״קשר חם״ – המרכז הארצי
לקידום, שיפור וריענון החינוך המתמטי

הטכניון - מכון טכנולוגיה לישראל
המחלקה להוראת הטכנולוגיה והמדעים
מוסד הטכניון למחקר ופיתוח

מל״מ
המרכז הישראלי להוראת
המדעים ע״ש עמוס דה שליט

הנושא: המושג המתמטי ׳קבוצה׳ ו׳מודל האוסף׳

הוכן ע״י: אפרים פישביין ומדלן בולצן.

תקציר: במאמר מתואר מחקר שבדק את ההשפעה של המשמעות הראשונית הנאיבית שהלומד מיחס למושג על תפיסתו את המושג לאורך זמן. המחקר התייחס למושג המתמטי ׳קבוצה׳ ובדק כיצד משפיעות התכונות השייכות למודל ה׳אוסף׳ – המודל הראשוני והאינטואיטיבי – אשר עומדות בסתירה לתכונות של המושג המתמטי הפורמלי. לדעת החוקרים ניתן ללמוד מהמחקר על הקשר שבין מודל סמוי לבין התפיסה המדעית והמתמטית גם עבור מושגים אחרים.

מילות מפתח: מודל סמוי, מודל אינטואיטיבי, תפיסות מטעות, תפיסות שגויות, קונפליקט, שגיאות, חשיבה, מחקר, ראיון, שאלות, תורת הקבוצות, קבוצה, מודל האוסף, מודל החיבור החוזר, קנטור, הפרדוקס של ראסל, איבר, קבוצה ריקה, קבוצה אינסופית, שקילות, המושג: ׳קבוצה׳, פעולות חשבון, כפל, שבר עשרוני, מספר שלם, כופל, נכפל.

החומר פורסם במסגרת: על״ה 26, קיץ תש״ס, 2000, עמודים 50-65.

החומר מכיל בנוסף לעמוד הפתיחה: 16 עמודים.

ale26-9

המושג המתמטי 'קבוצה' ו'מודל האוסף'

אפרים פישביין ומדלן בלצן

בית הספר לחינוך, אוניברסיטת תל אביב

תקציר

ניתוח התפיסות השגויות השונות של תלמידים בהקשר של המושג המתמטי 'קבוצה', הוביל את המחברים להשערה, שאפשר להסביר תפיסות שגויות אלו באמצעות מודל ראשוני של 'אוסף'.

גם לאחר שתלמידים למדו את התכונות הפורמליות של קבוצות מההיבט המתמטי, אפשר לראות שתגובותיהם עדיין הושפעו ממודל האוסף. מודל זה השפיע, באופן סמוי, על תשובותיהם

המחברים שיערו כי אם לא מחזקים את המושג המתמטי באופן שיטתי, המשמעות 'הראשונית הנאיבית' של אותו מושג, תופסת, לאחר זמן, את מקומה של המשמעות הפורמלית המתמטית

ממצאי המחקר, מאשרים השערות אלה

מבוא

המושג 'קבוצה', שהוא מושג יסודי במתמטיקה המודרנית, הוצג על־ידי גיורגי קנטור במאה ה־19 הוא השפיע עמוקות על החשיבה המתמטית, למרות שרעיונותיו עוררו התנגדות ראשונית בקרב המתמטיקאים בני זמנו של קנטור הכול נראה להם חדשני ומהמם הוא סתר את דרך החשיבה המקובלת, במיוחד בהקשר של אינסוף לאחר שהקהילה המתמטית הכירה בתפיסותיו של קנטור, נראה היה שיש מספר פגמים בתורת הקבוצות המפורסם שביניהם הוא כנראה הפרדוקס של ראסל. ברטרנד ראסל, ביצע ניסיון מוצלח להבין את תורת הקבוצות של קנטור באמצעות הרחבה של גישה חדשה (בקשר לתורת הקבוצות של ראסל והפרדוקס של ראסל ראה Wilder 1965) בזמננו, התפיסה של קבוצה מהווה חלק אינטגרלי של המתמטיקה ואחד מהרכיבים המרכזיים שלה

במהלך לימודי המתמטיקה בבית הספר נעשה שימוש במושג קבוצה בהקשרים שונים ובאופן שאינו עקבי אחד הקשיים המשמעותיים נובע מהעובדה שהמושג קבוצה נתפס

במתמטיקה כמושג יסודי, שאינו ניתן להגדרה (כדוגמת המושגים נקודה, ישר וכו') במקום הגדרה פורמלית, מתחיל הלימוד במודל אינטואיטיבי, התפיסה של קבוצה כאוסף של אובייקטים

אולם, לתפיסה המתמטית של קבוצה יש מספר תכונות והיבטים הנכפים באופן פורמלי ונמצאים בסתירה למודל הראשוני של אוסף

ההנחה העיקרית של החוקרים כיום הייתה, שתלמידים רבים יחזיקו במודל הסמוי של קבוצה, כאוסף של אובייקטים, וכתוצאה מכך ישכחו את אותן תכונות פורמליות העומדות בסתירה למודל של האוסף

לינצ'בסקי ווינר (1988) ניתחו מספר תפיסות מוטעות שמחזיקים בהן מורים של בית הספר היסודי בהקשר של התפיסה המתמטית של קבוצה הם זיהו את התפיסות המוטעות הבאות

לאיברי קבוצה צריכה להיות תכונה משותפת ברורה

קבוצה חייבת להכיל יותר מאיבר אחד.

איברים בקבוצה החוזרים על עצמם נחשבים כאיברים נפרדים

שינוי סדר איברי קבוצה, משנה את הקבוצה

לאלו אנו יכולים להוסיף תפיסה מוטעית חמישית שתי קבוצות הן שוות אם הן מכילות אותו מספר של איברים אפשר למצוא הסבר פשוט לכל אותן תפיסות מוטעות אם בזמן החשיבה על המושג קבוצה, השתמשו הנחקרים במודל של קבוצה כאוסף של עצמים, כל אותן תפיסות מוטעות היו צפויות מראש מובן מאליו כי אוסף ריק, או אוסף המכיל עצם אחד הם דברים חסרי משמעות לעולם איננו מקבצים יחד מחלקות של עצמים, שאין ביניהם כל קשר בכל מצב מעשי, שני איברים זהים, הקיימים בנפרד (לדוגמה שני אסימונים), נמנים בנפרד כמו כן, שני אוספים של עצמים נחשבים שווים, אם הם מכילים אותו מספר של איברים

הערות נוספות לגבי התפיסה של 'מודל סמוי' למושג 'מודל' יש שתי משמעויות נפרדות מבחינה פסיכולוגית באחת, 'המודל' הוא האובייקט הראשוני שבהתאם לו בונה הפרט כמה שכפולים, כמה חיקויים פסל, תמונה, גיבור ספרותי, נוצרים על־ידי האמן תוך שימוש במודל, אדם חי ואותנטי במדעי החברה אנו מזהים את הנטייה של הפרט לאמץ אידיאל, סטנדרטים, דרכי התנהגות, בהתבסס על מאפיינים של אדם אחר שהפרט מעריץ אותו

המשמעות השנייה של המודל (במיוחד בהקשר של חשיבה מדעית וחשיבה מתמטית), היא מבנה אשר יכול לסייע לפתור בעיה, להבין אותה או להסביר תופעה בהקשר זה, המודל חייב להיות נגיש מבחינה מנטלית, יותר מאשר הבעיה המקורית במשמעות הראשונה, המודל מגיע ראשון במשמעות השנייה, המודל נבנה על בסיס המקור ונוטה לשחזר את המאפיינים שלו באופן נגיש יותר לדוגמה, בימיה הראשונים של תורת החשמל, זרם חשמלי נתפס כדומה לנוזל הזורם דרך צינור דק חוק אוהם, $E=RI$, הוא תוצאה של אנלוגיה זו

המונח 'סמוי', מופיע בטקסט זה במשמעות של 'מודל', אשר בשתי המשמעויות שצוינו לעיל, פועל באופן תת־הכרתי במשמעות הראשונה, אדם נוטה לחקות אדם אחר מבלי להיות מודע לעובדה שהוא מבצע חיקוי במשמעות השנייה, אדם ממיר בתהליך החשיבה שלו, באופן בלתי מודע, את האובייקט המקורי במודל הוא רואה במודל זה את המקור

במאמר הנוכחי, המונח 'מודל' מופיע בשתי המשמעויות כאשר קנטור פיתח את תורת הקבוצות — במיוחד עבור טיפול בקבוצות של מספרים — עמד לנגד עיניו המודל, אוסף של אובייקטים זאת במשמעות הראשונה של המונח מודל, וקנטור עשה בו שימוש באופן מפורש

כעת, כאשר תלמיד אשר כבר למד את תורת הקבוצות מבחינה מתמטית ממיר במוחו, באופן בלתי מודע, את המונח המתמטי והאילוצים שלו בייצוג של 'אוסף', הוא משתמש במשמעות השנייה של המושג מודל המונח המקורי הוא המושג המתמטי, והמודל — המושאל מחיי יומיום — הוא ייצוג של אוסף במשמעותו הפרקטית במחשבתו של התלמיד, ההמרה מתבצעת באופן בלתי מודע

Lakoff ו־Núñez משתמשים במושג 'סכמה במארז' (container-schema) ומפרשים אותו כהשאלה אנו מעדיפים לשמור, בניתוח הנוכחי, את המונח מודל מנטלי ההשאלה מוגדרת כ'העברת משמעות' בהקשר המקורי שלה

כ־דפוס לשון', ההשאלה אינה מכוונת להבהיר או לאפשר נגישות רבה יותר לאובייקט הנחקר הייעוד שלה הוא בעיקר לגרות את הדמיון שלנו. בספרות המודרנית העוסקת בתחום החשיבה הקוגניטיבית, נעשה שימוש במושג 'השאלה' באופן מושאל המונח 'מודל מנטלי' כולל באחת מהתת־מחלקות שלו גם את המושגים השאלות, אנלוגיות ופרדיגמות לצרכים שלנו, ניתוח פסיכולוגי של המושג 'אוסף', השימוש במושג 'מודל מנטלי' מתאים יותר כמקור למונח המתמטי 'קבוצה'.

אננו טוענים כי התלמיד מזהה, באופן מפורש ומודע, את המושג המתמטי 'קבוצה' עם המושג 'אוסף של אובייקטים מוחשיים' אולם, אנו טוענים, שכאשר חושבים על המשמעות המתמטית של קבוצה, מה שיש לתלמיד בראשו — באופן סמוי אך משמעותי — הוא הרעיון של אוסף של איברים על כל המשתמע ממנו אין שום קונפליקט בכך, המודל האינטואיטיבי משפיע 'מאחורי הקלעים' על המשמעות, על השימוש, ועל התכונות של המושג הפורמלי. המודל האינטואיטיבי נראה חזק יותר מהמושג הפורמלי התלמיד פשוט שוכח את התכונות הפורמליות ונוטה לזכור את אלה שנכפו על־ידי המודל ההסבר נראה פשוט מאוד התכונות הנכפות על־ידי המודל המוחשי יוצרות מבנה עקבי בעל קשר הגיוני ורציף לעומת זאת, תכונותיו של המושג הפורמלי נראות, לפחות ממבט ראשון, כתערובת אקראית ושרירותית של תכונות קבוצת התכונות הפורמליות יכולה להיראות כאוסף הגיוני רק בהקשר של מושגים מתמטיים ברורים ועקביים

במחקר המתואר במאמר זה, אנו מתכוונים

א לבדוק את ההנחה שכל התפיסות המוטעות, הקשורות למושג 'קבוצה', כפי שתוארו קודם לכן, מקורן במודל סמוי של מודל 'האוסף'

ב לקבוע מה קורה, במשך הזמן, לקונפליקט בין המודל הסמוי 'האוסף' לבין האילוצים הפורמליים של המושג קבוצה

ג השפעת הגיל

לינציבסקי ווינר, בדקו תפיסות מוטעות רק אצל מורי בית ספר יסודי

אנו מאמינים, שעל־ידי הכנסת משתנה נוסף, גיל הנבדקים, נוכל להשיג יותר אינפורמציה על הדינמיקה של הקשר שבין המודל האינטואיטיבי לבין המושג הפורמלי נראה כי התכונות הכלליות של אוסף (במשמעות הפרקטית) למרות שלא נלמדו באופן מפורש ככאלה, מתארגנות כמודל יציב אשר ממשיך להשפיע על המשמעות המתמטית של המושג 'הקבוצה' אפשר להניח כי זו תופעה כללית בחשיבה המדעית והמתמטית מינוחים מדעיים, השאולים מהשפה היומיומית, המוגדרים באופן מפורש וקפדני בהקשר המדעי, ממשיכים לגרור עמם באופן סמוי תכונות ואילוצים אשר אינם רלוונטיים לאינטרפרטציה המדעית לדוגמה, נקודה (כתם קטן) היא מודל פיגורטיבי לנקודה המתמטית אולם, לנקודה המתמטית אין ממדים לעומת זאת, לכתם, המודל הפיגורטיבי יש ממדים עבור כמה טענות מתמטיות, המודל הפיגורטיבי שימושי ואינו גורם לסתירות, לעומת זאת בתנאים אחרים, אותו מודל, הפועל באופן סמוי, מוביל לטעויות, פרדוקסים וסתירות

להלן הבעיות שהתמקדנו בהן במחקר הנוכחי כיצד משפיע המודל הפיגורטיבי של 'אוסף' על השימוש ועל האינטרפרטציה של המושג המתמטי 'קבוצה' אצל תלמידים ופרחי הוראה?

ההשערה הכללית שלנו הייתה, שהקונפליקט בין המודל הפיגורטיבי של 'קבוצה' (אוסף של אובייקטים), לבין האינטרפרטציה המתמטית של המושג 'קבוצה', יגרום לתלמידים רבים לשכוח את מה שלמדו בשיעורי המתמטיקה אפילו כאשר מתייחסים לשאלות מתמטיות, הם יספקו תשובות אשר תהיינה תואמות את המודל הסמוי, ואשר לא תהיינה מתאימות למשמעות המתמטית.

חשוב לציין כי החשיבות של מחקר מסוג זה אינה מוגבלת למה שאפשר ללמוד בהקשר של תורת הקבוצות בלבד זוהי הזדמנות ללמוד באופן כללי יותר על הקשר שבין מודל סמוי לבין התפיסה המדעית והמתמטית השפה היא בבסיסה מטפורית, כלומר, אנו רגילים באופן עמוק לבצע המרה אוטומטית של המשמעות, לעתים קרובות עם המרה בלתי מודעת של המשמעות, אשר, באופן כללי, אינה גורמת לשגיאה כתוצאה מכך, תלמידים אינם נמצאים בדרך־כלל בכוננות לגבי האפשרות של פרשנות לא נכונה של מושג מופשט, מפני שהמודל הסמוי פועל מאחורי הקלעים

הבעיה עלולה להפוך להיות אקוטית כאשר אנו עוסקים במושג

מדעי אשר, במקורו, מושאל משפת היומיום מונחים, כגון כוח, אנרגיה, שווה, קבוצה, פונקציה וכו׳, מצויים במצב זה.

המשמעות המתמטית של המושג ׳קבוצה׳

המושג ׳קבוצה׳ הוצג במתמטיקה ללא הגדרה הוא מתואר כאוסף למרות זאת, מספר תכונות הוגדרו, במיוחד כדי להבדיל בין המושג המתמטי ׳קבוצה׳, לבין המונח ׳אוסף׳ אשר ממנו הוא נגזר

ניזכר בכמה מההבדלים

- קבוצה אינה בהכרח אוסף של אובייקטים זהים או שחייב להיות קשר ביניהם הדבר שונה מהשימוש היומיומי במונח ׳אוסף׳ לא יעלה על הדעת כי אדם סביר ישייך לתוך אותה קטגוריה ספר, כוכב, מספר שבע וכו׳. אוספים בדרך־כלל בנויים באופן שהם תואמים קריטריון מסוים אילוץ זה מבטא את עקרון התפיסה שלנו לגבי דרך החשיבה הנורמלית. הדבר מועיל במיוחד ומהווה עיקרון חשוב של החשיבה הלוגית ׳אוסף׳ המקבץ יחדיו אובייקטים, או תופעות שאין כל קשר ביניהם, נתפס מבחינה אינטואיטיבית והתנהגותית כשטות גמורה

- בשפת היומיום, שתי קבוצות שוות (או שני אוספים) הן קבוצות המכילות מספר זהה של גורמים בשפה המתמטית, שתי קבוצות הן שוות אם הן מכילות אותם איברים, דבר שהוא שונה לגמרי להשוואה בין קבוצות אינסופיות, קנטור החליף את המונח ׳שוויה׳ במונח ׳שקילות׳ עקב סיבה פשוטה ובסיסית, שקבוצות אינסופיות לא ניתנות למנייה באופן מעשי (זה יצריך זמן אינסופי) קבוצות אחרות אינן בנות מנייה כלל למשל, אי־אפשר להתאים מספר טבעי שונה לכל נקודה על קטע מישר, קבוצת הנקודות על קטע ׳עשירה׳ יותר מאשר קבוצת המספרים הטבעיים כל זאת נראה בלתי קביל מבחינה אינטואיטיבית, אולם הדבר הוכח על־ידי קנטור כתוצאה מכך, כדי להשוות שתי קבוצות אינסופיות התהליך המתמטי הוא יצירת התאמה חד־חד־ערכית בין שתיהן, אשר באמצעותה אפשר לבדוק אם שתי קבוצות הן שקולות או לא במקום לדבר על שוויון בין קבוצות, אפשר לדבר על שקילות בין קבוצות למונח ׳שוויון׳ בין קבוצות יש פירוש נוסף שתי קבוצות הן שוות אם הן מכילות את אותם איברים. שתי קבוצות שוות הן גם שקולות אולם שתי קבוצות שקולות אינן בהכרח שוות קבוצת המספרים הטבעיים וקבוצת המספרים הזוגיים הן שתי קבוצות שקולות אולם אינן שוות כל זאת מבלבל את התלמיד, אשר מושפע משפת היומיום ומעיסוק מתמטי בקבוצות סופיות

- גורמים החוזרים על עצמם נמנים רק פעם אחת כאשר קובעים את העצמה של קבוצה (מספר האיברים שבה) לדוגמה, הקבוצה $\{3, 3, 3, 3, \ \}$ מכילה איבר אחד בלבד והוא 3 כלל זה עומד בסתירה למשמעות של ׳ספירה׳ בחיי היומיום ובסתירה למקובל באריתמטיקה אם למישהו יש קופסה ובה 3 גולות לבנות ו־4 גולות שחורות, ההסתברות לשליפת גולה לבנה היא $3/7$ אנו מונים בנפרד כל גולה למרות העובדה שכל הגולות הלבנות זהות וכל הגולות השחורות זהות

- בתורת הקבוצות משתמשים במושג ׳קבוצה ריקה׳ באופן אינטואיטיבי, מעשי, קבוצה ריקה היא שטות גמורה הכללה מתמטית הובילה ליצירה של מושג זה, לצורך יצירות עקביות בתורת הקבוצות לכן, הגיוני להצהיר כי ׳הנקודות המשותפות׳ של שני ישרים מקבילים, יוצרים קבוצה ריקה בשפת יומיום, אנו נאמר כי ׳לשני הקווים אין נקודה משותפת׳

- קבוצה המכילה איבר אחד אינה הגיונית באופן אינטואיטיבי קבוצה (׳אוסף׳) חייב להכיל בטרמינולוגיה היומיומית, מספר איברים ׳אוסף׳ המכיל רק איבר אחד, אינו קביל מבחינה מעשית איבר יחיד אינו יכול ליצור קבוצה, אוסף רק כתוצאה מההכללה המתמטית אפשר לומר כי גם איבר אחד יכול להגדיר קבוצה

- לעומת זאת, תלמיד יכול לבלבל בין המושג ׳קבוצה ריקה׳ לבין המספר ׳0׳ השונה לגמרי במשמעותו ׳אפסי׳ יכול להיות איבר אחד בקבוצה (אשר כתוצאה מכך לא תהיה ׳קבוצה ריקה׳) לדוגמה השורש של המשוואה $3x = 0$ הוא $x = 0$

קבוצת השורשים של המשוואה המצוינת לעיל הוא {0} ממנו משתמע, שקבוצת השורשים אינה קבוצה ריקה, כלומר מכילה איבר אחד שהוא המספר אפס.

לעומת זאת, אם נבחן את מערכת המשוואות

$$2x + 3y = 6$$
$$4x + 6y = 7$$

אם ננסה למצוא פתרון למערכת המשוואות הנ"ל, לא נצליח קבוצת השורשים של המערכת הנתונה היא קבוצה ריקה חשוב להדגיש שבמקרה זה המספר אפס אינו מעורב כאן כלל

ההנחה הבסיסית אשר עליה מבוסס המחקר שלנו הייתה שהמושג 'אוסף', שעליו מבוסס באופן אינטואיטיבי המושג המתמטי 'קבוצה', יוצר באופן סמוי קונפליקט עם התיאור המתמטי של המונח 'קבוצה' התוצאה מקונפליקט זה תהיה שהתלמיד יטה לשכוח את אותן תכונות העומדות בסתירה לתכונות של המודל האמפירי אנו מניחים כי תשובות התלמיד תשקפנה את האינטרפרטציה הראשונית והיומיומית יותר של המושג קבוצה מאשר את התכונות המתמטיות של המושג קבוצה, כפי שהיא נלמדת בקורסים במתמטיקה במילים אחרות, אנו מניחים כי 'מודל האוסף' יחליף, במחשבתו של התלמיד, באופן בלתי מודע, כמודל סמוי, את התפיסה המתמטית של המושג 'קבוצה' .

מתודולוגיה

אוכלוסיית המחקר כללה 150 נבדקים, מארבע אוכלוסיות שונות

46 תלמידי כיתות ח (בני 14), 51 תלמידי כיתות י (בני 16), 21 פרחי הוראה, המתמחים בהוראה בגיל הרך ו־32 פרחי הוראה, המתמחים בהוראת מתמטיקה בחטיבת הביניים

בכיתה ח, תלמידים לומדים ומשתמשים במושגים מתחום תורת הקבוצות

לעומתם, תלמידי כיתות ט, ו־י, אינם משתמשים כלל במושגים מתחום תורת הקבוצות פרחי ההוראה של חטיבת הביניים משתמשים בתורת הקבוצות בלימוד של נושאים נוספים במתמטיקה (כגון הסתברות) לעומתם, פרחי ההוראה של הגיל הרך לומדים נושא זה בשנה א ולא חוזרים לנושא בהמשך לימודיהם

כלי המחקר

במחקר זה, נעשה שימוש בשני כלי מחקר שאלון מחקר וראיונות אישיים

השאלון ניתן לנבדקים במהלך שיעורי המתמטיקה השוטפים שלהם הזמן שהוקצב לכך היה כ־45 דקות עוד חשוב לציין שיידענו את הנבדקים כי מטרת המחקר היא קבלת תמונה כללית על ההבנה שלהם לגבי המושג 'קבוצה' הוכנו ארבעה שאלונים שונים, בכל השאלונים היו אותן שאלות בדיוק, סדר השאלות בשאלונים היה מקרי וכל נבחן קיבל אחד מארבעת השאלונים

בכל שאלה נדרש הנבדק לבדוק אם אוסף מסוים יכול להוות קבוצה או אם מתקיים שוויון בין שתי קבוצות ולענות 'כן', או 'לא' בהמשך, נדרש הנבדק לנמק את תשובתו בעזרת פירוט

טבלה 1 — התפלגות התשובות (באחוזים) לשאלה 'הסבר את המושג קבוצה'

שאלה	תשובה	ח N=46	י N=51	פ' הוראה (רך) N=21	פ' הוראה (חט"ב) N=32
הסבר את המושג קבוצה	נכון	41	27	19	78
	לא נכון	52	71	81	22
	לא ענו	7	2	0	0

איברי הקבוצה, או לציין את מספר האיברים בקבוצה, או לתת נימוק מילולי לתשובתו המבנה הדומה של השאלות נבחר כדי לא לאפשר הקשה של התשובה המבוקשת על־פי מבנה השאלה

ראיונות אישיים

כדי להבין באופן מעמיק יותר את דרך החשיבה, רמת העקביות במתן התשובות ורמת הביטחון של הנבדקים, בוצעו ראיונות אישיים הראיונות התקיימו בקרב נבדקים אשר לא ענו בכתב על השאלון, זאת כדי למנוע הטיה אפשרית של התוצאות (בשל תהליך למידה שהנבדק עובר אותו במהלך מילוי השאלון)

בריאיון נשאלו שאלות מתוך השאלון ושאלות נוספות להבהרה וחידוד של התשובות ולהבנת השיקולים ואופן החשיבה של הנבדקים ממצאי הראיונות שולבו בפרק הממצאים כהשלמה לנתונים שנאספו מהשאלונים.

ממצאים

אנו מציגים את התוצאות על־ידי סידור הפריטים בקבוצות של שאלות המתייחסות לאותן שאלות מתמטיות־פסיכולוגיות ברור גם כי סדר הפריטים, המופיע כאן, שונה מהסדר שלהם בכל השאלונים שהשתמשנו בהם.

שאלה אחת שביקשנו לבדוק הייתה האם הנבדקים יודעים, שאיברי קבוצה לא חייבים להיות בעלי תכונה משותפת (כלומר, איברי קבוצה יכולים להיבחר באופן אקראי)

בשאלה מס׳ 1 בשאלון, נתבקש הנבדק להסביר את המושג ׳קבוצה׳ אין הגדרה למושג ׳קבוצה׳ ולכן צפינו קושי במתן מענה לשאלה זו תכננו, כי תשובה שתתקבל על־ידינו כנכונה תהיה ׳אוסף של איברים׳ או ׳אוסף כלשהו של איברים׳ או כל תשובה דומה

התקבלו כנכונות גם תשובות מפורטות יותר שכללו פרטים נוספים נכונים כמו לדוגמה· ׳אוסף של פריט אחד או יותר או ללא פריטים בכלל (קבוצה ריקה)׳ ׳אין לקבוצה הסבר׳.

טבלה 2 — התפלגות התשובות, באחוזים, לשאלות הבודקות את נטיית הנבדקים לראות בקבוצה אוסף של איברים המאופיינים בתכונה משותפת

שאלה	תשובה	ח N=46	י N=51	פ׳ הוראה (רך) N=21	פ׳ הוראה (חט״ב) N=32
האם האוסף הבא יכול להגדיר קבוצה׳ 2,4,6,8,10	נכון	74	80	90	78
	לא נכון	26	20	10	22
	לא ענו	0	0	0	0
האם האוסף הבא יכול להגדיר קבוצה׳ 2,4,5,6,8,10	נכון	72	63	52	84
	לא נכון	26	33	43	9
	לא ענו	2	4	5	7
האם האוסף הבא יכול להגדיר קבוצה׳ משולש, קובייה, ישר, קטע, זווית, גליל	נכון	72	67	48	88
	לא נכון	24	27	38	9
	לא ענו	4	6	14	3

'אוסף של איברים, קבוצה יכולה להיות סופית או אין־סופית או ריקה לא חייב להיות קשר בין איברי הקבוצה, וסדר האיברים בה אינו משנה'

מריכוז התשובות לשאלה מס' 1, בולטת באופן ברור מגמת הירידה המתמשכת ברמת הבנת המושג 'קבוצה', תוך כדי העליה בגיל הנבדקים, בין תלמידי כיתה ח (41% מהם ענו נכון), כיתה י (27% מהם ענו נכון), ופרחי הוראה לגיל הרך (רק 19% מהם ענו נכון) לעומתם, הרמה הטובה יחסית של התשובות של פרחי ההוראה לחטיבת הביניים (78% מהם ענו נכון).

זהו ממצא חשוב מאוד נראה כי בהתייחס לתלמידים אשר עד כיתה ח ועד בכלל למדו את המשמעות הנכונה של המושג קבוצה, כ־60% מהם פשוט שכחו מושג זה ומה שגרוע מכך, 'השכחה' הזו עולה באופן משמעותי עם הגיל הפריט האחרון של שאלת מחקר זו מתייחס למספרים 10,8,6,4,2 מקרה זה הזכיר לנבדקים סדרה חשבונית, ורק במקרה זה אחוז התשובות הנכונות השתפר עם הגיל לנבדקים היה קל למצוא בקבוצה זו קשר בין האיברים, הם זיהו סדר מסוים בין איברי הקבוצה, דבר שהוסיף משמעות אמתית לאוסף

התשובות השגויות התפלגו באופן הבא 81% מהנבדקים סברו שתכונה משותפת או קשר כלשהו בין איברים הוא תנאי הכרחי לקיום קבוצה זהו גורם חשוב, שמפריע למושג המתמטי 'קבוצה' להשתרש במוחו של התלמיד.

8% מהנבדקים סברו כי קבוצה מורכבת ממספרים בלבד 7% מהנבדקים סברו כי בקבוצה חייבים להיות לפחות מספר מסוים של איברים חלק מהנבדקים טענו כי חייב להיות לפחות איבר אחד וחלק טענו שחייבים להיות שני איברים או יותר

להלן כמה דוגמאות של הסברים למושג 'קבוצה', שנאספו בראיונות

'קבוצה היא סדרת מספרים'

'כמה איברים שמשתייכים לאותו דבר כולם מתאימים לאותה הגדרה'

'כמה איברים, יותר משניים, שיש להם מכנה משותף'

'אוסף של איברים המסודר בסדר מסוים'

'אוסף של עצמים המקיימים תנאי מסוים'

בשאלון, היו שאלות נוספות שמטרתן הייתה לחשוף את ייצוג הקבוצה כאוסף של איברים המאופיינים בתכונה משותפת לחלק מהן אנו מתייחסים בטבלה 2

קבוצת השאלות הבאות, מטרתן לבדוק את ההשערה, שהנבדקים יחשבו שקבוצה חייבת להכיל יותר מאיבר אחד (ראה טבלה 3)

מטבלה 3 אפשר לראות כי רבים אינם מכירים בעובדה, שקבוצה יכולה להיות בעלת איבר אחד כמו בשאלות הראשונות, מספר התשובות הנכונות הולך ופוחת עם העלייה בגיל הנבדקים היחידים שהשיגו אחוזי הצלחה גבוהים, היו פרחי הוראה חט"ב, שלמדו בצורה סיסטמטית את הנושא ועושים בו שימוש נרחב במהלך לימודיהם

שוב אפשר להיווכח בהשתלטות המודל הסמוי — 'מודל האוסף' על המשמעות המתמטית של המושג 'קבוצה' — גם לאחר שהתיאוריות המתמטיות נלמדו בנוסף, השפעת המודל הסמוי הצורני מתחזק עם הגיל, במיוחד במעבר מכיתה ח לכיתה י המודל הראשוני הוא בעל השפעה וכושר עמידות גבוהה יותר מאשר המודל האבסטרקטי, אלא במקרים שבוצעה התערבות בדרך של מתן חיזוקים דידקטיים באופן שיטתי בנושא המתמטי

נביא בפניכם מספר ציטוטים שנאספו במהלך הראיונות

'יש פה רק איבר אחד'

'זו לא קבוצה' זהו סתם איבר אחד'

'איבר אחד אינו קבוצה'

'בקבוצה חייבים להיות לפחות שני איברים'

קבוצה אחרת של שאלות ביקשה לבדוק את ההשערה, שהמודל הסמוי הראשוני — 'האוסף', נוטה למנוע את קבלת 'הקבוצה הריקה' כקבוצה, אשר אינטואיטיבית ומעשית היא חסרת משמעות ואכן, מטבלה 4 אפשר לראות כי לגיל יש השפעה שלילית התוצאות מחמירות בין המעבר מכיתה ח לכיתה י התוצאות של פרחי הוראה לגיל הרך, לעתים, טובות יותר מאלה של כיתה י (ראה טבלה 4)

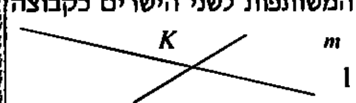
גם פה נראה כי לגיל יש השפעה שלילית התוצאות מחמירות בין המעבר מכיתה ח לכיתה י התוצאות של פרחי הוראה לגיל הרך, לעתים טובות יותר מאלה של כיתה י

אם נשווה בין טבלה 3 לבין טבלה 4, נבחין בהבדל משמעותי בין הממצאים קבוצה ריקה, מקובלת אינטואיטיבית פחות מאשר קבוצה המכילה רק איבר אחד לכן, אפשר להתייחס למידת המופשטות של תת־מושגים של מושג מתמטי, ולהגדירם באמצעות המידה אשר בה התת־מושגים האלה רחוקים מן המודל הצורני הראשוני של המושג

במקרה שלנו, בהתייחס למושג המתמטי 'קבוצה', אנו עוסקים בתת־מושגים שונים, אשר כל אחד מהם נמצא במרחק שונה מהמודל הצורני הראשוני דרגת השכחה של תת־מושגים מושפעת מהמרחק שלהם מהמודל הצורני הראשוני כיוון שהתת־מושג 'קבוצה ריקה' רחוק יותר מן המודל הצורני הראשוני, דרגת השכחה שלו תהיה גבוהה יותר

במתמטיקה אנו מוצאים דוגמאות רבות שבהן מידת המופשטות של מושגים מושפעת מהמרחק שלהם ממודל ראשוני, יומיומי המודל של המושג 'מספר' הוא של מספר טבעי לכן, מספרים טבעיים אינם רחוקים כלל מהמודל של מספר מספרים שליליים, לעומת זאת, אינם מבטאים באופן ישיר את הרעיון של כמות לכן הם רחוקים מן המודל הראשוני מידת המופשטות של מספרים מרוכבים גבוהה עוד יותר, כיוון שהם מרוחקים מאוד מכל ייצוג צורני אינטואיטיבי של המושג 'מספר' גם בהתייחס למושג 'פונקציה', פונקציות הפוכות, נגזרות, נגזרות שניות וכו', מייצגות רמות עוקבות, הולכות וגדלות של הפשטה ולכן, מידת המופשטות שלהן, עולה

טבלה 3 — התפלגות התשובות, באחוזים, לשאלות העוסקות בקבוצות בעלות איבר אחד

שאלה	תשובה	ח N=46	י N=51	פי הוראה (רך) N=21	פי הוראה (חט״ב) N=32
האם האוסף הבא יכול להגדיר קבוצה' **כל המספרים השלמים, הגדולים מ־8 וקטנים מ־10.** אם כן, כמה איברים בקבוצה'	נכון (*)	55	27	52	97
	לא נכון	43	71	48	3
	לא ענו	2	2	0	0
האם אפשר להגדיר את הנקודות המשותפות לשני הישרים כקבוצה  אם כן, כמה איברים בקבוצה'	נכון (*)	46	33	29	94
	לא נכון	41	63	42	3
	לא ענו	13	4	29	3
האם בעזרת **המספר 5 בלבד** אפשר להגדיר קבוצה' אם כן, כמה איברים בקבוצה'	נכון (*)	65	22	24	81
	לא נכון	33	67	52	19
	לא ענו	2	11	24	0

(*) כתשובה נכונה, נחשבה תשובה אשר מילאה את שני התנאים הבאים הנבדק ענה '**כן** זו קבוצה, ומספר האיברים בקבוצה **אחד**'.

טבלה 4 — התפלגות התשובות, באחוזים, לשאלות העוסקות בקיום הקבוצה הריקה

שאלה	תשובה	ח N=46	י N=51	פי הוראה (רך) N=21	פי הוראה (חט"ב) N=32
האם אפשר להגדיר כקבוצה את אוסף נקי החיתוך בין הישרים הבאים a b אם כן, כמה איברים בקבוצה?	נכון (*)	33	27	38	97
	לא נכון	59	71	52	3
	לא ענו	8	2	10	0
האם אפשר להגדיר כקבוצה, את האיברים המשותפים לשני האוספים 3, 5, 10, 17, 9 / 3-, 5-, 10-, 17-, 9- אם כן, כמה איברים בקבוצה?	נכון (*)	33	25	19	81
	לא נכון	67	61	38	16
	לא ענו	0	14	43	3
האם האוסף הבא יכול להגדיר קבוצה? **כל המספרים האי־זוגיים, המתחלקים ב־2 ללא שארית** אם כן, כמה איברים בקבוצה?	נכון (*)	50	45	48	88
	לא נכון	46	49	24	9
	לא ענו	4	6	28	3

(*) תשובה נחשבה לנכונה אם הנבדק ענה 'כן זו קבוצה' וכן הסביר כי מספר האיברים בקבוצה הוא אפס או קבוצה ריקה.

מה שמבדיל בין 'קבוצה ריקה' לבין 'קבוצה בעלת איבר אחד' הוא, שאנו עוסקים כאן במושג מתמטי אחד אשר לו מספר מופעים שלכל אחד מהם רמת הפשטה שונה (וכתוצאה מכך מרחק שונה מהמודל הפיגורטיבי הראשוני)

מעניין להזכיר חלק מן ההסברים שנתנו הנבדקים

'זו לא יכולה להיות קבוצה כי אין איברים'

'ישרים מקבילים אף פעם לא נחתכים, לכן אין פה קבוצה'

'זו לא קבוצה כי היא ריקה'

'אי־זוגיים לא מתחלקים ב־2'

במהלך הראיונות אובחנה התופעה הבאה רוב הנבדקים טענו כי אם אין איברים, אז אין קבוצה כאשר שאלנו במפורש אם נתקלו במושג 'קבוצה ריקה', רובם טענו כי הם מכירים את המושג ומשתמשים בו בזמן פתרון אי־שוויונים למרות זאת, אותם נבדקים דחו את האפשרות לקיום קבוצה שהיא 'ריקה'

דבר מעניין מאוד קורה פה חלק מן הנבדקים מכיר את המושג אך משתמש בו בצורה טכנית בהקשר מתמטי מסוים כאשר הם מתבקשים להתייחס בצורה מפורשת למשמעות המונח המתמטי, הם מודעים לסתירה המשתמעת מכך הקבוצה

הריקה מופיעה אצלם כסתירה לוגית בעצם, וזוהי הנקודה המהותית, נבדקים אלו אינם מסוגלים לשמר הנמקה באופן פורמלי קפדני באופן אוטומטי וספונטני הם נופלים חזרה לרמה האינטואיטיבית.

תופעה זו היא תופעה שכיחה בחשיבה המתמטית גם אדם בעל השכלה מתמטית רחבה, לעתים יכול להיכשל על־ידי מודל אינטואיטיבי סמוי אשר ישתלט 'מאחורי הקלעים' על תהליך החשיבה המתמטית שלו.

קבוצות אינסופיות: האם תלמידים מבינים את המושג 'קבוצות אינסופיות'? ההשערה שלנו הייתה, שבמקרה שלנו, הרבה נבדקים יענו נכון הסיבה לכך היא שהם רגילים, במתמטיקה, לקבוצות מספרים אינסופיות (טבעיים, רציונליים, ממשיים), למרות שבמצבים הלקוחים מחיי יומיום, אנו מתעסקים בקבוצות סופיות ראה טבלה 5.

מהתבוננות בתוצאות השאלה הראשונה, רואים ירידה בתוצאות של תלמידי כיתה י ביחס לתלמידי כיתה ח הבדלים אלה לא מופיעים בתוצאות של השאלה השנייה בשאלה הראשונה מוזכרים באופן מפורש מעטים מאיברי הקבוצה (...,2,4,6,8,10), והנבדק צריך להבין בעצמו, שמדובר בקבוצה אינסופית, כלומר לעשות הכללה מהמדגם הקטן לקבוצה האינסופית בשאלה השנייה, אנו עוסקים ישירות בקבוצה של מספרים שלמים וחלק ניכר מהנבדקים מזהים קבוצה זו כקבוצה אינסופית, מתוך לימודיהם כפי שאמרנו קודם לכן, למודל הצורני של 'אוסף', השפעה קטנה יותר במקרה של קבוצות אינסופיות, שבהן יש התייחסות ישירה לקבוצות אינסופיות מאשר במקרים שבהם ההתייחסות היא לקבוצות סופיות (טבלאות 1־5), זאת כיוון שהתלמידים נתקלים בקבוצות אינסופיות בלימודי המתמטיקה במילים אחרות, ההשפעה הסמויה של המודל הפרימיטיבי עשויה להתאזן בנסיבות מסוימות, על־ידי מקורות מידע אחרים.

קבוצות שוות: ההשערה שלנו הייתה, שנבדקים רבים לא יתנו הסבר נכון למושג 'שוויון קבוצות'. במתמטיקה, שתי קבוצות הן שוות אם הן מכילות את אותם איברים בחיי היומיום, שתי קבוצות הן שוות אם הן מכילות אותו מספר איברים, אפילו אם הם לגמרי שונים. כתוצאה מכך, שיערנו, שגם במקרה זה יושפעו הנבדקים מהמודל הסמוי 'האוסף', ורובם יעדיפו את ההסבר ששתי קבוצות שוות אם הן מכילות אותו מספר איברים.

טבלה 5 — התפלגות התשובות באחוזים — קיום קבוצות אינסופיות

שאלה	תשובה	ח N=46	י N=51	פי הוראה (רך) N=21	פי הוראה (חט"ב) N=32
האם האוסף הבא יכול להגדיר קבוצה? **...,2,4,6,8,10** אם כן, כמה איברים בקבוצה?	נכון (*)	81	57	76	91
	לא נכון	17	35	14	9
	לא ענו	2	8	10	0
האם האוסף הבא יכול להגדיר קבוצה? **כל המספרים השלמים שבהם מופיעה הספרה 8**	נכון (*)	78	78	80	97
	לא נכון	13	14	10	0
	לא ענו	9	8	10	3

(*) תשובה נחשבה לנכונה אם הנבדק ענה 'כן זו קבוצה' וכן הסביר כי מספר האיברים בקבוצה הוא אינסוף.

טבלה 6 — התפלגות התשובות באחוזים — הסבר מהן קבוצות שוות

שאלה	תשובה	ח N=46	י N=51	פי הוראה (רך) N=21	פי הוראה (חט"ב) N=32
הסבר מהן **קבוצות שוות**	נכון	74	39	29	84
	לא נכון	24	39	71	16
	לא ענו	2	22	0	0

נשאלה שאלה פשוטה מאוד 'הסבירו מהן קבוצות שוות'!. התוצאות מוצגות בטבלה 6

אפשר לראות כי בקרב תלמידי כיתות ח, כשהידע שלהם עדיין 'טרי', 74% מהם ענו נכון לעומתם, רוב תלמידי כיתות י, רק 39% ענו נכון, בעוד ש־22% מהם היו לגמרי מבולבלים ולא ענו בכלל רק 29% מפרחי ההוראה במסלול לגיל הרך (שלא מכבר למדו את תורת הקבוצות), ידעו להסביר נכון מהן קבוצות שוות הירידה מ־74% ל־29%, בהשפעת המודל הסמוי 'מודל האוסף', גדולה מאוד מפני שבמקרה זה — 'שוויון קבוצות' — הסתירה בין הפירוש הרגיל לפירוש הפורמלי הוא חזק במיוחד

להלן מספר תשובות שגויות שנתקבלו בשאלונים ובראיונות
'שתי קבוצות שוות הן שתי קבוצות שבהן מספר האיברים שווה'
'שתי קבוצות שהתוכן, הכמות והסדר שלהן שווה'
'אותה כמות ואותם פריטים'

איברים שחוזרים על עצמם: האם הנבדקים יודעים שאיברים החוזרים על עצמם בקבוצה נספרים רק פעם אחת? בחיי היומיום, אוסף של איברים יכול להכיל כמה איברים זהים, אבל בדרך כלל הם נספרים בנפרד אם, לדוגמה, בסל יש חמישה כדורים זהים, אנו נטען בצורה טבעית שיש בסל חמישה כדורים בהקשר של המושג המתמטי 'קבוצה', איבריה חייבים להיות שונים זה מזה אם אותם איברים מופיעים בקבוצה כמה פעמים, הם נספרים רק פעם אחת האם תלמידים מבינים וזוכרים את ההבדל הזה? גם פה ההשערה שלנו הייתה ש'מודל האוסף' יהיה חזק מספיק וישפיע בצורה שלילית על המושג הפורמלי 'קבוצה' (ראה טבלה 7)

טבלה 7 מספקת באופן כללי תמונה דומה לאלה שנתקבלו בטבלאות הקודמות גם פה, נראה בבירור כי התוצאות של תלמידי כיתות ח טובות יותר מאלו של כיתות י, כלומר גם במקרה זה רואים כי עם העלייה בגיל, השפעת המודל הסמוי גדלה נבדקים רבים שוכחים את המשמעויות הפורמליות של המושג 'קבוצה', ונופלים ל'מלכודת' שמציע 'מודל האוסף' בכיתה י, פחות ממחצית הנבדקים זכרו שאיברים החוזרים על עצמם אינם נספרים שוב, אלא רק פעם אחת

ברצוננו להדגיש כי איננו עוסקים כאן בתופעה הרגילה של שכחה. הנבדקים לא שכחו סתם את כל מה שלימדו אותם בעצם, בכיתות גבוהות יותר הם נטו להחליף את הידע הפורמלי שלמדו בעבר בתורת הקבוצות, בתכונות של המודל הקונקרטי־האינטואיטיבי, אוסף מוחשי של עצמים

המודל האינטואיטיבי, הנוטה לשרוד מעבר לאינפורמציה המתמטית שנלמדה, נוטה להסיר את ההשפעה של אינפורמציה זו ולהחליפה בתכונות המאפיינות את המודל הראשוני עצמתו (של המודל הראשוני) נובעת מהיותו לא פורמלי, לא שגרתי אבל בעל משמעות פרקטית ויומיומית

נראה כי העיקרון שההבנה מתפתחת מהאינטואיטיבי לפורמלי, מהמעשי למופשט, היא פשטנית ובנסיבות מסוימות לא נכונה כפי שראינו עד כה, עבור תלמידים רבים, הידע הפורמלי שנרכש בלימודי המתמטיקה נוטה לחיעלם עם הזמן ומוחלף על־ידי ייצוג פרימיטיבי קונקרטי שמשמעותו נעוצה בשורשים עמוקים של החשיבה ובניסיון היומיומי ההתנהגותי של הפרט

באופן כללי, ההצדקה לתשובות השגויות (ספירה בנפרד של מספר מופעים של אותו איבר) נובעת פשוט מספירה בנפרד של

טבלה 7 — התפלגות התשובות באחוזים — איברים החוזרים על עצמם

שאלה	תשובה	ח N=46	י N=51	פי הוראה (רך) N=21	פי הוראה (חטייב) N=32
האם האוסף הבא יכול להגדיר קבוצה?	נכון (כן)	67	61	86	100
6,7,6,7,...	לא נכון (לא)	3	29	10	0
	לא ענו	3	10	4	0
אם כן, כמה איברים בקבוצה?	נכון (שניים)	59	43	52	88
	לא נכון	32	37	19	12
	לא ענו	9	20	29	0
האם האוסף הבא יכול להגדיר קבוצה? **4,4,4,...**	נכון (כן)	74	39	52	100
	לא נכון (לא)	24	53	33	0
	לא ענו	2	8	15	0
אם כן, כמה איברים בקבוצה?	נכון (אחד)	59	41	33	91
	לא נכון	42	47	38	9
	לא ענו	9	12	29	0
האם הקבוצות הבאות שוות? **{5, 10, 15, 20, 25}**	נכון (כן)	85	33	57	88
	לא נכון (לא)	15	59	29	9
{5, 5, 5, 10, 10, 15, 20, 25}	לא ענו	0	8	14	3

האיברים השייכים לקבוצה כאשר חזרה על איברים חוזרת על עצמה באופן אינסופי, הטיעון (השגוי) הוא פשוט שיש מספר אינסופי של איברים, לדוגמה, הקבוצה {4,4,4, ..}

ממצאים אלה מתקשרים למה שאנו יודעים מהפסיכולוגיה הקוגניטיבית שכחה אינה תהליך פשוט של מחיקה של מידע על ציר הזמן שכחה נוטה להיות סלקטיבית, מובנת ומכוונת בדומה לתהליכים של זכירה וחשיבה

על בסיס הממצאים המתוארים במאמר זה, אפשר לטעון כי למודלים המנטליים תפקיד חשוב בלמידה וגם בשכחה כאשר מתגלה קונפליקט בין מודל לבין מושג מדעי, המודל הוא ׳שמנצח׳ ומשתלט על הפרשנות ועל התגובה שלנו אנו נוטים לשכוח את האילוצים המוגדרים של המושג הפורמלי, ומשתמשים במקומו (במחשבתנו) במושגים קונקרטיים ובייצוג אינטואיטיבי

דיון ומסקנות

1 מאמר זה עוסק במספר תכונות של המושג המתמטי ׳קבוצה׳ אשר עומדות בסתירה לתכונות המקבילות להן במושג ׳האוסף׳ זהו מופע ספציפי של תופעה כללית יותר, כאשר קיים למושג מדעי מושג מקביל בשפה היומיומית. יש לכך דוגמאות רבות כוח, חזקה, אנרגיה, תא, בעל חיים, נקודה, ישר, פונקציה, קבוצה וכו׳ מה מתרחש במוחו של הלומד כאשר הוא נדרש להחליף את המשמעות המקורית של המושג במשמעות חדשה, שלה אילוצים פורמליים מדעיים, כפי שהוגדרו על־ידי הקהילה המדעית׳ יש להניח כי יתחולל קונפליקט אפשר לספק מספר תשובות אפשריות לשאלה זו

שתי המשמעויות ישרדו, כל אחת בהקשר המתאים לה למשל, אנו משתמשים בשפת יומיום במושג ׳קבוצה׳ עם משמעויותיו ותכונותיו כפי שהן מבוטאות בתקשורת היומיומית. לעולם לא נאמר ׳קבוצת המטבעות שלי ריקה׳ לעומת זאת נטען כי ׳קבוצת הנקודות המשותפות לשני ישרים מקבילים היא קבוצה ריקה׳

אפשרות תיאורטית נוספת תהיה, שנשכח את המשמעות המקורית המעשית של המושג ונשמר רק את המשמעות הפורמלית שלו השערה זו אינה נראית ריאלית

האפשרות השלישית היא, שהמשמעות המקורית (היומיומית) של המושג תשרוד והאינטרפרטציה הפורמלית תישכח

אנו מניחים כי האפשרות השלישית היא זו המתקיימת כלומר, תלמידים רבים לאחר שלמדו את המשמעות המתמטית של המושג ׳קבוצה׳, ייטו לשכוח אותה המשמעות הראשונית המוחשית תעלה לפני השטח ובאופן סמוי תחליף את המשמעות הפורמלית אנו אומרים ׳סמוי׳ כיוון שהלומד לא עושה זאת באופן מודע. כאשר הוא חושב על המושג, הוא נותן לו את המשמעות היומיומית שלו והתכונות המוחשיות שלו, כאילו היו תכונות של המושג המתמטי. המודל הראשוני האינטואיטיבי, לא רק משמש מקור השראה, אלא מחליף בפועל את המודל הפורמלי

2 הממצאים שלנו מדגישים אספקט חשוב מאוד של תבעיה התהליך שבו מוחלפת המשמעות הפורמלית במשמעות הפרימיטיבית אינו עוסק בתכונות בלתי תלויות לא משתמע מכאן שתמיד המשמעות הפרימיטיבית משתלטת על המשמעות הפורמלית במקרים רבים, כפי שצוין (למשל בסעיף 1), ישמר הפרט את שתי המשמעויות בהתאם לנסיבות המודל (המושג ׳אוסף מוחשי׳ במקרה שלנו) לא רק משאיל כמה מתכונותיו למושג הפורמלי, אלא יותר מכך המודל פועל תמיד כמבנה כולל, על כל היבטיו, וככזה, הוא מחליף, באופן סמוי, בתהליך החשיבה של הלומד, את המושג הפורמלי.

נבחן דוגמה נוספת במחקר שפורסם לפני מספר שנים, הנחנו כי פעולת הכפל, מתקשרת למודל החיבור החוזר וכי פעולת החילוק מתקשרת לשני מודלים אינטואיטיביים חילוק לחלקים וחילוק להכלה (Fischbein et al 1985)

נתמקד כרגע בפעולת הכפל מודל החיבור החוזר כופה מספר אילוצים במודל זה מבחינים בין הנכפל (מספר העצמים בכל אוסף) לבין הכופל (מספרם של האוספים הזהים) הנכפל יכול להיות כל מספר חיובי, אולם הכופל חייב להיות שלם. אפשר בהחלט לומר ׳3 פעמים 0 65׳, אולם לאמירה ׳0 65 פעמים 3׳ אין כל משמעות אינטואיטיבית בהקשר של מודל החיבור החוזר אילוץ שני של מודל החיבור החוזר היא התכונה שכפל ׳גורם להגדלה׳ במחקרים שונים נמצא כי אפילו תלמידי תיכון או סטודנטים במכללה נתקלים בקושי כאשר עליהם לפתור בעיות כפל פשוטות אשר סותרות את האילוצים שתוארו לעיל

נבחן את שתי הבעיות הבאות

״כאשר טוחנים שק אחד של חיטה מתקבל 0 75 שק של קמח כמה קמח נקבל אם נטחן 15 שקים של חיטה?״

״1 ק״ג של דטרגנט משמש ליצירת 15 ק״ג של סבון כמה סבון אפשר ליצור מ־0 75 ק״ג של דטרגנט?״

הבעיות הוצגו לתלמידים איטלקיים בכיתות ה, ז, ט הם נדרשו לבחור בפעולת החשבון המתאימה לפתרון הבעיות ולא

לבצע את החישוב אחוז התשובות הנכונות לבעיה הראשונה היה 79% (כיתה ה), 74% (כיתה ז) ו 76% (כיתה ט) אחוז התשובות הנכונות שניתנו לשאלה השנייה, באותן כיתות בהתאמה, היה 27%, 18% ו־35% שתי הבעיות נפתרות על־ידי אותו תרגיל כפל 15 x 0.75, אולם במקרה הראשון, הנכפל הוא מספר שלם ואילו במקרה השני הנכפל הוא שבר עשרוני (Fischbein et al 1985, עמ׳ 9-10) הממצא המפתיע ביותר הוא, שאפקט זה מופיע לא רק אצל תלמידים צעירים אלא גם אצל הבוגרים יותר, אשר לבטח כבר רכשו ניסיון רב בביצוע כפל שברים עשרוניים תלמידים אלה לא היו מודעים לכך שהקושי שלהם נובע ממודל החיבור החוזר אשר פועל באופן סמוי ׳מאחורי הקלעים׳ ומשפיע על בחירת הפתרון שלהם ראה גם

Bell et al 1987, Harel, Post & Behr 1988, Mangan 1986, Verschaffel, De Corte & Van Coilie 1988, Tirosh, Graeber & Glover 1986

הראו כי בבעיות של חישובי שטחים לא קיימת הבעיה הנ״ל

ממצאים אלו מחזקים את תקפותה של התיאוריה שהוצגה בדבר השפעתם של מודלים סמויים על תהליכי החשיבה של תלמידים בבעיות שבהן על התלמיד לחשב שטח מלבן, נוכחותו של שבר עשרוני (אפילו בשני הממדים של המלבן) אינה משפיעה על תשובות הנבדקים במקרה זה, על התלמיד פשוט להשתמש בנוסחה, והאבחנה בין הכופל לנכפל אינה מפריעה לתהליך החשיבה

בדוגמאות שהוצגו לעיל, מודל נלמד, אשר הוצג במקור משיקולים דידקטיים באופן מפורש, הופך בשלב מאוחר יותר אצל תלמידים מבוגרים יותר, למודל סמוי ותלמידים מתעלמים לחלוטין מקיומו ומהשפעתו

בדוגמה שראינו, לא רק תכונה אחת או אחרת של מודל החיבור החוזר היא שהשפיעה על החשיבה של התלמיד — כמו למשל, התכונה שהתוצאה תמיד צריכה להיות גדולה יותר מכל אחד מהגורמים זהו המודל באופן כולל, כמבנה שלם, יחד עם כל התכונות האינטואיטיביות שלו אשר מעצב את החשיבה של התלמיד בהקשר של פעולת הכפל — במיוחד התכונה שהכופל צריך להיות שלם תכונה זו אינה נובעת, כמובן, מההגדרה הפורמלית של פעולת הכפל השפעתה של תכונה זו על דרכי החשיבה של התלמידים ניתנת להסקה רק אם מביאים בחשבון את השפעתו של מודל החיבור החוזר של פעולת הכפל על תשובותיהם של התלמידים

3 למרות האמור לעיל, נמצא כי עבור מספר מושגים פורמליים, אפשר לאפיין היירכיה ברמת ההפשטה (של נוגד־אינטואיציה) נמצא כי התכונות המופשטות ביותר קשורות למושג ׳קבוצה ריקה׳ רק כ־30% מהנבדקים בכיתה ח וכ־20% מהנבדקים בכיתה י היו מסוגלים להשתמש נכון במושג זה במושג ׳קבוצה בעלת איבר אחד׳ שהוא עדיין נוגד את האינטואיציה, נעשה שימוש נכון על־ידי כ־40% מהנבדקים בכיתה ח ועל־ידי כ־30% מהנבדקים בכיתה י המושג ׳קבוצות אינסופיות׳, נתפס על־ידי 40%־60% מהנבדקים בכיתה ח (תלוי בשאלה) ועל־ידי 30%־50% מהנבדקים בכיתה י

למרות שנראה כי המודל האינטואיטיבי פועל באופן כוללני, (כל התכונות של המודל האינטואיטיבי עולות לפני השטח כתוצאה משכחה של התכונות הפורמליות), קיימת בכל זאת היירכיה מסוימת ברמת ההפשטה, אשר באה לידי ביטוי באופן יחסי, ברמת הקושי לשמר את התכונות במילים אחרות, התלמיד שוכח בהתחלה את התכונות המופשטות ביותר, אולם תהליך השכחה ממשיך לשחוק באופן סדרתי גם את התכונות הפחות מופשטות

4 באופן כללי, אם מושג פורמלי עומד בסתירה לתכונותיו של מודל מוחשי ראשוני (כמו למשל ׳קבוצה ריקה׳) והמושג הפורמלי אינו מחוזק באופן שיטתי, אזי לזמן יהיה אפקט שלילי מבחינת המושג הפורמלי מצאנו כי מכיתה ח לכיתה י ובהמשך אצל פרחי הוראה, אחוז התשובות הנכונות נוטה באופן כללי לרדת זהו ממצא בעל חשיבות רבה ביותר עבור התהליך הדידקטי אי־אפשר להסתמך על העיקרון הסביר לכאורה שהסכמה המחשבתית של התלמיד מתפתחת באופן טבעי עם הגיל, וכתוצאה מכך הולכת וגוברת יכולתו להתמודד עם מושגים מופשטים מצאנו כי תכונות מתמטיות פורמליות, הנמצאות בסתירה לתכונות אינטואיטיביות התואמות אותן, נשכחות כתוצאה מהשפעת הגיל הן מוחלפות על־ידי התכונות הוותיקות, האינטואיטיביות והפרימיטיביות - זאת אם לא מתבצעת התערבות דידקטית שיטתית במילים אחרות, מורה (ותכנית הלימודים) צריכים להיות זהירים ביותר, במיוחד לגבי מושגים מתמטיים, אשר התכונות הפורמליות שלהם

נמצאות בסתירה לאינטרפרטציה האינטואיטיבית, כתוצאה מהיותם נוגדי־אינטואיציה יש לשמר מושגים מופשטים אלה, באופן שיטתי, במהלך הפעילויות בכיתה תשומת לב מיוחדת צריכה להינתן לאותם מושגים השאולים מחיי היומיום ואשר כתוצאה מכך נוטים להשתמר יחד עם משמעותם הראשונית, אשר במוקדם או במאוחר תחליף, באופן סמוי, את המשמעות המבוססת מבחינה מדעית

5 במאמר על המבנה המטפורי של המתמטיקה, Lakoff ו־Núñez ניתחו, בין שאר המושגים, את המושג 'קבוצה', בהתייחס לרקע האינטואיטיבי היפותטי שלו בהתאם לגישתם, אפשר לפרש את המושג 'קבוצה' באמצעות הייצוג של מְכָל מְכָל משתמע כאזור תחום של המרחב, שיש לו פנים, גבולות וחוץ מנקודת המבט של Lakoff ו־Núñez 'קבוצה במתמטיקה נתפסה באופן מסורתי כמְכָל כאשר סכַמות ואיברי קבוצה נתונים בתוך סכמת המְכָלי (Lakoff & Núñez 1997, עמ' 40) בטרמינולוגיה שלנו, אפשר לטעון כי המושג קבוצה מתייחס למודל אינטואיטיבי מסוים, אשר לו ייצוג אינטואיטיבי מסוים

אם הבנו נכונה את גישתם של Lakoff ו־Núñez, מחברים אלה ניסו למצוא, בחיבורם, מה הרקע האינטואיטיבי של מושגים מתמטיים שונים (כמו גבול, שאיפה לגבול, פונקציה וכו') המבנה הכללי אצלם הוא תיאורטי, היפותטי

מנקודת המבט שלנו, מודל המיוחס למושג, הוא באמת מודל, ולא רק השערה שבנינו, אם הוא עונה על התנאים הבאים

זהו כלי התורם לפתרון בעיות

הוא תורם להבנה עמוקה יותר ושלמה יותר של המושג המקורי

בשני המקרים, על המודל להיות בעל תכונות ניבוי אשר בעצם מבוססות על קיום של איזומורפיזם מבני עם המקור המטפורה של Lakoff ו־Núñez היא בחלקה בעלת יכולת ניבוי אם מביאים בחשבון את אופן הרישום המוסכם בין 'מתמטיקאים' לקבוצה קבוצה ריקה מיוחסת למְכָל ריק, קבוצה בעלת איבר אחד מיוחסת למְכָל שבו אובייקט אחד, קבוצה חֶלקית במשמעות המתמטית מיוחסת לחלק מהעצמים הנתונים במְכָל אולם האנלוגיה נעצרת כאן קנקן אינו יכול להכיל כמות בלתי מוגבלת של עצמים (למשל גולות) ותורת הקבוצות הומצאה במיוחד כדי לאפשר טיפול בקבוצות אינסופיות (מספרים, נקודות וכו') המשמעות של שני מכלים שקולים יכולה להיות שני מכלים זהים בנפחם, או מכלים שבהם אותו מספר של עצמים, אולם לא שני מכלים המכילים רק את אותם איברים בתורת הקבוצות, איברים החוזרים על עצמם נספרים פעם אחת בייצוג 'הקנקן' איברים החוזרים על עצמם נספרים בנפרד

לבעיות אלו של חוסר התאמה של מודל המְכָל המוצע על־ידי Lakoff ו־Núñez לתורת הקבוצות, אין מענה בתיאוריה המוצעת על־ידיהם, ואין בכך משום פגיעה בתיאוריה שלהם, מפני שהם אינם טוענים שלמודל שלהם יש יכולות ניבוי או יכולות היוריסטיות

במחקר שלנו, יצאנו מההנחה שהתפיסות המוטעות שבהם מחזיקים תלמידים בהתייחס לתכונות של המושג 'קבוצה' נגרמות עקב המודל שעליו הם מתבססים — מודל האוסף — אשר מחליף באופן סמוי בתהליך החשיבה של התלמידים את המבנה שהוגדר באופן פורמלי מכאן משתמע כי א) כל התפיסות המוטעות של התלמידים ניתנות לחיזוי בהתייחס למודל שאותו שיערנו במפורש ב) הזמן מחמיר את המצב, גורם לגידול בכמות התשובות השגויות התכונות של מודל המושג האינטואיטיבי נוטות להחליף את התכונות של המושג המתמטי של קבוצה, שהן פחות מובנות וחסרות בסיס התנסותי זאת אם איננו מספקים חיזוקים מתמשכים למושג המתמטי לאחר שנלמד באופן שיטתי

6 בעבר וייתכן שגם כיום, היה מקובל להתחיל להשתמש במושג 'קבוצה' במהלך לימודי המתמטיקה בבית הספר היסודי ולעתים אפילו בגן לדעתנו, זהו משגה דידקטי בסיסי ילד מתרגל לרעיון, שקבוצה היא אוסף של עצמים יחד עם כל התכונות המוחשיות שלה כפי שהן מובנות על־ידיו המושג המתמטי 'קבוצה' הוא מופשט, פורמלי ואפשר להטמיע אותו רק כאשר היכולות האינטלקטואליות של התלמיד בשלות לביצוע מניפולציות במושג פורמלי המתמטיקה היא דדוקטיבית, פורמלית, מערכת קשיחה של ידע הפועל באמצעות תהליכים של הסקת מסקנות על בסיס השערות אם הילד אינו בשל מבחינה אינטלקטואלית להבנה וביצוע מניפולציות באופן קונסטרוקטיבי בדרך של הסקת מסקנות, מושגים פורמליים (אפילו כאשר הם סותרים את הייצוג

האינטואיטיבי), הוא לא יוכל להטמיע באופן פעיל מושגים כגון הוכחה פורמלית, נקודה, ישר וכו׳ (במשמעות הגיאומטרית שלהם), מספרים שליליים, מספרים מרוכבים, קבוצות, פונקציות וכו׳. כל אותם מושגים מבוססים על חוקים פורמליים אשר עלולים לעמוד בסתירה — או לא בסתירה — עם הניסיון האמפירי של התלמיד

לסיכום, לימוד מתמטיקה, הוא ללא ספק תהליך של הבנייה (המילה הבנייה במשמעות שהתכוון אליה פיאזיה) כל התקדמות, כל רכישה, אינן יכולות להתבצע בדרך של מציאת נקודות דמיון מלאכותיות בין מושגים, אשר להם כמה משמעויות אמפיריות במקרים רבים, פעולה אמפירית או פרשנות אמפירית עשויה לשמש כבסיס להכנת התלמיד לרמה גבוהה יותר של הפשטה בתהליך של השגת הבנה למושג הפורמלי אולם, במקרים אחרים, מציאת נקודות דמיון מלאכותיות עלולה לבלום את ההטמעה של המושג הפורמלי, אם החשיבה של הילד אינה בשלה עדיין לעסוק במושג המקרה של המושג הפורמלי ׳קבוצה׳, יכול לשמש כאב־טיפוס לקטגוריה של מצבים את פעולת החיבור בין מספרים טבעיים אפשר ואף רצוי להתחיל ללמד תוך כדי התייחסות לאיחוד שתי קבוצות של עצמים אולם, כשמציגים את הרעיון של מספרים מרוכבים, לא מתחילים עם דוגמה של הזיה או דוגמה דמיונית של יצור דמיוני כמו קנטאור (סוס־אדם) המושג ׳מספר מרוכב׳ הוא פורמלי והחשיבה של התלמיד צריכה להיות בשלה לעסוק במושג זה כך גם לגבי המושג ׳קבוצה׳, שהוא מושג מתמטי מופשט.

רשימת ספרות

Bell, A. , L Grimison, B Greer, & C Mangan [1987] *Multiplicative Word Problems — A Classification Scheme and its Validation* (internal report) Nottingham, Shell Centre for Mathematical Education, University of Nottingham, and Belfast, Depactment of Psychology, Queen's University

English, L. D (ed) [1997] *Mathematical Reasoning Analogies, Metaphors and Images* Malwah, NJ, Erlbaum

Fishbein, E., M Deri, M S Nello, M S Marino [1985] 'The Role of Implicit Models in Solving Verbal Problems in Multiplication and Division', *Journal for Research in Mathematics Education* 16 (1) 3–17

Harel, G , T H. Post, M Behr [1988] 'On the Texual and the Semantic Structure of Mapping Rule and Multiplication Compare Problems', *Proceedings of the 12th International Conference, Psychology of Mathematics Education*, vol. 11 Vezprém, Hungary

Lakoff, G & R E Núñez [1997] 'The Metaphorical Structure of Mathematics — Sketching out Conginitive Foundations for a Mind-based Mathematics', in L D English (ed), *Mathematical Reasoning — Analogies, Metaphors and Images* Malwah, NJ, Erlbaum

Linchevski, L , & Sh Vinner [1988] 'The Naive Concept of Sets in Elementary Teachers', *Proceedings of the 12th International Conferenc, Psychology of Mathematics Education*, vol 11 471-478 Vezprém, Hungary

Mangan, C [1986] Choice of Operation in Multiplication and Division Word Problems. Unpublished Doctoral Dissertation Belfast, Queen's University

Tirosh, D., A D Graeber & R M Glover [1986] 'Preservice Teachers' Choice of Operation for Multiplication and Division Word Problems', *Procedings of the 10th International Confeierence, Psychology of Mathematics Education* London

Verschaffel, L , E De Corte & Van Coillie [1988] 'Specifiying the Multiplier Effect on Children's Solutions of Simple Multiplication Word Problem', *Proceedings of the 12th International Confeienc, Psychology of Mathematics Education*, vol. 11 20-25 Vezprém, Hungary

Wilder, L R [1965] *Introduction to the Foundations of Mathematics* New York, John Wiley