

Dynamiser la géométrie élémentaire : introduction à des travaux de Richard Schwartz

MARCEL BERGER

ABSTRACT: *In some recent works in various situations Richard Schwartz has studied the following type of problem: starting with a given type of a geometric figure P one applies to it a geometric operation f to get a new figure $f(P)$. Now when one iterates that process one gets a infinite series of figures $f^n(P)$. The question is to study this discrete dynamical system. Using computers to guess results, then Schwartz succeeds in getting (mathematically) nice theorems, but also this leads him to various open problems and conjectures. In the present text we present what Schwartz did in four of these situations.*

Dans toute une série de travaux récents, dont certains ne sont pas encore entièrement publiés, Richard Schwartz a étudié une situation générale du type suivant : on part d'une figure géométrique P , on lui applique une transformation géométrique f . On obtient donc une nouvelle figure $f(P)$. Et comme elle est encore du même type, on peut répéter cette opération : $f(f(P)) = f^2(P)$, $f(f(f(P))) = f^3(P)$, etc. obtenant ainsi une suite illimitée $f^n(P)$, indexée par l'entier positif n . Comme les mathématiques sont la science de l'infini, comme le disait si bien Hermann Weyl, on cherche à étudier l'ensemble $\{f^n(P)\}$. Par exemple existe-t-il une figure limite ? ou, sinon, que peut-on dire de cette suite,

KEY WORDS AND PHRASES: *Iteration of geometric transformations – Barycentric subdivisions – Euclidean and projective shapes of polygons – Projective geometry, cross ratio – Pappus theorem – Desargues theorem – Pentagram map – Recurrence theorem – Dynamical systems – Poncelet polygons*

A.M.S. CLASSIFICATION: 37 E – 51 02

Conferenza tenuta nel convegno in onore del Prof. B. Segre

entendue comme un sous-ensemble de l'ensemble des figures du type donné initialement, par exemple qu'elle est l'adhérence de cet ensemble et comment s'y promènent les $f^n(P)$, de façon régulière ? etc. Une telle itération est donc de même nature que l'étude des systèmes dynamiques, ce qui justifie notre titre.

Dans le présent texte nous allons présenter quelques uns des résultats de Schwartz dans ce domaine. Le premier est celui de la subdivision barycentrique, le second celui du théorème de Pappus, le troisième celui de l'application que Schwartz appelle *pentagramme*, et pour finir le théorème de Desargues. In fine, via l'application pentagramme, on retrouvera le célèbre théorème de Poncelet sur les polygones à la fois inscrits et circonscrits à des coniques.

On verra au cours du texte que l'une des caractéristiques des travaux de Schwartz est l'usage intensif qu'il fait du calcul électronique pour deviner quoi démontrer éventuellement. Précisément, comme il nous l'a écrit, voici comment lui-même décrit la dynamique de son type préféré de recherche. Il est mû d'abord, pour étudier telle ou telle question, essentiellement par la curiosité. Puis il façonne un programme d'ordinateur pour voir ce qui se passe. Le défi qui lui reste alors à relever est celui de démontrer mathématiquement les "faits" que l'ordinateur lui disent être vrais.

En exergue nous aimerions citer deux textes sur la géométrie que l'on dit parfois à tort élémentaire, l'un d'André Weil, l'autre concernant Minkowski sera donnée en Postface.

"Obviously everything in differential geometry can be translated into the language of analysis, just as every thing in algebraic geometry can be expressed in the language of algebra. Sometimes mathematicians, following their personal inclination or perhaps misled by a false sense of rigor, have turned their mind wholly to the translation and lost sight of the original text. It cannot be denied that this has led occasionally to work of great value ; nevertheless, further progress has invariably involved going back to geometric concepts. The same has happened in our times with topology. Whether one considers analytic geometry at the hands of Lagrange, tensor calculus at those of Ricci, or more modern examples, it is always clear that a purely formal treatment of geometric topics would invariably have killed the subject if it had not been rescued by true geometers, Monge in one instance, Levi-Civita and above all Elie Cartan in another.

The psychological aspects of true geometric intuition will perhaps never be cleared up. At one time it implied primarily the power of visualization in three-dimensional space. Now that higher-dimensional spaces have mostly driven out the more elementary problems, visualization can at best be partial or symbolic. Some degree of tactile imagination seems also to be involved. Whatever the truth of the matter, mathematics in our century would not have made such impressive progress without the geometric sense of Elie Cartan, Heinz Hopf, Chern, and a very few more. It seems safe to predict that such men will always be needed if mathematics is to go on as before." André Weil.

Et pour en terminer avec les citations, maintenant on peut se demander ce que veut dire le mot “Géométrie” aujourd’hui. On pourra consulter ([3]), texte certes assez partial nous l’avouons. Nous en extrayons une conversation, originalement dans ([1], page 911) :

Bloch : “... can I ask a question slightly differently : where is geometry blocked. In other words, for example in number theory, which I know rater better, I can point three or four of it’s directions that are like a wall, where the subject is blocked. So I’am interested in your perception or expert’s perception on where geometry is blocked ?”

Gromov : “Geometry has a structure which is so very different from number theory. It just doesn’t go a definite way, it is spread. There are particularly difficult questions, some of them are very good and unnatural. We cannot solve them, that’s for sure. But there is no point where it is blocked. It was never like that. Geometry never goes as far. Compared to other branches of mathematics, it depends on a different part of your brain, it is not the consecutive part of your brain, exercising long sequences, it’s spread like visual perception. So it cannot be blocked. When you see something you cannot be blocked; when you go you are blocked. In geometry you don’t go far, ever.”

1 – Itérer les subdivisions barycentriques

La subdivision barycentrique est une opération importante en topologie algébrique, car elle permet, à partir d’une triangulation de départ, de trouver des triangulations de plus en plus fines d’un objet géométrique donné, typiquement une variété. Prenons pour commencer le cas plan (la dimension est donc deux).

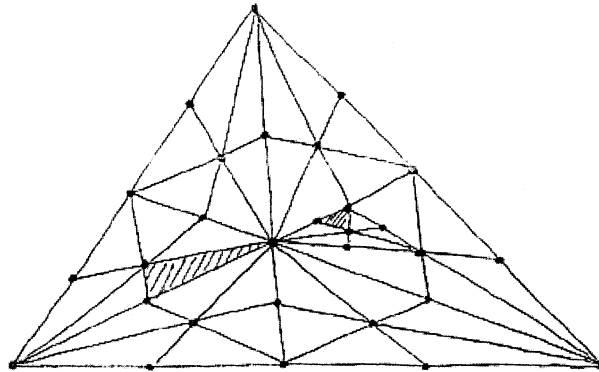


Fig. 1

Pour le topologue, la forme importe peu, il suffit que les choses deviennent de plus en plus petites, qu'importe si les triangles s'aplatissent, etc. Précisément, pour la seule structure affine (disons vectorielle) du plan tous les triangles sont "les mêmes" : car deux triangles quelconques sont toujours déductible l'un de l'autre par une application affine (et une seule). Mais le géomètre euclidien s'intéresse, lui, à la forme du triangle. Ici nous appellerons *forme* une classe de triangles qui se déduisent l'un de l'autre par une similitude; l'espace de ces formes est donc à deux paramètres, par exemple les rapports des longueurs des trois côtés du triangle. La question est donc de savoir quel est l'espace de toutes les formes obtenues à partir d'un triangle de départ quand on itère sur lui jusqu'à l'infini les subdivisions barycentriques : 6 nouveaux triangles, puis 36, etc . Ainsi : peut-on obtenir des triangles équilatéraux, des triangles rectangles, etc. ? Comme notre ensemble de formes est discret, dénombrable, il n'est donc pas question de trouver toutes les formes euclidiennes possibles. Mais on a le résultat suivant donné dans ([2]) où il est démontré ceci :

L'ensemble de toutes les formes obtenues en itérant indéfiniment les subdivisions barycentriques d'un triangle de départ (quel qu'il soit d'ailleurs) est dense dans l'ensemble de toutes les formes euclidiennes de triangles.

Noter le corollaire a posteriori : le choix du triangle initial n'importe donc pas du tout. La question est donc maintenant de savoir s'il en est de même dans les espaces euclidiens de dimension quelconque. Dans ([18]) il est démontré que le même résultat reste valable en dimension trois, où donc il s'agit de tétraèdres. Par contre, à notre connaissance, la question reste entièrement ouverte à partir de la dimension quatre et plus. Voir cependant plus bas quelques pensées de Schwartz.

L'ensemble de toutes les formes obtenues en itérant indéfiniment les subdivisions barycentriques d'un tétraèdre de départ (quel qu'il soit d'ailleurs) est dense dans l'ensemble de toutes les formes euclidiennes de tétraèdres ([18])

Voici comment on procédait dans ([2]). Pour appréhender la question, on l'algébrise en introduisant deux groupes. Le premier est le groupe S_3 des permutations des trois chiffres $\{0, 1, 2\}$, le second est le groupe $SL(2; \mathbf{R})$ des matrices réelles carrées d'ordre 2 et de déterminant égal à 1. Le premier groupe va définir les éléments d'une subdivision barycentrique, le second est (au quotient près par le groupe des rotations autour de l'origine) l'espace des formes euclidiennes de triangles. On numérote 0, 1, 2 les sommets du triangle de départ, puis à la permutation $\{s(0), s(1), s(2)\}$ de S_3 on associe le triangle ainsi formé : son premier sommet est $s(1)$, son second sommet est le milieu de $s(1), s(2)$, et enfin le troisième sommet est le centre de gravité du triangle $\{(s(1), s(2), s(3))\}$. À chaque $s \in S_3$ on associe maintenant un élément de $SL(2; \mathbf{R})$ en normalisant l'application linéaire qui envoie le triangle de départ sur le nouveau triangle $(s(1), s(2), s(3))$. Finalement on a donc une application F de S_3 dans $SL(2; \mathbf{R})$

qui, bien sûr, n'est pas un homomorphisme de groupes. Mais l'ensemble des formes que nous cherchons est donc exactement le sous-ensemble de $SL(2; \mathbf{R})$ engendré (pour la structure de groupe de ce dernier) par le sous-ensemble $F(S_3)$.

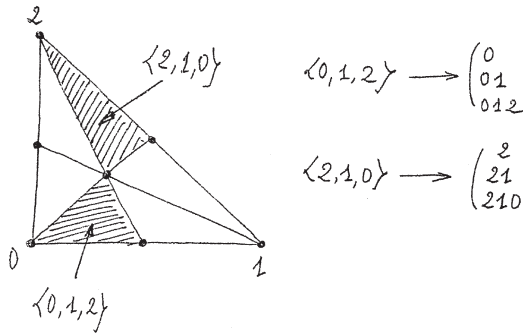


Fig. 2

Pour montrer qu'il est partout dense, l'idée de base est de trouver un élément s tel que $F(s)$ soit *elliptique*, c'est à dire borné et d'ordre infini. Alors son adhérence est un sous-groupe de Lie à un paramètre, et compact, de $SL(2; \mathbf{R})$. Il suffit alors de trouver (c'est facile) un autre élément dans $F(S_3)$ qui ne commute pas avec $F(s)$. Un peu de travail fournit la réponse cherchée. En fait un s elliptique est la permutation identité $\{0, 1, 2\}$, et l'élément qui ne commute pas lui avec est $\{1, 2, 0\}$.

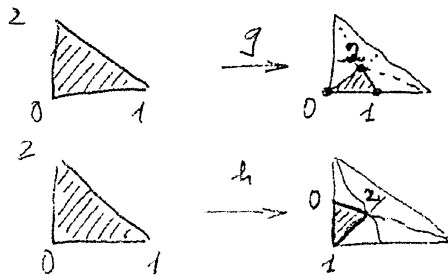


Fig. 3

Maintenant pour étudier le cas de la dimension trois, on définit de même une application $F : S_4 \rightarrow SL(3; \mathbf{R})$, et on y cherche des $F(s)$ elliptiques. En fait, il n'y en a aucun, mais par contre Schwartz a réussi à trouver, à la suite de très long calculs sur ordinateur, des composés à trois éléments $F(s).F(s').F(s'')$ (à partir de trois permutations convenables s, s', s'' de S_4) qui sont elliptiques. Et en les manipulant quelque peu on arrive à la conclusion désirée. Petite remarque explicative : dans $SL(2; \mathbf{R})$ les éléments elliptiques sont de mesure positive, tandis qu'en dimensions supérieures ils sont de mesure nulle.

Et maintenant le drame : malgré de nombreuses heures d'ordinateurs Schwartz n'a à ce jour trouvé d'éléments elliptique dans l'image $F(S_5) \subset SL(4; \mathbf{R})$. Et bien sûr pas non plus dans aucune des dimensions supérieures. Cependant il pense qu'il peut être possible d'obtenir le résultat sans nécessairement utiliser des éléments elliptiques. Son idée est la suivante : on considère "l'arbre" de toutes les opérations de subdivision possibles. Il est naturellement plongé dans l'espace symétrique de toutes les formes de tétraèdres de dimension quatre. Les sommets de l'arbre sont ces formes, et on les connecte par l'opération de subdivision. On cherche alors des rayons R tels que la boule de rayon R et centrée en un sommet contienne un point suffisamment voisin du tétraèdre de départ. Ceci est vrai si les sommets sont suffisamment régulièrement distribués. Schwartz pense que cela est réalisable sur ordinateur, mais alors quid de la dimension 5 ? However see the "Added in proof" at the very end of this article.

En fait il semble possible à Schwartz que, en étudiant la dynamique des subdivisions barycentriques de grandes dimensions, on découvre qu'il puisse y avoir une trop grande différence entre la place offerte par la dimension, soit environ $N^2/2$, et la valence de l'arbre, qui elle est $N!$. Auquel cas les choses ne marcheraient plus du tout en dimensions assez grandes.

Le lecteur qui aime dessiner aura peut-être constaté que, dans le cas du plan, l'on a l'impression que beaucoup de triangles deviennent très écrasés, très aplatis. Et c'est plus que vrai, car il est démontré dans ([2]) que lorsque l'on choisit au hasard un triangle dans chacune des subdivisions successives, la probabilité est égale à l'unité (donc presque sûrement) pour que la suite des triangles ainsi obtenue converge vers un triangle dégénéré (sur une droite donc). Schwartz n'a pas étudié ce qui se passe en dimension trois.

Pour clore l'histoire du sujet, son déroulement fut comme ceci : en fait Schwartz décida d'étudier et d'attaquer le problème plan, et ce n'est qu'ultérieurement dans une recherche sur MathSciNet qu'il découvrit l'existence de l'article ([2]).

Une remarque nous semble s'imposer, c'est que la subdivision barycentrique des topologues ne marche plus du tout lorsque des métriques sont en jeu. Par exemple, dans le cas des variétés riemanniennes, si l'on veut étudier la courbure par des approximations discrètes, il faut au contraire trouver des triangulations du genre de celles de la figure ci-dessous :

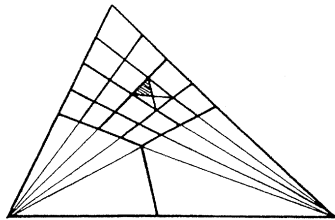


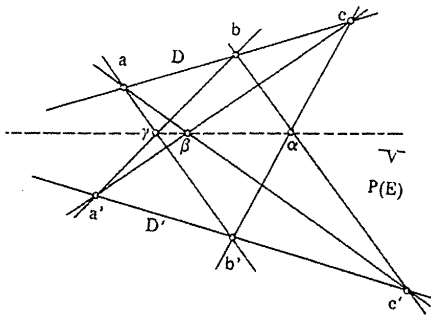
Fig. 4

Ce qu'il faut, dans le plan, ce sont des triangles, certes de plus en plus petits, mais qui ne s'écrasent jamais, précisément tous leurs angles doivent être bornés inférieurement par une constante positive. Dans l'espace, ce sera les angles dièdres des tétraèdres qui devront être ainsi bornés, et de même en toute dimension.

Construire telles triangulations peut se faire, c'est un peu de géométrie, et c'est une chose importante, tant en géométrie riemannienne, que en théorie de la Relativité, où on appelle alors cela le "calcul de Regge". Une bonne référence d'introduction à ce sujet est ([10]), et pour plus y voir les références fournies.

2 – Itérer le théorème de Pappus

Nous sommes maintenant dans le plan affine réel, il n'y a pas de structure euclidienne donnée. Par contre, dans les démonstrations, on introduit une structure euclidienne auxiliaire (quelconque d'ailleurs) pour mesurer les choses, prouver des convergences, etc.. Le théorème de Pappus (qu'il a démontré dans les années 300) affirme que si on a les données suivantes : $(D; a, b, c,)$ et $(D'; a', b', c')$ où D et D' sont deux droites quelconques, a, b, c , trois points de D , et a', b', c' trois points de D' , alors les trois points d'intersection $ab' \cap a'b$, $bc' \cap b'c$, $ca' \cap c'a$ sont encore alignés. Appelons $(D''; a'', b'', c'')$ cette nouvelle configuration.



$$\alpha = bc' \cap b'c$$

$$\beta = ca' \cap c'a$$

$$\gamma = ab' \cap a'b$$

Fig. 5

On prendra bien garde, comme une figure qui ne serait pas suffisamment générique pourrait le faire croire, que en général les trois points "intermédiaires" (qui n'ont aucune raison d'être des milieux en général) b, b' et $\beta = ca' \cap c'a$ ne sont pas alignés. Le lecteur amateur de géométrie élémentaire pourra montrer que cet alignement supplémentaire n'arrive que si, et seulement si, l'on part d'un quadrilatère harmonique, c'est à dire que la situation est celle de la figure ci-dessous, dite du *quadrilatère complet*, où l'on complète le quadrilatère formé des quatre points a, c, c', a' .

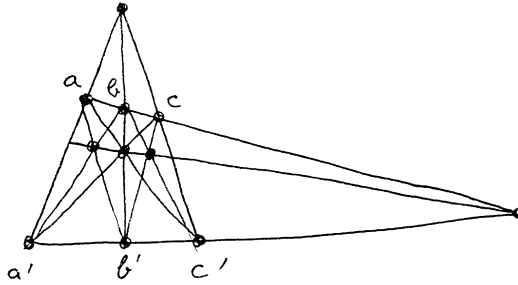


Fig. 6

En passant une petite digression, très classique, sur la géométrie axiomatique, pourra intéresser le lecteur non spécialiste. Si l'on étudie les plans projectifs (voire affines seulement) sur un corps quelconque, on peut montrer que le théorème de Pappus est équivalent à la commutativité de ce corps de base. Ainsi le théorème de Pappus est-il vrai sur le corps des nombres complexes, mais faux sur le corps des quaternions, mais vrai encore sur tous les corps finis. Cette commutativité se voit très bien sur la démonstration classique, voir la figure ci-dessous. On décide d'envoyer à l'infini les deux points $ab' \cap a'b$, $bc' \cap b'c$, c'est dire que maintenant ab' et $a'b$ sont parallèles, ainsi que bc' et $b'c$. Reste donc à montrer que aussi ca' et $c'a$ sont parallèles, mais on voit bien que l'on passe de l'un à l'autre en composant deux homothéties (de centre l'intersection des deux droites D et D' , et composées dans un sens puis dans l'autre), homothéties qui commutent par hypothèse sur le corps de base. Pour l'axiomatique de la géométrie, une référence toute récente, et très complète, passionnante, est ([9]).

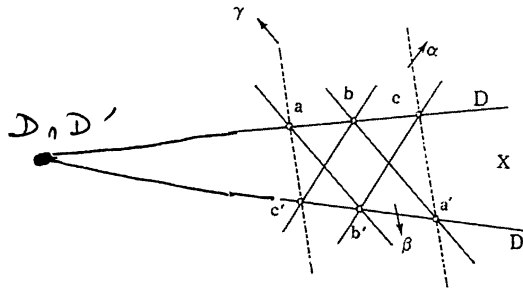


Fig. 7

Revenons maintenant à nos moutons : ainsi, avec la paire de deux ensembles de même type (droite et trois points dessus) on obtient une nouvelle situation $(D''; a'', b'', c'')$. Et donc on se demande ce qui se passe quand on itère la chose, c'est à dire quand on considère les deux situations nouvelles, donnant au total cinq droites, avec les deux paires $\{(D; a, b, c), (D''; a'', b'', c'')\}$, et $\{(D'; a', b', c'), (D''; a'', b'', c'')\}$. Voici ci-dessous la figure obtenue après un certain nombre de ces opérations.

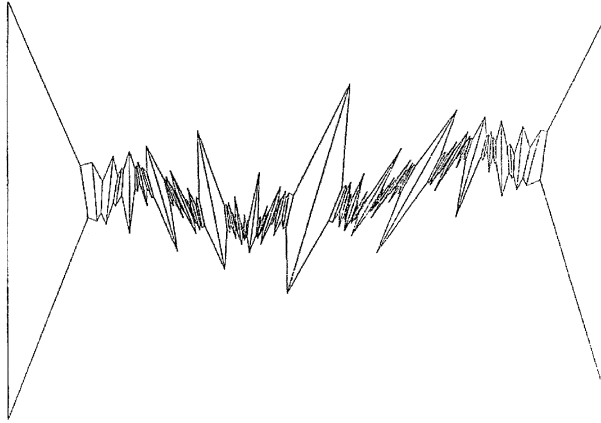


Fig. 8

On y respire l'atmosphère des objets fractals. Voici ce que démontre Schwartz pour cette figure, supposée itérée jusqu'à l'infini :

Partant d'une paire quelconque, itérée jusqu'à l'infini, l'ensemble (dénombrable) de tous les points intermédiaires peut-être prolongé par continuité en une courbe C , qui est continue. L'ensemble des droites support peut aussi être prolongé par continuité (dans l'ensemble des droites du plan) en une courbe C^ . À la seule exception du quadrilatère complet, le couple (C, C^*) a la propriété que, par chaque point p de C , la droite associée $D(p) \in C^*$ qui passe par ce point est la seule qui rencontre C en un seul point (à savoir le point p) ([14])*

Pour ce qui précède, il y a un travail d'estimation (avec une métrique euclidienne auxiliaire) sur la taille des *boîtes* : ce que Schwartz appelle une boîte est la donnée de quatre points a, c, c', a' dans cet ordre (voir la figure pour avoir des boîtes convexes), avec en outre les deux points intermédiaires b et b' . Il montre que la taille des boîtes décroît exponentiellement avec les itérations et il n'y a donc plus qu'à appliquer le critère de convergence de Cauchy. Un point très utile est le fait que le birapport, en géométrie projective, devient infini quand deux points se confondent.

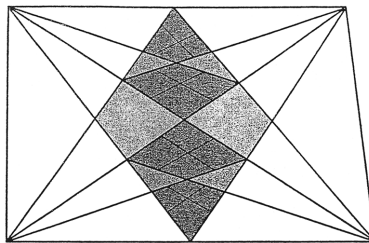


Fig. 9

Mais la deuxième propriété, et en fait la bonne compréhension de ce qui se passe, nécessite un algébrisation, qui encore une fois ici consiste à introduire un groupe. Et en fait on va se placer (comme on l'avait fait pour démontrer Pappus) dans le plan projectif complétant le plan affine de départ. Dans l'ensemble des boîtes convexes, Schwartz introduit deux opérations g et h . La première g consiste à associer à la boîte $\{a, c, c', a', b, b'\}$ la boîte $\{a, c, bc' \cap b'c, ab' \cap a'b, b, ca' \cap c'a\}$. La seconde dit comment procéder en "sens inverse", si l'on veut un groupe, il faut bien des inverses. Cette opération, notée h , consiste à fabriquer une boîte convexe à partir de la boîte $\{a, c, a', c', b, b'\}$. Sur la figure cela semble idiot, mais en fait il faut travailler dans le projectif, et prendre pour côté du quadrilatère $\{a, c, a', c'\}$, outre évidemment les droites ac et $a'c'$, non pas les segments ac' et $a'c$ de la figure *affine*, mais les segments dans le projectif complémentaires des segments affines ac' et $a'c$. On obtient alors bien une boîte convexe dans le projectif (voir la figure 10). Cette opération joue le rôle d'un inverse. Dans l'espace des boîtes on montre alors assez facilement que g et h sont liés seulement par les deux relations : $g^3 = 1$ (l'identité) et $h^2 = 1$. Mais on reconnaît là le fameux *groupe modulaire*, qui intervient dans un nombre incroyable de situations mathématiques ; il est le quotient de $SL(2; \mathbf{Z})$ par ± 1 . On fera attention que cette action du groupe modulaire est dans l'ensemble abstrait des boîtes déduites d'un Pappus initial, et non dans l'espace des transformations projectives.

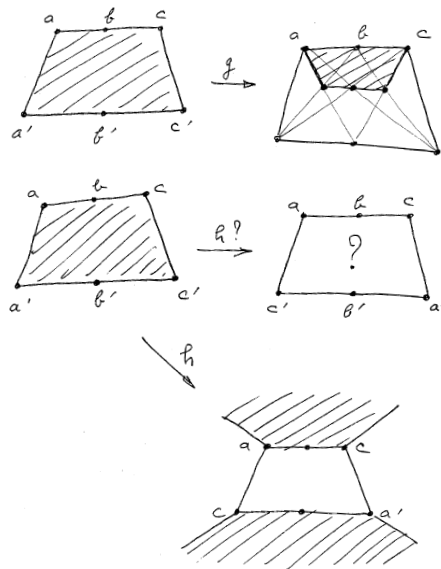


Fig. 10

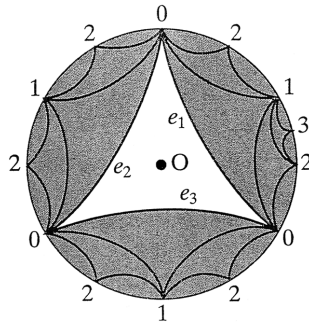


Fig. 11

Maintenant, avec cette action complète (directe et inverse), la figure fractale initiale est à compléter dans une bande de Möbius, et de la même façon que les courbes C et C^* définies plus haut, on obtient maintenant deux courbes continues dans le projectif et son dual, toujours continues, soit \mathbf{C} et \mathbf{C}^* , et qui sont maintenant des cercles topologiques. La propriété analogue d'unicité énoncée en fin du résultat plus haut se démontre avec un usage astucieux du groupe modulaire opérant dans le plan hyperbolique, où l'on représente symboliquement les boîtes issues d'un boîte de départ, voir la figure.

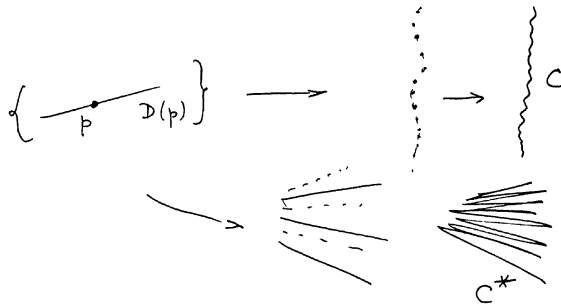


Fig. 12

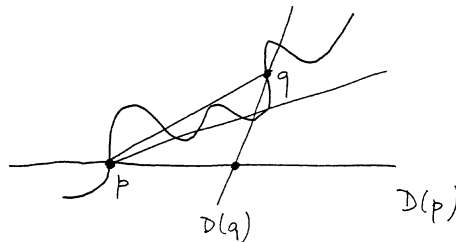


Fig. 13

Quelques remarques finales ; d'abord la dimension fractale (de Hausdorff) de C n'est pas du tout connue, ni même conjecturée. D'autre part la propriété de cette courbe C d'avoir une seule sécante en chaque point est très spéciale ; par exemple le flocon de neige n'y satisfait pas du tout, (une foule de sécantes à coupure unique), ou au contraire des fractals spiralant (alors il n'y aucune sécante coupant en un seul point).

Le seul autre exemple que nous connaissions est celui du graphe du mouvement brownien sur la droite, car en chaque point ce graphe se comporte comme à l'origine le graphe de la fonction $x \rightarrow x^{1/2}$, qui a bien cette propriété d'unicité (un grand merci de l'auteur à l'auditeur probabiliste qui lui a fourni cet exemple lors d'une conférence). Mais en fait Schwartz lui-même avait songé que cette "courbe de Pappus" était proche du mouvement brownien, mais il n'a pas su, au moins à ce jour, trouver un lien solide entre ces deux objets.

3 – Itérer l'application pentagramme

L'histoire commence avec les pentagones, c'est à cause d'eux que Schwartz a donné le nom d'application *pentagramme* à une application qui travaille en fait dans l'espace de tous les polygones à un nombre de côtés donné, mais n'ayant pas trouvé mieux comme dénomination. Dans toute cette section, on ne considérera que des polygones (n -gones, si n est leur nombre de côtés) *convexes*. L'application pentagramme se voit sur la figure : elle consiste à associer à un pentagone le nouveau pentagone convexe défini par les intersections des diagonales, c'est à dire ici les droites joignant les sommets de deux en deux.

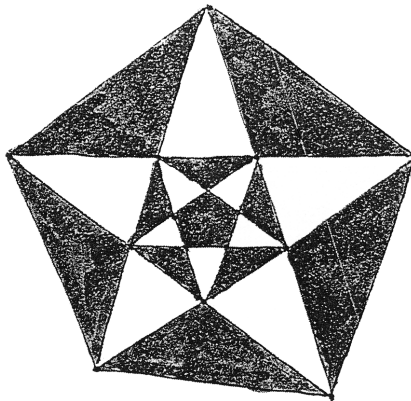


Fig. 14

On définit de même une application pentagramme pour tous les n -gones en joignant les sommets de deux en deux. Soit $f(P)$ le nouveau n -gone ainsi déduit du n -gone P . Notre problème est de savoir quelle est la *forme* des n -gones de la suite itérée $\{P, f(P), f^2(P), \dots, f^n(P), \dots\}$. On peut parler de la forme euclidienne, mais aussi de la forme *projective* en ne distinguant pas deux n -gones qui peuvent se déduire l'un de l'autre par une transformation projective (on aura complété projectivement le plan affine, ou/et euclidien). Dans la suite nous noterons $[P]$ la classe projective de P .

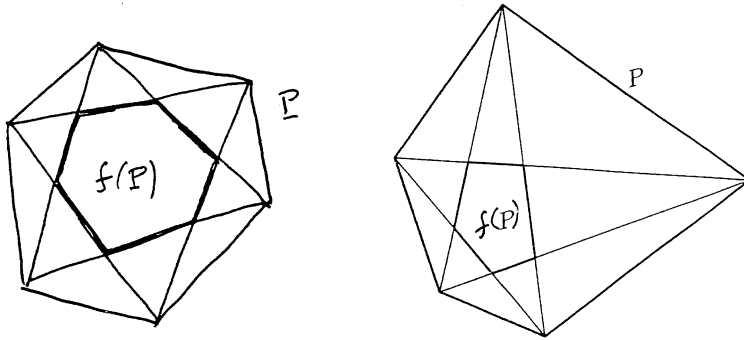


Fig. 15

Dans la suite, non toute publiée, ([13]), ([16]), ([19]), la question est complètement résolue pour les formes euclidiennes (et aussi projectives) des pentagones, complètement résolue pour les formes projectives des hexagones. Pour le cas euclidien des hexagones, la question est complètement ouverte. Pour le cas des n -gones, avec $n \leq 7$, et dans le cas projectif, on n'a que des résultats partiels, mais cependant on peut formuler une conjecture bien précise et qui résoudrait complètement la question. Tous ces travaux ont fait un usage intensif des ordinateurs.

En conclusion de ce qui va suivre, on pourra remarquer les richesses de cette toute simple application géométrique, ainsi que ses relations avec de nombreux domaines.

A. Le cas des pentagones

Même pour comprendre les formes euclidiennes des $f^n(P)$ où P est un pentagone, il est plus facile de faire un détour projectif. Schwartz a découvert sur ordinateur que pour tout pentagone P son pentagramme $f(P)$ lui était projectivement équivalent. Chose en fait triviale à l'aide du birapport, comme le montre la figure ci-dessous (petit exercice de géométrie projective laissé au lecteur). En

fait John Conway connaissait déjà ce fait. On a donc pour leurs classes projectives l'égalité : $[f(P)] = [P]$. On aura remarqué qu'il faut préciser, dans cette application projective, sur quel sommet va un sommet donné ; ici c'est le sommet *opposé*, ce qui a un sens parce que 5 est un nombre impair. Pour les polygones ayant un nombre pair de sommet, une façon de se tirer d'affaire est de prendre l'application pentagramme deux fois, voir la figure. Mais voir aussi le cas de l'hexagone juste ci-dessous. Nous reviendrons sur cette difficulté dans le cas général.

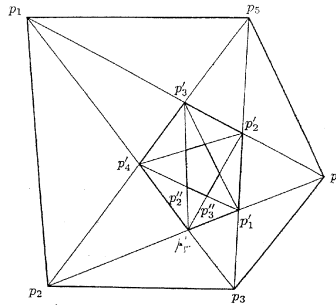


Fig. 16

Pour des raisons de compacité, cette application projective possède un point fixe, et une droite globalement invariante (la classification des transformations projectives est classique). Si l'on envoie cette droite à l'infini et prend comme origine vectorielle le point fixe, alors cette transformation pentagramme devient linéaire. Il est facile de voir qu'elle est diagonale, et que sauf si le pentagone de départ est régulier, ses deux valeurs propres (négatives) sont différentes. Donc finalement l'application pentagramme f^n est bien comprise, elle décroît exponentiellement, et ce avec des coefficients différents dans les deux directions d'écrasement, qui sont les directions propres de l'application linéaire considérée.

Une question intéressante est de savoir comment ce point fixe dépend de la forme de P . Car on a donc ici, pour les pentagones, un point qui est un invariant projectif

Le cas des **hexagones** est intermédiaire entre celui des pentagones et celui des n -gones avec $n > 6$. En effet, Schwartz a pu montrer que pour tout hexagone P on a l'équivalence projective au deuxième tour : $[f^2(P)] = [P]$. Mais, pour préciser l'application qui fournit $[f^2(P)] = [P]$, il faut dire que l'on envoie le premier hexagone sur le second en ré-indexant les sommets $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ en $\{4, 5, 6, 1, 2, 3\}$. Il a découvert ceci sur ordinateurs, mais a pu aussi en donner une démonstration, mais longue est pénible, et pour le moment il n'existe pas de démonstration conceptuelle. Cependant il est probable que l'on puisse trouver sans trop de peine une preuve utilisant les invariants projectifs qui vont être introduits tout de suite. Mais quant aux formes euclidiennes des hexagones

$f^n(P)$, même vues sur ordinateur, elles échappent encore actuellement à tout contrôle, à toute idée d'un résultat possible.

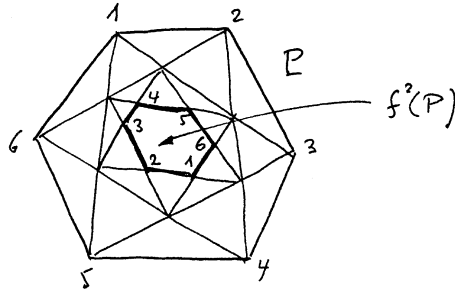


Fig. 17

B. Le cas général

On ne considère ici que des n -gones avec $n \geq 7$, et on ne s'intéresse qu'à leur classe projective. On rappelle donc que, de même que tous les triangles sont affinement équivalents tous les quadrilatères sont projectivement équivalents. Donc on peut fixer quatre sommets consécutifs, et l'espace des formes projectives des n -gones dépend donc de $2n - 8$ paramètres seulement. Pour essayer de savoir ce qui se passe, on ne peut évidemment voir sur un ordinateur que des projections planes de l'espace total des classes projectives de n -gones. Dans le cas le plus simple, celui d'un heptagone ayant un axe de symétrie, Schwartz a obtenu sur ordinateur la figure ci-dessous d'une projection plane convenable.

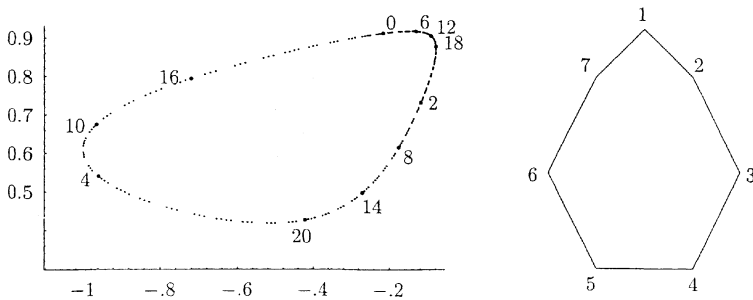


Fig. 18

Mais toutes les autres figures qu'il a obtenu ont toujours présenté des structures identiques. On peut donc supposer d'abord un phénomène de compacité, puis même beaucoup plus, un phénomène de récurrence. Et même encore beaucoup

plus si l'on regarde soigneusement les numéros des itérations sur la courbe discrète obtenue. Dans son premier texte ([13]) sur l'application pentagramme Schwartz a démontré la compacité, et conjecturé la récurrence. Rappelons la définition de cette notion qui appartient à la théorie des systèmes dynamiques : la suite des $f^n(P)$ est dite *récurrente* si quelque soit l'entier n et le réel ε il existe un entier m tel que $f^m(P)$ soit à une distance plus petite que ε de $f^n(P)$ (on aura mis une métrique auxiliaire quelconque sur l'espace où l'on travaille). Le théorème classique, et élémentaire de Poincaré, dit qu'une suite est récurrente dès que, sur l'espace où l'on travaille, il existe une mesure invariante par l'application f que l'on itère.

Dans ([13]) la compacité est démontrée par l'introduction d'invariants projectifs associés aux n -gonnes. En effet il faut arriver à se débarrasser (progressivement) des coordonnées cartésiennes, qui d'une part sont compliquées, en fait illisibles quand on les itère, et d'autre part nécessitent de faire ensuite la réduction à la classe projective. Ces invariants sont simples et naturels : appelons v_i les sommets du polygone P , alors on attache au sommet v_i l'invariant $cr(v_i)(P)$ qui est le birapport suivant des quatre droites issues de v_i : $cr(v_i) = [v_i v_{i-2}, v_i v_{i-1}, v_i v_{i+1}, v_i v_{i+2}]$ (la dénomination cr provient de cross-ratio, qui est le substantif du birapport en anglais). Alors on peut démontrer la compacité (ce n'est pas du tout facile) mais Schwartz en a deux démonstrations différentes. La première dans ([13]) est fine, faisant largement usage de géométrie algébrique (coïncidence de singularités), la seconde ([16]) l'invariance suivante pour tout polygone P et son image $f(P)$, à savoir que le produit sur tous les sommets de P est conservé par l'application pentagramme f :

$$\prod_i cr(v_i)(P) = \prod_i cr(v_i)(f(P))$$

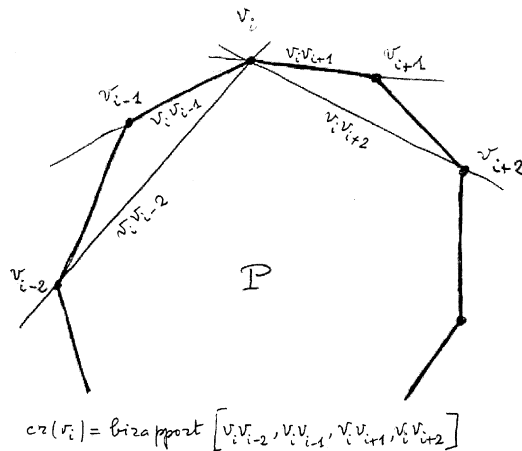


Fig. 19

On verra plus bas que cet invariant est trivialement conservé grâce aux invariants plus fins introduits ultérieurement par Schwartz, et les formules de récurrence obtenues pour eux. La compacité résulte assez facilement de cette invariance, avec toujours le fait qu'un birapport devient infini (ou zéro) quand deux des quatre intervenants sont confondus. Mieux : dans le cadre euclidien les diamètres des $f^n(P)$ décroissent exponentiellement.

Dans ([16]) on réussit à démontrer la récurrence ; toute la difficulté est de construire une mesure invariante par l'application pentagramme, et ce n'est pas tâche facile. On prend comme espace tangent à l'espace de tous les n-gones l'ensemble de n vecteurs, un par sommet. Il faut une fois encore savoir rester dans le cadre projectif, ce qui se fait en utilisant, pour mesurer ces vecteurs, une idée proche des métriques que définit Hilbert sur les domaines convexes, avec précisément les birapports.

On trouvera aussi dans ([16]) une espèce de prolongement par continuité aux courbes fermées planes (mais dotées en plus d'une paramétrisation fournie, à cela près celle que l'on veut) de l'application pentagramme, qui fournit une équation aux dérivées partielles d'évolution, liée à la dérivée schwartzienne en géométrie hyperbolique ([13]). Il est intéressant de retrouver cette équation en physique mathématique, l'auteur renvoie aux deux textes ([7]) et ([6]).

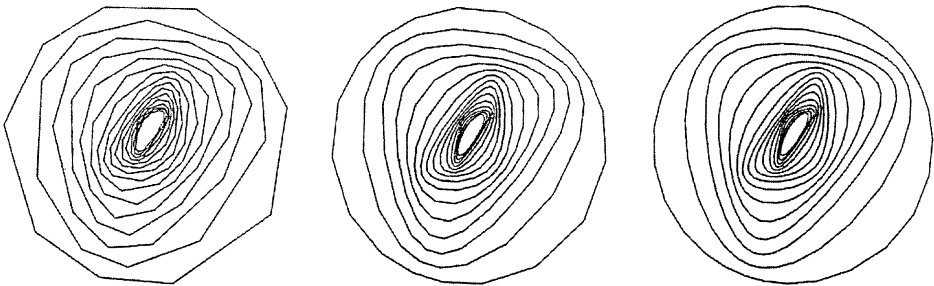


Fig. 20

Tout ceci ne donne guère idée de ce qu'est finalement l'espace des formes projectives $[f^n(P)]$ lorsque n parcourt la totalité des entiers positifs. Dans le troisième texte ([19]) sur l'application pentagramme un travail considérable et passionnant est accompli, et il permet de poser une conjecture (confirmée par toutes les figures (planes !) d'ordinateurs comme celle fournie ci-dessus).

Le point essentiel est de construire une série d'invariants (projectifs) algébriques qui généralisent l'invariant $\prod_i cr(v_i)(P)$ décrit ci-dessus. Le point de départ est la découverte des bonnes coordonnées (projectives) pour l'espace des polygones. Ce sont les $\{g(v_i)(P), d(v_i)(P)\}$, où g et d indiquent la droite et la

gauche, et qui sont définis sur la figure ci-dessous. Il est trivial de voir que ces $2n$ coordonnées déterminent la classe projective de P (avec 8 de trop, mais il est techniquement plus efficace de travailler dans l'espace total de dimension $2n$).

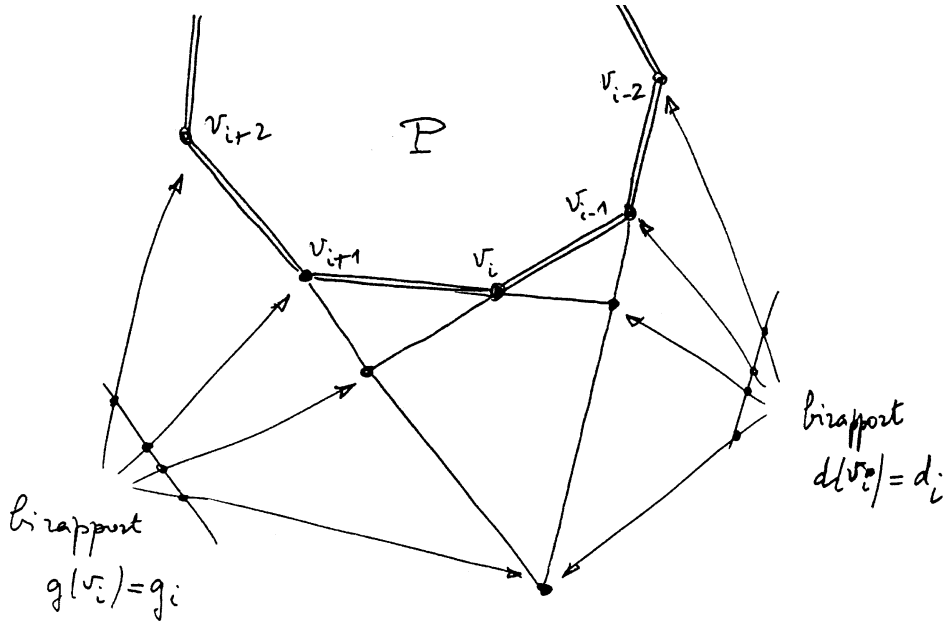


Fig. 21

Le point essentiel maintenant est que les formules fournissant les coordonnées de $f(P)$ en fonction de celles de P sont extrêmement simples et vont entraîner des choses merveilleuses. Nous donnons ces formules avec les abréviations suivantes :

$$g_i = g(v_i)(P), \quad d_i = d(v_i)(P), \quad g'_i = g(v_i)(f(P)), \quad d'_i = d(v_i)(f(P))$$

et alors Schwartz montre que l'application pentagramme est définie par :

$$g'_i = \frac{1 - g_{i+2}d_{i+3}}{1 - g_{i-2}d_{i-1}} \cdot d_{i+1}$$

$$d'_i = \frac{1 - g_{i-3}d_{i-2}}{1 - g_{i+1}d_{i+2}} \cdot g_{i+1}$$

On retrouve par exemple de suite le premier invariant global, car trivialement $d'_i g'_{i+1} = d_i g_{i+1}$ pour tout i .

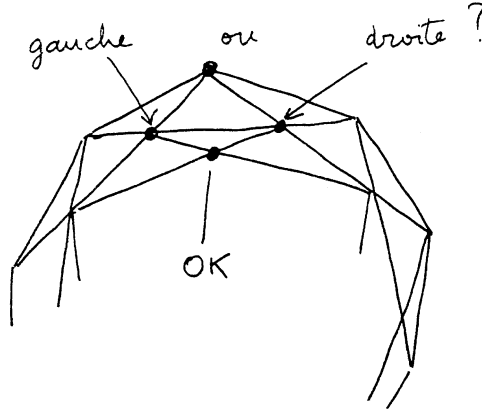


Fig. 22

Les mots gauche et droite masquent une des difficultés (profonde en fait) que nous avons volontairement omise dans un sujet de simplification (sauf plus haut pour le cas des pentagones et des hexagones), c'est celle de l'indexation des sommets du polygone P' pentagrammé de P , car dans une indexation naturelle on a en fait le choix entre le premier sommet à droite ou celui à gauche. Ce fait complique énormément toute la théorie et la pratique. Et va expliquer que l'on doit travailler avec $f^2(P)$, et non $f(P)$, car on voit bien sur les figure que pour le deuxième pentagramme on peut indexer ses sommets sans ubiquité.

Muni des formules ci-dessus, un travail algébrique fait dans ([19]) lui fournit $2[n/2] + 2$ invariants pour l'application entre classes projectives $[P] \rightarrow [f^2(P)]$ (selon l'usage canonique les crochets désignent la partie entière). Ces invariants dépendent algébriquement des $\{g_i = g(v_i)(P), d_i = d(v_i)(P)\}$. Leur degré va de 1 à n (celui de degré n est le produit trouvé plus haut en premier), et on montre qu'ils sont algébriquement indépendants. On peut alors formuler la grande conjecture, qui est naturelle au vu des essais : voir l'heptagone plus haut et bien y remarquer les numéros des itérations, on a l'impression que l'on décrit le cercle (topologique) fermeture de l'orbite comme le ferait une rotation d'angle irrationnel sur un cercle. Voici cette conjecture, formulée dans un premier temps en attendant mieux, dans le domaine complexe par souci de simplification :

Après complexification de l'espace des n -gones, on fabrique grâce à notre série d'invariants. une application $\mathbf{C}^{2n} \rightarrow \mathbf{C}^{2[n/2]+2}$. On conjecture que cette application est à fibres compactes, que ses fibres sont en fait des tores (complexes). Et enfin que l'on peut munir ces tores d'une métrique plate telle que alors, lue sur ces tores, l'application pentagramme double $[P] \rightarrow [f^2(P)]$ pour les classes projectives des n -gones est une translation.

Ainsi l'espace $\{f^n(P), n \in \mathbf{N}\}$ serait-il complètement compris, pour un polygone de départ générique : on a la même chose que dans un tore les itérés d'une translation à rapports tous irrationnels, donc en particulier une partout densité dans le complété par fermeture de tous ces itérés. Signalons que ces invariants sont non seulement projectifs, mais aussi invariants pour la dualité entre points et droites dans le plan projectif.

Pour le moment Schwartz n'a aucune idée d'une démonstration, même si l'énoncé fait penser exactement à la structure des systèmes dynamiques complètement intégrables. On trouvera dans ([19]) de nombreux résultats liés à cette étude, d'une part des relations étroites avec la monodromie des équations différentielles linéaires périodiques, et la théorie de l'équation KdV, voir ([20]). Mais aussi un corollaire qui fut surprenant pour son auteur, à savoir que "l'application pentagramme calcule les déterminants", car elle prouve (après certes un certain travail) que l'on a l'égalité :

$$\begin{array}{c}
 \begin{array}{ccc}
 \boxed{\begin{array}{c} \square \\ \square \end{array}} \times \begin{array}{c} \square \\ \square \end{array} & = & \\
 \begin{array}{ccc}
 \begin{array}{c} \square \\ \square \end{array} \times \begin{array}{c} \square \\ \square \end{array} & - & \begin{array}{c} \square \\ \square \end{array} \times \begin{array}{c} \square \\ \square \end{array} \\
 \text{nord-ouest} \times \text{sud-est} & & \text{nord-est} \times \text{sud-ouest}
 \end{array}
 \end{array}$$

Fig. 23

Dans cette figure on calcule les déterminants des matrices ombrées. Quelle ne fut pas la surprise de Schwartz lorsque, lors d'une discussion on lui apprit que cette identité entre déterminants, qui permet, contrairement à la méthode de développement de Lagrange, de ne calculer que des déterminants d'ordre deux de moins, était une identité bien connue des experts en calcul algébrique, et en fait due à Charles Dodgson, l'auteur d'Alice au Pays des Merveilles, dont on sait qu'il était aussi assez bon mathématicien. Pour une référence récente à ce sujet, voir ([12]).

Cependant, ne fût-ce que parce que cette identité de déterminants provient (ici) de l'application pentagramme, il y a en elle certainement une dynamique. Mais à ce jour Schwartz n'a pas trouvé si elle a déjà été étudiée assez en profondeur.

4 – Où l'on peut rencontrer le théorème de Desargues dans l'application pentagramme, et son itération

Nous n'en avons pas encore fini avec les rapports entre l'application pentagramme et d'autres domaines de la géométrie. Le point de départ du texte ([15]) consiste à prendre un hexagone très spécial, forcément "extrêmement" non convexe, dont les côtés n'ont que deux directions possibles, voir la figure. Alors l'hexagone pentagramme du premier est complètement dégénéré, ses six sommets sont six points sur deux droites seulement. Ce résultat est une conséquence immédiate du théorème de Desargues sur les triangles homologues, voir la figure. Dans l'esprit du théorème de Pappus et de l'axiomatique de la géométrie, rappelons que la validité du théorème de Desargues est équivalente à l'associativité du "corps" de base, voir toujours ([9]).

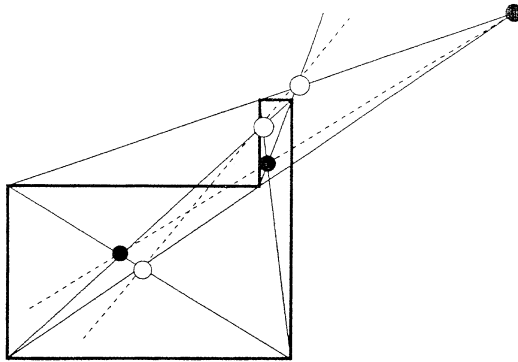


Fig. 24

Que se passe-t-il si l'on part maintenant d'un n -gone, toujours nécessairement à un nombre n pair de sommets et dont les côtés n'ont que deux directions possibles ? La réponse est parfaite pour les $4n$ -gones : la même chose se passe, mais au bout de $2n - 2$ opérations pentagrammes : on tombe alors (brusquement, comme on peut le voir vérifié sur ordinateurs) sur un $4n$ -gone complètement dégénéré, c'est à dire constitué de deux couples de $2n$ points répartis seulement sur deux droites. Dans ([15]) la démonstration était extrêmement difficile, en particulier elle conduisait l'auteur à une profonde incursion dans le domaine, très à la mode (et à juste titre) des arrangements d'hyperplans (voir à ce sujet la référence de base ([11])). Mais dans ([19]), la technique de construction d'invariants algébriques (complets et indépendants) fournit ce résultat de Desargues généralisé comme un sous-produit de cette étude algébrique.

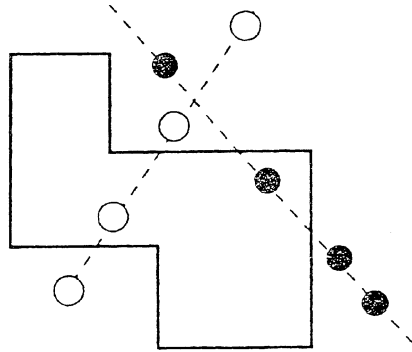


Fig. 25

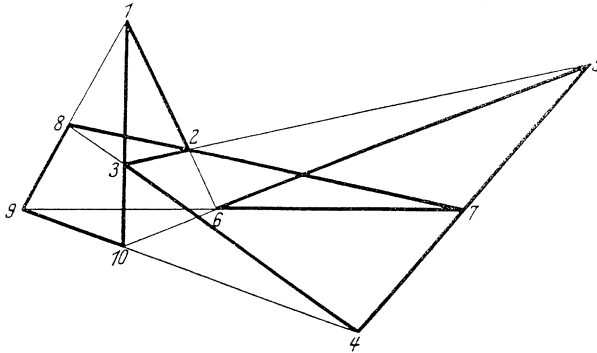


Fig. 26

Cependant ([15]) va beaucoup plus loin, et contient des choses très nouvelles sur ces arrangements. Nous renvoyons le lecteur à ce texte. Un point fondamental est de construire une application d'un groupe G dans l'espace de tous les k -plans de \mathbf{R}^n . On introduit aussi deux sous-ensembles convenables S et T de G , et obtient alors des configurations très générales, (S, T, G, k, n) . On y trouve une dynamique naturelle, dont un cas très particulier est l'application pentagramme. Dans ce cas on prend $G = Z/n$, S et T sont deux sous-ensembles différents, à deux éléments, $n = 2$ et $k = 1$.

5 – Où le théorème de Poncelet resurgit soudainement dans l'application pentagramme

On a vu que pour les pentagones et les hexagones l'application pentagramme (pour les classes projectives) s'arrête au bout d'une, ou de deux, fois. Il est donc

naturel de demander si l'on connaîtrait des classes de polygones à 7 côtés ou plus qui auraient cette propriété que l'application pentagramme (toujours pour les classes projectives) s'arrête au bout d'un nombre fini de fois. Il y a un cas qui saute aux yeux, c'est celui des polygones (euclidiens) réguliers. Dans ([17]) une classe plus générale de polygones P est découverte pour lesquels on a toujours $[P] = [f(P)]$, ce sont les *polygones de Poncelet*. Rappelons brièvement ce dont il s'agit.

Dans sa prison à Saratov en Russie en 1813 Poncelet démontre ce qui est (pour nous en tout cas) le plus beau et le plus fascinant théorème de toute la géométrie, appelons-le *théorème de Poncelet*. Il dit ceci :

Si un polygone P est à la fois inscrit dans une conique C et circonscrit à une conique C' , alors il existe une infinité continue de tels polygones (dans le cas réel il faudra bien sûr que de ce sommet on puisse mener une tangente à C'). A contrario, si partant d'un point de C on construit des points successifs en menant des tangentes à C' , si la chose ne se referme pas au bout d'un nombre fini d'opérations, alors elle ne se refermera jamais quelque soit le point de départ.

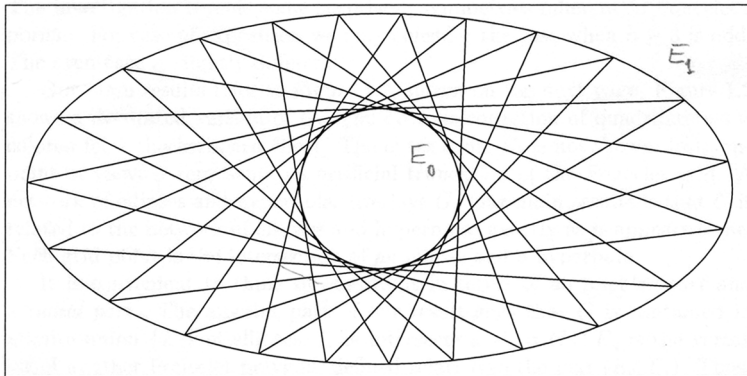


Fig. 27

Ce théorème, dès qu'il a été connu (mais cela prit quelque temps à cause des difficultés de publication que Poncelet eut à la suite du rapport à l'Académie des sciences présenté par Cauchy, qui estimait, à assez juste titre, les démonstrations de Poncelet un peu légères), suscita un enthousiasme universel. Deux raisons pour cela : d'abord sa beauté intrinsèque, mais surtout la difficulté de sa démonstration. Il n'en existe aucune démonstration élémentaire, car pour une paire de coniques générique il n'existe jamais de transformation projective qui les envoie sur une paire de cercles concentriques. Pour de tels cercles, le théorème est trivial, car on a à faire à une rotation que l'on itère, et de deux choses l'une : ou l'angle de cette rotation est rationnel à π , et alors on se referme (notez que les polygones peuvent être étoilés, ce qu'ils sont en général) toujours, ou alors notre

angle est irrationnel avec π , et alors les choses ne se referment jamais. D'ailleurs Poncelet se plaisait à comparer son théorème avec le cas des polygones réguliers.

Jacobi comprit qu'il y avait un rapport entre ce théorème et les fonctions elliptiques, ce fut une des raisons entre autres qui le poussa à étudier ces fonctions. De très nombreux mathématiciens cherchèrent leur propre démonstration, ainsi bien sûr que des généralisations en tous genres. Une excellente référence récente sur l'histoire, la comparaison des différentes démonstrations, et beaucoup d'autres choses est ([5]). On pourra regarder aussi ([4]). En fait l'intérêt tomba nettement ensuite après 1900, mais le théorème fut remis à l'honneur dans ([8]), où l'on trouve la démonstration la plus simple, mais bien sûr utilisant à fond la géométrie algébrique, précisément la théorie des courbes elliptiques (de genre 1).

On pouvait penser que pratiquement tout avait été dit sur le théorème de Poncelet, or dans ([17]) on trouve toute une série de magnifiques nouveaux résultats concernant les polygones de Poncelet, et liés à l'application pentagramme. Précisons que nous appelons ici *polygones de Poncelet* les polygones qui ont la double propriété d'être à la fois inscrit dans une conique et circonscrit à une autre.

Dans ([19]) seul le cas des polygones d'ordre *impair* est traité, ceci toujours pour la raison d'indexation des sommets signalée plus haut. Une partie des résultats se lit sur la figure ci-dessous :

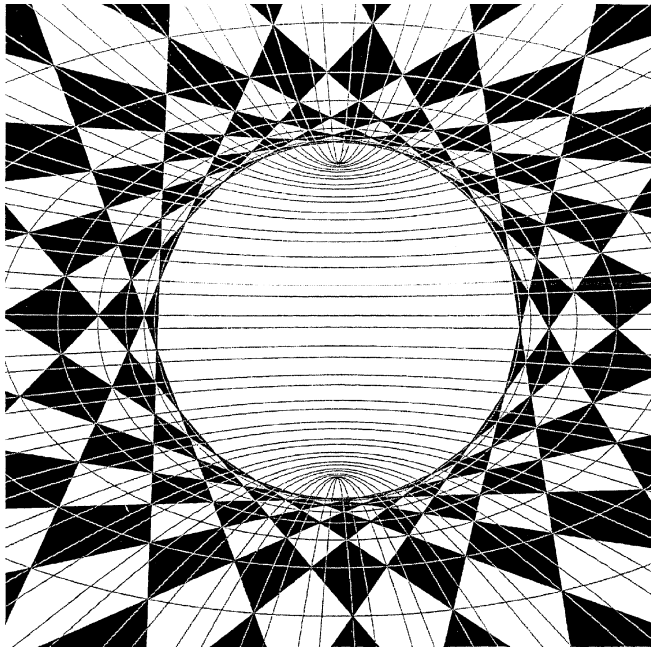


Fig. 28

Le point de départ est de regarder, étant donné un polygone de Poncelet, la figure formée en traçant toutes entières, complètement, dans le plan les droites qui définissent les côtés du polygone initial. Alors Schwartz montre que l'ensemble formé par tous les points d'intersection de ces n droites appartiennent à deux familles de coniques, qu'il appelle respectivement *les angulaires* et *les radiales*. Ceci montre d'abord que tous les polygones déduits du polygone initial, pentagramme normal mais aussi les k -grammes (obtenus en joignant les sommets de k en k) sont encore des polygones de Poncelet. Poncelet, lui, savait déjà montrer que effectivement ces polygones sont circonscrits à des coniques appartenant toutes au faisceau défini par les deux coniques de départ, d'équations $C = 0$ et $C' = 0$.

Rappelons ce qu'est un faisceau de coniques. Pour les algébristes ce sont les coniques d'équations de la forme $a.C + a'.C' = 0$, où a et a' ne sont pas nuls tous les deux. Pour le géomètre Poncelet ce sont toutes les coniques passant par "les quatre points d'intersection de C et C' " ; cette affirmation est typique de Poncelet, pour qui même deux cercles du plan euclidien ont toujours en commun quatre points. Poncelet en déduisait des choses exactes, mais Cauchy objectait à ce genre de mathématiques, son manque de rigueur ; le débat faisait rage à l'époque entre *géométrie synthétique* et *géométrie analytique* (voir le texte de Weil en exergue).

Mais ce que montre en outre Schwartz c'est que tous les polygones ainsi obtenus (les k -grammes pour tous k) sont projectivement équivalents. L'imparité de n est nécessaire pour que ceci ait un sens, prendre le "sommets opposés", comme on faisait pour les pentagones. Il y a plus : on peut définir une application pentagramme inverse, pour tous les polygones, de façon évidente. Dans le cas général, elle peut bien sûr envoyer des points à l'infini. Mais ici encore les différents pentagrammes inverses restent encore des polygones de Poncelet. Maintenant la figure montre aussi que tous ces k -grammes sont toujours bien définis, en ce sens que jamais trois droites de définition ne seront concourantes. Le lecteur trouvera facilement des polygones (non de Poncelet !) pour lesquels ceci est faux. Schwartz se demande si seuls les polygones de Poncelet possèdent cette propriété (à tout le moins dans le royaume des polygones convexes). Tous les énoncés de ces résultats ont été découverts sur ordinateur. Et actuellement non publiés, car Schwartz était convaincu qu'ils devaient être connus depuis longtemps !

Et pour finir avec Poncelet, juste une remarque élémentaire pour boucler la boucle : tout pentagone est un polygone de Poncelet, car par cinq points donnés il passe toujours une conique, et il existe aussi toujours une conique tangente à cinq droites données.

Postface

Pour le lecteur qui trouverait toutes les questions traitées trop “élémentaires”, l’incident que voici nous semble digne d’intérêt, il est extrait du remarquable livre de Constance Reid sur Hilbert. :

“... Lecturing on topology, Minkowski brought up the Four Color Theorem – a famous unsolved problem in that field of mathematics. He said : “*This theorem has not yet been proved, but that because only mathematicians of third rank have occupied themselves with it*”, Minkowski announced to the class in a rare burst of arrogance. “*I believed I can prove it.*” He began to work out his demonstration on the spot. By the end of the hour he had not finished. The project was carried over to the next meeting of the class. Several weeks passed in this way. Finally, one rainy morning, Minkowski entered the lecture hall, followed by a crash of thunder; at the rostrum, he turned toward the class, a deeply serious expression on his gentle round face.

“*Heaven is angered by my arrogance*”, he announced. “*My proof of the Four Color Theorem is also defective.*”

He then took up the lecture on topology at the point where he had dropped it several weeks before.” Il est important, pour apprécier complètement cet histoire, de rappeler que Minkowski était connu pour son extraordinaire modestie, comme le texte le laisse d’ailleurs sous-entendre.

REFERENCES

- [1] N. ALON – J. BOURGAIN – A. CONNES – M. GROMOV – V. MILMAN – : *Visions in Mathematics II*, Birkäuser.
- [2] I. BARANY – A. BEARDON: *Barycentric subdivision of triangles and semigroups of Möbius maps*, *Mathematika*, **43** (1996).
- [3] M. BERGER: *Peut-on définir la géométrie aujourd’hui ?*, *Results in math.*, **40** (2001), 37–87.
- [4] M. BERGER: *Géométrie vivante : l’échelle de Jacob de la géométrie*, Cassini, 2006.
- [5] H. BOS – C. KERS: *Poncelet’s closure theorem*, *Expositiones mathematicae*, **5** (1987), 289–364.
- [6] P. DI FRANCESCO – C. ITSYKSON: *Classical W-algebras*, *Communications in math. physics*, **140** (1991), 543–567.
- [7] V. DRINFELD – V. SOKOLOV: *Lie Algebras and Equations of Korteweg-DeVries Type*, *J. Soviet Math.*, **30** (1985).
- [8] P. GRIFFITHS – J. HARRIS: *A Poncelet theorem in space*, *Commentarii Math. Helvetici*, **52** (1977), 145–160.
- [9] M. HALLETTE – U. MAJER: *DAVID HILBERT’S Lectures on the Foundations of Geometry*, *David Hilbert’s Lectures on the Foundations of Mathematics and Physics*, Springer, 2004.

- [10] J. LAFONTAINE: *Mesures de courbure des variétés riemanniennes et des polyèdres (d'après Cheeger, Müller et Schrader)*, Séminaire Bourbaki, Paris, Société mathématique de France (1985/86).
- [11] P. ORLIK – H. TERAOKA: *Arrangements of hyperplanes*, Springer, 1992.
- [12] D. ROBBINS – H. RUMSEY: *Determinants and Alternating Sign Matrices*, *Advances in Mathematics*, **62** (1986).
- [13] R. SCHWARTZ: *The pentagram map*, *Experimental math.*, **1** (1992), 71–81.
- [14] R. SCHWARTZ: *Pappus's theorem and the modular group*, *Public. math. I H E S*, **78** (1993), 187-206.
- [15] R. SCHWARTZ: *Desargues theorem, dynamics, and hyperplane arrangements*, *Geometriae dedicata*, **87** (2001), 261–283.
- [16] R. SCHWARTZ: *The pentagram map is recurrent*, *Experimental math.*, **10** (2001), 519–528.
- [17] R. SCHWARTZ: *The Poncelet grid*, 2001.
- [18] R. SCHWARTZ: *The density of shapes in three dimensional barycentric subdivision*, (2002).
- [19] R. SCHWARTZ: *Discrete monodromy, pentagrams, and the method of condensation*, (2003).
- [20] G. SEGAL: *The Geometry of the KdV Equation*, *International Journal of Modern Physics A*, **6** (1991), 2859–2869.

Added in proof in July 2005 : R. Schwartz just succeeded to extend the density of the shape of barycentric subdivisions to dimension 4, see [www.math.umd.edu/~ res/Papers/affine.ps](http://www.math.umd.edu/~res/Papers/affine.ps) (or .pdf).

*Lavoro pervenuto alla redazione il 9 novembre 2004
ed accettato per la pubblicazione il 26 aprile 2005.
Bozze licenziate il 1 settembre 2005*

INDIRIZZO DELL'AUTORE:

Marcel Berger – IHÉS – 35 route de Chartres – 91 440 BURES sur YVETTE – France
E-mail: berger@ihes.fr