$$

$\nu^0 = \nu_0 = (E, \mathbb{O})$.

Необходимое нам свойство этих наборов состоит в том, что

$$\nu^i = \nu_1 \cdot \nu_2 \cdot \ldots \nu_i = \nu^{i-1} \cdot \nu_i .$$

Положим, кроме того, $\nu_i^1 = \left(\begin{pmatrix} N_{i,i} & & \mathbb{O} \\ N_{i+1,i} & 1 & \\ \vdots & & \ddots \\ N_{k,i} & \mathbb{O} & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} N_i \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}\right) \in At_{k-i+1}(\mathbb{Q}(\nu))$.

5.4.3. Займемся вычислением значений в точке $O_{\nu^{-1}} = T$ функций из $SF(\mathcal{G}(F_\nu))$ /см. п. 5.2/. В силу сказанного в п. I доказательства, имеем: $(K_{i_1,\ldots,i_e}(F_\nu))(T) =$
$(K_{i_1,\ldots,i_e}(F_\nu))(\mathbb{O}_{\nu^{-1}}) = (K_{i_1,\ldots,i_e}(F_\nu))_{\nu^{-1}}(\mathbb{O})$,
$(P_{i_1,\ldots,i_e}(F_\nu))(T) = (P_{i_1,\ldots,i_e}(F_\nu))_{\nu^{-1}}(\mathbb{O})$,

$(R_{i_1,\dots,i_e}(F_\nu))(T) = (R_{i_1,\dots,i_e}(F_\nu))_{\nu^{-1}}(\mathbb{0})$.

Тривиальные выкладки показывают:

$(K_{i_1,\dots i_e}(F_\nu))_{\nu^{-1}} = (K_{i_1\dots i_e}(F_{\nu^e}))_{(\nu^e)^{-1}} = (K_{i_e}((K_{i_1,\dots i_{e-1}}(F_{\nu^{e-1}}))_{\nu_e}))_{(\nu_e)^{-1}}$,

и, поскольку $K_{i_1,\dots,i_{e-1}}(F_{\nu^{e-1}})$ можно рассматривать как элемент $\mathbb{Q}(\nu)[x_e,\dots,x_k]$, имеем:

$$(K_{i_1\dots i_e}(F_\nu))_{\nu^{-1}} = (K_{i_e}((K_{i_1\dots i_{e-1}}(F_{\nu^{e-1}}))_{\nu'_e}))_{(\nu'_e)^{-1}}. \qquad /1/$$

Аналогично,

$$(P_{i_1,\dots i_{e-1},t}(F_\nu))_{\nu^{-1}} = (P_t((K_{i_1,\dots i_{e-1}}(F_{\nu^{e-1}}))_{\nu'_e}))_{(\nu'_e)^{-1}} \qquad /2/$$

и

$$(R_{i_1,\dots,i_{e-1},t}(F_\nu))_{\nu^{-1}} = (R_t((K_{i_1,\dots i_{e-1}}(F_{\nu^{e-1}}))_{\nu'_e}))_{(\nu'_e)^{-1}} \qquad /3/$$

5.4.4
Пусть $L \in \mathbb{Q}[\nu^{e-1}][x_e,\dots x_k] \subset \mathbb{Q}[\nu][x]$,

$L = \sum_{(i_e,\dots,i_k)} a_{i_e,\dots i_k} x_e^{i_e}\dots x_k^{i_k}$, $D = \deg_{x_e} L$.

Выпишем выражения для

$$(K_t(L_{\nu'_e}))_{(\nu'_e)^{-1}}(0),\ (P_t(L_{\nu'_e}))_{(\nu'_e)^{-1}}(0),\ (R_t(L_{\nu'_e}))_{(\nu'_e)^{-1}}(0)$$

как элементов $\mathbb{Q}(\nu^e)$. При $t \in \overline{0:D}$,

$K_t(L_{\nu'_e}) = B(L)\binom{D}{t} N_e^t + C_e^1(L)$, где

где $B(L) = \sum_{i_e+\dots+i_k=\deg L} a_{i_e,\dots,i_k} N_{ee}^{i_e}\cdot\dots\cdot N_{ke}^{i_k}$, $C_0^1(L) = 0$,

$C_t^1(L) \in \mathbb{Q}[\nu^e][x_{e+1},\dots,x_k]$,

$\deg_{N_e} C_t^1(L) < t$ при $t = 1,\dots,D$.

Следовательно,

$$(K_t(L_{\nu'_e}))_{(\nu'_e)^{-1}}(0) = B(L)\binom{D}{t} N_e^t + \overline{C}^1(L), \qquad /4/$$

где $\overline{C}_t(L) \in \mathbb{Q}(\nu)$, $\overline{C}_0^1(L) = 0$, $\deg_{N_e}\overline{C}^1(L) < t$

Аналогично, при $t \in \overline{1:D-1}$:

$$(P_t(L_{\mathcal{N}'_e}))_{(\mathcal{N}'_e)^{-1}}(0) = B(L)\binom{D-1}{t}N_e^t + \overline{C}_t^2(L), \qquad /5/$$

где $\deg \overline{C}_t^2(L) < t$;

и при $t \in \overline{1:D}$:

$$(R_t(L_{\mathcal{N}'_e}))_{(\mathcal{N}'_e)^{-1}}(0) = -B(L)\binom{D-1}{t}N_e^{t+1} + \overline{C}_t^3(L), \qquad /6/$$

где $\deg_{N_e} \overline{C}_t^3 < t+1$

5.4.5. Теперь, применяя /4/, /5/, /6/ к /1/, /2/, /3/, получаем: при $\ell \in \overline{1:K}$, $i_\ell \in \overline{0:D_{i_1,\dots i_{\ell-1}}(F_\mathcal{N})}$; $D_{i_1\dots i_{\ell-1}}(F_\mathcal{N}) > 0$:

$$(K_{i_1,\dots i_\ell}(F_\mathcal{N}))(T) = B_{i_1,\dots,i_{\ell-1}}\binom{D_{i_1,\dots i_{\ell-1}}}{i_\ell}N_e^{i_\ell} + \overline{C}^1_{i_1,\dots,i_\ell}, \text{ где} \qquad /7/$$

$\overline{C}^1_{i_1,\dots,i_\ell}, B_{i_1\dots i_{\ell-1}} \in \mathbb{Q}(\mathcal{N}^e)$; $B_{i_1\dots i_{\ell-1}}$ – нетривиально зависит от $N_{ee},\dots,N_{ke}$, $\deg_{N_e}\overline{C}^1_{i_1,\dots i_\ell} < i_\ell$.

При $D_{i_1,\dots i_{\ell-1}}(F_\mathcal{N}) = 0$: $K_{i_1,\dots,i_{\ell-1},0}(F_\mathcal{N}) \underset{\mathbb{Q}(\mathcal{N})(x)}{=} K_{i_1,\dots,i_{\ell-1}}(F_\mathcal{N})$ по определению.

Аналогично: при $t \in 1,\dots,D_{i_1,\dots,i_{\ell-1}}$:

$$(P_{i_1,\dots,i_{\ell-1},t}(F_\mathcal{N}))(T) = B_{i_1,\dots i_{\ell-1}}\binom{D_{i_1\dots i_{\ell-1}}-1}{t}N_e^t + \overline{C}^2_{i_1,\dots,i_{\ell-1},t}, \qquad /8/$$

где $\overline{C}^2_{i_1\dots i_{\ell-1},t} \in \mathbb{Q}(\mathcal{N}^e)$, $\deg_{N_e}\overline{C}^2_{i_1,\dots,i_{\ell-1},t} < t$

и при $t = 1,\dots,D_{i_1,\dots,i_{\ell-1}}$:

$$(R_{i_1,\dots i_{\ell-1},t}(F_\mathcal{N}))(T) = -B_{i_1,\dots,i_{\ell-1}}\binom{D_{i_1,\dots i_{\ell-1}}-1}{t}N_e^{t+1} + \overline{C}^3_{i_1,\dots,i_{\ell-1},t} \qquad /9/$$

где $\overline{C}^3_{i_1,\dots,i_{\ell-1},t} \in \mathbb{Q}(\mathcal{N}^e)$, $\deg_{N_e}\overline{C}^3_{i_1,\dots,i_{\ell-1},t} < t+1$

5.4.6. Из выражений /7/, /8/, /9/ легко вывести справедливость предположений I/ - 5/ предложения 6.5.3. Справедливость I/ тривиальна. Из /7/, /8/ следует, что в 2/ достаточно проверить ситуацию $D_{i_1,\ldots,i_{\ell-1}} - t = t$, но в этом случае равенство в 2/ означает, что $\binom{D_{i_1,\ldots,i_{\ell-1}}}{t} = \binom{D_{i_1,\ldots,i_{\ell-1}} - 1}{t}$, что невозможно, поскольку $t \geq 1$.

Аналогично, из /7/, /9/ получаем 3/.

4/: Пусть $h_1 \in SF^{\ell}(\mathcal{G}(F_\lambda))$, $h_2 \in SF^{m}(\mathcal{G}(F_\lambda))$, $\ell > m$. Тогда, либо $h_1 \underset{\mathbb{Q}(\lambda)(\alpha)}{=} h_2$, либо, в противном случае, $h_1(T)$ нетривиально зависит от $N_{\ell\ell}, \ldots, N_{k\ell}$, в то время как $h_m(T)$ от этих переменных не зависит.

5/: Для $h \in SF(\mathcal{G}(F_\lambda)) \setminus \{x_1, \ldots, x_k\}$ коэффициент при N_i в $h(T)$ не может быть рациональным, стало быть, $h(T) \neq N_i$ при $i = 1, \ldots, k$. $\square$

§ 9. Замечания об оценках в теоремах A, B, C.

1°. Оценка в теореме A. 2°. Оценка в теоремах B, C.

0°. Все конструкции в доказательствах теорем A, B, C явные, что позволяет выписать грубые оценки на число точек соответствующих конфигураций в терминах параметров регулярных отображений, задающих алгебраические множества.

Пусть $F = (F_1, \ldots, F_m) \in \mathbb{R}^m_{\mathbb{Z}}[x_1, \ldots, x_k]$, т.е. F - регулярное отображение, заданное над $\mathbb{Z}$, D - максимальная степень полиномов $F_1, \ldots, F_m$, μ - максимальный модуль коэффициента полиномов $F_1, \ldots, F_m$, $k, D, \mu \geq 1$.

1°. Оценка в теореме A. Предположим, что в формулировке теоремы A, $M = \{x \in \mathbb{R}^k \mid F_1(x) = \ldots = F_m(x) = 0\}$. Тогда найдется натуральное число $\ell < m \cdot \left(14 \cdot \binom{k+D}{D} + 4\mu\right)$

и комбинаторный род $\alpha \in F_\ell(\overline{1:\ell})$, удовлетворяющий утверждению теоремы A, т.е. содержащий в себе открытое по Зарисскому подмножество, составленное из целых к типов, бирегулярно изоморфное M.

Оценка получается в предположении, что $\alpha = \mathfrak{I}(M_0^{\mathcal{Y}_{orn}(F)})$ /см. § 6 п. I/, где $\mathcal{Y}_{orn}(F) \in \mathfrak{M}(0,1,x_1,\ldots,x_n)$ – схема Горнера $\mathcal{Y}(F) \in \mathfrak{M}\langle F\rangle$ /см. п. 5.2 § 8/, дополненная тривиальными схемами вычисления коэффициентов в $\mathfrak{M}(0,1)$.

2°. Оценки в теоремах B, C. Предположим, что в формулировке теоремы B, $N = F_+^I = \{x \in \mathbb{R}^k \mid F_i(x) = 0$ при $i \in I$, $F_i(x) > 0$ при $i \in \overline{1:m} \setminus I\}$, а в формулировке теоремы C,

$L = F_+ = \{x \in \mathbb{R}^k \mid F_i(x) > 0$ при $i \in \overline{1:m}\}$

Тогда найдется натуральное число n:

$$n < m\left(2mD + \frac{\frac{(k+1)^2 + 5(k+1)}{2}}{2mD}\right)\cdot \mu^m$$

и ориентированные комбинаторные типы базисных конфигураций $\beta \in \mathfrak{Jl}_0(\overline{1:n})$, $\gamma \in \mathfrak{Rl}_0(\overline{1:n})$, удовлетворяющие, соответственно, утверждениям теорем B и C, т.е. $\beta \approx N$, $\gamma \approx L$.

Эта оценка получается с помощью подсчета числа операций в схеме Горнера и оценки Маклорена границы корней полиномов в предложении 7.4.3.

Г Л А В А IУ

ПРИЛОЖЕНИЯ К ВЫПУКЛОЙ ГЕОМЕТРИИ И ТЕОРИИ ПАРЕТО-СМЕЙЛА. ПРИМЕРЫ

§ 10. Топология многообразий комбинаторных типов выпуклых многогранников.

0°. Описание основного результата. 1°. Комбинаторные типы выпуклых многогранников /определения, простейшие свойства/. 2°. Формулировка теоремы Е. 3°. Диаграммы Гейла и двойственность Гейла. 4°. Плоские базисные конфигурации и трехмерные базисные диаграммы Гейла. 5°. Доказательство теоремы Е.

0°. Формулировка основного результата. Два d -мерных выпуклых многогранника с n перенумерованными вершинами комбинаторно эквивалентны, если соответствие между вершинами, сохраняющее нумерацию, индуцирует изоморфизм решеток граней. В настоящем параграфе /п. 2/ для классов комбинаторной эквивалентности многогранников, наделенных естественной структурой полуалгебраического многообразия, заданного над $\mathbb{Q}$, будет получена теорема Е, аналогичная теоремам В, С /§ 2/.

Любой комбинаторный тип трехмерных многогранников стабильно эквивалентен $GL_3(\mathbb{R})$. Это есть простое следствие, вытекающее из доказательства классической теоремы Штейница о реализуемости двумерных сферических комплексов граничным комплексом трехмерного многогранника /см. [28] /. При $n-d=3$ любой комбинаторный тип d-мерных многогранников с n вершинами стабильно эквивалентен $GL_d(\mathbb{R})$ /это тривиальное следствие двойственности Гейла /Теорема 10.3/ и рассмотрений плоских диаграмм Гейла /см. [27] стр. 108//.

Однако, при $d=4$, $n=10$ уже возникает нетривиальный комбинаторный тип выпуклых многогранников /см. П. 2 § 11/.

Теорема Е показывает, что при достаточно большом d комбинаторный тип d -мерных выпуклых многогранников с $d+4$ вершинами, может оказаться стабильно эквивалентным /с точностью до прямого сомножителя $GL_d(\mathbb{R})$ / любому наперед заданному элементарному множеству, причем, всякое открытое элементарное множество можно так реализовать комбинаторным типом симплициальных многогранников.

<u>I$^{\circ}$. Комбинаторные типы выпуклых многогранников /определения, простейшие свойства/.</u> Возьмем некоторое конечное множество индексов S . Обозначим через $pol(S,d)$ множество всех d -мерных выпуклых многогранников в $\mathbb{R}^d$ с вершинами занумерованными множеством S . Многогранник d-мерен, если размерность его аффинной оболочки равна d . Пусть $ac(S,d)$ - пространство аффинных конфигураций в $\mathbb{R}^d$ с точками занумерованными S , топологией и геометрией $(\mathbb{R}^d)^S$. Инъекция $pol(S,d) \to ac(S,d)$ сопоставляющая многограннику аффинную конфигурацию его вершин отождествляет $pol(S,d)$ с некоторым элементарным подмножеством $ac(S,d)$. Два многогранника <u>комбинаторно эквивалентны</u>, если соответствие между вершинами, сохраняющее нумерацию, индуцирует изоморфизм решеток граней. Каждому многограннику $p \in pol(S,d)$ соответствует абстрактный комплекс $compl(p)$ на множестве S /[7], с 77/ : грани $compl(p)$ - подмножества S , являющиеся набором индексов вершин граней p . Комбинаторная эквивалентность многогранников p^1 и $p^2 \in pol(S,d)$ имеет место тогда и только тогда, когда $compl(p^1) = compl(p^2)$. Класс комбинаторной эквивалентности многогранников мы называем <u>комбинаторным типом</u> многогранников. Комбинаторный тип, разумеется, всякий раз некоторое элементарное подмножество в $pol(S,d)$, заданное над $\mathbb{Z}$. Множество комбинаторных типов d -мерных многогранников с вершинами занумерованными S обозначим $Tpol(S,d)$.

<u>1.1°. Базисные многогранники.</u> Аффинный автоморфизм пространства $\mathbb{R}^d$ переводит любой d-мерный многогранник в комбинаторно эквивалентный ему многогранник. Таким образом, на каждом комбинаторном типе d-мерных многогранников возникает свободное действие группы $AGL_d(\mathbb{R})$. Фактор-пространство удобно представлять себе в виде комбинаторных типов базисных многогранников.

Рассмотрим некоторый абстрактный комплекс $\mathcal{C}$ на множестве S. Подмножество $S' \subset S$ назовем k-флагом комплекса $\mathcal{C}$, если $|S'| = k+1$ и элементы S' можно упорядочить $(S' = (s'_0, \dots, s'_k))$ таким образом, что для всякого $\ell \in \overline{0:k}$ найдется грань комплекса $\mathcal{C}$ размерности ℓ содержащая $\{s'_0, \dots, s'_\ell\}$.

Пусть $p \in pol(S, d)$ и множество $S' \subset S$ является d-флагом комплекса $compl(p)$. Тогда, очевидным образом, вершины $\{p_j\}_{j \in S'}$ многогранника p находятся в общем положении в пространстве $\mathbb{R}^d$.

Зафиксируем некоторое множество $T \subset S$ такое, что $|T| = d$. Кроме того, зафиксируем элемент $\xi \in S \setminus T$. Предположим, что орты стандартного базиса B пространства $\mathbb{R}^d$ занумерованы множеством T, т.е. $B = \{e_t\}_{t \in T}$. Базисным многогранником будем называть всякий многогранник p из $pol(S, d)$ такой, что $\{T, \xi\}$ – d-флаг комплекса $compl(p)$ и, кроме того, $p_t = e_t$ при $t \in T$, $p_\xi = \mathbb{O}$. Подмножество всех базисных многогранников в $pol(S, d)$ мы будем обозначать через $\mathcal{B}pol(S, d)$. Естественно определяются комбинаторные типы базисных многогранников. Множество всех комбинаторных типов базисных d-многогранников с вершинами занумерованными S обозначим через $T\mathcal{B}pol(S, d)$. Каждому к.типу базисных многогранников $\alpha \in T\mathcal{B}pol(S, d)$ отвечает единственный к.тип $\mathcal{U}(\alpha) \in Tpol(S, d)$ такой, что $\alpha \subset \mathcal{U}(\alpha)$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 10,I.I. Для любого базисного к.типа $\alpha \in \mathrm{Tbpol}(S,d)$ к.тип $U(\alpha)$ бирегулярно изоморфен $\alpha \times AGL_d(\mathbb{R})$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Множество $\alpha \subset U(\alpha)$ является регулярным сечением расслоения $U(\alpha)$ на орбиты действия $AGL_d(\mathbb{R})$ /Для всякого $p \in U(\alpha)$ вершины $P_{\{T,\xi\}}$ находятся в общем положении, поскольку $\{T,\xi\}$ -флаг $\mathrm{compl}(p)$ и, следовательно, найдется единственное аффинное преобразование $A_p \in AGL_d(\mathbb{R})$ такое, что $A_p(P_t) = e_t$ при $t \in T$, $A_p(P_\xi) = \mathbb{O}$ /. □

2°. Формулировка теоремы Е. В настоящем пункте мы сформулируем нашу основную теорему о комбинаторных типах выпуклых многогранников и приведем план ее доказательства.

ТЕОРЕМА Е. I. Для любого натурального числа k и любого элементарного подмножества N пространства $\mathbb{R}^k$, заданного над $\mathbb{Q}$, найдется натуральное число d и комбинаторный тип d -мерных выпуклых многогранников с $d+4$ вершинами, стабильно эквивалентный $N \times GL_d(\mathbb{R})$.

2. Если множество N - открыто, то при некотором d найдется комбинаторный тип d-мерных симплициальных выпуклых многогранников с $d+4$ вершинами стабильно эквивалентный $N \times$ $\times GL_d(\mathbb{R})$.

ОЦЕНКИ. Пусть $F = (F_1, \dots, F_m) \in \mathbb{R}^m_{\mathbb{Z}}[X_1, \dots, X_k]$, т.е. $\mathbb{F}$ - регулярное отображение $\mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^m$, заданное над $\mathbb{Z}$. Пусть D - максимальная степень полиномов $F_1, \dots, F_m$ и μ - максимум модулей коэффициентов $F_1, \dots, F_m$; $k, m, D, \mu > 0$. Предположим, что в формулировке теоремы Е $N = F_+^I = \{ x \in \mathbb{R}^k \mid F_i(x) = 0 \text{ при } i \in I,\ F_i(x) > 0$ при $i \in \overline{1:m} \setminus I \}$ /в предположениях п. 2 теоремы, $I = \varnothing$ /. Тогда в утверждениях пп. I, 2 теоремы число d можно всегда выбирать строго меньшим

$$\left(m \binom{2mD + \frac{k^2 + 5(k+1)}{2}}{2mD} \mu^m \right)^3 .$$

<u>План доказательства теоремы Е.</u> Двойственность Гейла /п. 3/ сопоставляет каждому базисному d-многограннику с n вершинами его диаграмму Гейла - некоторую $n-d-1$ мерную конфигурацию из n векторов. На комбинаторном типе базисных многогранников это отображение является бирегулярным изоморфизмом на некоторый, естественно определенный, комбинаторный тип базисных диаграмм Гейла. Обратно, всякому к.типу $(n-d-1)$- базисных диаграмм Гейла из n векторов соответствует бирегулярно изоморфный к.тип d -мерных многогранников с n вершинами. Таким образом, нам достаточно научиться строить по элементарному множеству N стабильно эквивалентный ему к.тип трехмерных базисных диаграмм Гейла. В [24], [18] используется конструкция, сопоставляющая комбинаторному типу проективных конфигураций комбинаторный тип трехмерных диаграмм Гейла. В п. 4 мы предлагаем усовершенствование этой конструкции, приводящие к сопоставлению ориентированному комбинаторному типу базисных конфигураций стабильно эквивалентного ему к.типа трехмерных диаграмм Гейла. Тем самым, теорема Е оказывается следствием теорем В, С § 2.

<u>3°. Диаграммы Гейла и двойственность Гейла.</u> Пусть, как и прежде, в множестве S отмечено подмножество T, $|T| = d$ и, кроме того, отмечен элемент $\xi \in S \setminus T$. Положим $V = S \setminus \{T, \xi\}$ $|V| = |S| - d - 1$. Рассмотрим пространство $\mathbb{R}^V$. Пусть $\{e_v\}_{v \in V}$ - стандартный базис $\mathbb{R}^V$. Рассмотрим подмножество $\mathcal{G}d(S,V)$ множества векторных конфигураций точек пространства $\mathbb{R}^V$.

Полагаем: $\mathcal{G}d(S,V) = \{\{c_s\}_{s\in S} \mid c_s = e_s$ при $s \in V$, $c_\xi = \begin{pmatrix}-1\\ \vdots \\ -1\end{pmatrix}$, $|H^+ \cap \{c_s\}_{s\in S}| \geq 2$ для любого открытого полупространства H^+ в $\mathbb{R}^V$, порожденного ориентированным линейным $(|V|-1)$ - мерным подпространством H $\}$.

Элементы $\mathcal{G}d(S,V)$ - <u>базисные диаграммы Гейла.</u>

Сопоставим конфигурации $c \in \mathcal{B}gd(S,V)$ абстрактный комплекс $gcompl(c)$ на множестве S следующим образом: Подмножество $K \subset S$ является гранью $gcompl(c)$, если $0 \in \mathrm{relint\,cone}(\{c_i\}_{i \in S \setminus K})$. Нетрудно показать, что в наших обозначениях $gcomp(c)$ – d-мерный абстрактный комплекс на S. Диаграммы $c_1, c_2 \in \mathcal{B}gd(S,V)$ комбинаторно эквивалентны, если $gcomp(c_1) = gcomp(c_2)$. Множество комбинаторных типов базисных диаграмм Гейла обозначим через $T\mathcal{B}gd(S,V)$.

Рассмотрим отображение $GT: T\mathcal{B}gd(S,V) \to T\mathcal{B}pcl(S,d)$, сопоставляющее к.типу $\alpha \in T\mathcal{B}gd(S,V)$ к.тип $\beta = GT(\alpha)$ для которого $compl(\beta) = gcompl(\alpha)$.

ТЕОРЕМА 10,3. /о двойственности Гейла/. Отображение корректно определено и является биекцией. Кроме того, для любого к.типа диаграмм Гейла $\alpha \in T\mathcal{B}gd(S,V)$ базисный к.тип многогранников $GT(\alpha)$ бирегулярно изоморфен α.

Доказательство можно найти в [21], [27], [7]. Не умаляя общности, вместо к.типов выпуклых многогранников можно рассматривать к.типы выпуклых конусов. Удобно пространство d-мерных конусов с n вершинами представлять в виде многообразия Грассмана $G(n,d)$. Конуса-проекции стандартного координатного конуса $\mathbb{R}^n_+$ на d-мерные линейные под пространства. В этом случае диаграмма Гейла конуса соответствующего подпространству $H \in G(n,d)$ есть проекция стандартного базиса $\mathbb{R}^n$ на ортогональное дополнение к H. При этом к.тип конусов переходит в к.тип диаграмм и изоморфизм индуцируется каноническим изоморфизмом $G(n,d) \cong G(n,n-d)$. Такой подход предложен А.М.Вершиком и отражен в [12].

4º Плоские базисные конфигурации и трехмерные диаграммы Гейла.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 10,4. Для любого ор.к.типа базисных конфигураций $\alpha \in T\mathcal{B}c(S,2)$ найдется к.тип трехмерных базисных конфигураций Гейла $\beta \in T\ell gd(S \cup L, 3)$ $/S \cap L = \emptyset/$, стабильно эквивалентный α . При этом L можно выбрать так, чтобы $|L| \leqslant \binom{|S|}{3}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть в множестве S зафиксировано подмножество $I = \{0, \infty, \alpha, E\}$. Пусть в $\mathbb{R}^3$ - $\{e_0, e_\infty, e_\alpha\}$ - стандартный базис, $e_E = \left(\begin{smallmatrix}1\\1\\1\end{smallmatrix}\right)$.

Напомним, что проективную базисную конфигурацию мы отождествляем с векторной трехмерной конфигурацией $p^{\vartheta}(c)$ специального вида /см. Гл. I, § I п. 2, п. 7.3/. При этом базисные конфигурации принадлежат одному ориентированному комбинаторному типу, если совпадают ориентации троек векторов с одинаковыми индексами.

Возьмем в $\mathbb{R}^3$ некоторую базисную конфигурацию $c \in \ell c(S), c \in \alpha$. Не умаляя общности мы можем считать, что: I. Для всякой собственной прямой L конфигурации C инцидентной точке c_E /см. Гл. I, § 3 п. I.2/, $c_E \in \operatorname{relint} \operatorname{cone}(L \cap C)$.

2. Для всякой пары точек c_i, c_j конфигурации C , находящихся в общем положении с точкой c_E , найдется точка c_k такая, что $c_E \in \operatorname{int} \operatorname{cone}(\{c_i, c_j, c_k\})$.

Если условия I, 2 не выполнены, то с помощью перестроек из предложений 3.2.3.I и 3.2.3.2 Гл. I мы добавим к конфигурации несколько точек так, чтобы новая конфигурация c' уже удовлетворяла I, 2 и $to(c') \approx to(c) = \alpha$. Заметим; что если конфигурация c груба, то конфигурацию c' можно так же выбрать грубой. По нашему определению отображения p^{ϑ} , $0 \notin \operatorname{relint} \operatorname{cone}(c)$. Выберем некоторое новое множество точек $\tilde{c} = \{\tilde{c}_e\}_{e \in L}$, $L \cap S = \emptyset$ таким образом, чтобы:

а/ Для любой собственной прямой L конфигурации C /см. Гл. I, § 3 п. I.2/, любой пары точек $c_i, c_j \in L$ нашлась точка $\tilde{c}_e \in \operatorname{relint} \operatorname{cone}(c_i, c_j)$

б/ Для любой тройки точек c_i, c_j, c_k нашлась точка $\tilde{c}_j$

в/ Для любой точки $\tilde{c}_e \in \tilde{C}$ найдется такая точка $c_{j(e)} \in C$, что $\tilde{c}_e \in S_{j(e)}(C)$ /см. Гл. I § 3 п. 2.3/.

г/ Если конфигурация C - груба, то конфигурация $C \cup \tilde{C}$ так же груба.

Такое множество точек можно всегда выбрать с помощью конструкций предложений 3,2.3.I и 3,2.3.2 гл. I. При этом можно считать, что $|L| = |\tilde{C}| \leq \binom{|S|}{3}$.

Рассмотрим векторную конфигурацию

$$\bar{C} = \{ C \setminus C_E, -C_E, \{-\tilde{c}_e\}_{e \in L} \}$$

Нетрудно показать, что условие б/ гарантирует нам, что $\bar{C}$ - базисная диаграмма Гейла.

Условия 1, 2, а/, б/, в/ и предложения 3,2.3.1 и 3,2.3.2 гарантируют нам, что к.тип диаграмм Гейла $g = tg(\bar{C})$, которому принадлежит диаграмма $\bar{C}$, стабильно эквивалентен $to(C)$ - ориентированному базисному к.типу конфигураций содержащему C. □

<u>5°. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ Е.</u> Доказательство п. I теоремы Е состоит в сравнении теоремы В, предложения 10,4, теоремы 10,3 и предложения 10,1.1. Для доказательства п. 2 теоремы Е необходимо сравнить теорему С, предложение 10.4, теорему 10.3 и предложение 10,1.1. Кроме того, необходимо заметить, что в силу условия г/ доказательства предложения 10,4 и теоремы 4 § 5.4 монографии [21] мы грубой конфигурации сопоставляем диаграмму Гейла симплициального многогранника.

Оценка получается сравнением оценки предложения 10,4 с оценкой в теоремах В, С /§9 п. 2/. □

§ 11. Примеры нетривиальных базисных комбинаторных типов конфигураций и многогранников.

1°. Примеры несвязных базисных ориентированных комбинаторных типов конфигураций. 2°. Пример несвязного базисного комбинаторного типа выпуклых многогранников.

1°. В настоящем пункте мы опишем пример несвязного ориентированного базисного комбинаторного типа конфигураций /16 точек/ и пример несвязного грубого базисного комбинаторного типа конфигураций /19 точек/, полученные по рецептам §§ 3 - 8.

Поскольку рисунками нагляднее представляются не ориентированные к.типы конфигураций точек, а двойственные объекты - топологические типы конфигураций прямых /отмечались во введении и в § 1/, мы кратко основываемся на этой двойственности /подробно изученной в [12], [13]/.

Полярная двойственность на проективной плоскости сопоставляет всякой конфигурации точек, занумерованных множеством S , конфигурацию прямых, занумерованных множеством S . Коллинеарные наборы точек превращаются при этом в наборы прямых лежащих в одном пучке. Таким образом, для конфигураций прямых возникает естественное определение комбинаторного типа. При этом полярная двойственность индуцирует бирегулярный изоморфизм между к.типом конфигураций точек и соответствующим к.типом конфигураций прямых. Во что полярная двойственность превращает ориентированные к.типы конфигураций точек? Пусть P - конфигурация прямых, занумерованных множеством S , содержащая четверку прямых в общем положении. Конфигурация P определяет клеточное разбиение $cc(P)$ проективной плоскости. Нульмерные клетки - точки пересечения прямых, одномерные - компоненты прямых после удаления нульмерных клеток, двумерные - компоненты плоскости, после удаления прямых кон-

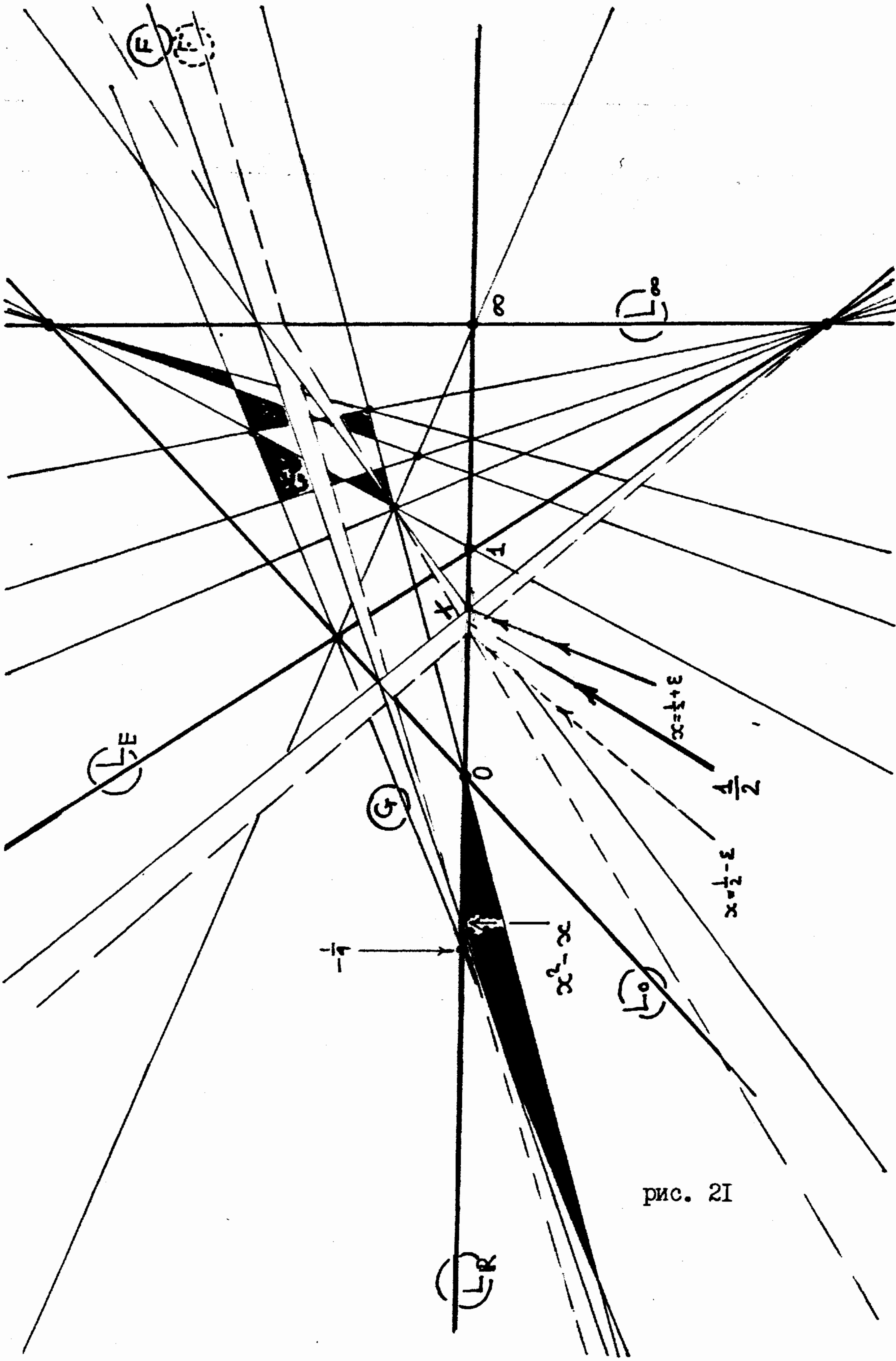


рис. 2I

фигурации P. Каждая клетка однозначно определяется списком нульмерных клеток, лежащих в её замыкании, нульмерная клетка - индексами прямых, которым она инцидентна. Конфигурации P_1 и P_2 прямых, занумерованных множеством S, гомеоморфны, если существует гомеоморфизм $P^2_{\mathbb{R}} \to P^2_{\mathbb{R}}$, переводящий конфигурацию P_1 в P_2 с сохранением нумерации прямых. В нашем случае это в точности означает, что соответствие между прямыми с одинаковыми индексами индуцирует комбинаторный изоморфизм комплексов $cc(P_1)$ и $cc(P_2)$. Класс эквивалентности по указанному отношению - топологический тип конфигураций прямых. Полярная двойственность переводит ориентированные к.типы конфигураций точек в топологические типы конфигураций прямых.

На рисунке 21 изображена полусвободная базисная конфигурация P шестнадцати прямых и порождённый ею комплекс $cc(P)$. /Прямые $L^-_{\mathbb{R}}$, L_0, L_E, L_∞, входящие в конфигурацию - фиксированный двойственный проективный базис/. Базисный топологический тип конфигураций прямых α, отвечающий $cc(P)$, стабильно эквивалентен открытому элементарному множеству $M = \{x \mid x^2 - x + \frac{1}{4} > 0\}$, имеющему две компоненты связности $M = \{x \mid x < \frac{1}{2}\} \cup \{x \mid x > \frac{1}{2}\}$. Происходит следующее: Базисный топологический тип α параметризуется координатой x точки X на прямой $L_{\mathbb{R}}$ /конфигурация однозначно строится, в силу полусвободности, по комбинаторному типу, базису и координате точки X на $L_{\mathbb{R}}$ /. Точка пересечения прямой с индексом F с прямой $L_{\mathbb{R}}$ имеет при этом координату $x^2 - x \geqslant -\frac{1}{4}$ на $L_{\mathbb{R}}$, а точка пересечения прямой с индексом G с прямой $L_{\mathbb{R}}$ имеет координату $= -\frac{1}{4}$ на $L_{\mathbb{R}}$. Для некоторого $\varepsilon > 0$ при $x \in (\frac{1}{2} - \varepsilon, \frac{1}{2}) \cup (\frac{1}{2}, \frac{1}{2} + \varepsilon)$ топологический тип конфигураций, соответствующих x, постоянен. При $x = \frac{1}{2}$ прямые с индексами G, F и прямая $L_{\mathbb{R}}$ пересекаются в одной точке. С помощью леммы 3.3.1 топологическому типу можно сопоставить грубый топологический тип конфигураций из 4 6

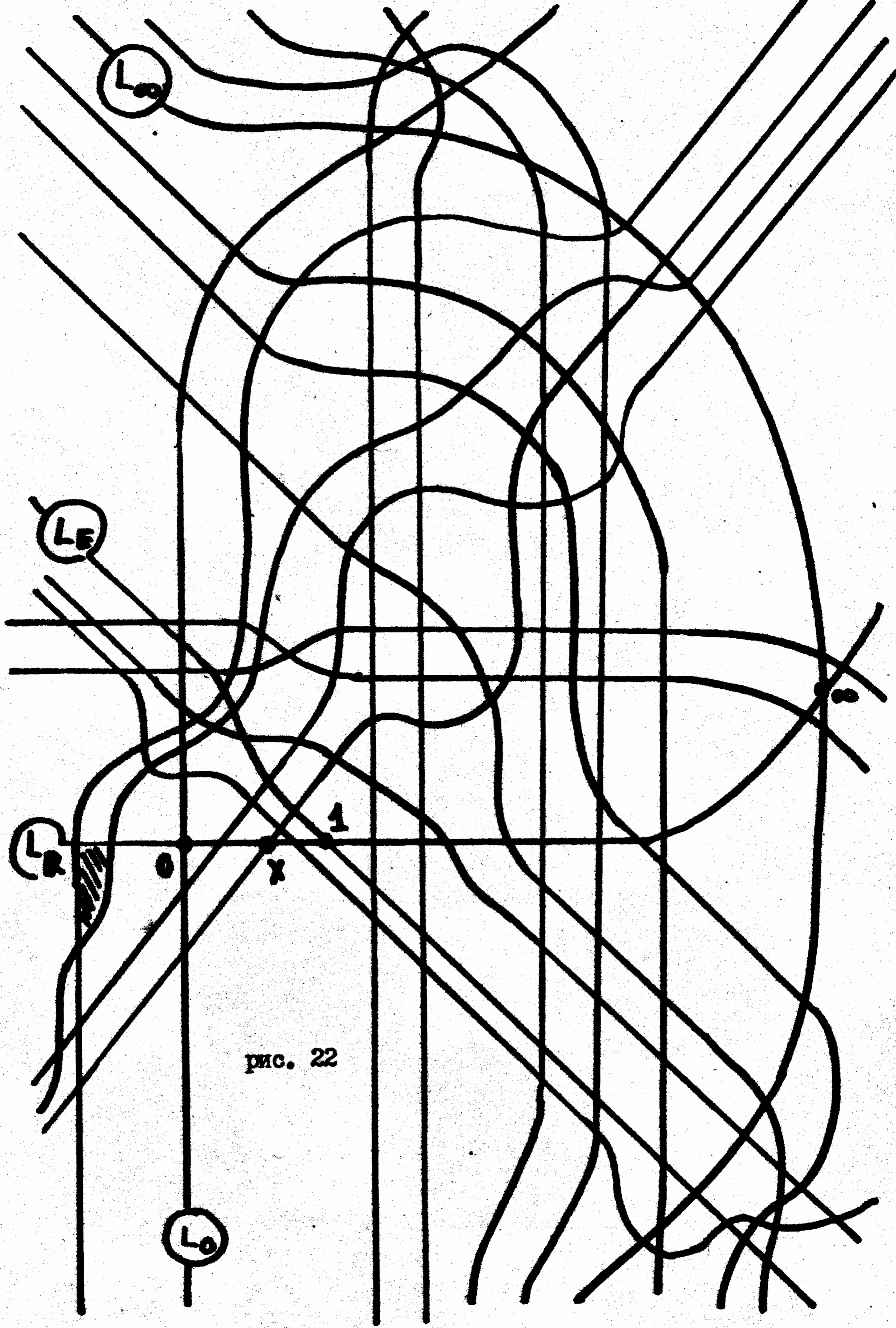


рис. 22

прямых в общем положении, стабильно эквивалентный α. Специализацией перестроек общей леммы 3.3.1 для данного случая удается получить грубый базисный топологический тип конфигураций β девятнадцати прямых в общем положении, стабильно эквивалентный α, и, следовательно, M. Клеточное разбиение проективной плоскости, отвечающее конфигурациям из β представлено на рис. 22 конфигурацией псевдолиний /для конфигураций прямых клетки получаются слишком мелкими/.

2°. Пример несвязного базисного комбинаторного типа четырехмерных многогранников с десятью вершинами.

Рассмотрим $p \in Pol(S, d)$. Пусть абстрактный комплекс граней многогранника p имеет нетривиальный комбинаторный автоморфизм σ. Долгое время стояла гипотеза о том, что для любых таких (p, σ) найдется многогранник p', комбинаторно эквивалентный p, для которого автоморфизм σ можно индуцировать аффинной симметрией пространства. В работе [23] был построен контрпример. Именно, был построен комбинаторный тип α выпуклых четырехмерных многогранников с десятью вершинами $/\alpha \in T pol(S,4), |S| = 10/$ и имеющий следующие свойства:

Абстрактный комплекс граней $compl(\alpha)$ многогранников из α обладает нетривиальным автоморфизмом σ. $/compl(\alpha)$, как и в § 10 - абстрактный комплекс на множестве S индексов вершин/. В $compl(\alpha)$ отмечена гипергрань - икосаэдр I $/ I \in compl(\alpha), I \subset S /$ в которой в свою очередь, отмечены две упорядоченные четверки индексов вершин (i_1, i_2, i_3, i_4), (j_1, j_2, j_3, j_4) такие, что:

1/ Для любого $p \in \alpha$ наборы вершин $\{p_{i_k}\}_{k=1}^{4}$, $\{p_{j_k}\}_{k=1}^{4}$ находятся в общем положении в $\mathbb{R}^4$.

2/ Для любого $p \in \alpha$ пара аффинных базисов

$(p_{i_1}, p_{i_2}, p_{i_3}, p_{i_4}), (p_{j_1}, p_{j_2}, p_{j_3}, p_{j_4})$ пространства $\operatorname{aff}(\{p_i\}_{i\in I})$ и пара аффинных базисов $(p_{\sigma(i_1)}, \ldots, p_{\sigma(i_4)})$, $(p_{\sigma(j_1)}, \ldots, p_{\sigma(j_4)})$ пространства $\operatorname{aff}(\{p_{\sigma(i)}\}_{i\in I})$ имеют противоположные взаимные ориентации.

Отсюда немедленно следует, что для любого $p \in \alpha$ орбиты многогранников $p = \{p_i\}_{i\in S}$ и σp $/(\sigma p)_i = p_{\sigma(i)}$ при $i \in S/$ лежат в различных компонентах $\alpha / AGL_4(\mathbb{R})$, т.е. $\alpha / AGL_4(\mathbb{R})$ несвязно /а значит, и любой базисный к.тип отвечающий α несвязен/.

§ 12. Приложение. Структура множества критических по Парето точек гладкого отображения и комбинаторные стратификации пространства векторных конфигураций.

0°. Введение. I°. Тонкая комбинаторная эквивалентность векторных конфигураций. 2°. Минимальная стратификация Уитни множества критических по Парето точек гладкого отображения.

0°. Введение. В настоящем приложении мы опишем /без доказательств/ тесную связь двух задач:

I. Задачи описания минимальной стратификации Уитни множества критических по Парето точек гладкого отображения общего положения /см. Введение и п. 2°/.

2. Задачи описания топологии комбинаторных типов векторных конфигураций и описания стратификации пространства векторных конфигураций по комбинаторным типам.

Задача I носит естественный, даже прикладной характер и, как будет видно, тем не менее, в ней появляются все комбинаторные типы конфигураций одновременно /выпуклые, гейловские, ориентированные/ и, тем самым, возникает проблема их описания. Польза задачи 2 для задачи I состоит в том, что для некоторых "хороших размерностей" в задаче I, нужными оказываются еще достаточно простые комбинаторные стратификации, и, поэтому, в этих размерностях задачу I можно решить /см. следствие 12,2/. В то время же из результатов §§ 3 – 8 следует, что в общей постановке задача I по сути включает в себя общую проблему описания стратификации Уитни полуалгебраического многообразия /решаемую, пока что, только теоретически, хотя и алгоритмически/.

<u>I°. Тонкая комбинаторная эквивалентность конфигураций.</u> Пусть V_1, V_2 – вещественные векторные пространства. $P^1=\{P^1_i\}_{i\in S}$ – конфигурация векторов V_1, $\{P^2_i\}_{i\in S}=P^2$ – конфигурация векторов V_2.

В данном параграфе мы допускаем в качестве элементов конфигураций нулевые вектора и несовпадение линейной оболочки конфигурации со всем пространством.

Конфигурации P^1 и P^2 <u>σ-эквивалентны,</u> если

I/ $\dim(\mathrm{lin}(P^1)) = \dim(\mathrm{lin}(P^2))$

2/ соответствие между точками, сохраняющее нумерацию, сохраняет взаимные ориентации базисов подпространств $\mathrm{lin}(P^1)\subset V_1$ и $\mathrm{lin}(P^2)\subset V_2$, составленных из векторов конфигураций.

<u>c-гранями</u> векторной конфигурации $P=\{P_i\}_{i\in S}$ мы называем подмножества множества точек P, выделяемые опорными гиперплоскостями к P. <u>g-гранями</u> P мы называем подмножества множества точек P, содержащие ноль в относительной внутренности своей конической оболочки.

Пусть P^g – максимальная по включению g-грань конфигурации P. Очевидным образом, любая c-грань P содержит P^g. Рассмотрим конфигурацию P^c – ортогональную проекцию конфигурации P на ортогональное дополнение к $\mathrm{lin}(P^g)$. Очевидно, что P^c уже не имеет нетривиальных g-граней.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Две векторные конфигурации $p^1 = \{p_i^1\}_{i\in S}$ и $p^2 = \{p_i^2\}_{i\in S}$ t-эквивалентны, если соответствие между точками конфигураций, сохраняющее нумерацию, переводит c-грань в c-грань, g-грань в g-грань и, кроме того, индуцирует σ-эквивалентность собственных g-граней конфигураций $(p^1)^g$ и $(p^2)^g$ и σ-эквивалентность собственных c-граней конфигураций $(p^1)^c$ и $(p^2)^c$.

Пусть $vc(m, n)$ - пространство упорядоченных векторных конфигураций из m точек в $\mathbb{R}^n$. /точки занумерованы множеством $\overline{1:m}$ /.

Пусть, кроме того, $m \leq n$. Рангом конфигурации будем называть размерность ее линейной оболочки.

Рассмотрим подмножество $\Theta(m, n)$ пространства $vc(m, n)$: $\Theta(m,n) = \{p \in vc(n, m) \mid 0 \in cone(p)\}$.

Обозначим через $\Theta^i(m, n)$ - множество всех конфигураций из $\Theta(m, n)$ ранга i /очевидно, что $i \leq m$ /. Положим кроме того, $\Theta_i(m,n) = \bigcup_{j=i}^{m} \Theta^j(m,n)$.

Множество $\Theta(m, n)$ - является замкнутым, полуалгебраическим подмножством в $VC(m,n)$ и, следовательно, в соответствии с [25], обладает минимальной стратификацией Уитни, обозначаемой $\Sigma_W(m, n)$. Рассмотрим $\Sigma_t(m, n)$ - стратификацию $\Theta(m,n)$ по t-комбинаторным типам.

ЛЕММА 12.1.1. Стратификация $\Sigma_W(m, n)$ мельче чем стратификация $\Sigma_t(m, n)$ /т.е. любая страта $\Sigma_t(m,n)$ есть объединение страт $\Sigma_W(m,n)$/. Стратификации $\Sigma_W(m, n)$ и $\Sigma_t(m, n)$ совпадают на множестве $\Theta_{m-3}(m, n)$.

ЛЕММА 12.1.2. Для всякого базисного комбинаторного типа плоских конфигураций из $m-2$ точек α /см. § 1/, всякого $n \geq m$ найдется страта $\gamma \in \Sigma_t(n, m)$, $\gamma \subset \Theta^{m-4}(n, m)$ стабильно эквивалентная $\alpha \times V'(n, m-4)$. $/V'(n,m-4)$ - некомпактное многообразие Штифеля $m-4$ реперов в $\mathbb{R}^n$ /.

СЛЕДСТВИЕ Леммы 12.1.2 и теоремы Б /§ 2/. Стратификации $\Sigma_+(m,n)$ и $\Sigma_+(m,n)$ различаются уже на $\Theta^{m-4}(m,n)$ при $m > k$, где k - некоторое фиксированное натуральное число.

ЗАМЕЧАНИЕ. В качестве k можно взять 91, однако это грубая оценка.

ЗАМЕЧАНИЕ к Леммам 12.1.1 и 12.1.2. То, что $\Sigma_w(m,n) \geq \Sigma_+(m,n)$ следует уже из условий, накладываемых аксиомой границы. Совпадение стратификаций на $\Theta_{m-3}(m,n)$ проверяется непосредственно, поскольку на $\Theta_{m-3}(m,n)$ стратификация Σ_+ еще достаточно проста.

Лемма 2 доказывается с помощью двойственности Гейла и тривиальных построек. □

2°. Минимальная стратификация Уитни множества критических по Парето точек гладкого отображения. Пусть $\varphi: X^n \to \mathbb{R}^m$ - гладкое отображение n -мерного гладкого многообразия без края X^n в $\mathbb{R}^m$, где $n \geq m$. Точка $x \in X^n$ называется критической по Парето для φ , если $0 \in \operatorname{cone}(\{(d\varphi_i)_x\}_{i=1}^m)$, где $(d\varphi_i)_x \in T^*_x X^n$ /равносильное условие: $\operatorname{Im}(d\varphi)_x \cap \operatorname{int} \mathbb{R}^m_+ = \emptyset$ /. Понятие критической по Парето точки введено С.Смейлом в работе [9] . Там же Смейл поставил вопрос о геометрии множества всех Парето-критических точек типичного отображения φ . В частности, им сформулирована следующая гипотеза: если ранг дифференциала гладкого отображения X^n в $\mathbb{R}^m$ падает не более чем на единицу /при $n > 2m-4$ это верно для отображения общего положения/, то множество $\Theta(\varphi)$ критических по Парето точек гладкого отображения есть многообразие с углами. Эта гипотеза при различных предположениях была доказана в [30] [4]. Если предположение о ранге не выполнено, то $\Theta(\varphi)$, вообще говоря, не является подмногообразием с углами /см. [3] /.

Тем не менее /см. [26] / для φ общего положения множество $\Theta(\varphi)$ обладает минимальной стратификацией Уитни $\Sigma_w(\varphi)$. В работе [4] А.М.Вершиком был поставлен вопрос об описании $\Sigma_w(\varphi)$ комбинаторными инвариантами конфигураций $\{(d\varphi_i)_x\}_{i=1}^m$.

Мы получили описание $\Sigma_w(\varphi)$ в ситуации, когда ранг дифференциала гладкого отображения в общем положении падает не более чем на три.

Будем говорить, что точки $x, y \in \Theta(\varphi)$ t-эквивалентны, если конфигурации $\{(d\varphi_i)_x\}_{i=1}^m$ и $\{(d\varphi_i)_y\}_{i=1}^m$ t-эквивалентны /см. п. I/. Отношение t-эквивалентности точек $\Theta(\varphi)$ порождает стратификацию $\Sigma_t(\varphi)$ множества $\Theta(\varphi)$. Страта $\Sigma_t(\varphi)$ - компонента связности класса t-эквивалентности.

ТЕОРЕМА F. В пространстве $C^\infty(X^n, \mathbb{R}^m)$, снабженном C^∞ топологией Уитни существует открытое, всюду плотное подмножество множества отображений U такое, что I/ для всякого $\varphi \in U$ стратификация $\Sigma_w(\varphi)$ мельче чем стратификация $\Sigma_t(\varphi)$, 2/ стратификации $\Sigma_w(\varphi)$ и $\Sigma_t(\varphi)$ совпадают на множестве $\Theta_{m-3}(\varphi)$. $/\Theta_i(\varphi) = \{x \in \Theta(\varphi) \mid \operatorname{rank}(d\varphi)_x \geq i\}./$

СЛЕДСТВИЕ I2,2. Пусть $n > \frac{4}{3}m - \frac{16}{3}$, тогда ранг дифференциала отображения X^n в $\mathbb{R}^m$ в общем положении падает не более чем на три. В этом случае для всякого φ из U $\Sigma_w(\varphi) = \Sigma_t(\varphi)$.

ЗАМЕЧАНИЕ о доказательстве теоремы F. Пусть на X^n зафиксирован гладкий атлас $\{U_i\}$ такой, что $TU_i \simeq U_i \times \mathbb{R}^n$. Тогда определены отображения $D_{i,\varphi}: U_i \to VC(m,n)$, сопоставляющие точке $x \in U_i$ набор векторов $\{(d\varphi_i)_x\}_{i=1}^m$ в координатах U_i. В [26] показано, что $\Theta(\varphi) \cap U_i = D^{-1}_{i,\varphi}(\Theta(m,n))$ и существует открытое, всюду плотное множество отображений^2 в

. $C^\infty(X^n, \mathbb{R}^m)$ таков, что для всякого $\varphi \in \mathcal{U}$ $D_{i,\varphi}$ трансверсально $\Sigma_w(m,n)$. Поэтому, найдется некоторая стратификация Уитни $\tilde{\Sigma}_w(\varphi)$ множества $\Theta(\varphi)$ такая, что $\tilde{\Sigma}_w(\varphi) \cap U_i = D^*_{i,\varphi}(\Sigma_w(m,n))$. Кроме того, $\Sigma_t(\varphi) \cap U_i = D^*_{i,\varphi}(\Sigma_t(n,m))$. /Здесь $D^*_{i,\varphi}$ - взятие прямого праобраза стратификации при отображении $D_{i,\varphi}$ /.

То обстоятельство, что $\Sigma_w(\varphi) \geq \Sigma_t(\varphi)$ для φ из $\mathcal{U}$ следует из простых манипуляций с аксиомой границы породивших $\Sigma_t(m,n)$. Таким образом, $\tilde{\Sigma}_w(\varphi) \geq \Sigma_w(\varphi) \geq \Sigma_t(\varphi)$, но по определению $\tilde{\Sigma}_w(\varphi)$ и Лемме I2.I.I на $\Theta_{m-s}(\varphi)$ $\tilde{\Sigma}_w(\varphi) = \Sigma_t(\varphi)$.

ЗАМЕЧАНИЕ. Лемма I2.I.2 и последующее замечание показывают, что при плохих m и n для некоторого открытого множества G в $C^\infty(X^n, \mathbb{R}^m)$ и при любом $\varphi \in G$ стратификация $\Sigma_t(\varphi)$ уже не является стратификацией Уитни и, вообще говоря, может иметь очень сложно устроенные страты.

ЛИТЕРАТУРА

1. Айгнер М. Комбинаторная теория. - М., "Мир", 1982.
2. Биркгоф Г. Теория решеток. - М. "Наука", 1984.
3. Вершик А.М., Черняков А.Г. Критические точки полей выпуклых многогранников и оптимум по Парето-Смейлу относительно выпуклого конуса. - ДАН, 266:3, 1982.
4. Вершик А.М., Черняков А.Г. Поля выпуклых многогранников и оптимум по Парето-Смейлу. - Оптимизация, т. 28/45/, с. 112-145, Новосибирск, 1982.
5. Гильберт Д. Основания геометрии. - М.-Л., 1948.
6. Данцигер Л., Грюнбаум Б., Кли В. Теорема Хелли и ее применения.- - М., "Мир", 1968.
7. Емеличев В.А., Ковалев М.М., Кравцов М.К. Многогранники, графы, оптимизация - М. "Наука", 1981.
8. Пан В.Я. О способах вычисления значений многочленов. - У.М.Н., т. 21, вып. 1/127/; 1966, с. 103-134.
9. Смейл С. Глобальный анализ и экономика. Оптимум по Парето и обобщение теории Морса. - У.М.Н., т. 27, вып. 3, 1972, с. 177-187.
10. Скорняков Л.А. Проективные плоскости. - У.М.Н., т. 6, вып. 6/46/, 1951, с. 113-154.
11. Скорняков Л.А. Элементы теории структур. - М., "Наука", 1970.
12. Финашин С.М. Проективные конфигурации и вещественные алгебраические кривые. - Диссертация, Л., ЛГУ, 1985.
13. Финашин С.М. Жесткие изотопии конфигураций. - № 5067 - 85. Деп. от 16.07.1985 г., ВИНИТИ, 45 с.
14. Хартсхорн Р. Основы проективной геометрии. - М., "Мир", 1970.
15. Ходж В., Пидо Д. Методы алгебраической геометрии, т. 1, 2. - М., "И.Л.", 1954.
16. Шафаревич И.Р. Основы алгебраической геометрии. - М., "Наука",

1972.

17. Мнёв Н.Е. О многообразиях комбинаторных типов проективных конфигураций и выпуклых многогранников. - ДАН 283:6 /1985/, с. 1312-1314.

18. Мнёв Н.Е. О реализуемости над полями комбинаторных схем выпуклых многогранников. - Зап. науч. сем. ЛОМИ, 1983, т. 123, с. 203-207.

19. Мнёв Н.Е. О структуре множества критических по Парето точек гладкого отображения. - У.М.Н., т. 40, вып. 6/246/, 1985, с. 151-152.

20. De Concini C., Eisenbud D. Procesi C. Young Diagrams and determinantal Varieties. - Inv. math., 56, 1980, p 129-165.

21. Grünbaum B. Convex polytopes. - Interscience, N.Y., 1967.

22. Grünbaum B. Arrangements and spreads. - Conference Board of math., № 10, Providence, 1972.

23. Bokowsky J., Ewald G., Kleinschmidt P. On combinatorial and affine automorphisms of polytopes. - Isr. J. Math., v. 47, № 2-3, 1984.

24. Mac Lane S. Some interpretations of abstract linear dependence in terms of projective geometry. - Amer. J. Math, v 58, 1936, p. 236-240.

25. Mather J. Stratifications and mappings. - In: Dinamical Systems (ed. Pexioto), N.Y., 1973, p. 195-232.

26. Melo W. de, On the structure of the Pareto set of generic mappings. - Bol. Soc. Bras. Math., v 7, № 2, 1976, p. 121-126.

27. Mc Mullen P., Shephard G. Convex polytopes and the Upper Bound Conjecture - Cambrije, 1971.

28. Steinitz E., Rademacher H. Vorlesungen über die Teorie der Polyeder.- Springer, Berlin, 1934.

29. Veblen O., Young J.W. Projective geometry II - - Ginn, Boston, 1918.

30. Wan Y.-H. On the structure and stability of local Pareto optima in pure exchange economy.- J. Math. Econ., v 5, 1978, p 122 -274

31. Whitney H. On the abstract properties of linear dependence.- Amer. J. Math., v 57, 1935, p 509-533.

СПИСОК ОБОЗНАЧЕНИЙ