

# Vågor i havet

del av kursen "Vågor som informationsbärare"

*Kristofer Döös*

*Meteorologiska institutionen*

*Stockholms universitet*

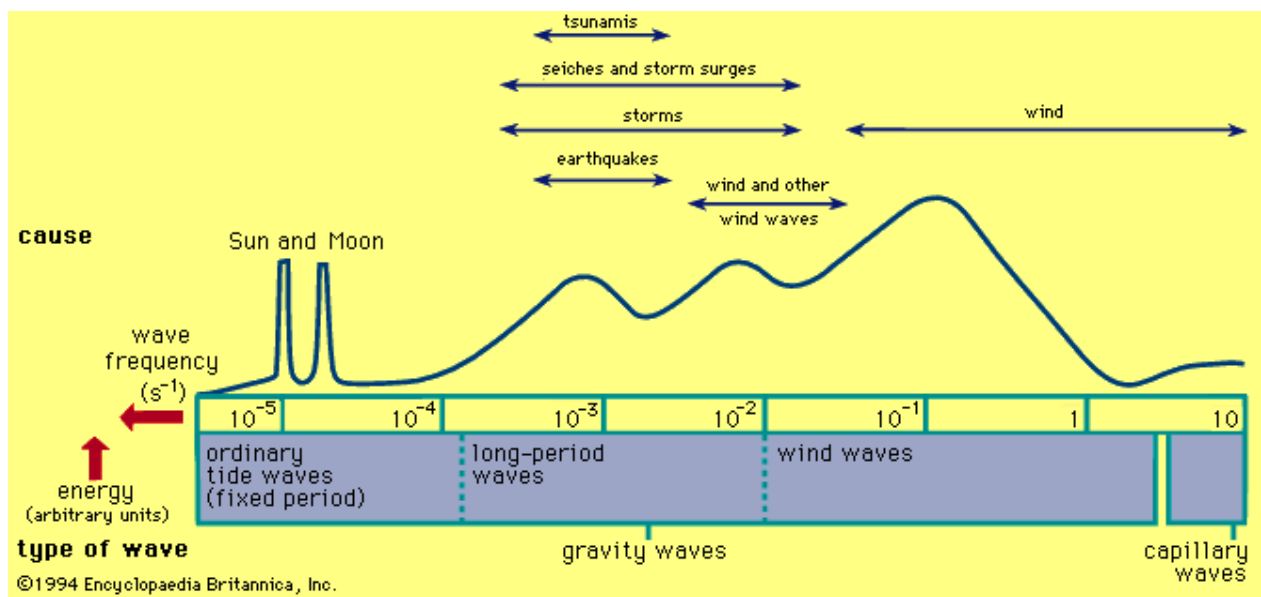
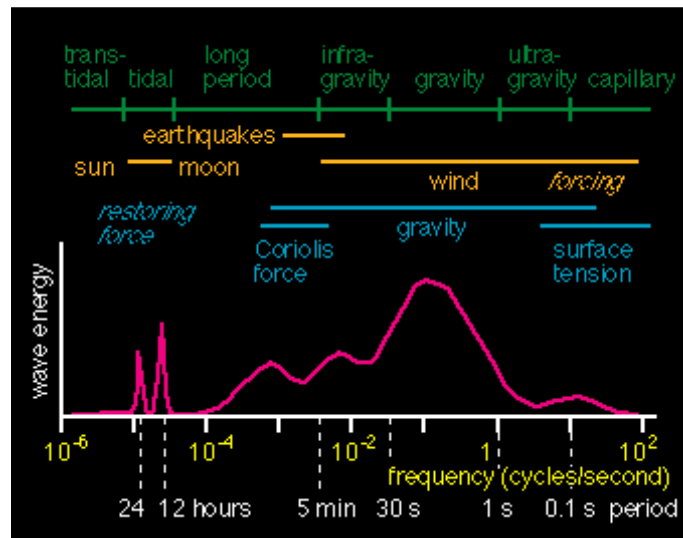
Det finns fyra återkallande krafter för vågorna i havet:

1. Ytspänningen
2. Gravitationen
3. Coriolis kraften (jordens rotation)
4. Vridmomentet som uppstår i samband med konservationen av potentiella vorticiteten

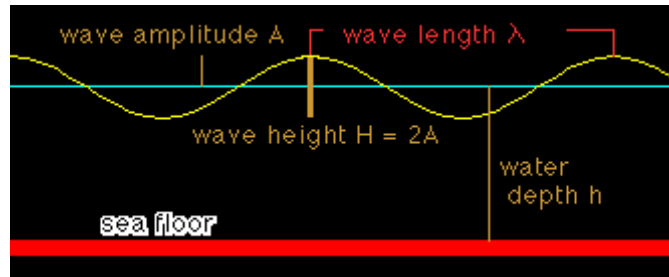


*Storleksordningen av våglängderna för vågorna i havet spänner mellan 1 cm och 10.000 km med tidsperioder mellan 0,1 sekund upp till flera år.*

# Vågindelning



## Vågekvationer



$$c = \text{fashastigheten} = \frac{\omega}{k} = \frac{\lambda}{T}$$

$$c_g = \text{grupphastigheten} = \partial \frac{\omega}{\partial k}$$

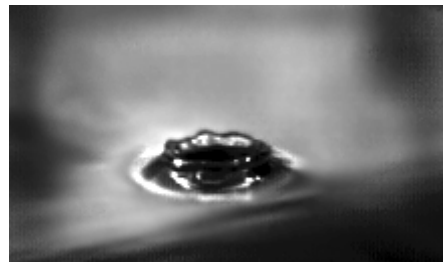
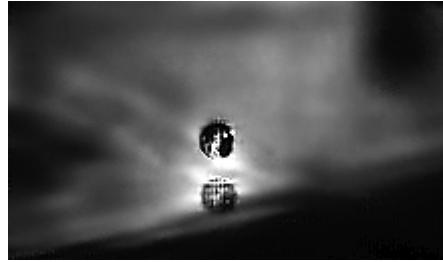
$$\lambda = \text{våglängden} = 2\pi k$$

$$k = \text{vågtalet} = \frac{2\pi}{\lambda}$$

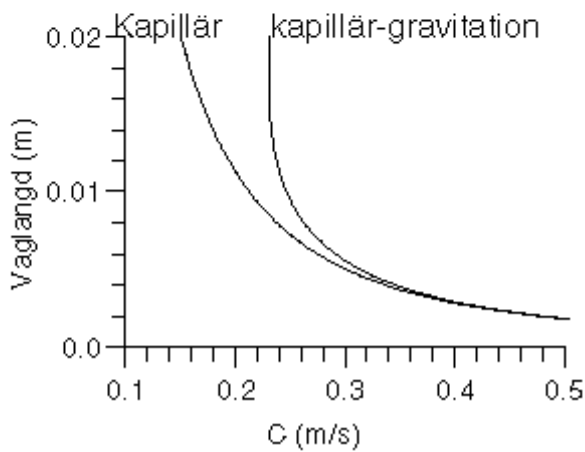
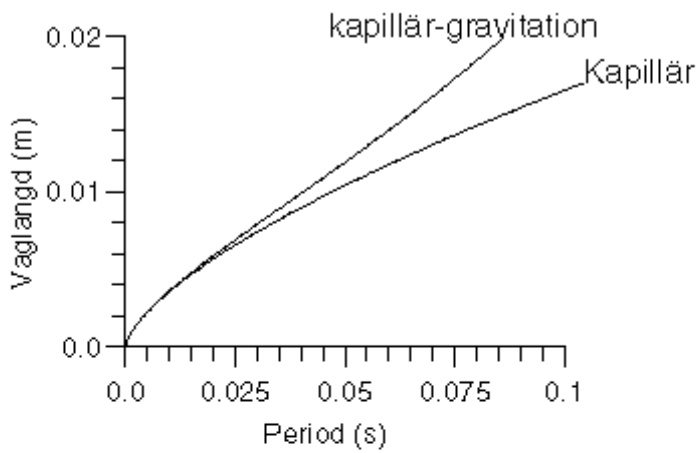
$$T = \text{perioden} = 2\pi \omega$$

$$\omega = \text{vinkelfrekvensen} = \frac{2\pi}{T}$$

## Kapillärvågor



De minsta vågorna i havet är kapillärvågor med en period på 0,1 sekund. Dessa vågor är oftast genererade av små kastvindar och där större vågor bryts. Den återkallande kraften är den molekylära ytspänningen och detta gör att amplituden är mycket liten.



$$c = \text{fashastigheten} = \frac{\omega}{k} = \frac{\lambda}{T} = \sqrt{\frac{\sigma k}{\rho}}$$

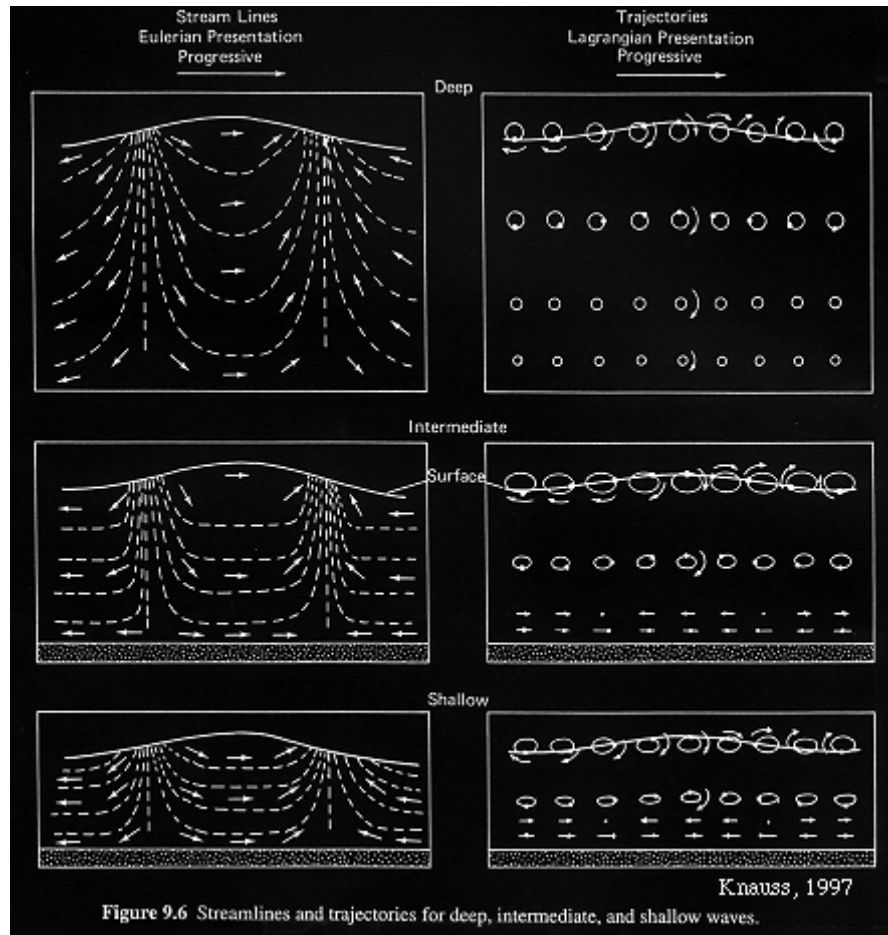
$$c_g = \text{grupphastigheten} = \frac{\partial \omega}{\partial k} = \frac{3}{2} c$$

där

$$\sigma = \text{vattenytspänningen} \approx 0.074 \text{ kg/s}^2$$

$$\rho = \text{vattendensiteten} \approx 1027 \text{ kg/m}^3$$

## Korta och långa gravitationsvågor



De Korta gravitationsvågor har en våglängd som är mindre än havsdjupet ( $\lambda < H$ ). Vågorna är oberörda av djupet och vattenpartiklarna rör sig i cirkulära orbitalbanor. Radien minskar snabbt med djupet. Vågens fashastighet är beroende av våglängden, vilket innebär att ju längre vågen är desto snabbare går vågen. Detta kan uttryckas som:

$$c = \sqrt{\frac{g}{k}} = \sqrt{\frac{g\lambda}{2\pi}}$$

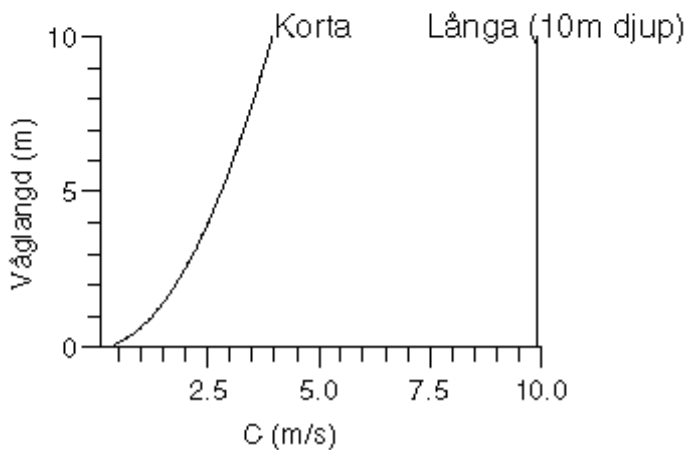
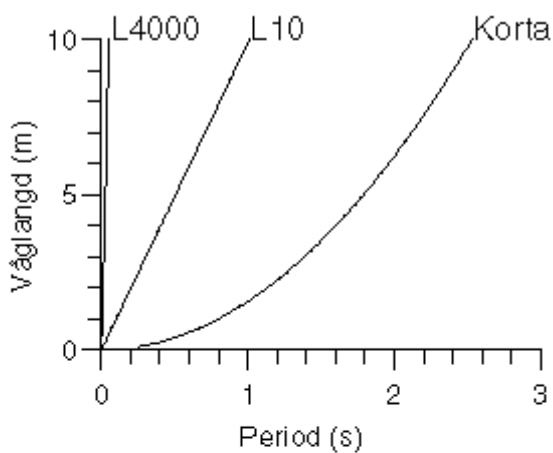
Grupphastigheten är hälften av fashastigheten:

$$c_g = \frac{c}{2}$$

De Långa gravitationsvågor har en våglängd som är större än havsdjupet ( $\lambda > H$ ). Vågorna är nu kontrollerade av djupet och vattenpartiklarna rör sig i elliptiska orbitalbanor. Ju längre vågen är desto plattare blir de elliptiska orbitalbanorna för att till slut bli helt platt. Fashastigheten är beroende av vattendjupet men oberoende av våglängden vilket innebär att ju djupare det är desto snabbare går vågen. Detta kan uttryckas som:

$$c = \sqrt{gH}$$

Grupphastigheten är lika med fashastigheten:  $c_g = c$



## Kombinerad gravitationsvåg

Vågor är inte alltid endast kapillära, korta eller långa utan en blandning:

$$\omega = \sqrt{\left(gk + \frac{\sigma k^3}{\rho}\right) \tanh(kH)}$$

$$c = \sqrt{\left(\frac{g}{k} + \frac{\sigma k}{\rho}\right) \tanh(kH)}$$

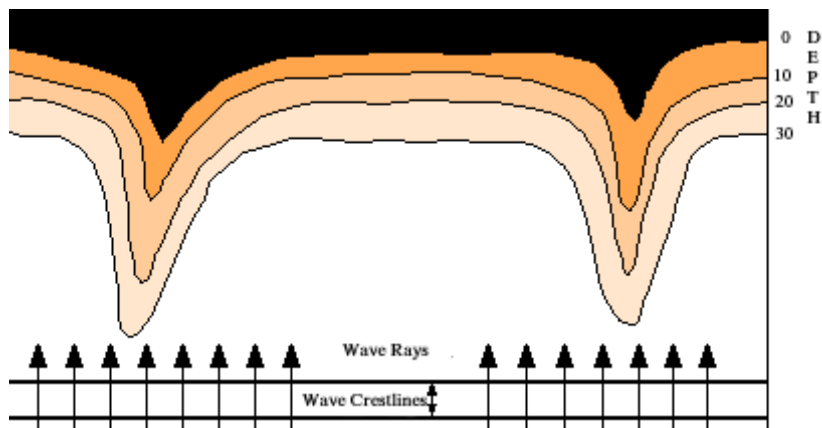
$$c_g = \frac{c}{2} \left[ \frac{2kH}{\sinh(2kH)} + \frac{1+3B}{1+B} \right] \quad \text{där} \quad B \equiv \frac{\sigma k^2}{g\rho}$$



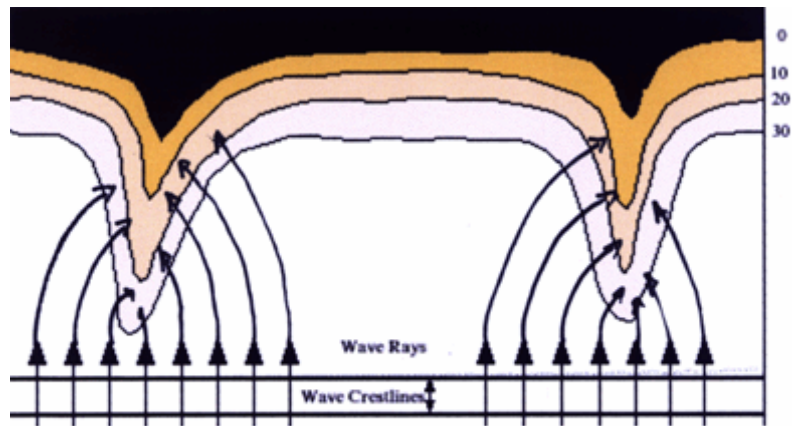
## Inkomande vågor mot en strand



*Varför är vågor som går in på en långgrund strand parallella mot stranden och varför kommer de in som långa bergsryggar och dalar ?*



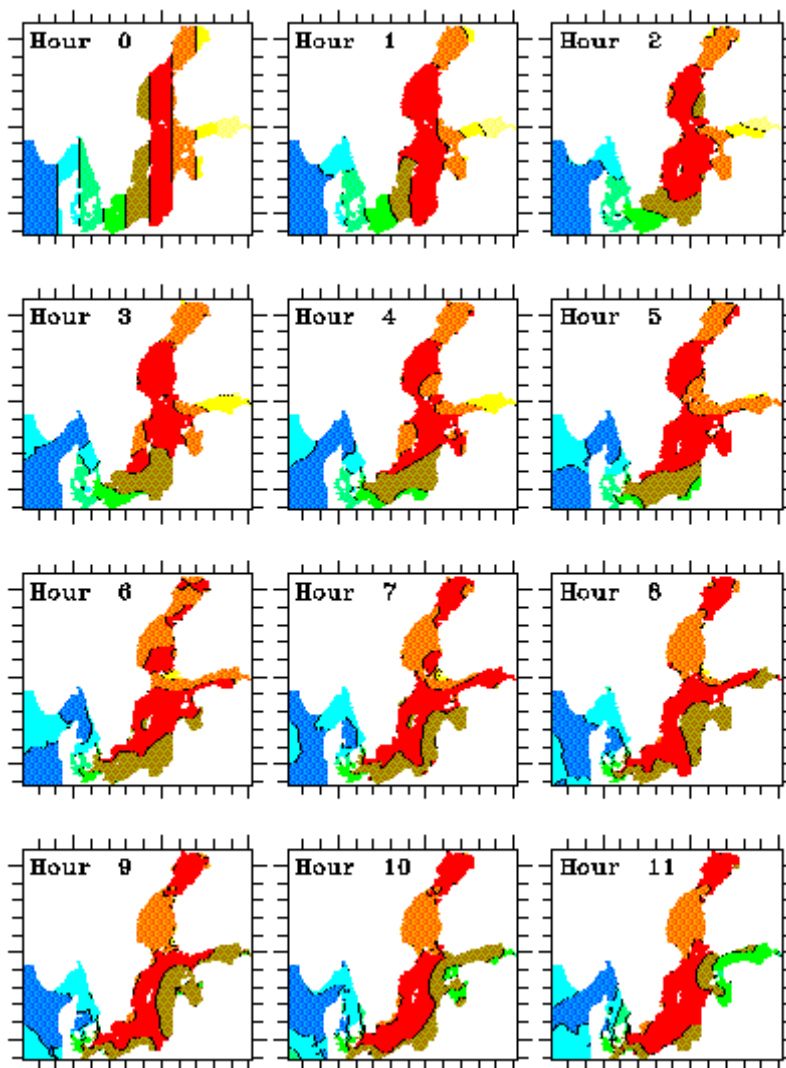
När vågorna kommer in på grunt vatten så blir våglängden längre än djupet och då blir vågorna *långa gravitations vågor*. Dessa vågors hastighet är direkt proportionella mot djupet och kommer följaktligen att gå långsammare och långsammare när de närmar sig stranden. Detta leder till att de främre vågorna som är på grundare vatten kommer sakta ner innan vågorna som är precis bakom som i sin tur kommer att sakta ner före de vågor som är bakom, etc. Följaktligen kommer vågorna att hopa sig när de närmar sig land. Av samma anledning kommer vågorna också att närma sig stranden vinkelrätt.

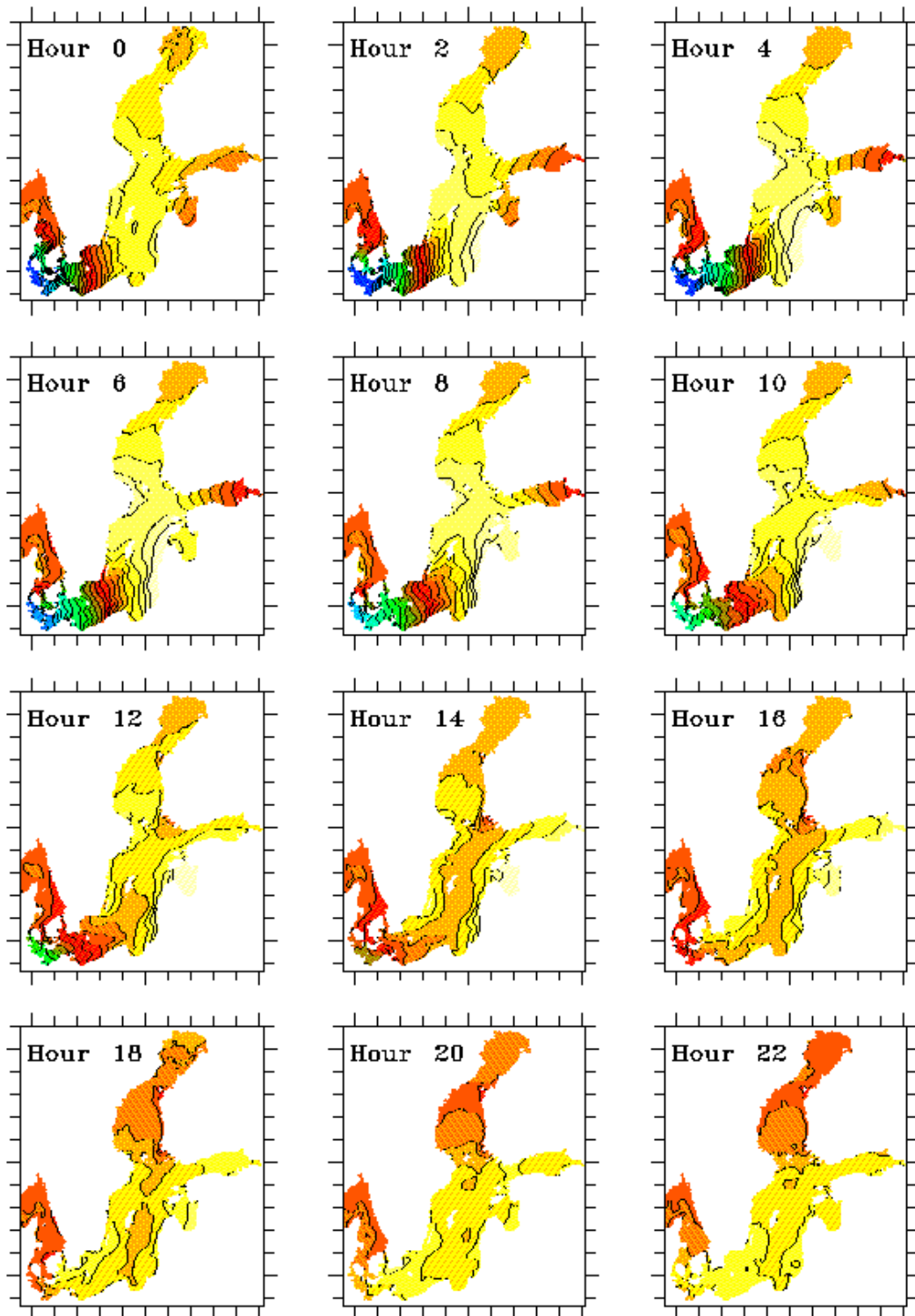


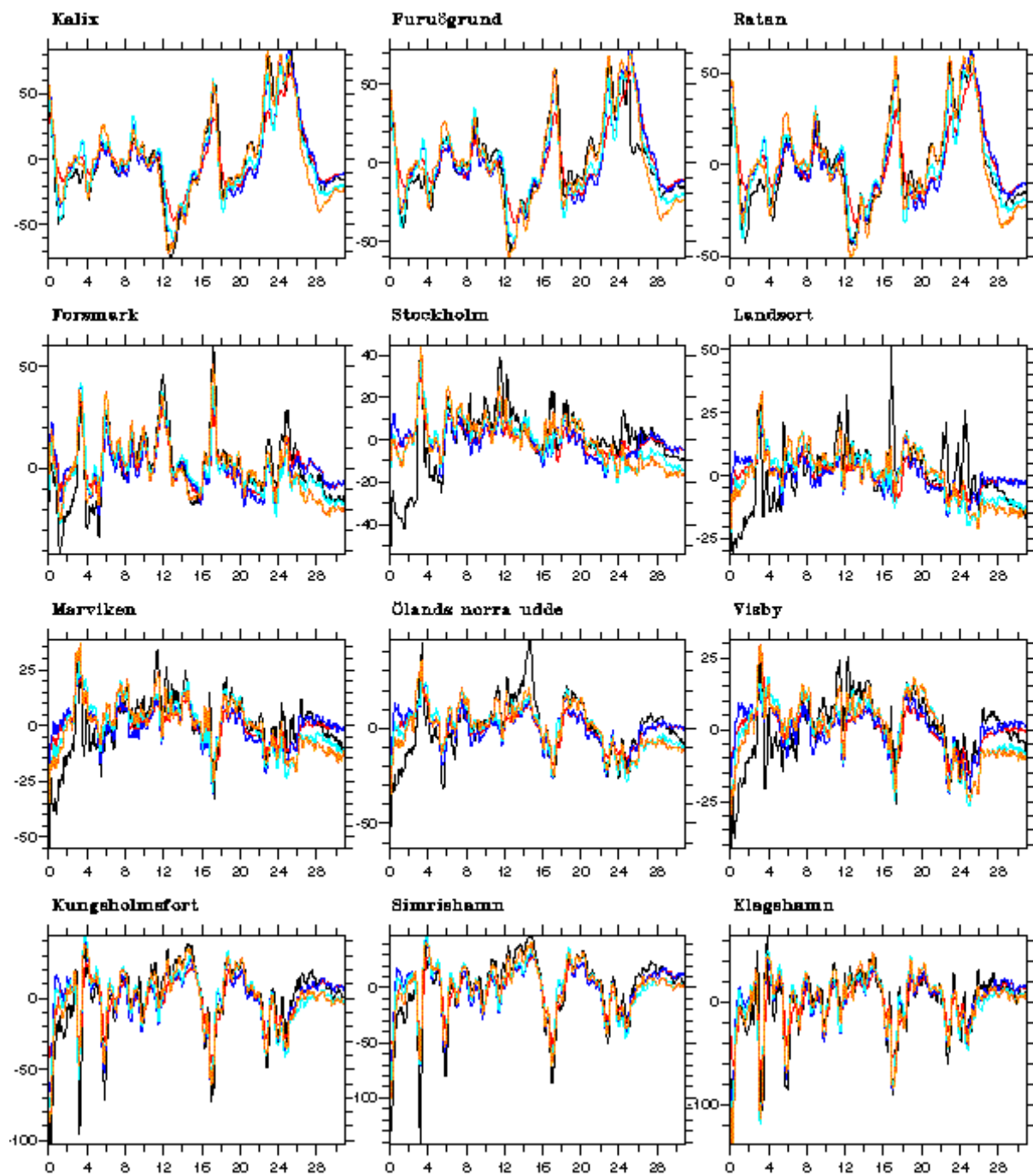
Note that wave rays bend toward the headlands, because at these locations the water is more shallow. Recall that refracting waves 'bend toward shallow water'.

Vågornas totala energi är summan av den potentiella energin som är proportionel mot vågens höjd och den kinetiska energin som är proportionel mot vågens hastighet. Då hastigheten går ner så måste följaktigen vågens höjd öka. När vågen når en viss höjd som är ca  $1/7$  av vågens längd så bryter vågen.

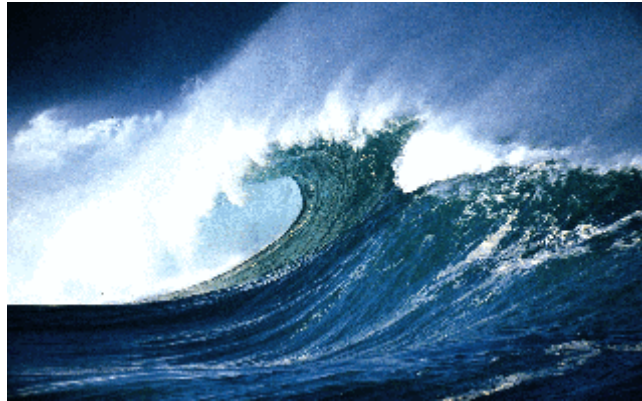
## Seicher i Östersjön



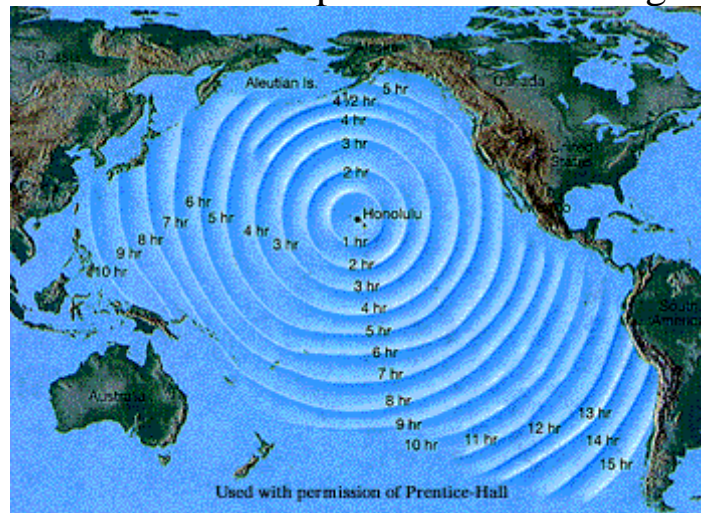




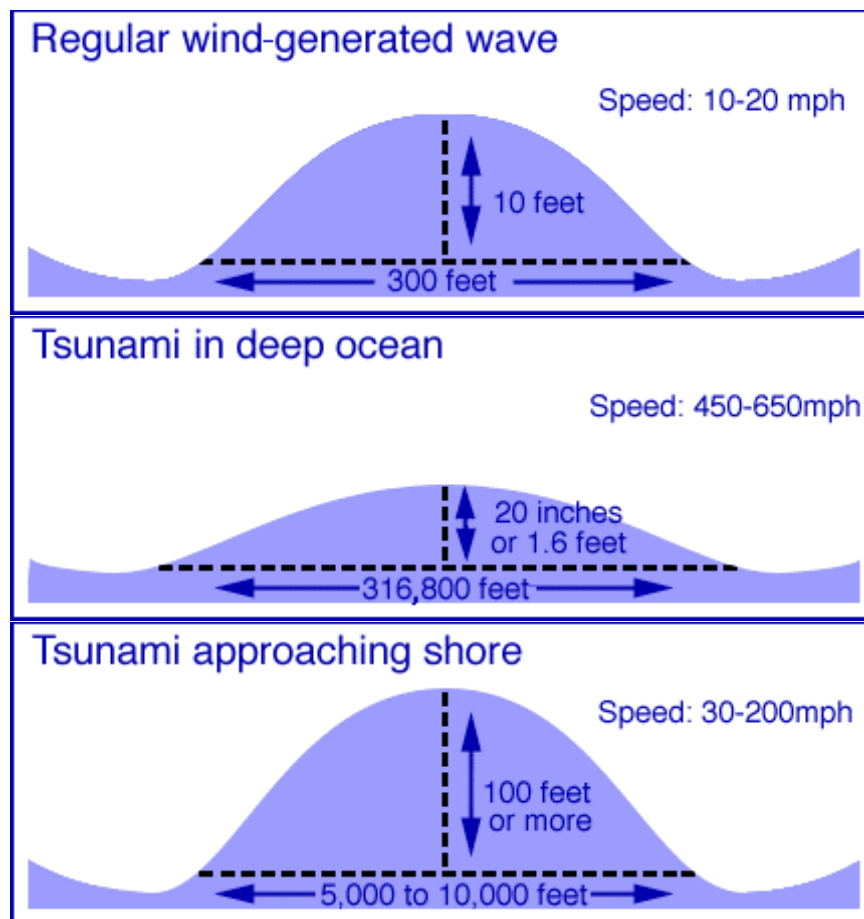
## Tsunamis



Tsunamisvågor är extremt långa ytgravitationsvågor som generas av jordskalv, jordskred, kärnvapenexplosioner eller infallande meteoriter. De flesta Tsunamis är generade på Stilla Havets havsbotten av jordskalv. Jordskalven deformerar lätt havsytan jämviktstillstånd som skapar en våg under gravitationens försök att återkalla jämvikten. Eftersom vågen har en mycket lång våglängd på i genomsnitt 200 km men samtidigt har en är en lång ytgravitationsvåg så är dess fashastighet på ca  $200 \text{ m/s} = 700 \text{ km/timmen}$ . En Tsunami kan följaktligen gå från centrala Stilla Havet till kusterna på mindre än en dag.



I djupt vatten så har Tsunamisvågen en amplitud på endast omkring en meter, men när vågen närmar sig land och kommer in på grundar vatten så växer vågen dramatiskt för att bevara den totala energin.



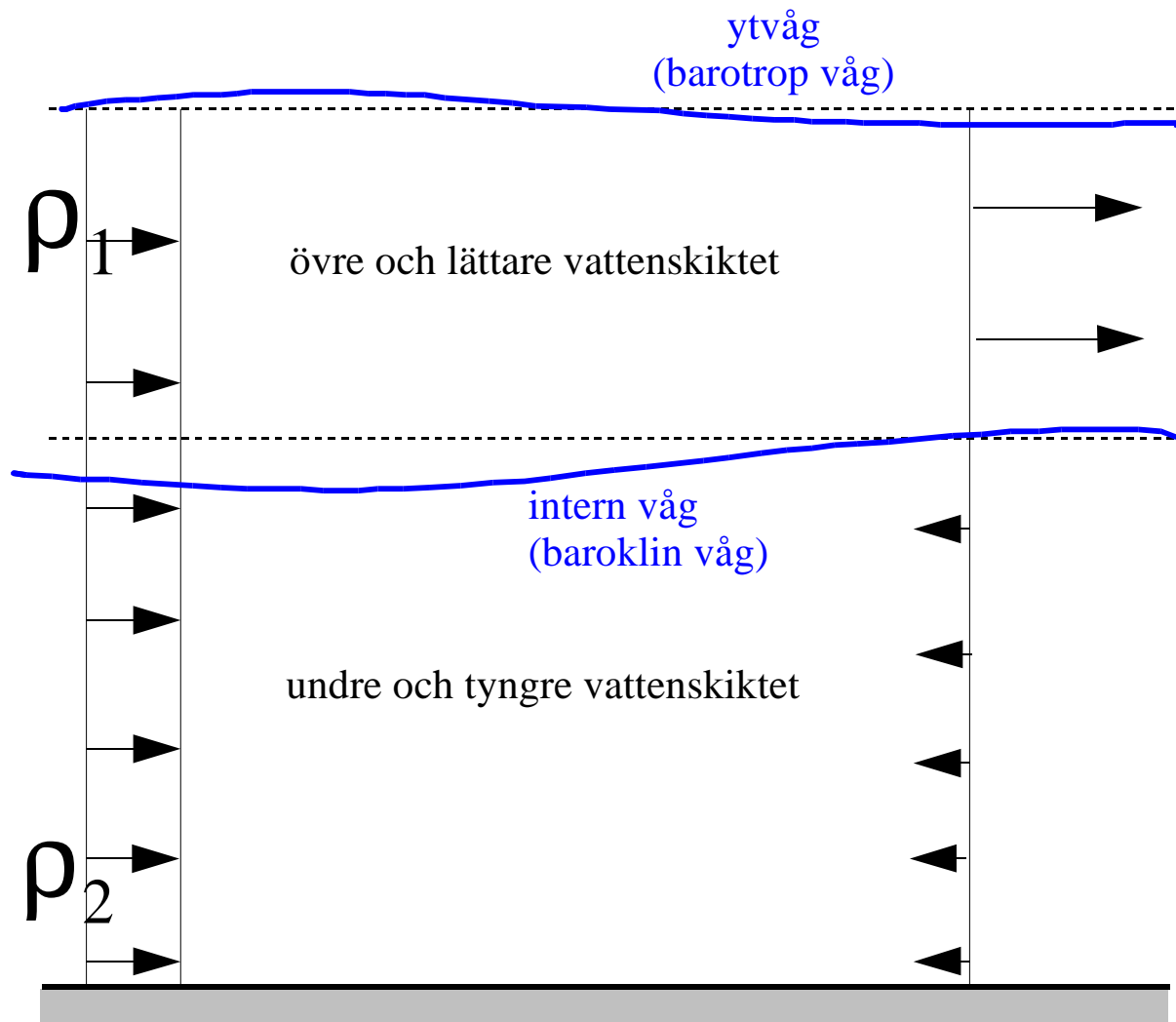






## Ytvågor och interna vågor

Gravitationsvågorna kan indelas i *ytvågor* och *interna vågor*. Alla typer av vågor i havet utom kapillärsvågorna kan vara av båda sorterna. Ytvågorna är t. ex. de vågor vi ser från stranden men också tidvattensvågorna. De interna vågorna förekommer däremot i gränsskiktet mellan två vattenskikt av olika täthet.

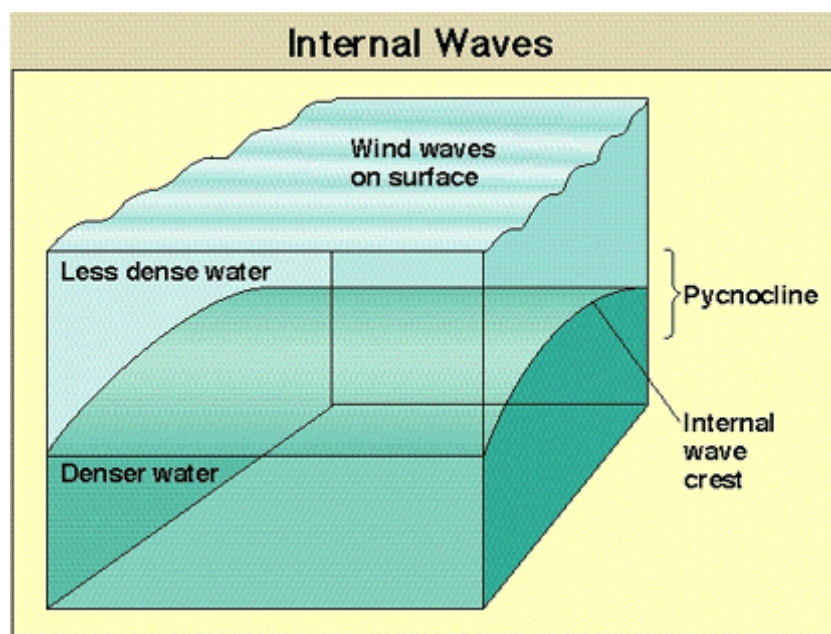


Dynamiken av de interna vågorna är den samma som för ytvågorna, med undantaget att gravitationen  $g$  ersätts med

$$g' = 2g \frac{\rho_2 - \rho_1}{\rho_2 + \rho_1} \approx 0.01 \text{ m/s}^2$$

där  $\rho$  är de olika tätheterna för skikten. Detta medför att en lång intern våg i Atlanten färdas med fashastigheten  $c = \sqrt{g'H} \approx 6 \text{ m/s}$  och

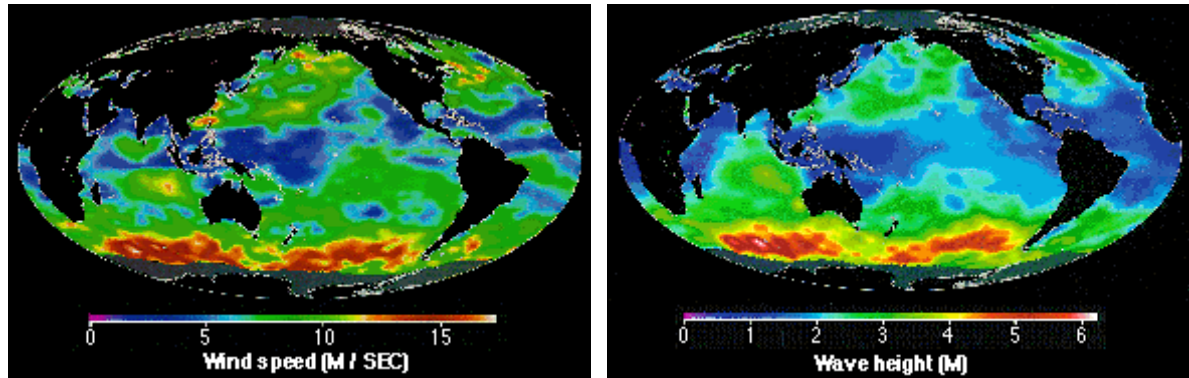
en ytvåg med  $c = \sqrt{gH} \approx 200 \text{ m/s}$  vilket är  $\sqrt{2 \frac{\rho_2 - \rho_1}{\rho_2 + \rho_1}} \approx 32$  gånger snabbare.



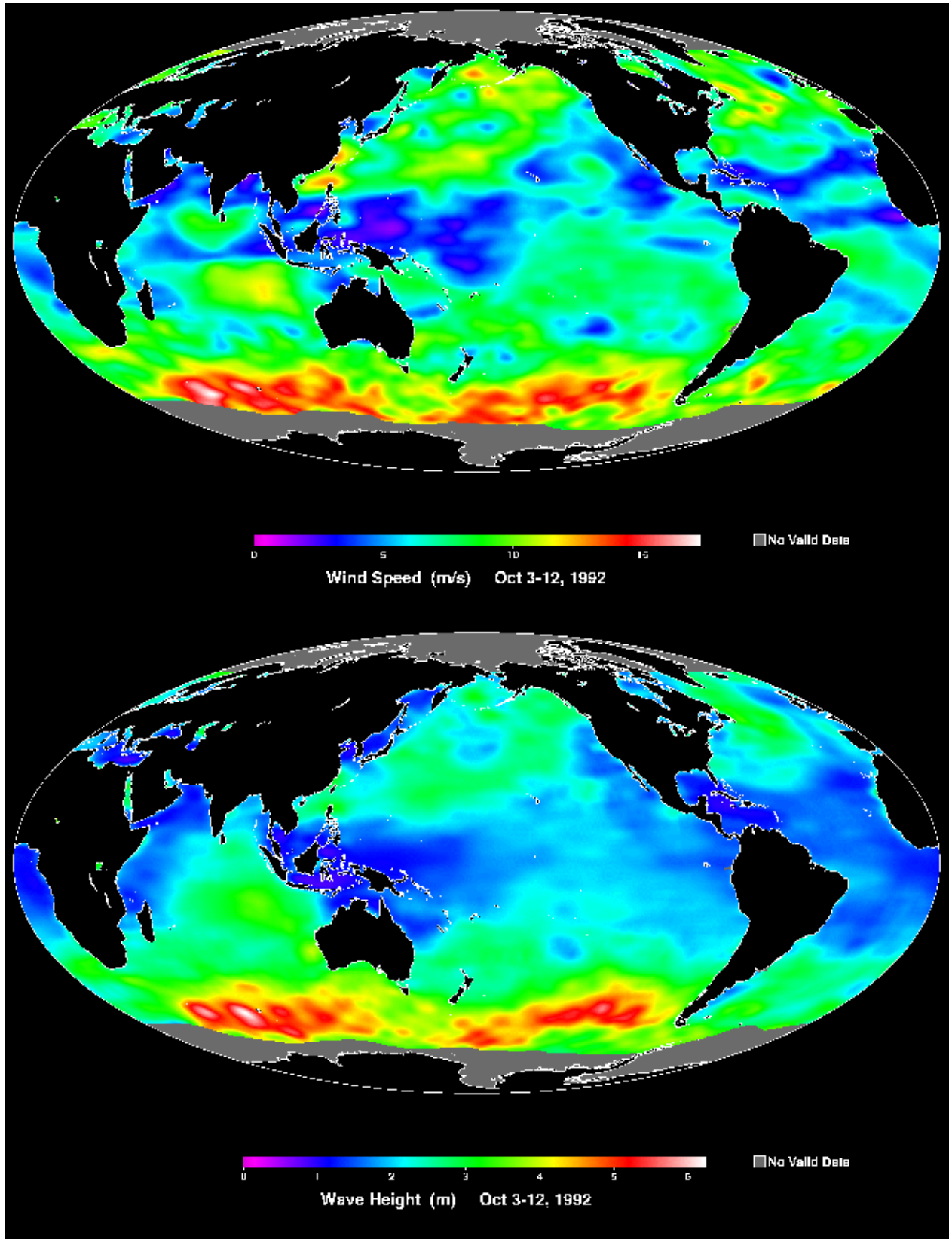
# Genererande krafter

## Vinden

De vanligaste gravitations vågorna har tidsperioder mellan 1 och 30 sekunder. De är genererade av vinden.



Figureerna visar den klara korrelation som finns mellan vind hastigheten och våghöjden observerat från satelliten Topex–Poseidon.



## Poincarévågor

När de långa gravitationsvågorna har en period av nära en dag så påverkas de av jordens rotation på ett sånt sätt att de vrids åt höger i norra atmosfären och vänster i södra hemisfären.

Fashastigheten är beroende av latituden och jordens rotation så att

$$c = \sqrt{gH + f^2/k^2}$$

där

$$f = \text{Coriolis parametern} = \frac{2\pi}{P} \sin \varphi$$

$P = \text{jordens rotations period}$

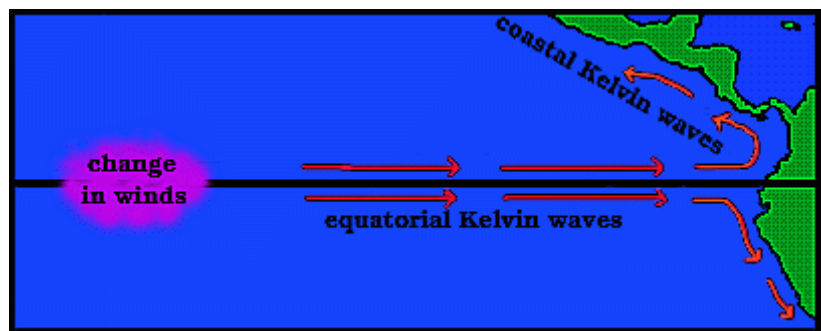
$\varphi = \text{latitude}$

## Kelvinvågor

Kelvin vågor är en typ av vågor som beror på jordens rotation men där den återkallande kraften endast är gravitationen. Kelvin vågen är en kustvåg som p.g.a. jordens rotation ligger "klistrad" med kusten på dess högra sida i norra atmosfären och tvärtom i södra atmosfären. Vågens amplitud är maximal vid kusten och avtar sedan exponentiellt med avståndet till kusten. Det finns dessutom en ekvatorial variant utav Kelvinvågen där ekvatorn agerar som barriär istället för kusten och Kelvinvågen får en symmetrisk form på vardera sida om ekvatorn.

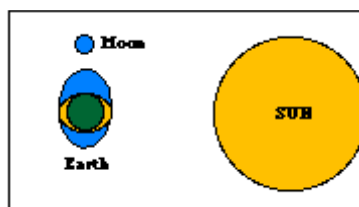
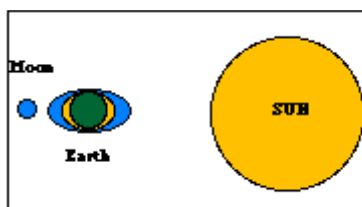
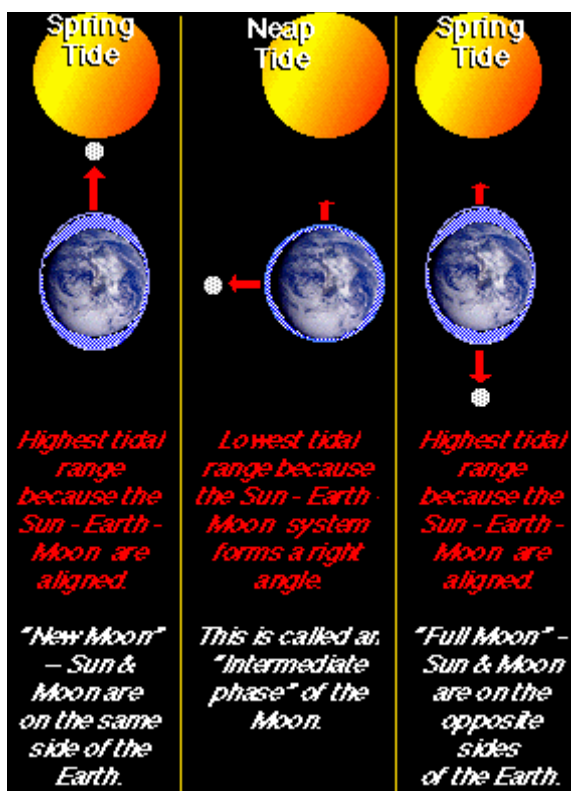
Fashastigheten är densamma som för de långa gravitationsvågorna så att

$$c = \sqrt{gH}$$

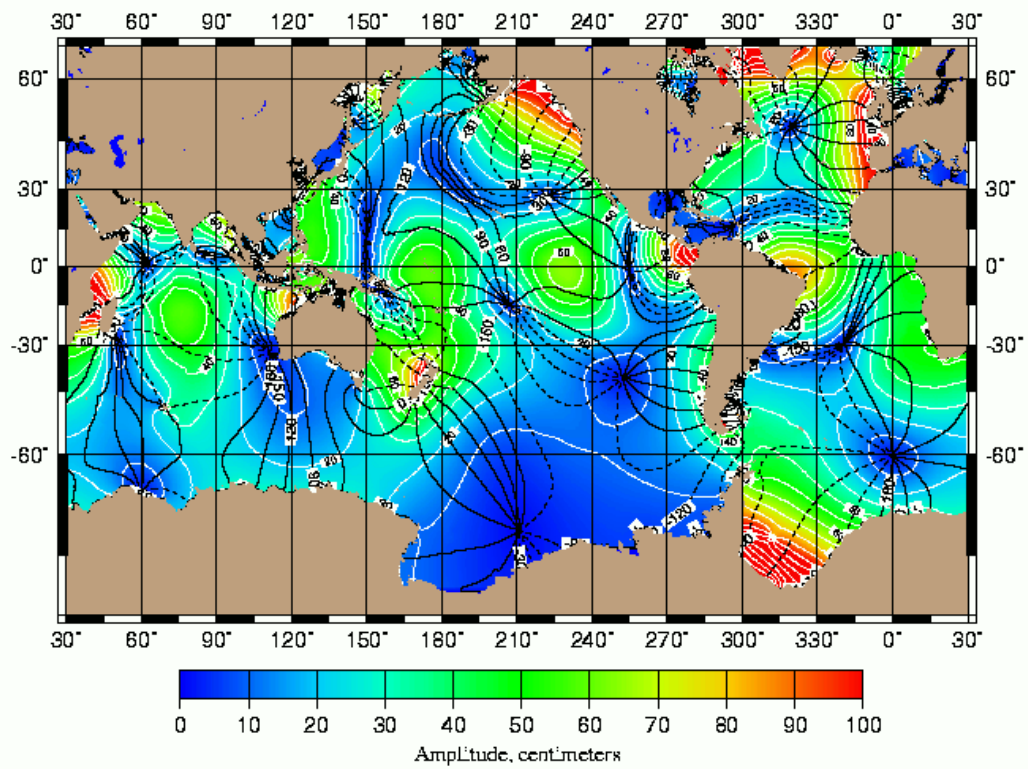


## Tidvattensvågor

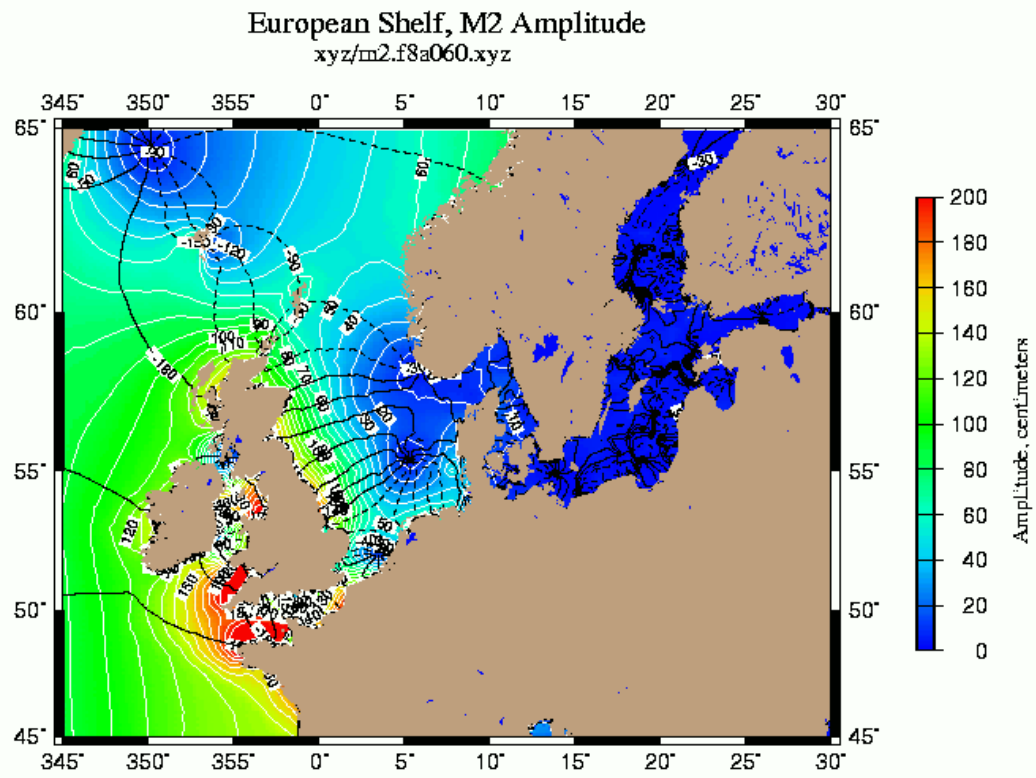
Tidvattensvågorna är en blandning av Poincarévågor och Kelvinvågor. De är de längsta vågorna i havet. De kompliceras mycket av landmassorna som hindrar dem att fortplanta sig ostört kring jorden. Tidvattensvågorna genereras av solens och månens gravitationskrafter i förbindelse med jordens rotation. Dessa himlakroppar åstadkommer nämligen små förändringar av gravitationen på jordens yta.



Amplitude/Phase Map of the M2 Tide

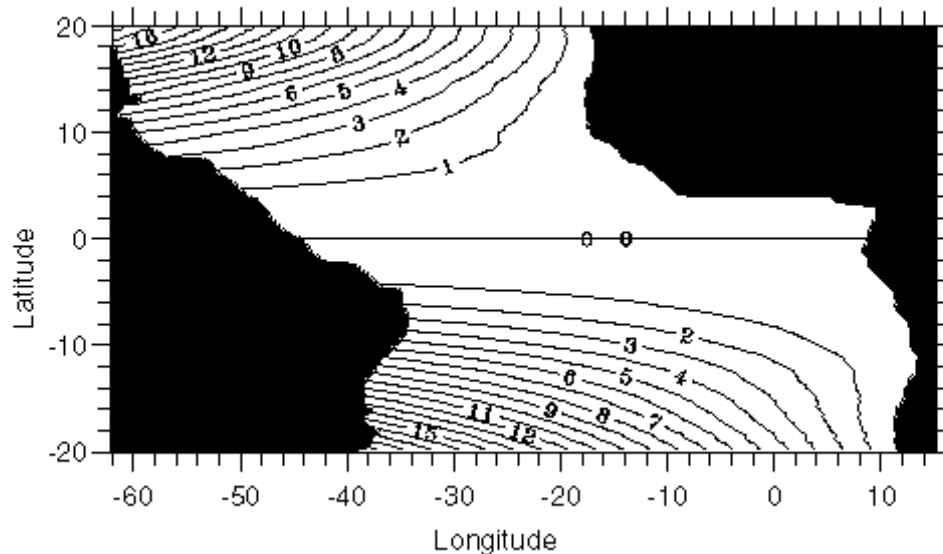






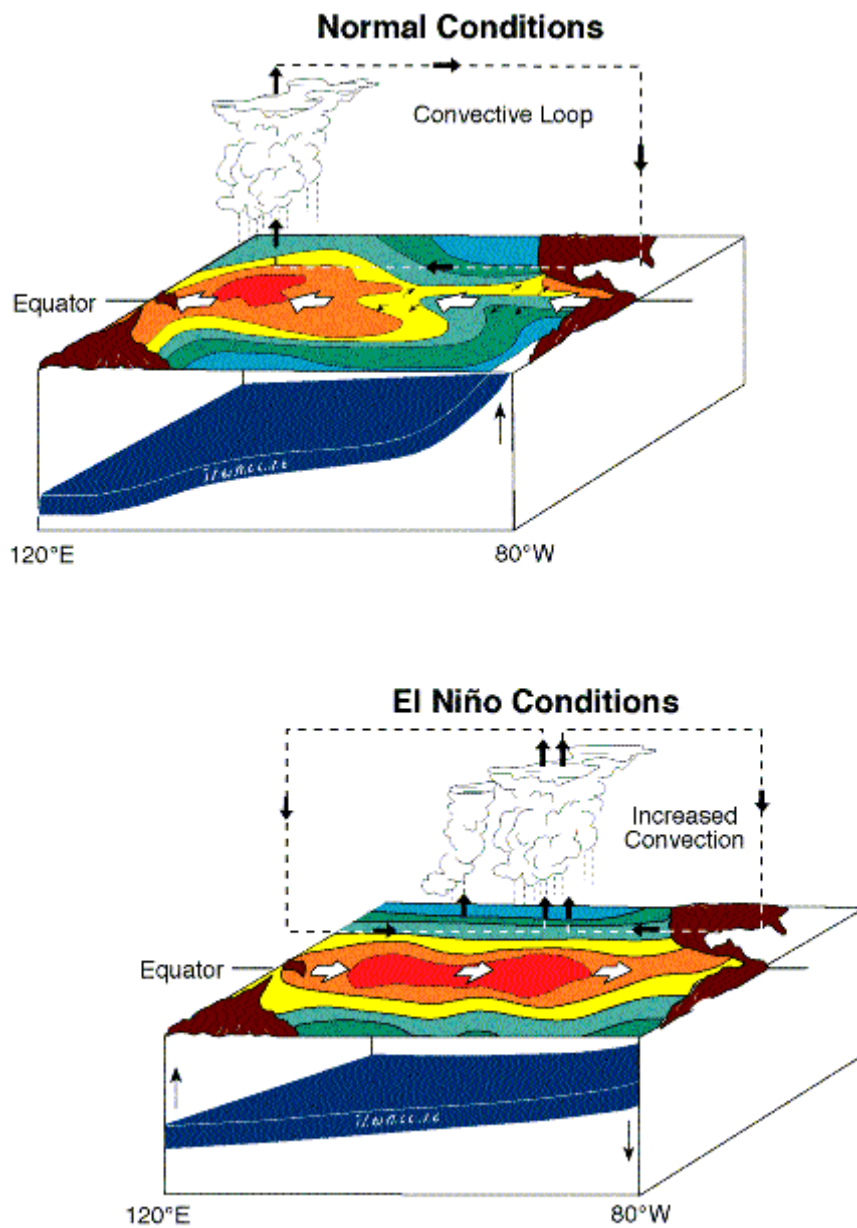
## Rossbyvågor

Rossbyvågorna i havet drivs främst av de storskaliga variationerna i vind, tryck. De är mycket lågfrekventa vågor d.v.s. vågor med mycket långa perioder på upp till flera år. Vågorna rör sig från öst till väst i havet med fashastigheten  $c = -\beta gH/f^2$  där  $\beta = df/d\phi$  är den latitudinella Coriolis variationen. Den återkallande kraften för dessa vågor beror just på denna variation av Coriolis kraften. Effekten av denna gör att Rossbyvågorna oscillerar omkring en bestämd latitud. Detta innebär att när en partikel rör sig lite norrut så ökar  $f$  och detta kompenseras då med att öka rotationen så att partikeln går söder ut och när sedan partikeln kommer lite för långt söder ut kompenseras rotationen åt andra hållet så partikeln rör sig norrut, o.s.v. Man skulle kunna säga att latituderna fungerar som gummiband. Det finns även här en ekvatorial variant av Rossbyvågen.



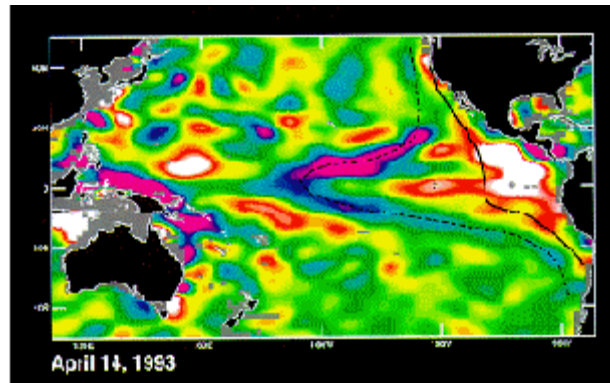
Tid i månader för en Rossbyvåg att gå från Afrikas kust. På våra breddgrader så tar det decennier att gå över Atlanten

# El Niño / La Niña

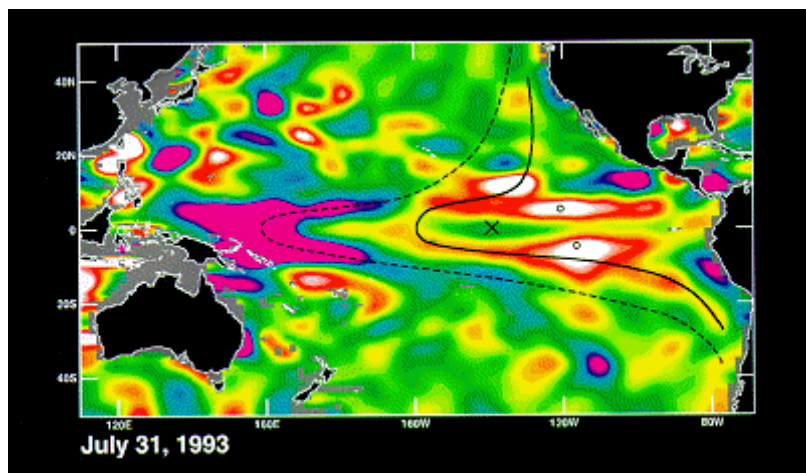


NOAA/PMEL/TAO

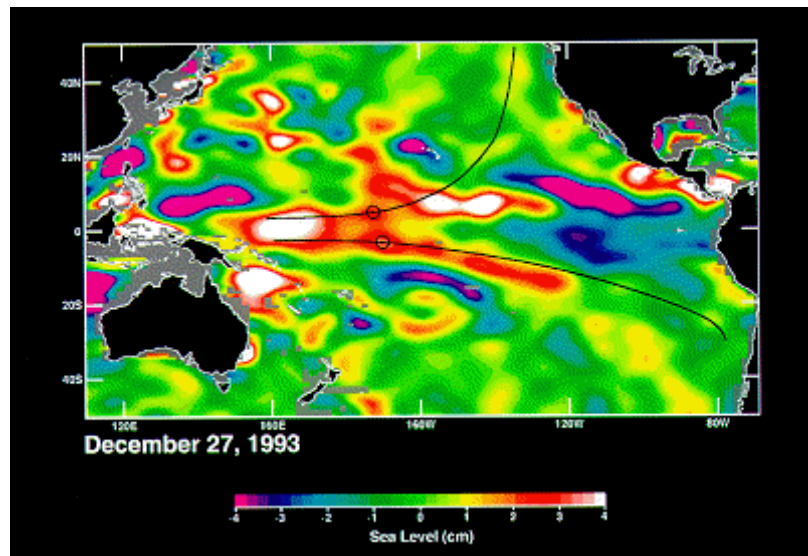
This sequence of 3 TOPEX/Poseidon "snapshots" show sea surface height data in the Pacific Ocean. These scenes show eastward-moving Kelvin waves and westward-moving Rossby waves. Superimposed black circles show how the elevated sea surface moves east in April (top), then west as Rossby waves during July (middle) and December (bottom).



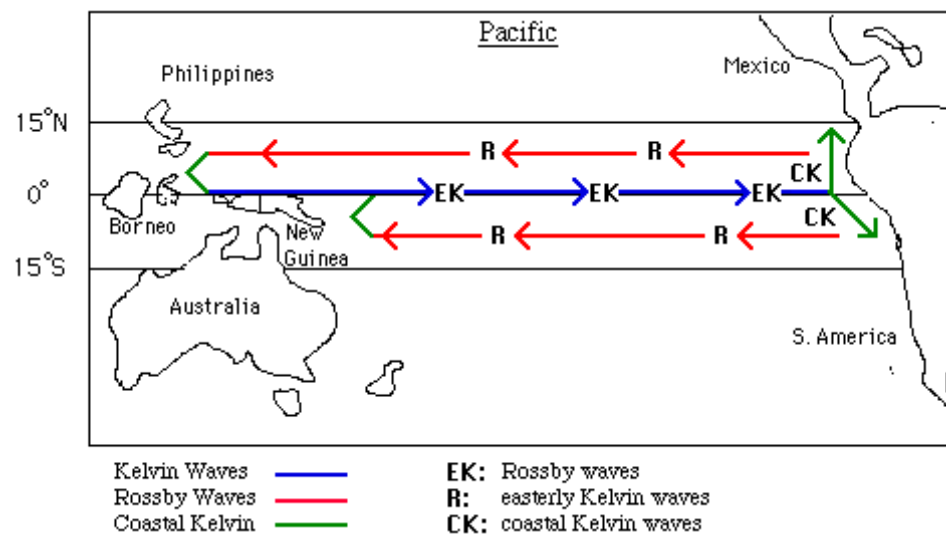
The 2 small black circles off the coast of the Americas correspond to sea level highs on the trailing edge of Kelvin waves. The leading edge of this wave group has bounced off the coastline, creating Rossby waves whose rising and falling sea levels are marked by solid and dashed lines, respectively.



In the July image, the circles are moving west with the Rossby waves. The "X" marks relative sea level low caused by a Kelvin wave moving east.



In December, the Rossby waves continue to move westward. The shapes of the solid and dashed lines indicate that the Rossby waves are moving away from the Americas faster at the equator than at higher latitudes.



## Sammanfattning av de olika vågorna i havet

Typ	Dispersionsrelation	Fas hastighet	Grupp hastighet
Kapillär vågor $\lambda \ll H$	$\lambda = 3 \sqrt{\frac{2\pi\sigma}{\rho}} T^2$ eller $\omega = \sqrt{\frac{\sigma k^3}{\rho}}$	$c = \sqrt{\frac{\sigma k}{\rho}}$	$c_g = \frac{3}{2} c$
Korta gravitations ytvågor $\lambda \ll H$	$\lambda = \frac{g}{2\pi} T^2$ eller $\omega = \sqrt{gk}$	$c = \sqrt{\frac{g}{k}}$	$c_g = \frac{1}{2} c$
Långa gravitations ytvågor $\lambda \gg H$	$\lambda = \sqrt{gH} T$ eller $\omega = \sqrt{gH} k$	$c = \sqrt{gH}$	$c_g = c$
Generella ytvågor	$\omega = \sqrt{\left(gk + \frac{\sigma k^3}{\rho}\right) \tanh(kH)}$	$c = \sqrt{\left(\frac{g}{k} + \frac{\sigma k}{\rho}\right) \tanh(kH)}$	$c_g = \frac{c}{2} \left[ \frac{2kH}{\sinh(2kH)} + \frac{1+3B}{1+B} \right]$ $B \equiv \frac{\sigma k^2}{g\rho}$
Långa interna vågor $\lambda \gg H$	$\lambda = \sqrt{g'H} T$ eller $\omega = \sqrt{g'H} k$	$c = \sqrt{g'H}$	$c_g = c$
Poincaré vågor $\lambda \gg H$ $\omega \approx f$	$\lambda = 2\pi \sqrt{\frac{gH}{\omega^2 - f^2}}$ eller $\omega = \sqrt{gHk^2 + f^2}$	$c = \sqrt{gH + f^2/k^2}$	$c = gH / \sqrt{gH + f^2/k^2}$
Långa Rossby vågor $\omega \ll f$ $\lambda \gg H$	$\lambda = \frac{\beta gHT}{f^2}$ eller $\omega = \frac{\beta k}{f^2/gH}$	$c = \frac{\beta}{f^2/gH}$	$c_g = c$

$$\lambda = \text{våglängden} = 2\pi k$$

$$g' = \text{reducerade gravitationen} = \frac{\rho_2 - \rho_1}{\rho} g$$

$$k = \text{vågtalet} = \frac{2\pi}{\lambda}$$

$$f = \text{Coriolis parametern} = \frac{2\pi}{P} \sin \varphi$$

$$T = \text{perioden} = 2\pi \omega$$

$$P = \text{jordens rotations period} = 2\pi f$$

$$\omega = \text{vinkelrekvensen} = \frac{2\pi}{T}$$

$$\varphi = \text{latitude}$$

$$c = \text{fashastigheten} = \frac{\omega}{k} = \frac{\lambda}{T}$$

$$\beta = \frac{df}{d\varphi}$$

$$c_g = \text{grupphastigheten} = \frac{\partial \omega}{\partial k}$$

$$g = \text{gravitationen} \approx 9.81 \text{ m/s}^2$$

$$H = \text{havsdjupet} \approx 4000 \text{ m}$$

$$\pi \approx 3.14$$

$$\sigma = \text{vattenytspänningen} \approx 0.074 \text{ kg/s}^2$$

$$\rho = \text{vattendensiteten} \approx 1027 \text{ kg/m}^3$$

$$\pi \approx 3.14$$

Vågtyp	Period	Våglängd	Vågtyp	Drivning
Kapillär	< 0.1 sec	< 2 cm	Kapillär	Lokala vindar
"vanliga"	1–10 sec	1–10m	Långa eller korta gravitationsvågor	Lokala vindar
Dyning	10–30sec	<1000 m	Långa eller korta gravitationsvågor	Lokala vindar
Seiche	10 min – 10 timmar	<1000 km	Långa gravitationsvågor	Vindar, lufttryck
Tsunami	10–60 min	<1000 km	Långa gravitationsvågor	jordskalv, vulkanuppbrott
Tidvåg	12.4–24.8 timmar	<10000k m	Långa gravitationsvågor	Gravitationskrafter från månen och solen