Capítulo 3

EL PLANETA TIERRA

La Tierra, el lugar de origen de los seres humanos y, por supuesto, el sitio desde donde contemplamos el universo, es un planeta que dista aproximadamente unos 150 millones de kilómetros de una estrella de mediano tamaño que llamamos el Sol. Posee un único satélite natural llamado la Luna, el cual está a unos 384 400 kilómetros de distancia. La Tierra es de forma aproximadamente esférica, con un radio aproximado de 6378 kilómetros.

En orden de distancia al Sol la Tierra es el tercer planeta de dentro hacia fuera y realiza una revolución en torno del Sol (movimiento de traslación) en un período de tiempo que llamamos año. La Tierra gira sobre sí misma (movimiento de rotación) en un período que llamamos día. Técnicas modernas revelan que nuestro planeta es supremamente antiguo: posee, al igual que el sistema solar, una edad de 4600 millones de años.

La Tierra posee una tenue capa de gases que la rodean por completo denominada atmósfera. Dicha atmósfera está conformada en su mayor parte de nitrógeno (78%) y oxígeno (21%), y cantidades muy pequeñas (1%) de otros gases tales como agua, bióxido de carbono, argón, xenón, etc. El espesor de la atmósfera es ínfimo comparado con el radio del planeta, pues aunque los especialistas tengan algunas diferencias con respecto a la demarcación de sus límites (algunos llegan a extenderla hasta los 2000 kilómetros), lo cierto es que ya a una altura de los 120 kilómetros está contenido el 99.9% del peso total de la misma. Hasta en el momento en que se escriben estas lineas la Tierra posee aún el honor de ser el único planeta donde se ha gestado el fenómeno que llamamos vida. Pero es muy dudoso, a la luz de recientes investigaciones, que siga siendo exclusivamente la poseedora de tan significativo privilegio. Y no sólo ha generado vida: también ha dado origen a seres vivos autoconcientes que poseen una curiosidad sorprendente por tratar de entender lo que los rodea.

Hasta hace unos cuantos años las observaciones astronómicas se hacían exclusivamente sobre la superficie de la Tierra lo que implicaba (y aún implica) multitud de inconvenientes y desventajas: el movimiento diurno es el más obvio: los astros aparentemente se mueven de oriente a occidente por lo que es necesario compensar dicho movimiento para poder rastrear y observar adecuadamente los astros. La atmósfera absorbe muchas longitudes de onda de

Masa	5.9736×10^{24} kg
Masa de la atmósfera	5.1×10^{18} kg
Masa de los océanos	1.4×10^{21} kg
Radio ecuatorial	6 378 140 m
Radio polar	6 356 755 m
Distancia media al Sol	1.496×10^{11} m = 1 u.a.
Densidad media	5515 kg m^{-3}
Período de rotación	1 día = $23^h\ 56^m\ 4.09^s$
Período de traslación	1 año = 365.2421897 d
Temperatura superficial	-35 a 50 ^{o}C

Tabla 3.1: Algunos datos del planeta Tierra

interés tales como los rayos X, los rayos gamma y la radiación ultravioleta; aquella radiación que no es absorbida sufre de extinción atmosférica, lo que significa que la luz se dispersa y se atenua al pasar por el aire. Además, el fenómeno de refracción atmosférica afecta la dirección real de la luz que nos envían los astros. Hoy en día se han colocado satélites artificiales y se han mandado sondas a otros planetas, lo que ha incrementado de forma espectacular el conocimiento que se tenía previamente de cuerpos que sólo se observaban a través de telescopios sobre el terreno.

3.1 Forma de la Tierra

Al igual que los otros planetas del sistema solar y la mayoría de sus satélites, la Tierra posee simetría esférica, esto es, su forma es casi la de una esfera. La rotación de los planetas es responsable de crear en el proceso de su formación una ligera acumulación de masa sobre el ecuador, por lo que el radio en las vecindades de ese lugar es un poco mayor que en los polos. En la Tierra la diferencia entre el radio en el ecuador y el radio en los polos es apenas de 21 385 metros. Aunque pueda parecernos un valor muy pequeño (0.3% del radio) el hecho es que esa diferencia ha de ser tenida en cuenta en la conformación de mapas, en el cálculo de eclipses, estimación de trayectorias de satélites, etc.

La ciencia que se ocupa de estudiar la figura geométrica precisa de la Tierra, los métodos que emplea y su significado es llamada geodesia. Antes de 1957, esto es, antes del advenimiento de los satélites artificiales, el trabajo geodésico se realizaba por métodos de triangulación y de gravimetría hechos sobre el terreno. Con la utilización de satélites artificiales ha sido posible incrementar mucho más nuestro conocimiento sobre la forma verdadera de nuestro planeta.

Nos consta que nuestro planeta posee una superficie continental de gran diversidad de formas y variaciones. Accidentes geográficos tales como montañas abruptas y escarpadas se ubican en ocasiones al lado de grandes llanos y praderas. Sin embargo, el planeta Tierra está cubierto, en más de un 70%, por agua, una sustancia fluida que como tal tiende a ajustar

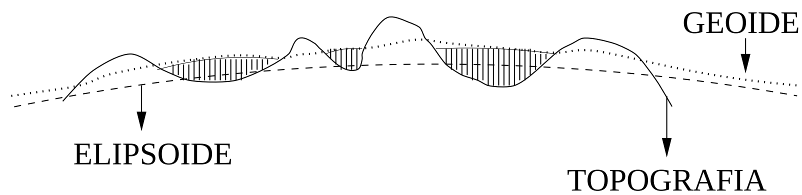

Figura 3.1: Geoide, elipsoide (esferoide) y forma verdadera de la Tierra

fácilmente su superficie normal a la dirección de la gravedad. Ello quiere decir que en buena medida la superficie de nuestro planeta puede describirse en términos del nivel medio de los océanos que la cubren en un buen porcentaje. Se llama *geoide* a la figura geométrica que busca representar la verdadera forma del planeta Tierra haciendo que la figura coincida con el nivel medio de los océanos del mundo y continúe sobre las áreas continentales como una superficie imaginaria (a nivel promedio del mar). El geoide tiene por definición la propiedad de que cualquier lugar de su superficie debe ser perpendicular a la dirección de la fuerza de la gravedad.

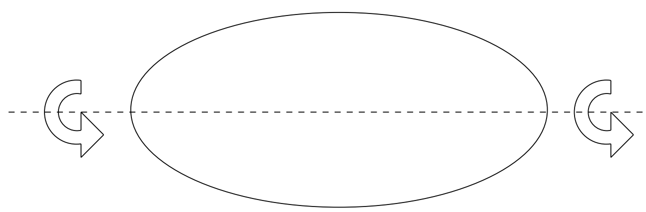

Figura 3.2: Una elipse rotando alrededor de su eje mayor da lugar al elipsoide de revolución

Rigurosamente hablando, el geoide es una superficie equipotencial dentro del campo gravitacional terrestre. Ahora bien, en la práctica el geoide es imposible de identificar con una figura geométrica sencilla, pues resulta siendo completamente irregular (ver figura 3.1). Por ello se suele adoptar como figura geométrica apropiada —en muy buena aproximación— un elipsoide de revolución, llamado también esferoide, cuya forma tridimensional resulta de rotar por completo una elipse sobre su eje mayor, ver figura 3.2.

El geoide puede estar por encima o por debajo del elipsoide de revolución tanto como unos 100 metros, diferencia llamada "ondulación del geoide". Las ondulaciones más grandes se registran en una depresión al sur de la India que alcanza los 105 metros y una elevación al norte de Australia que alcanza los 75 metros. Un elipsoide de revolución o esferoide queda determinado si se fija el radio ecuatorial a que juega el papel del semieje mayor del elipsoide, y una relación llamada *achatamiento* f. El achatamiento está relacionado con el semieje menor de dicho elipsoide que es el radio polar b (ver Tabla 3.1) a través de la relación:

$$b = a(1 - f). \tag{3.1}$$

Con el avance de la técnica y la puesta a punto de métodos más precisos para medir las dimensiones de la Tierra, se han establecido históricamente valores cada vez más refinados de estas cantidades. Actualmente se recomienda la utilización de los valores fijados por la Unión Astronómica Internacional (UAI) en 1979[1]:

$$a = 6\,378\,140 \text{ metros,}$$
$$f = (a - b)/a = 1/298.257.$$

Ahora bien, todos los cuerpos celestes giran sobre sí mismos, incluyendo por supuesto la Tierra. El movimiento de rotación del planeta define instantáneamente una línea imaginaria que pasa por el centro del planeta la cual es llamada eje de rotación. Dicho eje de rotación coincide en promedio con el eje del momento principal de inercia, llamado también eje de figura. El eje de rotación y el eje de figura no coinciden exactamente puesto que el eje de rotación se mueve lentamente alrededor del eje de figura en un movimiento cuasi-periódico con una amplitud que oscila entre los 0.05 y 0.25 segundos de arco, lo que equivale a un desplazamiento entre uno y ocho metros sobre la superficie de la Tierra. Dicho movimiento se conoce con el nombre de *movimiento polar*. El astrónomo norteamericano Seth Carlo Chandler encontró, en 1892, que el movimiento del polo es la resultante de la superposición de dos componentes que poseen períodos distintos: una componente, llamada ahora componente de Chandler, tiene una duración de 14 meses, y es una oscilación libre que surge de la forma compleja de la Tierra; la otra componente es de 12 meses y es una oscilación forzada originada por efectos meteorológicos tales como cambios estacionales[2]. La posición del polo es la suma vectorial de estas dos componentes y describe una especie de espiral irregular alrededor de un polo medio o promedio durante un ciclo de seis años. Puesto que las magnitudes de las componentes pueden cambiar, el movimiento durante los ciclos no es el mismo. Dado que este movimiento no puede ser predicho con precisión, es necesario realizar observaciones regulares para ubicar la posición instantánea del eje de rotación.

Definido el eje de rotación de la Tierra podemos definir un plano perpendicular al mismo de tal forma que pase por el centro de masa del planeta. La circunferencia que resulta de la intersección de dicho plano con la superficie del esferoide es llamada *ecuador terrestre* (ET), ver figura 3.3. Los puntos sobre la superficie del esferoide (i.e., sobre la superficie terrestre) por donde emerge el eje de rotación son llamados *polos terrestres*. Aquel situado sobre el hemisferio norte es llamado polo norte terrestre (PNT) en tanto que el otro es llamado polo sur terrestre (PST). Nótese que al moverse el eje de rotación, también se están desplazando ligeramente los polos. Obviamente el ET es completamente equidistante de ambos polos.

---

[1] Ello no significa que sea de utilización obligatoria por parte de todos los profesionales. Por ejemplo, en navegación astronómica satelital las posiciones que da el GPS están con referencia al elipsoide WGS84.

[2] El movimiento polar había sido predicho por el matemático suizo Leonhard Euler en 1765 utilizando la teoría dinámica y un modelo de la Tierra rígida. Sus cálculos mostraron que la oscilación debía tener un período de 10 meses. En realidad el período es cuatro meses mayor a causa de la elasticidad del manto terrestre y del movimiento de los océanos, efectos que Euler no incluyó en su modelo.

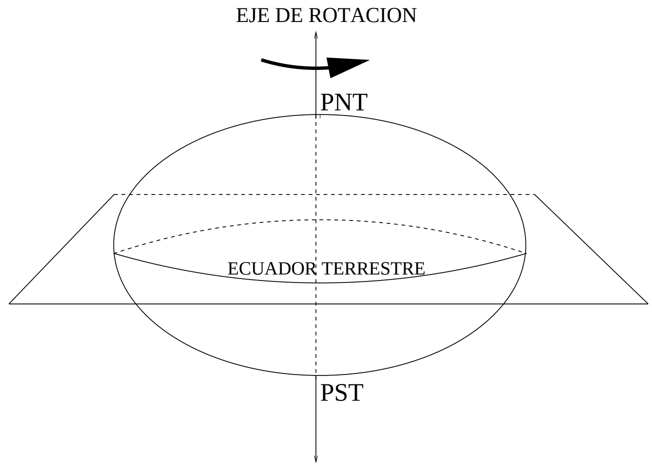

Figura 3.3: Polos terrestres y ecuador terrestre

3.2 Coordenadas de un observador en la superficie de la Tierra

Para fijar la posición de un observador sobre la superficie de la Tierra se utilizan tres tipos de coordenadas:

- Coordenadas geocéntricas,
- Coordenadas geodésicas,
- Coordenadas geográficas (astronómicas).

Una descripción de cada uno de estos tipos de coordenadas se presenta a continuación.

3.2.1 Coordenadas geocéntricas

Este sistema de coordenadas tiene como origen el centro de masa de la Tierra. El plano fundamental es, para los tres sistemas, el ecuador terrestre (ET).

Las coordenadas geocéntricas son:

ϕ'= latitud geocéntrica,
λ'= longitud geocéntrica,
ρ = distancia radial.

La latitud geocéntrica ϕ' de un punto sobre la superficie terrestre es el ángulo existente entre una línea que pasa por el punto y el centro del planeta, y el ecuador terrestre.

La latitud geocéntrica tiene valores comprendidos entre el siguiente intervalo:

$$-90^o\ (90^o\ \mathrm{S}) \leq \phi' \leq 90^o\ (90^o\ \mathrm{N}).$$

Nótese que:

$$\phi'_{(PNT)} = 90^o, \qquad \phi'_{(PST)} = -90^o.$$

Para especificar en qué hemisferio de la superficie de la Tierra está ubicado el punto es necesario adicionar un indicativo. Este consiste en agregar la letra N (norte) en el caso de que el punto considerado esté en el hemisferio norte, de lo contrario se escribe la letra S (sur). Sin embargo, en los cálculos trigonométricos que involucren la latitud es necesario expresar la latitud explícitamente con un signo negativo cuando el punto está ubicado en el hemisferio sur.

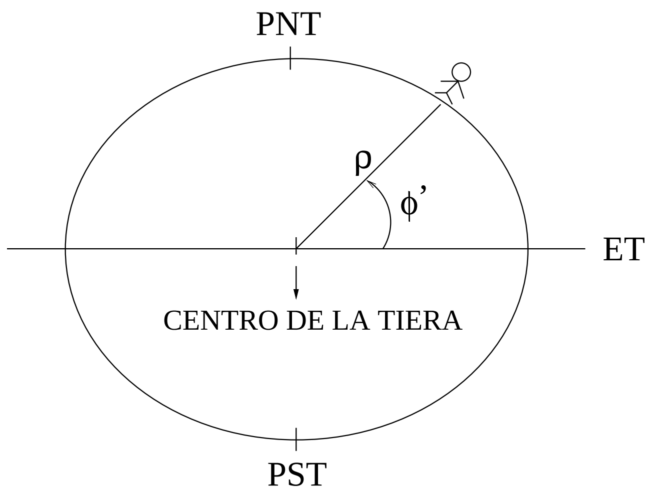

Figura 3.4: Latitud geocéntrica ϕ'

La longitud geocéntrica λ' de un punto sobre la superficie terrestre es el ángulo medido sobre el ecuador terrestre, desde el meridiano cero (o de referencia) hasta el meridiano del punto correspondiente. La longitud puede medirse hacia ambos lados del meridiano cero, haciéndose necesario en este caso especificar si el ángulo es al oeste (occidente) o si es al este (oriente). Para tal fin utilizamos la notación siguiente: λ'_E si el ángulo de longitud se mide hacia el este del meridiano de referencia; λ'_W si el ángulo de longitud se mide hacia el oeste del meridiano de referencia. Se acostumbra a especificar la longitud geográfica de tal forma que nunca exceda los 180. Esto significa que si un punto posee una longitud $\lambda'_E = 200^o$, aunque enteramente válida, es conveniente escribir $\lambda'_W = 160^o$. También se suele utilizar un signo ($+$ o $-$) en frente de la longitud para especificar si un punto está hacia el este o al oeste del meridiano de referencia. Se ha escogido el signo positivo ($+$) cuando la longitud se toma hacia el este del meridiano de referencia; el signo negativo ($-$) se usa en caso contrario.

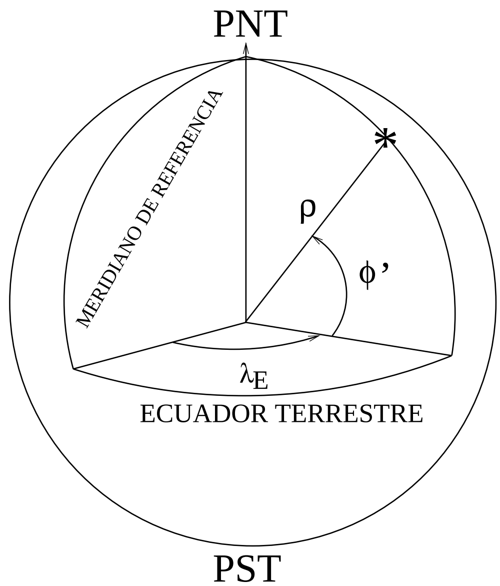

Figura 3.5: Latitud geocéntrica, longitud geocéntrica y la distancia radial

El *meridiano cero* o *meridiano de referencia* puede definirse de tal forma que atraviese en principio cualquier lugar sobre la superficie de la Tierra. Sin embargo, desde el punto de vista histórico, los meridianos de referencia definidos han pasado por los observatorios astronómicos más notables de cada imperio o país. Fue así como el imperio británico definió el meridiano de referencia como aquel que atraviesa el Observatorio Real de Greenwich, siendo Greenwich un municipio de Londres, Inglaterra. De la misma forma, Francia estableció como meridiano de referencia aquel que atraviesa el Observatorio de París y España hizo lo propio con el Observatorio Real de San Fernando. Actualmente, el meridiano cero o de referencia de uso general es, por acuerdo en una reunión internacional realizada en 1884, el *meridiano de Greenwich*.

La distancia radial ρ de un punto sobre la superficie terrestre es la distancia en línea recta existente entre dicho punto y el centro de masa de la Tierra.

3.2.2 Coordenadas geodésicas

Este sistema de coordenadas descansa enteramente en un esferoide (elipsoide de revolución) de referencia que hay que especificar de entrada. Un esferoide queda determinado, como ya se dijo antes, cuando se adoptan valores específicos del radio ecuatorial terrestre a y del achatamiento f (o un parámetro equivalente). La importancia de este sistema de coordenadas radica en que la latitud geodésica es la que se encuentra en los mapas, atlas y diccionarios geográficos.

Las coordenadas geodésicas son:

$$\begin{aligned} \phi &= \text{latitud geodésica}, \\ \lambda &= \text{longitud geodésica}, \\ h &= \text{altura sobre el esferoide}. \end{aligned}$$

La latitud geodésica ϕ de un punto sobre la superficie terrestre es el ángulo existente entre la normal al esferoide en dicho punto y el ecuador terrestre, ver figura 3.6.

La latitud geodésica tiene valores comprendidos entre el siguiente intervalo:

$$-90^o \ (90^o \ \mathrm{S}) \leq \phi \leq 90^o \ (90^o \ \mathrm{N}),$$

con:

$$\phi_{(PNT)} = 90^o, \qquad \phi_{(PST)} = -90^o.$$

La latitud geodésica ϕ puede llegar a diferir de la latitud geocéntrica hasta unos 11.5 minutos de arco a una latitud de 45^o.

La longitud geodésica λ está definida de la misma forma que la longitud geocéntrica λ', de tal forma que $\lambda = \lambda'$.

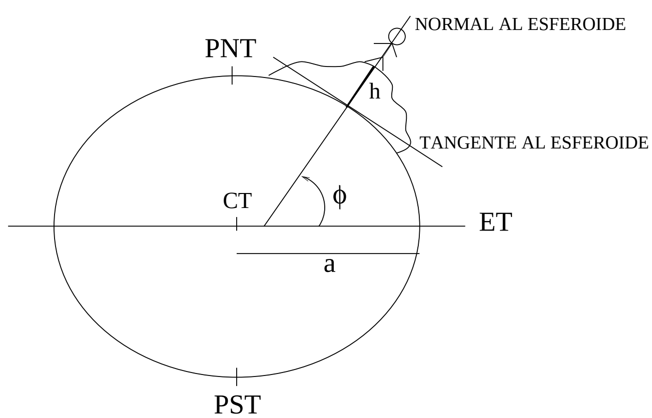

Figura 3.6: Latitud geodésica ϕ

La altura h de un observador sobre el elipsoide es la distancia sobre el esferoide medida a lo largo de la normal a dicho esferoide. En primera aproximación se puede tomar h de un determinado sitio como su altura sobre el nivel de mar.

En la tabla 3.2 se especifican varios esferoides de referencia de uso actual.

Nombre y fecha	Radio ecuatorial a (metros)	Achatamiento
WGS 84, 1984	6378137	1/298.257223563
MERIT, 1983	6378137	1/298.257
GRS 80, 1980	6378137	1/298.257222
UAI, 1979	6378140	1/298.257

Tabla 3.2: Algunos esferoides de referencia actuales

3.2.3 Coordenadas geográficas (astronómicas)

Cuando se determinan la latitud y la longitud mediante observaciones astronómicas, esto es, con respecto al polo celeste y al meridiano local a través de la vertical local, a los valores obtenidos de estos ángulos se les adiciona el adjetivo de geográficos (o también astronómicos).

La latitud geográfica (ϕ'') de un punto sobre la superficie terrestre es el ángulo existente entre la dirección de la plomada (la vertical local) y el ecuador terrestre, ver figura 3.7. Puesto que la vertical local de un punto es afectada por las anomalías gravitacionales locales (montañas prominentes, depósitos subterráneos muy densos, etc.) y los campos gravitacionales cambiantes de la Luna, el Sol y los océanos —lo que implica que la vertical extendida hasta el centro de la Tierra no pasa por el centro del esferoide— existirá una pequeña diferencia en dirección entre la vertical de dicho punto y la normal al esferoide (la que define ϕ). La inclinación de la vertical local a la normal al esferoide de referencia se conoce con el nombre de desviación de la vertical. Por lo tanto, lo que diferencia la latitud geográfica de la latitud geodésica es la desviación de la vertical.

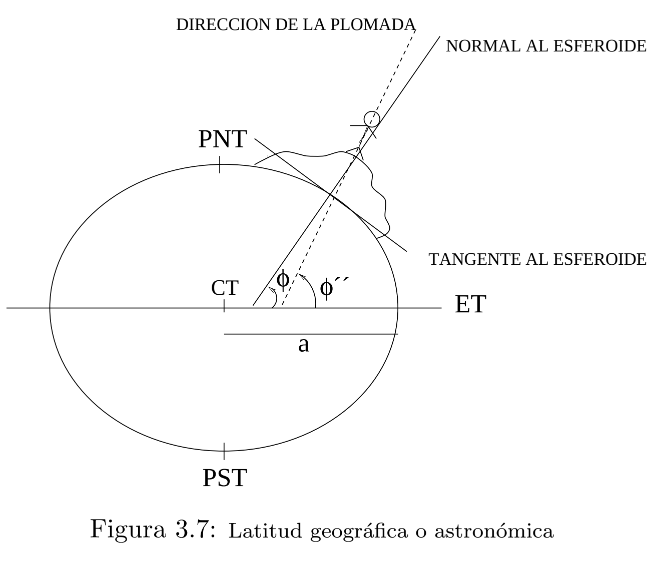

Figura 3.7: Latitud geográfica o astronómica

La longitud geográfica (λ'') de un punto sobre la superficie terrestre es el ángulo entre el plano del meridiano astronómico de dicho punto y el plano del primer meridiano que pasa por Greenwich. El meridiano astronómico es el plano que pasa por el observador y contiene la vertical y una paralela a la dirección del eje de rotación. Como ya se dijo, la vertical de un punto no necesariamente pasa por el centro del esferoide, por lo que el meridiano astronómico no coincide por lo general con el meridiano geodésico (que sí pasa por el centro del esferoide). De ahí que las longitudes geográfica y geodésica difieran entre sí por una pequeña diferencia. En este libro supondremos que las tres definiciones de longitud son iguales: $\lambda' = \lambda = \lambda''$.

NOTA: La desviación de la vertical es por lo general un valor muy pequeño, de unos cuantos segundos de arco, pero hay algunos lugares en los que se registra hasta un minuto de arco. En este libro, como en la mayoría de los libros de astronomía, no haremos diferencia entre las coordenadas geodésicas y geográficas.

3.3 Unidades de longitud y su relación con las dimensiones terrestres

La unidad fundamental de longitud en el sitema métrico se llama metro (m). En 1795 el gobierno francés decretó el uso de esta unidad para hacerlo lo más popular que se pudiera pues entre las diferentes provincias se utilizaban distintas medidas. Para tal fin se nombró una comisión científica que al cabo de un tiempo fijó el uso del sistema decimal y definió el metro como 1/10 000 de una cuarta parte del meridiano terrestre. Como quien dice, con base en esta unidad de medida la circunferencia de la Tierra se estimaba en aquella época en 40 000 metros exactamente.

Sólo en 1837 el sistema métrico decimal fue declarado obligatorio en Francia y paulatinamente fue adoptado por casi todos los paises salvo los anglosagones quienes sólo recientemente lo han estado introduciendo progresivamente. Después, en 1875, la Convención del Metro instituyó una Oficina Internacional de Pesos y Medidas cuya sede se fijó en París donde, en el pabellón de Breteuil se guardan el metro internacional (de platino e iridio), como también el kilogramo internacional. Sin embargo, los avances incesantes de la técnica obligaron a una redefinición del metro ya para comienzos de los años sesenta. Desde el primero de enero de 1961 se define el metro como "la longitud igual a 1 650 763.73 veces la longitud de onda en el vacío de la radiación correspondiente a la transición entre los niveles $2p_{10}$ y $5d_5$ del átomo de criptón 86".

Otra unidad de longitud, muy popular en los paises anglosajones, es la milla náutica. Ésta se define como la distancia sobre un círculo máximo que subtiende un ángulo de un minuto de arco en el centro de la Tierra. Por lo tanto, y de forma aproximada, podemos encontrar fácilmente a qué equivale una milla náutica. Puesto que una circunferencia comprende 360 grados, esto es, $360 \times 60 = 21\,600$ minutos de arco, y estos deben dar alrededor de 40 000 000 m se desprende que una milla náutica debe equivaler a 1851 m. Ahora bien, como la Tierra no es completamente esférica resulta que la milla náutica es distinta si se mide en el ecuador que si se mide en los polos. Se ha tomado un valor promedio equivalente a 1852 metros. Ha de tenerse cuidado con la posible confusión que pueda surgir entre la milla náutica y la milla, donde ésta es una unidad de longitud utilizada en caminos y rutas, que equivale a 1609 metros.

3.4 Transformación entre latitudes

Aquí supondremos que la latitud geográfica (o astronómica) (ϕ'') se puede aproximar a la latitud geodésica (ϕ) por lo que sólo nos ocuparemos de la relación entre ésta y la latitud geocéntrica (ϕ').

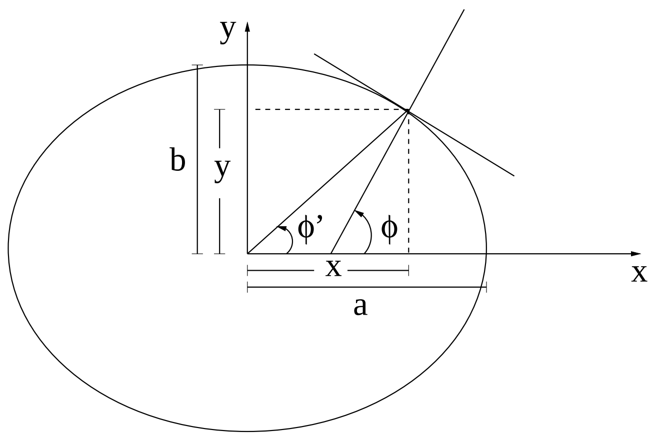

Figura 3.8: Relación entre latitud geocéntrica y geodésica

Observemos la figura 3.8 donde están relacionadas las latitudes en cuestión. Es evidente que:

$$\tan\phi' = \frac{y}{x}. \tag{3.2}$$

Por otro lado, la ecuación de una elipse con centro en el origen y cuyo eje mayor a está ubicado sobre el eje x y el eje menor sobre el eje y es:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1. \tag{3.3}$$

De ésta se deduce que la tangente a cualquier punto de la elipse, denotada por $\frac{dy}{dt}$, es:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}\frac{b^2}{a^2}.$$

Ahora bien, aquella recta normal a la tangente del elipsoide tiene como pendiente $-\frac{dx}{dy}$, pero a su vez dicha pendiente viene dada por $\tan\phi$. De ello resulta que

$$\tan\phi = \frac{y}{x}\frac{a^2}{b^2}, \tag{3.4}$$

que al comparar con (3.2) da:

$$\tan\phi = \frac{a^2}{b^2}\tan\phi',$$

o, teniendo en cuenta la relación entre a y b (ver ecuación 3.1, pág. 33) se obtiene:

$$\tan\phi = \frac{1}{(1-f)^2}\tan\phi'. \tag{3.5}$$

Procedamos ahora a encontrar una relación entre la distancia radial ρ y la latitud geodésica ϕ.

La excentricidad e de un elipsoide está definida por la siguiente relación entre el semieje mayor y menor (ver sección 11.2.1, pág. 212):

$$e^2 = 1 - \left(\frac{b}{a}\right)^2. \tag{3.6}$$

Puesto que el achatamiento f puede escribirse de la forma $f = 1 - b/a$, entonces al comparar con (3.6) se deduce:

$$e = \sqrt{f(2-f)}. \tag{3.7}$$

De la ecuación (3.3) obtenemos:

$$x^2 = a^2 - \frac{a^2}{b^2}y^2,$$

y de (3.4):

$$y^2 = \frac{x^2 b^4 \tan^2\phi}{a^4},$$

entonces:

$$x^2 = a^2 - \frac{x^2 b^2 \tan^2\phi}{a^2}.$$

Al despejar x^2 obtenemos:

$$x^2 = \frac{a^2}{1 + \frac{b^2}{a^2}\tan^2\phi},$$

o, teniendo en cuenta la ecuación (3.6):

$$x^2 = \frac{a^2\cos^2\phi}{1 - e^2\,\mathrm{sen}^2\,\phi}. \tag{3.8}$$

Un procedimiento similar permite encontrar:

$$y^2 = \frac{a^2(1-e^2)^2 \operatorname{sen}^2 \phi}{1 - e^2 \operatorname{sen}^2 \phi}. \tag{3.9}$$

La distancia radial ρ está relacionada con x y y mediante:

$$\rho^2 = x^2 + y^2,$$

que al tener en cuenta (3.8) y (3.9) nos da la relación buscada:

$$\rho = a\sqrt{\frac{1 - e^2(2-e^2) \operatorname{sen}^2 \phi}{1 - e^2 \operatorname{sen}^2 \phi}}, \tag{3.10}$$

la cual representa la distancia desde el centro del planeta hasta la superficie del elipsoide. La distancia geocéntrica para un observador ubicado a una altura h con respecto al nivel del mar se halla, en muy buena aproximación, sumando h al valor de ρ con las unidades pertinentes.

Ejemplo 1

Calcular la latitud geocéntrica ϕ' y la distancia geocéntrica de un punto cerca de la población de Ciénaga (Magdalena) con las siguientes coordenadas geodésicas: $\phi = 11^o 1' 34''$, $\lambda = 74^o 15' 35''$ y h =122 metros sobre el nivel medio del mar.

Solución

Tomaremos como elipsoide de referencia el recomendado por la UAI en 1979: $a = 6\,378\,140$ m y $f = 1/298.257 = 0.0033528$. De la ecuación (3.5) obtenemos:

$$\tan \phi' = (1-f)^2 \tan \phi = (1 - 0.0033528)^2 \tan(11^o 1' 34'') = 0.1935489.$$

Entonces:

$$\phi' = \tan^{-1}(0.1935489) = 10^o 57' 15''.$$

Procedemos ahora a calcular la excentricidad e del elipsoide. Utilizando la fórmula (3.7) tenemos:

$$e = \sqrt{0.0033528 \times (2 - 0.0033528)} = 0.0818191.$$

Encontramos para ρ de acuerdo con (3.10):

$$\rho = a \times \sqrt{\frac{1 - (0.0818191)^2 \times (2 - 0.0818191^2) \times \operatorname{sen}^2(11^o 1' 34'')}{1 - 0.0818191^2 \times \operatorname{sen}^2(11^o 1' 34'')}},$$

$$\rho = 0.9998783 \times a = 6\,377\,364 \text{ m}.$$

Sumando el valor de la altura h obtenemos por fin:

$$\rho = 6377364 + 122 = 6\,377\,486 \text{ m}.$$

Ejemplo 2

Calcular la latitud geodésica ϕ y la altura h a la que se encuentra un determinado observador con los siguientes valores: $\phi' = 6^o54'43''$, $\rho = 0.9999765$.

Solución

Como en el ejemplo anterior, tomaremos como elipsoide de referencia el recomendado por la UAI en 1979: $a = 6\,378\,140$ m y $f = 1/298.257 = 0.0033528$, $e = 0.0818191$. De la ecuación (3.5):

$$\tan\phi = \frac{\tan\phi'}{(1-f)^2} = \frac{\tan(6^o54'43'')}{(1-0.0033528)^2} = 0.1220418.$$

Entonces:

$$\phi = \tan^{-1}(0.1220418) = 6^o57'29''.$$

Encontramos para ρ (la distancia a la superficie del elipsoide) de acuerdo con (3.10):

$$\rho = a \times \sqrt{\frac{1-(0.0818191)^2 \times (2-0.0818191^2) \times \text{sen}^2\,(6^o57'29'')}{1-0.0818191^2 \times \text{sen}^2\,(6^o57'29'')}},$$

$$\rho = 0.9999512 \times a.$$

Por lo tanto, la altura h sobre la superficie del mar, en unidades del radio terrestre a, es:

$$h = 0.9999765 - 0.9999512 = 0.0000253,$$

lo que en unidades de metros es $h = 0.0000741 \times 6\,378\,140 = 161$ m.

NOTA: En la gran mayoría de los libros de astronomía se acostumbra a presentar la relación entre la latitud geocéntrica ϕ' y la geodésica ϕ y la distancia radial ρ en función de ϕ por medio de una serie trigonométrica. La deducción de tales fórmulas no es complicada pero sí algo elaborada. Damos las expresiones (a la centésima del segundo de arco) sólo a manera de referencia:

$$\phi' = \phi - 11'32.74''\,\text{sen}\,2\phi + 1.16''\,\text{sen}\,4\phi, \tag{3.11}$$

$$\rho = a(0.99832707 + 0.00167644\cos 2\phi - 0.00000352\cos 4\phi). \tag{3.12}$$

LECTURAS Y SITIOS EN INTERNET RECOMENDADOS

- Seidelmann, P.K. (1992), *Explanatory Supplement to the Astronomical Almanac*, University Science Books, Mill Valley.

  La obra indispensable que expone sin entrar en la rigurosidad las modernas teorías y métodos de la astronomía de posición actual. Aunque se supone que es un suplemento del Astronomical Almanac, es de todas formas un excelente libro para comprender con extensión muchos tópicos de la astronomía moderna. El capítulo 4 cotiene una completa descripción acerca de las coordenadas terrestres.

- Long, S. A. (1974) *Derivation of Transformation Formulas Between Geocentric and Geodetic Coordinates for Nonzero Altitudes*, NASA TN-7522, Washington.

  Este artículo técnico contiene desarrollos algebráicos que permiten encontrar fórmulas útiles entre la latitud geocéntrica y geodésica

- Smart, W. M. (1965) *Text-Book on Spherical Astronomy*, Cambridge University Press, Cambridge.

  En su capítulo IX posee una excelente descripción de la relación matemática entre ϕ' *y* ϕ.

- *The Astronomical Almanac*, U.S. Goverment Printing Office, Washington.

  En sus reciente versiones describe algunos geoides de referencia así como fórmulas para el cálculo de reducciones.

- `http://164.214.2.59/GandG/geolay/toc.htm`

  En esta hoja electrónica se encuentran conceptos básicos de geodesia.

- `http://www.globalserve.net/~nac/city.html`

  Aquí se encuentran las latitudes y longitudes de más de dos mil ciudades en el mundo.

- `http://maia.usno.navy.mil/`

  Información actualizada con emisión de reportes periódicos sobre el movimiento del polo así como de la introducción de segundos bisiestos.