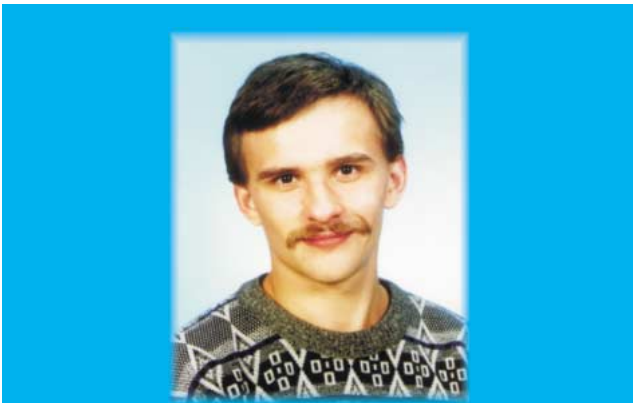


# ТРИОНЫ: ТРИ ТЕЛА В ДВУХ ИЗМЕРЕНИЯХ

Р.А. Сергеев

Физико-технический институт им. А.Ф.Иоффе Российской Академии Наук



Ринат Александрович Сергеев – закончил физико-технический факультет СПбГТУ, кафедру ФТТ в 2000 году. Сейчас является аспирантом ФТИ, в секторе теоретических основ микроэлектроники у руководителя Суриса Роберта Арнольдовича. Автор одной статьи в журнале ФТТ. Область научных интересов – низкоразмерные системы, квантовомеханические задачи с небольшим количеством частиц. Область ненаучных интересов – компьютерные стратегии, книги, шахматы (звание кмс).

## 1. Введение, или что такое трионы

Бурное развитие гетероструктур в последние десятилетия привело к тому, что удалось обнаружить или создать большое количество физических объектов и явлений, которые ранее либо не изучались, либо рассматривались чисто теоретически, в виде экзотики, вряд ли осуществимой на практике. Действительно, возможность встраивать в проводник потенциал практически любого профиля, причем с масштабом, характерным для проявления квантоворазмерных явлений, позволила создавать на практике искусственные объекты с заранее заданными свойствами. Так, например, квантовая точка представляет собой, фактически, искусственный атом с системой уровней, которая задается размерами, формой квантовой точки и полупроводником, на основе которого она реализована. Заметим, что все эти параметры поддаются контролю со стороны экспериментатора, тем самым, именно он определяет, какой объект будет создан.

Для того чтобы получить квантоворазмерную структуру в полупроводнике, необходимо создать ограничения на движение носителей заряда на масштабе длин, сравнимых с их де-бройлевскими длинами волн. Принципиальными здесь являются структуры, в которых движение носителей полностью ограничено только в одном (квантовые ямы), двух (квантовые нити) или во всех трех (квантовые точки) направлениях. Создание таких структур означает реализацию на практике объектов с размерностью меньшей, чем в

обычном полупроводнике<sup>1</sup>. Один из многочисленных эффектов, связанных с понижением размерности, это увеличение характерной энергии связи практически любых низкоразмерных систем по сравнению с их трехмерными аналогами. Это связано с тем, что частицы, из которых состоит система, имеют меньше степеней свободы в такой структуре, чем в трехмерном полупроводнике, из-за того, что их движение ограничено в одном или нескольких направлениях. Это уменьшает их характерную энергию локализации, которая возникает при образовании системы. С другой стороны, связывающий потенциал системы, при наличии ограничения, как правило, возрастает, так как, из-за концентрации волновой функции в области квантоворазмерной структуры, усиливается кулоновское взаимодействие, и возрастает роль обменного взаимодействия (сильнее перекрываются волновые функции одинаковых частиц). В результате рост энергии связи практически любых систем, даже при небольшом понижении их размерности, может быть значительным. Например, энергия связи основного состояния двумерного экситона (связанные электрон и дырка) в 4 раза выше, чем у соответствующего ему трехмерного аналога. Интерес вызывает также то, что при понижении размерности происходят не только количественные, но и качественные изменения в квантовомеханических системах.

Например, хорошо известно [1], что трехмерная потенциальная яма, в случае если ее глубина достаточно мала (по сравнению с характерной энергией локализации), не имеет ни одного связанного состояния, и только если глубина ямы превышает некоторое критическое значение, такое состояние появляется. В двумерном же потенциале, связанное состояние существует в любом отрицательном потенциале  $V(\mathbf{r}) \leq 0$ , если не равен нулю интеграл от этого потенциала по всему пространству

$$\int_{\mathcal{R}} V(\mathbf{r}) d\mathbf{r} < 0.$$

В связи с этими эффектами в область внимания исследователей попали системы, которые до развития квантоворазмерных гетероструктур представляли только теоретический интерес. Одним из таких новых объектов стал связанный трехчастичный электрон-дырочный комплекс – трион. Из набора электронов и дырок можно составить два различных варианта этого комплекса (см. рис. 1):  $X^-$  (2 электрона и дырка) и  $X^+$  (2 дырки и электрон).

Впервые на возможность существования трионов в полупроводнике было указано еще в 1958 году Лампертом [2]. Однако в обычном полупроводнике харак-

<sup>1</sup> Имеется в виду размерность k-пространства, то есть число независимых направлений, в которых движение частицы с данной энергией не квантовано.

терная энергия связи этих комплексов невелика – десятые доли  $\text{meV}$ , поэтому экспериментальное обнаружение трионов произошло только в 1992 году [3] в полупроводниковой гетероструктуре с квантовой ямой. То есть их обнаружение стало возможным только вследствие использования эффектов, связанных с понижением размерности.

Действительно, заметим, что если ширина квантовой ямы становится малой по сравнению с характерными размерами триона, то движения частиц, из которых он состоит, параллельно и перпендикулярно яме становятся независимыми, и их можно разделить. При этом ширина ямы перестает влиять на волновую функцию триона в плоскости ямы и его в этом случае можно считать чисто двумерным. Поскольку реальные размеры комплексов довольно велики – до  $50 \text{ \AA}$ , то получение структуры с двумерным трионом вполне возможно на практике. Как оказалось, в связи с эффектом пониженной размерности, энергия связи триона в такой структуре может до 10 раз превосходить таковую в обычном полупроводнике. Более того, практически незаметные в обычном полупроводнике, именно трионы нередко определяют нижний край спектра оптического поглощения квантовой ямы.

Но как устроен двумерный трион? Нетрудно заметить, что волновая функция любого триона, с точностью до масштаба, определяется только одним параметром – отношением эффективных масс электрона и дырки  $\sigma = m_e^* / m_h^*$ . Причем, это отношение масс и, как следствие, все свойства этих комплексов могут различаться в разных полупроводниках в широких пределах: от  $\sigma=1$  (например, в случае легкой дырки), до очень малых значений  $\sigma \rightarrow 0$  (если масса дырки многократно превышает массу электрона). А если теперь заметить, что трион  $X^+$  с отношением масс  $\sigma$  имеет такую же волновую функцию, как и трион  $X^-$  с  $1/\sigma$ , то получается, что с помощью трионов можно экспериментально наблюдать целый класс двумерных трехчастичных систем. А именно, все системы, состоящие из трех частиц, связанных кулоновским взаимодействием, из которых две частицы одинаковы, а третья отличается от них массой и знаком заряда. Отметим, что предельными случаями таких систем являются двумерные ион водорода  $H^-$  с одной стороны и молекула водорода  $H_2^+$  с другой. То есть трионы, фактически, представляют собой экспериментально наблюдаемый промежуточный объект между ионом  $H^-$  и молекулой  $H_2^+$  и, изучая эти комплексы при различных отношениях масс электрона и дырки, можно плавно перейти от отрицательно заряженного иона к положительно заряженной молекуле, что само по себе является уникальной возможностью.

В связи с этим, становится актуальной задача: а как же найти энергию такого комплекса в чисто двумерном случае? Причем желательно это сделать сразу при всех отношениях эффективных масс электрона и дырки, чтобы получить результаты пригодные для любых полупроводников.

## 2. Другие кулоновские задачи трех тел в квантовой механике

Как уже упоминалось, задача о трионе представляет собой двумерный вариант квантовомеханической задачи трех тел, связанных кулоновским взаимодействием. Как и в трехмерном случае, ее невозможно точно решить в общем случае, пользуясь только аналитическими методами. Даже численное решение этой задачи требует определенных усилий. Однако задача о трионе – далеко не первый в квантовой механике случай задачи трех тел, связанных кулоновским взаимодействием. Действительно, в различное время возникали аналогичные, главным образом трехмерные, задачи и, прежде чем перейти к дальнейшему рассмотрению триона, мы вкратце остановимся на них и упомянем некоторые пути их решения.

Оказывается, помимо трионов, в обычных экспериментах встречается не так уж много качественно различных квантовомеханических кулоновских систем, состоящих из трех частиц. Более того, во многих из этих систем, вследствие особенностей их строения, возникают один или несколько малых параметров, что позволяет серьезно упростить их рассмотрение.

Кулоновские системы трех тел возникают, за несколькими исключениями, при изучении атомов и молекул. В этом случае единственное из чего они могут состоять – это легкие отрицательно заряженные электроны и тяжелые положительно заряженные ядра, заряд которых либо равен, либо кратен заряду электрона. Исходя из такого набора, можно сформулировать только две качественно различных задачи.

Во-первых, это задача о системе с двумя ядрами, связанными одним электроном. Причем заряд ядер в этом случае, вследствие их взаимного кулоновского отталкивания, должен равняться по модулю заряду электрона. Характерный представитель такой системы – это молекула водорода  $H_2^+$ .

Во-вторых, это задача об атоме с двумя электронами. Здесь ядро не обязательно должно иметь единичный заряд и желательно рассмотреть два различных случая:

1. Заряд ядра больше заряда электрона. Крайний, и поэтому – наиболее интересный, представитель этого класса – атом гелия  $He$  (заряд ядра только в 2 раза превосходит заряд электрона).

2. Заряд ядра равен заряду электрона. Этот случай особенно интересен тем, что электроны взаимодействуют друг с другом с той же силой, что и с ядром, поэтому ближний к ядру электрон полностью экранирует его для дальнего электрона, что серьезно меняет волновую функцию этой системы. Характерный представитель в этом случае – это отрицательный ион водорода  $H^-$ .

Во всех этих системах (молекула  $H_2^+$ , атом  $He$  и ион  $H^-$ ) есть, по крайней мере, один малый параметр – малая масса электрона, по сравнению с массой ядра. Это указывает на то, что их рассмотрение во многом можно упростить. Посмотрим по порядку, как можно найти энергию основного состояния этих систем:

1. Молекула водорода  $H_2^+$ .

В этом случае, из-за малой массы электрона по сравнению с протоном, волновые функции электрона и

ядер можно разделить. То есть, можно считать, что электрон занимает наиболее энергетически выгодное положение в потенциале двух неподвижных ядер, а сами ядра адиабатически движутся в некотором эффективном связывающем потенциале. Задача в этом случае распадается на две существенно более простые.

## 2. Атом гелия He.

В этой задаче можно сделать сразу два упрощения. Во-первых, вследствие малого отношения масс электрона и ядра, последнее можно считать неподвижным. Во-вторых, так как взаимодействие между электронами минимум в два раза меньше, чем их притяжение к ядру, то энергию основного состояния даже атома гелия можно с хорошей точностью найти, оценивая взаимодействие двух электронов по теории возмущений [4]. Также существенно упрощает задачу неспособность электрона в одиночку полностью заэкранировать потенциал ядра. То есть, даже дальний от ядра электрон испытывает кулоновское притяжение ядра, пусть даже с меньшим эффективным зарядом. Это позволяет получить энергию основного состояния гелия помимо теории возмущений простыми вариационными процедурами. В этом случае неизвестная точная волновая функция электронов в атоме гелия заменяется удобной аналитической формой, включающей некоторые произвольные параметры. С помощью этой пробной функции вычисляется энергия гелия, как функция от этих подгоночных параметров. Минимальное относительно всех параметров значение этой энергии и принимается за оценку энергии основного состояния атома гелия. Точность этого метода напрямую зависит от того, насколько близка оказалась выбранная подгоночная функция к точной функции электронов в гелии. Отсутствие полного экранирования электроном ядра, как раз и дает возможность, пользуясь простыми методами, "угадать" волновую функцию этого атома.

## 3. Отрицательно заряженный атом водорода H<sup>-</sup>.

От разобранный выше атома гелия его отличает отсутствие второго "малого параметра": так как заряды всех входящих в H<sup>-</sup> частиц равны, то взаимодействие между электронами имеет практически ту же величину, что и взаимодействие каждого из них с ядром. Из-за этого становится невозможным какое-либо разбиение этой задачи на менее сложные составляющие, что затрудняет ее решение. Для нахождения энергии основного состояния иона H<sup>-</sup> используются главным образом вариационные методы. Первый вариационный расчет этого иона был сделан еще в 1929 году Бете [5], с помощью метода, предложенного Хиллераасом в том же году [6], в связи с возникшей необходимостью рассчитать взаимодействие иона H<sup>-</sup> с ионом Li<sup>+</sup> в соединении гидрида лития LiH. Позже, в сороковые годы, свойства отрицательного иона водорода оказались важны для объяснения непрозрачности атмосферы Солнца и солнцеподобных звезд.

Для полноты, к рассмотренным системам еще нужно добавить ион позитрония (связанное состояние двух электронов и позитрона), при расчетах которого, также как и для иона H<sup>-</sup>, используются вариационные процедуры.

Пожалуй, на этом можно закончить список принципиально различных кулоновских трехчастичных задач, возникающих в экспериментальной практике. Другие кулоновские трехчастичные системы, такие как носители заряда, локализованные на кулоновских центрах или атом с мезонами вместо электронов, как правило, можно рассматривать аналогично разобранным выше задачам об ионе H<sup>-</sup> и молекуле H<sub>2</sub><sup>+</sup>.

## 3. Основное состояние триона

Ввиду полного отсутствия каких-либо малых параметров, при нахождении энергии основного состояния триона, как и в случае иона H<sup>-</sup>, обычно используют вариационные методы.

Как уже упоминалось, основная задача в любом вариационном методе заключается в выборе вариационной функции. С одной стороны – она должна быть как можно более простой, так как, для того, чтобы получить минимальное, относительно всех варьируемых параметров, значение энергии, требуется вычислить это значение для большого количества наборов значений этих параметров, что иногда требует серьезных вычислительных усилий. Желательно, чтобы максимальную часть этих вычислений можно было бы проделать аналитически. С другой стороны – пробная волновая функция должна максимально соответствовать по форме точной волновой функции системы, иначе полученное значение энергии будет сильно отличаться от истинного.

Есть два возможных пути построения нужной вариационной функции. Первый – это искать ее в виде суммы большого числа простых для аналитики функций, а в качестве вариационных параметров использовать главным образом весовые коэффициенты перед этими слагаемыми. Этот метод очень хорош, когда требуется получить энергию состояния с высокой точностью, и поэтому заранее предполагается использование большого количества варьируемых параметров. С различными вариациями этот метод применялся для расчетов трионов и других трехчастичных систем неоднократно [7-9]. Энергия трионов в некоторых расчетах получалась с точностью до 16 знаков, а количество подгоночных параметров достигало 1000.

Другой путь построения хорошей вариационной функции необходим, если нам не нужно получить результаты с очень высокой точностью, но было бы желательно иметь под рукой не очень сложную аналитическую функцию, удобную для использования в каких-либо оценках и расчетах. Для сравнения – представьте насколько проще пользоваться функцией

$$f(x) = \exp(-3x + 1),$$

чем численным рядом

$$f(x) \approx 2.718 - 8.155x + 12.232x^2 + \dots,$$

до тех пор пока не угадать, что второе есть всего лишь разложение первого в степенной ряд.

Для построения такой вариационной функции необходимо правильно учесть все эффекты, которые вносят основной вклад в энергию системы. В том, как и в какой форме их учесть, есть определенный элемент

творческого "угадывания". Как правило, функции, построенные таким образом, труднее интегрировать, чем набор простых функций, который использовался в первом подходе, поэтому использовать их для высокоточных вычислений путем увеличения подгоночных параметров обычно нецелесообразно. Зато даже при использовании небольшого количества параметров они дают значение энергии системы с хорошей точностью.

Пойдем по второму пути и посмотрим, как построить хорошую функцию с небольшим числом подгоночных параметров, которая позволила бы получить энергию основного состояния триона при любом значении отношения масс электрона и дырки. Необычность задачи состоит в том, что одна и та же функция при различных значениях вариационных параметров должна с хорошей точностью описывать не только  $X^-$  и  $X^+$  трионы, но и предельные случаи – ион водорода  $H$  и молекулу водорода  $H_2^+$ , различие между волновыми функциями которых очень велико.

В качестве основы для нашей функции возьмем двумерный аналог пробной функции, предложенной в 1944 году Чандрасекаром [10] для трехмерного иона водорода  $H^-$ :

$$\psi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = [\exp(-a\mathbf{r}_1 - b\mathbf{r}_2) + \exp(-b\mathbf{r}_1 - a\mathbf{r}_2)](1 + cR). \quad (1)$$

Она состоит из симметризованного произведения двух водородоподобных функций с различными радиусами орбит электронов и поляризационного множителя. Величины  $\mathbf{r}_1$  и  $\mathbf{r}_2$  – 2D-векторы от ядра к электронам (см. рис. 1),  $R \equiv |\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|$ . Вариационные параметры  $a$  и  $b$  – имеют смысл обратных радиусов орбит двух электронов, а параметр  $c$  – обеспечивает рост волновой функции при увеличении расстояния между электронами, то есть, учитывает поляризационные эффекты.

Функция (1) учитывает, пусть и в простом виде, все эффекты, которые вносят основной вклад в энергию иона. А именно:

1. Кулоновское взаимодействие каждого из электронов с ядром.  
Функция (1) содержит в основе водородоподобные функции ( $\exp(-a\mathbf{r})$ ).
2. Экранирование дальнего электрона ближним.  
В слагаемое  $\exp(-a\mathbf{r}_1 - b\mathbf{r}_2)$  волновые функции электронов ( $\exp(-a\mathbf{r}_1)$ ,  $\exp(-b\mathbf{r}_2)$ ) входят с разными показателями экспонент, что соответствует различным радиусам орбит электронов.
3. Обменное взаимодействие.

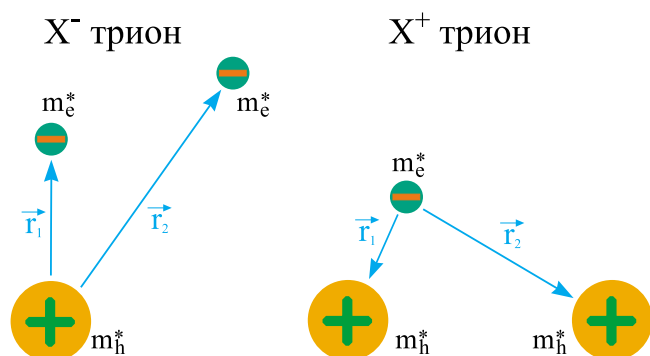


Рис.1.  $X^-$  и  $X^+$  трионы, общий вид.

Волновая функция симметризована и не меняется при замене  $\mathbf{r}_1 \leftrightarrow \mathbf{r}_2$ , то есть допускает обмен электронов.

#### 4. Поляризация.

Как уже упоминалось, она учтена наличием множителя  $(1+cR)$ .

Так как эти вклады присутствуют и являются основными как для трехмерного иона  $H^-$ , так и для его двумерного аналога, то неудивительно, что с помощью функции (1) получается хорошее приближение энергии связи иона. В обоих случаях ошибка в определении энергии составляет менее 10% от ее значения (за нуль энергии принято состояние: атом водорода + свободный электрон).

Посмотрим, что изменится, если мы применим волновую функцию (1) к трионам с различными значениями отношения масс. Заметим, что волновая функция триона должна содержать в своей основе функцию основного состояния экситона (электрон + дырка), которая совпадает по форме  $\exp(-a\mathbf{r})$  с функцией атома водорода. Причем, энергия триона (в особенности –  $X^-$  триона) должна определяться вкладами тех же, как и в ионе  $H^-$ , эффектов: поляризации, экранирования и обменного взаимодействия. Поэтому, есть основания предполагать, что с помощью функции (1) можно с неплохой точностью (не худшей, чем для иона водорода) получить энергию любого  $X^-$  триона.

Проблема возникает при моделировании  $X^+$  трионов по мере приближения к противоположному от  $H^-$  пределу – молекуле  $H_2^+$ , в связи с наличием у них двух тяжелых частиц. В этом пределе движение этих частиц "замораживается", и они перестают вносить вклад в кинетическую энергию комплекса. Это приводит к известному факту, что энергия связи молекулы  $H_2^+$  почти в 4 раза превышает энергию связи иона  $H^-$ .

При увеличении отношения масс электрона и дырки вблизи предела  $H_2^+$ , кинетическая энергия колебаний двух тяжелых частиц, возрастающая пропорционально корню из этого отношения масс, очень быстро начинает вносить существенный вклад в энергию триона. Уже при отношении масс  $\sigma=0.1$  энергия связи этого комплекса уменьшается почти вдвое по сравнению с пределом  $H_2^+$  ( $\sigma \rightarrow 0$ ). Поэтому, для правильного вычисления энергии  $X^+$  триона, особенно при малых отношениях масс, необходимо, в дополнение к вышеперечисленным эффектам, учесть возможность продольных колебаний одинаковых частиц возле некоторого равновесного расстояния. Так как других эффектов, которые могут внести большой вклад в энергию триона при каком-либо отношении масс, больше не видно, то пробная функция, в которой все эти эффекты будут учтены, должна с хорошей точностью давать энергию комплекса при любом отношении масс.

Пример такой функции приведен в работе [11]:

$$\psi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = (\exp(-a\mathbf{r}_1 - b\mathbf{r}_2) + \exp(-b\mathbf{r}_1 - a\mathbf{r}_2)) \times \frac{1 + cR}{1 + d(R - R_0)^2} \exp(-sR), \quad (2)$$

где, в дополнение к определенным выше величинам  $a$ ,  $b$  и  $c$ , введены подгоночные параметры  $d$  и  $R_0$ , которые учитывают возможные малые колебания с характерной амплитудой  $1/\sqrt{d}$  возле равновесного расстояния



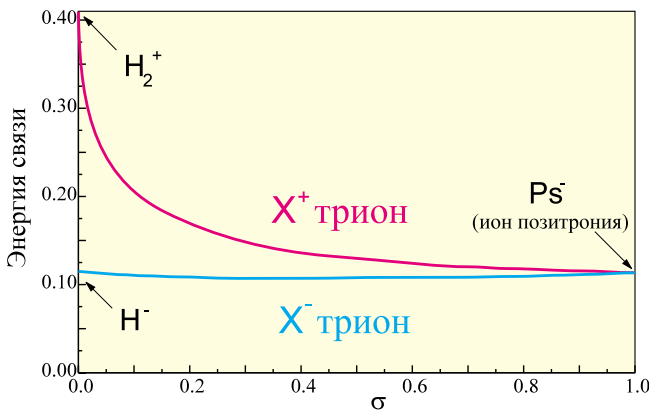


Рис.2. Энергия связи  $X^+$  (красный) и  $X^-$  (синий) трионов в зависимости от отношения эффективных масс электрона и дырки. Энергия нормирована на энергию связи экситона

$R_0$  и параметр  $s$  для оптимизации функции триона при больших расстояниях между одинаковыми частицами.

Выбор множителя функции (2),  $1/(1+d(R-R_0)^2)$ , отвечающего за продольные колебания комплекса, несложно обосновать. Заметим, что в случае, если связь между двумя одинаковыми частицами триона можно описать параболическим потенциалом, то волновая функция (2) должна зависеть от  $R$  (расстояния между этими двумя частицами) по Гауссу:  $\psi(R) \sim \exp(-d(R-R_0)^2)$ . Но это приближение справедливо лишь для очень малых колебаний дырок комплекса  $X^+$  и только в пределе молекулы  $H_2^+$  (при очень малых  $\sigma$ ). Реально потенциал, связывающий две одинаковые частицы в трионе, на больших расстояниях гораздо слабее параболического, и гауссовское приближение волновой функции триона приведет к гораздо более быстрому ее убыванию с расстоянием, чем это есть в действительности. Поэтому выбрана более слабая зависимость:  $\psi(R) \sim 1/(1+d(R-R_0)^2)$ , которая неплохо дает первое приближение колебаний триона вблизи  $R=R_0$ , а поведение функции  $\psi(R)$  на бесконечности было задано более слабым, чем гауссовская функция, множителем  $\exp(-sR)$ .

Зависимость энергии связи триона от отношения масс, полученная с помощью функции (2), приведена на рис.2. Несмотря на простоту подгоночной волновой функции, мы получили эту зависимость с хорошей точностью: энергия связи триона при любом отношении масс составляет более 95% от ее точного значения, которое известно из более серьезных расчетов [7,9] с использованием большого числа вариационных параметров.

Обратим также внимание на то, что энергия связи триона (нормированная на энергию связи экситона) практически одинакова для  $X^-$  ( $\approx 0.12$ ) и не зависит от отношения масс электрона и дырки; в то время как для  $X^+$  она растет по мере приближения к  $H_2^+$ , причем основной рост приходится на область  $\sigma \leq 0.1$ . На этом

участке энергия связи триона возрастает с 0.22 (при  $\sigma = 0.1$ ) до 0.41 (при  $\sigma = 0$ ) — почти в два раза. А при  $\sigma = 0$  производная энергии по отношению масс даже имеет корневую особенность. Это, как уже упоминалось, связано с исчезновением колебательной степени свободы в  $X^+$  трионах при малых отношениях масс [11].

#### 4. Заключение

Мы показали, что, для того, чтобы найти энергию  $X^-$  и  $X^+$  трионов при любом отношении масс с хорошей точностью, достаточно учесть вклад пяти факторов: кулоновского притяжения двух электронов к дырке (будем говорить в терминах  $X^-$ ), экранирования дальнего электрона ближним, обменного взаимодействия между электронами, поляризации экситона дальним электроном и продольных колебаний двух электронов друг относительно друга. Как оказалось, несложная вариационная функция, построенная из таких соображений, позволяет вычислить энергию связи  $X^-$  и  $X^+$  трионов с хорошей точностью во всем диапазоне отношений масс электрона и дырки.

#### Благодарности

Автор благодарит Суриса Роберта Арнольдовича, своего научного руководителя, без которого эта статья вряд ли была бы написана, а также — весь коллектив сектора теоретических основ микроэлектроники ФТИ за хорошую, дружескую атмосферу.

#### Литература

1. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, Теоретическая физика, т. 3, Квантовая механика, (М: Наука, 1963), §45.
2. M. A. Lampert, Phys. Rev. Lett. **1**, 12, 450 (1958).
3. K. Kheng, R. T. Cox, Y. M. d'Aubigne, F. Bassani, K. Saminadayar, S. Tatarenko, Phys. Rev. Lett. **71**, 11, 1752 (1993).
4. H. A. Bethe, E. E. Salpeter, Quantum mechanics of one- and two- electron atoms. (Springer, Berlin-Göttingen-Heidelberg, 1957).
5. H. A. Bethe, Z. Phys. **57**, 815 (1929).
6. E. A. Hylleraas, Z. Phys. **54**, 347 (1929).
7. B. Stebe, A. Ainane, Superlatt. Microstruct. **5**, 4, 545 (1989).
8. Y. K. Ho, Phys. Rev. **A 48**, 6, 4780 (1993).
9. J. Usukura, Y. Suzuki, K. Varga, Phys. Rev. **B 59**, 9, 5652 (1999).
10. S. Chandrasekhar, Astrophys. J. **100**, 176 (1944).
11. P. A. Сергеев, P. A. Сурис, ФТТ **43**, 4, 714 (2001). (см. также диплом P. A. Сергеева, С-Петербург, СПбГТУ, каф. ФТТ, 2000)