2. الدّوال التناظرية

الكفاءات المستهدفة

- استعمال التمثيل البياني لدالة لتخمين النهايات عند $-\infty$ وعند $+\infty$.
- تحديد نهايتي دالة تناظرية عند $-\infty$ وعند $+\infty$.
- تعيين المستقيمات المقاربة وتفسيرها بيانيا.

تصميم الدرس

تعريف

I. نهايات الدوال التناظرية

II. دراسة دالة تناظرية

III. ملخص

IV. توظيف المعارف (تمارين + حلول وإرشادات)

V. تقويم ذاتي (اختيار من متعدد + صحيح أم خاطئ)

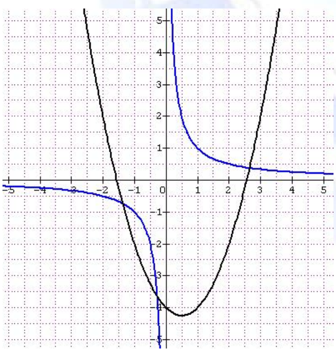
VI. استعد للبكالوريا (مسائل محلولة مع سلّم التنقيط)

تعريف:

عمر الخيام (1040–1131م)

حكيم وفلكي وعالم رياضيات وشاعر هو غياث الدين أبو الفتح عمر بن إبراهيم الخيام، ولد في نيسابور عاصمة خراسان، بدأ تعليمه الأولي في إحدى مدارس نيسابور لتعلم القراءة والكتابة، ولما قوي واشتد ساعده رحل إلى سمرقند لدراسة الرياضيات، أنجز نظاماً للأرقام أكثر اتساعاً من نظام الإغريق، وألّف كتاباً بالعربية (الجبر والمقابلة) ترجم إلى الفرنسية عام (1851). كما وجد طريقة لاستخراج جذور الأرقام وعالج لأول مرة مسائل التكعيب في الجبر، ولما برزت موهبته في علم الفلك إلى جانب شهرته في الرياضيات، استدعاه السلطان السلجوقي لتعديل التقويم، وكلفه ببناء برج فلكي في أصفهان، وكانت إجادته للغة العربية والكتابة بها حافزاً له لقراءة شعر المعري، فكان له الأثر في شعر الرباعيات لغة وأسلوباً ومضموناً فلقب بالحكيم في الثقافتين الفارسية والعربية ولقّبه الأوربيون بملك الحكمة.

في كتاب الجبر والمقابلة قدم طريقة هندسية لحل بعض المعادلات باستعمال نقط تقاطع منحنيات مألوفة.



فمثلا لحل المعادلة من الدرجة الثالثة: $x^3 - x^2 - 4x - 1 = 0$ استعمل عمر الخيام تقاطع القطع الزائد ذي المعادلة $y = \frac{1}{x}$ والقطع المكافئ ذي المعادلة $y = x^2 - x - 4$.

يقول عمر الخيام في ما نُسِب إليه من شعر:

أفنيتُ عمري في اكتناه القضاء

وكشف ما يحجبه في الخفاء

فلم أجد أسراره وانقضى عمري وأحسست دبيب الفناء

I. نهايات الدوال التناظرية:

نشاط

f دالة معرفة على $\left]-\infty;-\frac{d}{c}\right[\cup\left]-\frac{d}{c};+\infty\right[$ بِ: $f(x)=\frac{ax+b}{cx+d}$

مع $c\neq 0$، و a ، b ، c ، d أعداد حقيقية تحقق $ad-bc\neq 0$، وليكن (C_f) تمثيلها البياني في مستوي منسوب إلى معلم $(O;\vec{i},\vec{j})$.

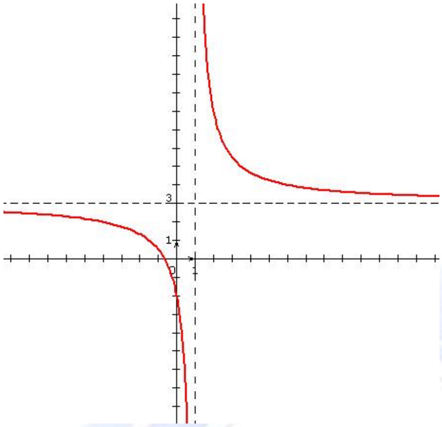
الهدف من هذا النشاط هو استعمال مجدول و التمثيل البياني (C_f) لتخمين النهايات عند $-\infty$ وعند $+\infty$، و لأجل ذلك:

1. نفرض: $a=3$ و $b=2$ و $c=1$ و $d=-1$ أي: $f(x)=\frac{3x+2}{x-1}$

أ) باستعمال مجدول وراسم منحنيات أنجز ورقة الحساب والتمثيل البياني (C_f) الآتيين:

	A	B	C	D
1	*a*	*b*	*c*	*d*
2	*3*	*2*	*1*	*-1*
3	*x*	*f(x)*	*x*	*f(x)*
4	10	3,555555556	-10	2,545454545
5	100	3,050505051	-100	2,95049505
6	1000	3,005005005	-1000	2,995004995
7	10000	3,00050005	-10000	2,99950005
8	100000	3,000050001	-100000	2,99995
9	1000000	3,000005	-1000000	2,999995
10	10000000	3,0000005	-10000000	2,9999995
11	100000000	3,00000005	-100000000	2,99999995
12	1000000000	3,000000005	-1000000000	2,999999995
13	10000000000	3,000000001	-10000000000	3
14	1E+11	3	-1E+11	3

الكتابة $aE+11$ تعني $a\times 10^{11}$ وهي كتابة علمية.



(C_f) التمثيل البياني للدالة f حيث $f(x)=\dfrac{3x+2}{x-1}$

- نلاحظ، من خلال ورقة الحساب (في العمودين A و B) وكذلك من التمثيل البياني (C_f)، أن قيمة $f(x)$ تقترب من العدد 3 أكثر فأكثر كلّما كبرت قيمة x .

نقول في هذه الحالة أن نهاية الدالة f هي 3 لما يؤول x إلى $+\infty$

ونكتب: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=3$

- كما نلاحظ، من خلال ورقة الحساب (في العمودين C و D) وكذلك من التمثيل البياني (C_f)، أن قيمة $f(x)$ تقترب من العدد 3 أكثر فأكثر كلّما كبرت قيمة $(-x)$.

نقول في هذه الحالة أن نهاية الدالة f هي 3 لما يؤول x إلى $-\infty$

ونكتب: $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=3$

- نلاحظ أنه، لما يؤول x إلى $+\infty$ (وكذا لما يؤول x إلى $-\infty$)، المنحني (C_f) يقترب شيئا فشيئا من المستقيم ذي المعادلة $y=3$.

نقول في هذه الحالة أن المستقيم ذو المعادلة $y=3$ هو مستقيم مقارب للمنحني (C_f) لما يؤول x إلى $+\infty$ (وكذا لما يؤول x إلى $-\infty$).

2. نفرض أن $a=-1$ و $b=2$ و $c=2$ و $d=3$ أي: $f(x)=\dfrac{-x+2}{2x+3}$.

بتغيير قيم الأعداد a و b و c و d بالقيم المعطاة في هذا الجزء، في ورقة الحساب المنجزة سابقا، ورسم التمثيل البياني (C_f) باستعمال راسم منحنيات. ماذا تلاحظ؟ ماذا تستنتج؟

3. أنجز نفس العمل السابق بتغيير قيم الأعداد a و b و c و d مع $ad-bc\neq 0$.

- خمِّن في الحالة العامة: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$.
- حدد في الحالة العامة معادلة المستقيم المقارب للمنحني (C_f) لما يؤول x إلى $+\infty$ (وكذا لما يؤول x إلى $-\infty$).

حل

1. أ) يمكن إنجاز ورقة الحساب المعطاة باستعمال مجدول إكسل بإتباع الخطوات الآتية:

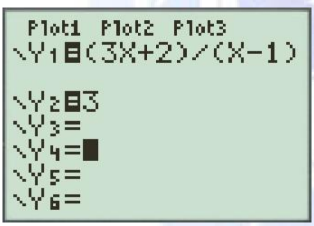
- بعد كتابة التسميات a ، b ، c ، d ، x ، $f(x)$ في الأماكن المناسبة (أنظر الجدول)، احجز في الخلايا A2 و B2 و C2 و D2 الأعداد 3 و 2 و 1 و -1 على الترتيب.
- ثمّ احجز في الخلية A4 القيمة 10 (أي $x=10$) وفي الخلية B4 الصيغة =($A$2*A4+$B$2)/($C$2*A4+$D$2) ويعني أنّك قد أدخلت القيمة $f(x)$ من أجل x يساوي محتوى الخلية A4 أي 10.

تَذْكر أنّ الرمز \$ في \$A\$2 هو لتثبيت محتوى الخلية A2 .

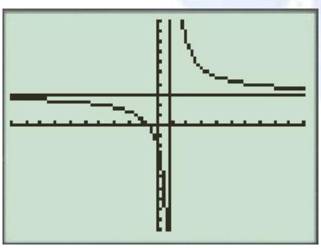
- ثمّ احجز في الخلية A5 الصيغة =10*A4، وعمّم بالسحب محتوى الخلية B4 إلى الخلية B5 .
- انسخ محتوى الخلايا الأربع A4:B5 وألصقها في الخلايا C4:D5 .
- غيّر محتوى الخلية C4 بالعدد -10، يحسب المجدول تلقائيا محتوى الخلايا و C5 و D4 و D5 ويغيّر محتوياتها بالقيم الجديدة.
- حدّد الخلايا A5 و B5 و C4 و D5 دفعة واحدة، وعمّم محتواها بالسحب إلى الأسفل يمكنك التوقف عند السطر 14، والتأكد من الملاحظات المذكورة في النشاط.

- فيما يخص التمثيل البياني (C_f) سنستعمل آلة حاسبة بيانية (مثل TI-83 Plus) بإتباع الخطوات الآتية:

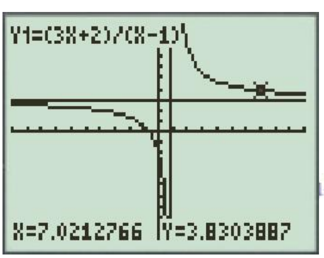
- بعد تشغيل الآلة الحاسبة انقر على اللمسة $\boxed{\text{y=}}$ تظهر لك الشاشة المقابلة.



احجز العبارة $(3x+2)/(x-1)$ أمام $\text{y}_1 =$ والعدد 3 أمام $\text{y}_2 =$، ثم انقر على اللمسة $\boxed{\text{GRAPH}}$ تُظهر الشاشة الموالية المنحنى البياني للدالة f حيث $f(x)=\dfrac{3x+2}{x-1}$

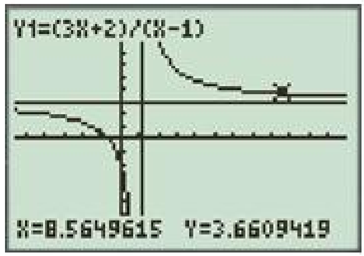


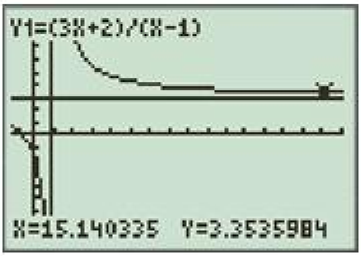
- انقر على اللمسة $\boxed{\text{TRACE}}$ تظهر الشاشة المقابلة والتي يظهر أعلاها عبارة الدالة



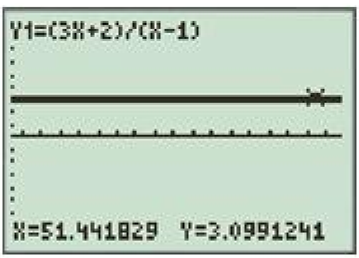
وأسفلها قيمتي x و y الموافقتين لوضع المؤشر على المنحني (C_f).

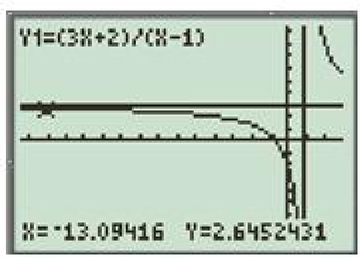
لاحظ أنّه كلّما ضغطت على اللمسة ⇨ أو اللمسة ⇦ يتحرك المؤشر على المنحني (C_f)، وكلّما كبرت قيمة x (أو قيمة $-x$) اقتربت قيمة y من 3 أكثر فأكثر.

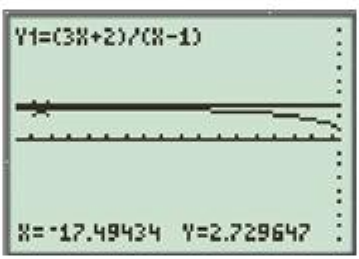




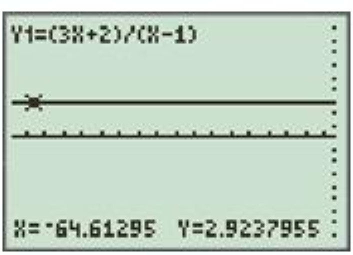
يظهر المنحني على الشاشة جزئيا، في الشكل المقابل يظهر جزء المنحني منطبقا على المستقيم المقارب.







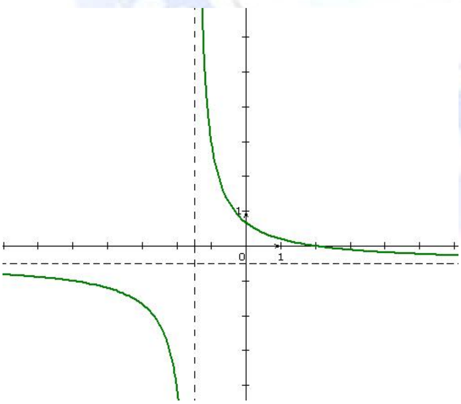
النقط التي تظهر على يمين الشاشة أو يسارها هي آثار تدريج محور التراتيب، لاحظ انطباق المنحني والمستقيم المقارب والتدريجة 3.



2. عند حجز القيم $a=-1$ و $b=2$ و $c=2$ و $d=3$ في ورقة الحساب السابقة ينجز المجدول الحسابات تلقائيا، ونحصل على:

	A	B	C	D
1	*a*	*b*	*c*	*d*
2	*-1*	*2*	*2*	*3*
3	*x*	*f(x)*	*x*	*f(x)*
4	10	-0,347826087	-10	-0,705882353
5	100	-0,482758621	-100	-0,517766497
6	1000	-0,498252621	-1000	-0,501752629
7	10000	-0,499825026	-10000	-0,500175026
8	100000	-0,4999825	-100000	-0,5000175
9	1000000	-0,49999825	-1000000	-0,50000175
10	10000000	-0,499999825	-10000000	-0,500000175
11	100000000	-0,499999983	-100000000	-0,500000018
12	1000000000	-0,499999998	-1000000000	-0,500000002
13	10000000000	-0,5	-10000000000	-0,5
14	1E+11	-0,5	-1E+11	-0,5

وباستعمال راسم منحنيات نحصل على التمثيل البياني (C_f) المقابل:



نلاحظ أن قيمة $f(x)$ تقترب من العدد 0,5- أكثر فأكثر كلّما كبرت قيمة x، وكذلك مع قيمة $(-x)$.

نستنتج أن نهاية الدالة f هي 0,5- لما يؤول x إلى $+\infty$ ونكتب :

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = -0{,}5$$

وكذلك نهاية الدالة f هي 0,5- لما يؤول x إلى $-\infty$ ونكتب :

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -0{,}5$$

• كما نلاحظ أنه، لما يؤول x إلى $+\infty$ (وكذا لما يؤول x إلى $-\infty$)، المنحني (C_f) يقترب شيئا فشيئا من المستقيم ذي المعادلة $y = -0{,}5$.

نستنتج أن المستقيم ذو المعادلة $y = 2$ هو مستقيم مقارب للمنحني (C_f) لما يؤول x إلى $+\infty$ (وكذا لما يؤول x إلى $-\infty$).

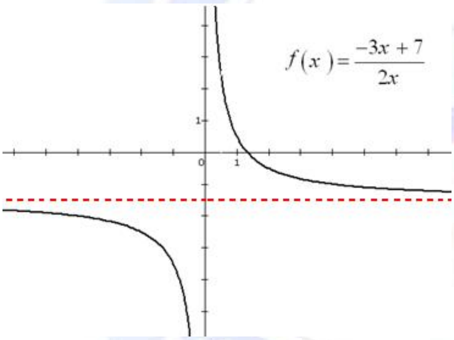
3. يمكن البدء بأعداد تحقق $ad - bc = 0$ ، وملاحظة أن الدالة f في هذه الحالة ثابتة و $f(x) = \dfrac{a}{c}$ مثلا:

	A	B	C	D
1	*a*	*b*	*c*	*d*
2	*6*	*6*	*3*	*3*
3	*x*	*f(x)*	*x*	*f(x)*
4	10	2	-10	2
5	100	2	-100	2
6	1000	2	-1000	2
7	10000	2	-10000	2
8	100000	2	-100000	2
9	1000000	2	-1000000	2
10	10000000	2	-10000000	2
11	100000000	2	-100000000	2
12	1000000000	2	-1000000000	2
13	10000000000	2	-10000000000	2
14	1E+11	2	-1E+11	2

• وبتغيير قيم الأعداد a و b و c و d مع $ad-bc\neq 0$، والملاحظة يمكن وضع التخمينين الآتيين في الحالة العامة: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\frac{a}{c}$ وكذلك $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\frac{a}{c}$.

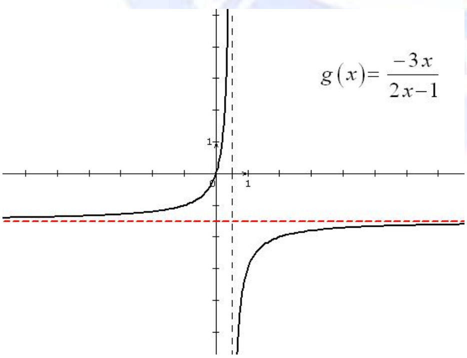
• كما أنّ معادلة المستقيم المقارب للمنحني (C_f) لما يؤول x إلى $+\infty$ (وكذا لما يؤول x إلى $-\infty$) هي $y=\frac{a}{c}$.

مثالان



أ) لاحظ من التمثيل البياني كيف أنّ $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-\frac{3}{2}$ وكذلك $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\frac{3}{2}$.

المستقيم ذو المعادلة $y=-\frac{3}{2}$ هو مقارب لمنحني الدالة f .



ب) لاحظ من التمثيل البياني كيف أنّ $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=-\frac{3}{2}$ وكذلك $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)=-\frac{3}{2}$.

المستقيم ذو المعادلة $y=-\frac{3}{2}$ هو مقارب لمنحني الدالة g

نهايات الدوال التناظرية

f دالة معرفة على $\left]-\infty;-\frac{d}{c}\right[\cup\left]-\frac{d}{c};+\infty\right[$ بـِ : $f(x)=\frac{ax+b}{cx+d}$ مع $c\neq 0$ و $ad-bc\neq 0$، وليكن (C_f) تمثيلها البياني في مستوي منسوب إلى معلم $(O;\vec{i},\vec{j})$.

ملاحظة

تسمى الدالة f دالة تناظرية.

1. المستقيم المقارب الموازي لمحور الفواصل

نتيجة1

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\frac{a}{c} \quad ، \quad \lim_{x\to+\infty} f(x)=\frac{a}{c}$$

يمكن ملاحظة أنّ $\lim_{x\to\pm\infty} f(x)=\lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{a\cancel{x}}{c\cancel{x}}\right)=\frac{a}{c}$

تعريف

f دالة و (C_f) تمثيلها البياني في مستوي منسوب إلى معلم $(O;\vec{i},\vec{j})$.

القول عن المستقيم ذي المعادلة $y=y_0$، الموازي لمحور الفواصل، أنّه مستقيم مقارب للمنحني (C_f) عند $+\infty$ (عند $-\infty$) يعني أن $\lim_{x\to+\infty} f(x)=y_0$ ($\lim_{x\to-\infty} f(x)=y_0$).

نستنتج من التعريف مباشرة

نتيجة2

المنحني (C_f) للدالة التناظرية f المعرّفة أعلاه يقبل، لما يؤول x إلى $+\infty$ ولما يؤول x إلى $-\infty$، مستقيما مقاربا موازيا لمحور الفواصل معادلته $y=\frac{a}{c}$.

مثال

لتكن الدالة f المعرفة على $]-\infty;-3[\cup]-3;+\infty[$ بِـ: $f(x)=\frac{7x-1}{2x+6}$.

إنّ: $\lim_{x\to-\infty} f(x)=\frac{7}{2}$ و $\lim_{x\to+\infty} f(x)=\frac{7}{2}$.

نستنتج أن المستقيم ذي المعادلة $y=\frac{7}{2}$، الموازي لمحور الفواصل، مستقيم مقارب للمنحني الممثل للدالة f عند $-\infty$ و $+\infty$.

تطبيق

نعتبر الدالة f المعرفة على $[0;+\infty[$ بِـ: $f(x)=\frac{-2x}{x+2}$

و ليكن (C_f) تمثيلها البياني.

أ) أُدرس نهاية الدالة f عند $+\infty$. أعط تفسيرا بيانيا للنتيجة.

ب) أُدرس اتجاه تغير الدالة f ثم شكِّل جدول تغيراتها.

جـ) ارسم المستقيم (Δ) ذي المعادلة $y=-2$ والمنحني (C_f).

حل

أ) لدينا $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(\dfrac{-2\cancel{x}}{\cancel{x}}\right)=\dfrac{-2}{1}=-2$

أو مباشرة $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\dfrac{-2}{1}=-2$.

التفسير البياني: المستقيم ذو المعادلة $y=-2$ هو مستقيم مقارب للمنحني (C_f) عند $+\infty$.

ب) من أجل كل x من $[0;+\infty[$،

$$f'(x)=\frac{-2(x+2)-1(-2x)}{(x+2)^2}=\frac{-2x-4+2x}{(x+2)^2}=\frac{-4}{(x+2)^2}\ .$$

من أجل كل x من $[0;+\infty[$، إنّ $(x+2)^2>0$ ومنه $\dfrac{-4}{(x+2)^2}<0$

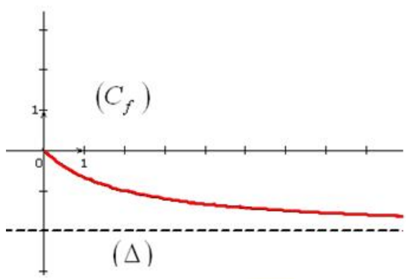
وبالتالي فإنّ $f'(x)<0$ ، أي أنّ الدالة f متناقصة تماما على $[0;+\infty[$.

لدينا كذلك $f(0)=0$.

جدول تغيرات الدالة f

x	0 $\qquad\qquad\qquad$ $+\infty$
$f'(x)$	$-$
$f(x)$	0 $\searrow$ -1

جـ) رسم المستقيم (Δ) والمنحني (C_f).



2. المستقيم المقارب الموازي لمحور التراتيب

نشاط

f دالة معرفة على $]-\infty;a[\cup]a;+\infty[$ بـِ: $f(x)=\frac{1}{x-a}$، وليكن (C_f) تمثيلها البياني في مستوي منسوب إلى معلم $(O;\vec{i},\vec{j})$.

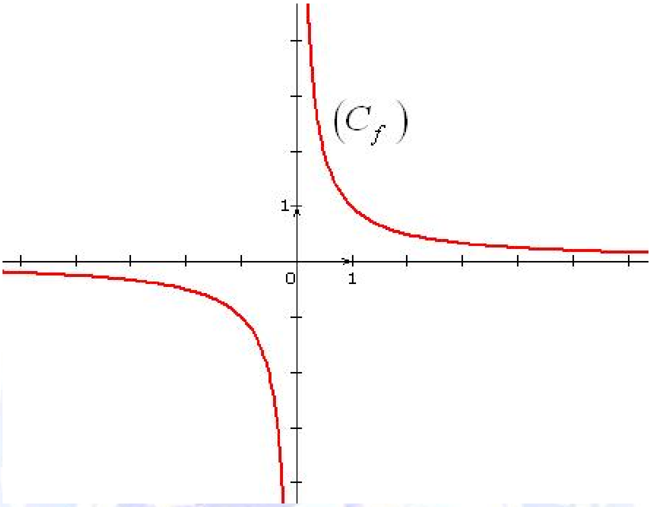
الهدف من هذا النشاط هو استعمال مجدول والتمثيل البياني (C_f) لتخمين نهايتي الدالة f عند a بقيم أكبر، وكذا عند a بقيم أصغر، ولأجل ذلك:

1. نفرض $a=0$ أي $f(x)=\frac{1}{x}$.

باستعمال مجدول وراسم منحنيات أنجز ورقة الحساب والتمثيل البياني (C_f) أدناه:

	A	B	C	D
1	*x*	*f(x)*	*x*	*f(x)*
2	0,1	10	-0,1	-10
3	0,01	100	-0,01	-100
4	0,001	1000	-0,001	-1000
5	0,0001	10000	-0,0001	-10000
6	0,00001	100000	-0,00001	-100000
7	0,000001	1000000	-0,000001	-1000000
8	0,0000001	10000000	-0,0000001	-10000000
9	0,00000001	100000000	-0,00000001	-100000000
10	0,000000001	1000000000	-0,000000001	-1000000000
11	1E-10	10000000000	-1E-10	-10000000000
12	1E-11	1E+11	-1E-11	-1E+11

(C_f) التمثيل البياني للدالة f حيث $f(x)=\dfrac{1}{x}$



- نلاحظ، من خلال ورقة الحساب (في العمودين A و B) وكذلك من التمثيل البياني (C_f)، أن $f(x)$ تأخذ قيما كبيرة بالقدر الذي نريد بشرط أن يكون x موجبا تماما وقريبا بالقدر الكافي من العدد 0.

نقول في هذه الحالة أن نهاية الدالة f هي $+\infty$ لما يؤول x إلى 0 بقيم أكبر ونكتب: $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} 0} f(x)=+\infty$

- كما نلاحظ، من خلال ورقة الحساب (في العمودين C و D) وكذلك من التمثيل البياني (C_f)، أن $\left[-f(x)\right]$ تأخذ قيما كبيرة بالقدر الذي نريد بشرط أن يكون x سالبا تماما وقريبا بالقدر الكافي من العدد 0.

نقول في هذه الحالة أن نهاية الدالة f هي $-\infty$ لما يؤول x إلى 0 بقيم أصغر ونكتب : $\lim\limits_{x \xrightarrow{<} 0} f(x)=-\infty$

• نلاحظ أنه، لما يؤول x إلى 0، المنحني (C_f) يقترب تدريجيا من المستقيم ذي المعادلة $x=0$ (محور التراتيب).

نقول في هذه الحالة أن المستقيم ذي المعادلة $x=0$ مستقيم مقارب للمنحني (C_f).

2. نستبدل العدد الحقيقي a بقيم مختلفة في العبارة $f(x)=\dfrac{1}{x-a}$.

باستعمال مجدول أنجز ورقة حساب مماثلة لتلك المنجزة أعلاه، (وذلك بأخذ قيم للعدد x قريبة من العدد a)، وكذا التمثيل البياني (C_f) باستعمال راسم منحنيات.

• خمِّن في الحالة العامة: $\lim\limits_{x \xrightarrow{<} a} f(x)$ و $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} a} f(x)$.

• حدد في الحالة العامة معادلة المستقيم المقارب للمنحني (C_f).

3. نعتبر الدالة g المعرفة على $]-\infty;a[\cup]a;+\infty[$ بِـ $g(x)=\dfrac{b}{x-a}$ حيث b عدد حقيقي غير معدوم.

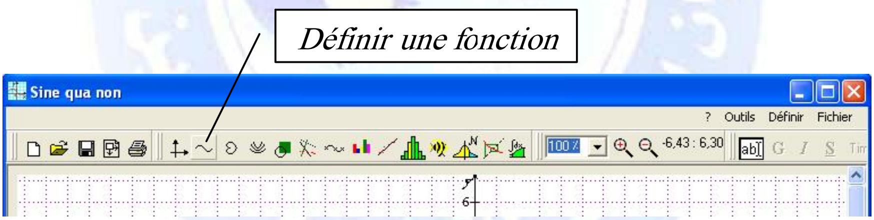
خمِّن، حسب إشارة العدد الحقيقي b، $\lim\limits_{x \xrightarrow{<} a} g(x)$ و $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} a} g(x)$.

حل

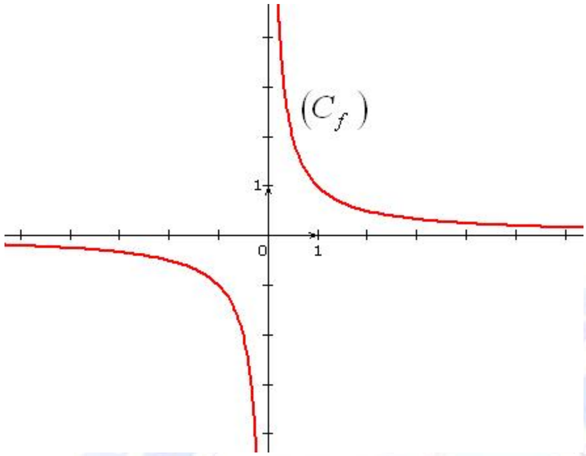
1. يمكن إنجاز ورقة الحساب المعطاة باستعمال مجدول إكسل بإتباع الخطوات الآتية :

• بعد كتابة التسميات x ، $f(x)$ في الأماكن المناسبة (أنظر الجدول)، احجز في الخلايا A2 و B2 و C2 و D2 العدد 0,1 والصيغة =1/(A2) والعدد 0,1− والصيغة =1/(C2) على الترتيب.

- ثمّ احجز في الخلية A3 الصيغة =0,1*A2 و في الخلية C3 الصيغة =0,1*C2 .
- ثمّ عمّم بالسحب محتوى الخلية B2 إلى الخلية B3، ومحتوى الخلية D2 إلى الخلية D3 .
- حدّد الخلايا A3 و B3 و C3 و D3 دفعة واحدة، وعمّم محتواها بالسحب إلى الأسفل يمكن التوقف عند السطر 14، وتأكد من الملاحظات المذكورة في النشاط أعلاه.
- فيما يخص التمثيل البياني (C_f) يمكن استعمال راسم منحنيات مثل (sine qua non) بعد تنفيذ البرنامج انقر على الأيقونة الموالية لحجز الدالة المراد رسم تمثيلها البياني.



وأدخل في النافذة الموالية الدالة $f(x) = \frac{1}{x}$ ثم أكد باللمسة $\boxed{\text{OK}}$.



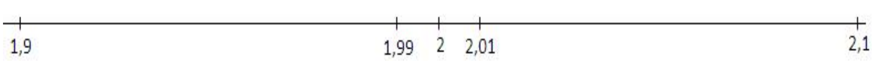
تحصل على التمثيل البياني (C_f) كما في الشكل المقابل.

ملاحظات

- يمكن تخصيص مظهر الشكل باستعمال نوافذ البرنامج المتعددة (جرّب لا تتردد).
- يمكن رسم التمثيل البياني باستعمال آلة حاسبة بيانية (انظر النشاط السابق).

2. نأخذ $a=2$، ولندرس الدالة f معرّفة بِـ $f(x)=\dfrac{1}{x-2}$.

ننجز ورقة حساب بعض قيم $f(x)$ بأخذ قيم للعدد x قريبة من العدد 2 ولأجل ذلك سنأخذ قيم x في المجال $[1,9\,;\,2,1]$ والاقتراب شيئا فشيئا من العدد 2 من اليمين، ثمّ من اليسار.



للحصول على ورقة الحساب الآتية يمكن إتباع الخطوات أدناه:

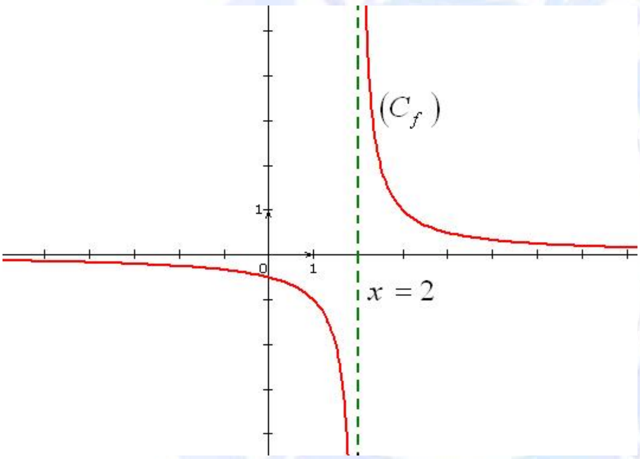
	A	B	C	D	E
1		*x*	*f(x)*	*x*	*f(x)*
2	0,09	2,1	10	1,9	-10
3	0,009	2,01	100	1,99	-100
4	0,0009	2,001	1000	1,999	-1000
5	0,00009	2,0001	10000	1,9999	-10000
6	0,000009	2,00001	100000	1,99999	-100000
7	0,0000009	2,000001	999999,9999	1,999999	-999999,9996
8	0,00000009	2,0000001	9999999,972	1,9999999	-9999999,972
9	0,000000009	2,00000001	99999996,17	1,99999999	-99999996,17
10	9E-10	2,000000001	999999473,2	1,999999999	-999999695,2
11	9E-11	2	9999954764	2	-9999976968
12	9E-12	2	99995551032	2	-99997771330
13	9E-13	2	9,99467E+11	2	-9,99689E+11

- بعد كتابة التسميات x ، $f(x)$ في الأماكن المناسبة (أنظر الجدول)، احجز في الخلية A2 العدد $0,09$ وفي الخلية A3 الصيغة =0,1*A2 ثمّ عمّم بالسحب محتوى الخلية A3 إلى السطر 13، نحصل على متتالية أعداد نستعملها للاقتراب من العدد 2 .
- احجز في الخلايا B2 و C2 و D2 و E2 العدد 2,1 والصيغة =1/(B2-2) والعدد 1,9 والصيغة =1/(D2-2) على الترتيب.
- ثمّ احجز في الخلية A3 الصيغة =B2-A2 و في الخلية C3 الصيغة =D2+A2 .
- ثمّ عمّم بالسحب محتوى الخلية C2 إلى الخلية C3، ومحتوى الخلية E2 إلى الخلية E3 .

- حدّد الخلايا B3 و C3 و D3 و E3 دفعة واحدة، وعمّم محتواها بالسحب إلى الأسفل (يمكن التوقف عند السطر 13).

ملاحظة

العدد 2 الذي يظهر بدء من السطر 11 من كل من العمودين B و D هو قيمة مقربة لمحتوى الخلية بينما ذاكرة الحاسوب تعمل بقيمة قريبة جدا من العدد 2 ولكنها تختلف عنه، ويتجلى ذلك في الناتج.



- التمثيل البياني (C_f) الدالة f المعرّفة بالعبارةِ $f(x) = \frac{1}{x-2}$.

- نلاحظ، من خلال ورقة الحساب (في العمودين B و C) وكذلك من التمثيل البياني (C_f)، أن $f(x)$ تأخذ قيما كبيرة بالقدر الذي نريد بشرط أن يكون x أكبر تماما من العدد 2 وقريبا منه بالقدر الكافي.

نقول في هذه الحالة أن نهاية الدالة f هي $+\infty$ لما يؤول x إلى 2 بقيم أكبر ونكتب: $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} 2} f(x) = +\infty$

• كما نلاحظ، من خلال ورقة الحساب (في العمودين D و E) وكذلك من التمثيل البياني (C_f)، أن $\left[-f\left(x\right)\right]$ تأخذ قيما كبيرة بالقدر الذي نريد بشرط أن يكون x أصغر تماما من العدد 2 وقريبا منه بالقدر الكافي.

نقول في هذه الحالة أن نهاية الدالة f هي $-\infty$ لما يؤول x إلى 2 بقيم أصغر و نكتب : $\lim\limits_{x \xrightarrow{<} 2} f\left(x\right) = -\infty$

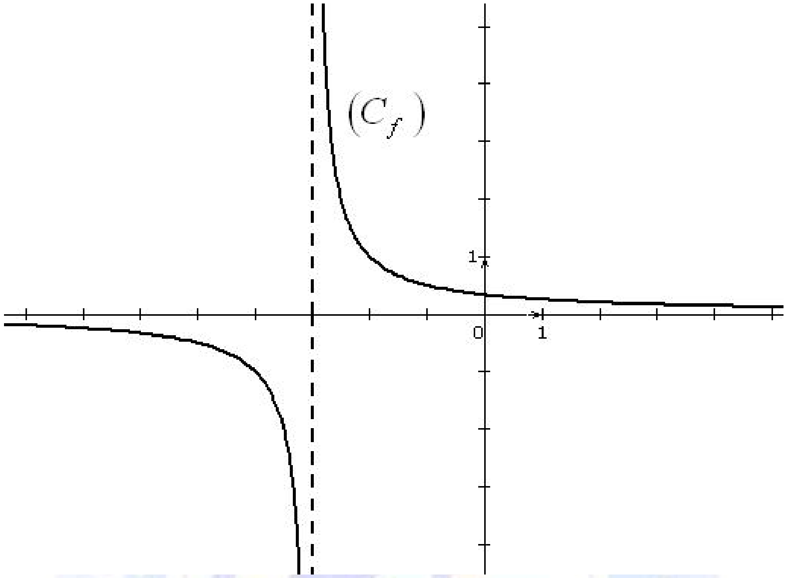
• نلاحظ أنه، لما يؤول x إلى 2، المنحني (C_f) يقترب تدريجيا من المستقيم ذي المعادلة $x = 2$ الموازي لمحور التراتيب.

نقول في هذه الحالة أن المستقيم ذي المعادلة $x = 2$ مستقيم مقارب للمنحني (C_f).

• بطريقة مماثلة لما سبق يمكن أخذ $a = -3$، ودراسة الدالة f المعرّفة بِ $f\left(x\right) = \dfrac{1}{x+3}$ ، حيث نجد ورقة الحساب الآتية:

	A	B	C	D	E
1		x	f(x)	x	f(x)
2		-3,1	-10	-2,9	10
3	0,09	-3,01	-100	-2,99	100
4	0,009	-3,001	-1000	-2,999	1000
5	0,0009	-3,0001	-10000	-2,9999	10000
6	0,00009	-3,00001	-100000	-2,99999	100000
7	0,000009	-3,000001	-999999,9999	-2,999999	999999,9999
8	0,0000009	-3,0000001	-9999999,972	-2,9999999	9999999,972
9	0,00000009	-3,00000001	-99999996,17	-2,99999999	99999996,17
10	0,000000009	-3,000000001	-999999473,2	-2,999999999	999999473,2
11	9E-10	-3	-9999954764	-3	9999954764
12	9E-11	-3	-99995551032	-3	99995551032
13	9E-12	-3	-9,99467E+11	-3	9,99467E+11

والتمثيل البياني (C_f) أدناه.



• بصفة عامة في حالة الدالة f حيث $f(x)=\frac{1}{x-a}$ ومنحنيها (C_f) فإنّ : $\lim\limits_{x \xrightarrow{<} a} f(x)=-\infty$ و $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} a} f(x)=+\infty$.

والمنحني (C_f) يقبل مستقيما مقاربا مواز لحامل محور التراتيب معادلته هي $x=a$.

3. بما أنّ الدالة g معرفة بِ $g(x)=\frac{b}{x-a}$ حيث b عدد حقيقي غير معدوم، نكتب $g(x)=b\times\frac{1}{x-a}$ أي على شكل جداء الدالة f حيث $f(x)=\frac{1}{x-a}$ والعدد الحقيقي b، ومنه يمكن وضع التخمين الآتي :

• لما b موجب فإنّ $\lim\limits_{x \xrightarrow{<} a} g(x)=-\infty$ و $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} a} g(x)=+\infty$.

• لما b سالب فإنّ $\lim\limits_{x \xrightarrow{<} a} g(x)=+\infty$ و $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} a} g(x)=-\infty$.

أمثلة

$$\lim_{x \xrightarrow{>} 3} \frac{5}{x-3} = +\infty \quad \text{و} \quad \lim_{x \xrightarrow{<} 3} \frac{5}{x-3} = -\infty$$

$$\lim_{x \xrightarrow{>} 3} \frac{-5}{x-3} = -\infty \quad \text{و} \quad \lim_{x \xrightarrow{<} 3} \frac{-5}{x-3} = +\infty$$

نتيجة1

$$\lim_{x \xrightarrow{<} 0} \frac{1}{x} = -\infty \quad \text{و} \quad \lim_{x \xrightarrow{>} 0} \frac{1}{x} = +\infty$$

$$\lim_{x \xrightarrow{<} a} \frac{1}{x-a} = -\infty \quad \text{و} \quad \lim_{x \xrightarrow{>} a} \frac{1}{x-a} = +\infty$$

تعريف

f دالة و (C_f) تمثيلها البياني في مستوي منسوب إلى معلم $(O;\vec{i},\vec{j})$
القول عن المستقيم ذي المعادلة $x = x_0$ والموازي لمحور التراتيب أنه مستقيم مقارب للمنحني (C_f) يعني أن $\lim_{x \xrightarrow{>} x_0} f(x) = +\infty$ أو $\lim_{x \xrightarrow{>} x_0} f(x) = -\infty$ أو $\lim_{x \xrightarrow{<} x_0} f(x) = +\infty$ أو $\lim_{x \xrightarrow{<} x_0} f(x) = -\infty$

إذا كانت f دالة معرّفة بـِ: $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$ مع $c \neq 0$ و $ad - bc \neq 0$، فإنّ نهاية الدالة f هي $+\infty$ أو $-\infty$ (تبعا لإشارة $ax+b$ وإشارة c) لما يؤول x إلى $-\frac{d}{c}$ بقيم كبرى (أو قيم صغرى).

نستنتج من التعريف السابق مباشرة

نتيجة2

المنحني (C_f) للدالة التناظرية f المعرّفة بِـ : $f(x)=\dfrac{ax+b}{cx+d}$ يقبل مستقيما مقاربا موازيا لمحور التراتيب معادلته $x=-\dfrac{d}{c}$.

مثال1

لتكن الدالة f المعرفة على $]-\infty;-5[\cup]-5;+\infty[$ بِـ : $f(x)=\dfrac{1}{x+5}$.

إنّ : $\lim\limits_{x\overset{>}{\longrightarrow}-5}\dfrac{1}{x+5}=+\infty$ و $\lim\limits_{x\overset{<}{\longrightarrow}-5}\dfrac{1}{x+5}=-\infty$.

نستنتج أن المستقيم ذي المعادلة $x=-5$ ، الموازي لمحور التراتيب، مستقيم مقارب للمنحني الممثل للدالة f في جوار 5- .

مثال2

لتكن الدالة f المعرفة على $]-\infty;-5[\cup]-5;+\infty[$ بِـ : $f(x)=\dfrac{3x-4}{x+5}$.

إنّ $f(x)=\dfrac{3x-4}{x+5}=(3x-4)\times\left(\dfrac{1}{x+5}\right)$ >

ولدينا $\lim\limits_{x\overset{>}{\longrightarrow}-5}\dfrac{1}{x+5}=+\infty$ و $\lim\limits_{x\overset{<}{\longrightarrow}-5}\dfrac{1}{x+5}=-\infty$ و $\lim\limits_{x\overset{<}{\longrightarrow}-5}(3x-4)=-19$

فإنّ $\lim\limits_{x\overset{>}{\longrightarrow}-5}\dfrac{3x-4}{x+5}=-\infty$ و $\lim\limits_{x\overset{<}{\longrightarrow}-5}\dfrac{3x-4}{x+5}=+\infty$.

نستنتج أن المستقيم ذي المعادلة $x=-5$ ، الموازي لمحور التراتيب، مستقيم مقارب للمنحني الممثل للدالة f في جوار 5- .

تطبيق

لتكن f دالة معرفة على $\left[-2;\frac{5}{2}\right[\cup\left]\frac{5}{2};6\right]$ بـِ $f(x)=\frac{-3}{2x-5}$

وليكن (C_f) منحنيها.

1. أُدرس نهاية الدالة f عند $\frac{5}{2}$، وماذا تستنتج بالنسبة إلى (C_f)؟
2. أُدرس اتجاه تغير الدالة f، ثمّ شكِّل جدول تغيراتها.
3. أرسم المستقيم ذي المعادلة $x=\frac{5}{2}$ والمنحني (C_f).

حل

1. من أجل كل x من $\left[-2;\frac{5}{2}\right[\cup\left]\frac{5}{2};6\right]$ نكتب $f(x)$ على الشكل

$$f(x)=-3\times\frac{1}{2x-5}$$

لدينا $\lim\limits_{x\xrightarrow{<}\frac{5}{2}}\frac{1}{2x-5}=-\infty$ و $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}\frac{5}{2}}\frac{1}{2x-5}=+\infty$

وبالضرب في العدد (-3) نحصل على

$\lim\limits_{x\xrightarrow{<}\frac{5}{2}}f(x)=+\infty$ و $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}\frac{5}{2}}f(x)=-\infty$.

نستنتج أن المستقيم ذي المعادلة $x=\frac{5}{2}$ مستقيم مقارب للمنحني (C_f).

2. من أجل كل x من $\left[-2;\frac{5}{2}\right[\cup\left]\frac{5}{2};6\right]$، لدينا $f'(x)=\frac{4}{(x-1)^2}$.

و $(x-1)^2>0$ ومنه $\frac{4}{(x-1)^2}>0$ أي $f'(x)>0$

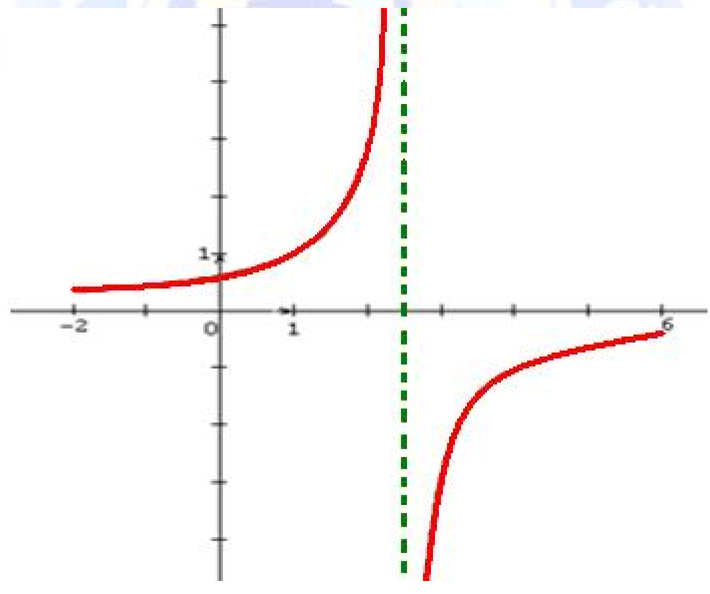
إذن الدالة f متزايدة تماما على كل من $\left]\frac{5}{2};6\right]$ و $\left[-2;\frac{5}{2}\right[$.

جدول تغيرات الدالة f

x	-2		$\frac{5}{2}$		6
$f'(x)$		$+$	$\Vert$	$+$	
$f(x)$	$\frac{1}{3}$	$\nearrow$	$+\infty$ $\Vert$ $-\infty$	$\nearrow$	$-\frac{3}{7}$

3. رسم المستقيم ذي المعادلة $x = \frac{5}{2}$ والمنحني (C_f).

لاحظ أنّ $f(0) = \frac{3}{5}$ ، كما يمكنك أخذ $0,3 \simeq \frac{1}{3}$ و $-0,4 \simeq -\frac{3}{7}$



II. دراسة دالة تناظرية:

دراسة مثال

نعتبر الدالة f المعرفة على $]-\infty;3[\cup]3;+\infty[$ بـِ $f(x)=\dfrac{-x+1}{x-3}$

وليكن (C_f) تمثيلها البياني في مستوي منسوب إلى معلم $(O;\vec{i},\vec{j})$.

لدراسة الدالة f ورسم تمثيلها البياني (C_f) في مستوي منسوب إلى معلم $(O;\vec{i},\vec{j})$ نتّبع الخطوات الآتية:

• النهايات

نحسب نهاية الدالة f لما يؤول x إلى كل طرف من أطراف مجال (أومجالي) مجموعة التعريف ومنه:

لما يؤول x إلى $+\infty$ أو $-\infty$ نجد:

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\dfrac{-1}{1}=-1$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\dfrac{-1}{1}=-1$.

لما يؤول x إلى 3:

نكتب $f(x)$ على الشكل $f(x)=(-x+1)\left(\dfrac{1}{x-3}\right)$، وندرس إشارة $(x-3)$ الذي ينعدم من أجل $x=3$ فنجد:

x	$-\infty$	3	$+\infty$
إشارة $x-3$	$-$	0	$+$

لدينا $\lim_{x\to 3}(-x+1)=-2$ و $\lim_{x\overset{<}{\longrightarrow}3}\left(\frac{1}{x-3}\right)=-\infty$

ومنه $\lim_{x\overset{<}{\longrightarrow}3}(-x+1)\left(\frac{1}{x-3}\right)=+\infty$ أي $\lim_{x\overset{<}{\longrightarrow}3} f(x)=+\infty$.

لدينا $\lim_{x\to 3}(-x+1)=-2$ و $\lim_{x\overset{>}{\longrightarrow}3}\left(\frac{1}{x-3}\right)=+\infty$

ومنه $\lim_{x\overset{>}{\longrightarrow}3}(-x+1)\left(\frac{1}{x-3}\right)=-\infty$ أي $\lim_{x\overset{>}{\longrightarrow}3} f(x)=-\infty$.

• المستقيمات المقاربة

نستنتج من النهايات مباشرة أنّ المنحني (C_f) يقبل مستقيما مقاربا موازيا لمحور الفواصل معادلته $y=-1$ ومستقيما مقاربا موازيا لمحور التراتيب معادلته $x=3$.

• المشتقة

من أجل كل x من $]-\infty;3[\cup]3;+\infty[$ ،

$$f'(x)=\frac{-1(x-3)-1(-x+1)}{(x-3)^2}=\frac{2}{(x-3)^2} .$$

إشارة المشتقة

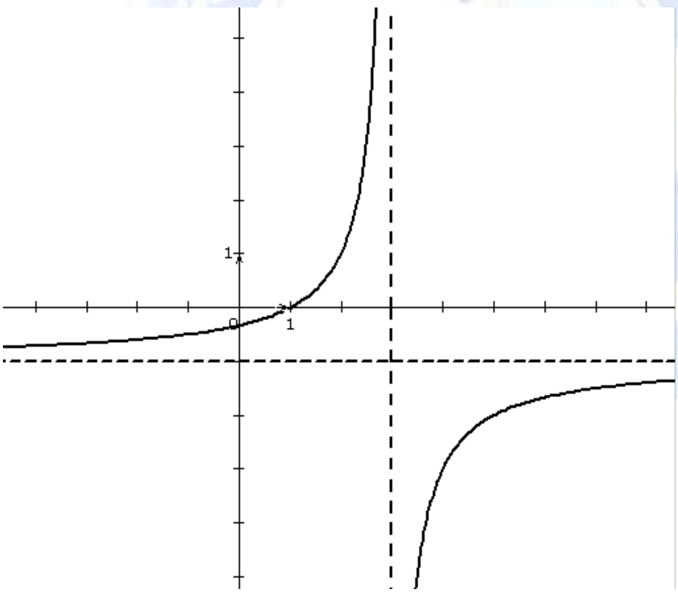
من أجل كل x من $]-\infty;3[\cup]3;+\infty[$ ، لدينا $(x-3)^2>0$ ومنه $\frac{2}{(x-3)^2}>0$ أي $f'(x)>0$.

إذن الدالة f متزايدة تماما على كل من $]3;+\infty[$ و $]-\infty;3[$.

• جدول التغيرات

x	$-\infty$		3		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	‖	$+$	
$f(x)$	-1	↗	$+\infty$ ‖ $-\infty$	↗	-1

• **التمثيل البياني**



لرسم المنحني (C_f) بأكثر دقة يمكن استعمال بعض النقط المساعدة، مثل $A\left(0;-\frac{1}{3}\right)$ الناتجة عن تقاطع (C_f) مع محور التراتيب

بحساب $f(0)$ أو $B(1;0)$ الناتجة عن تقاطع (C_f) مع محور الفواصل بحل المعادلة $f(x)=0$ ، ونقط أخرى.

ملاحظة

يسمى التمثيل البياني للدالة f المعرفة على $\left]-\infty;-\frac{d}{c}\right[\cup\left]-\frac{d}{c};+\infty\right[$ بِـ $f(x)=\frac{ax+b}{cx+d}$ مع $c\neq 0$ و $ad-bc\neq 0$ **قطعا زائدا** معادلتا مستقيميه المقاربين هما: $y=\frac{a}{c}$ و $x=-\frac{d}{c}$.

تطبيق

نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}-\{2\}$ بِـ $f(x)=\frac{9-7x}{2-x}$

وليكن (C_f) تمثيلها البياني في مستوي منسوب إلى معلم $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1. عيّن العددين الحقيقيين a و b بحيث من أجل كل x من $\mathbb{R}-\{2\}$، $f(x)=a+\frac{b}{2-x}$.
2. ادرس نهايات الدالة f عند $-\infty$ وعند $+\infty$ وعند 2، واستنتج أن (C_f) يقبل مستقيمين مقاربين يطلب تعيين معادلتيهما.
3. ادرس اتجاه تغير الدالة f ثم شكِّل جدول تغيراتها.
4. ارسم المستقيمين المقاربين والمنحني (C_f).

حل

1. من أجل كل x من $\mathbb{R}-\{2\}$،

$$f(x)=a+\frac{b}{2-x}=\frac{a(2-x)+b}{2-x}=\frac{-a\,x+2a+b}{2-x}.$$

وبما أنّ $f(x)=\frac{9-7x}{2-x}$ فإنّ $\begin{cases}-a=-7\\2a+b=9\end{cases}$ أي $\begin{cases}a=7\\b=-5\end{cases}$

وبالتالي من أجل كل x من $\mathbb{R}-\{2\}$، $f(x)=7+\frac{-5}{2-x}$.

2. لحساب نهايات الدالة f عند $-\infty$ وعند $+\infty$ وعند 2، نستعمل العبارة $f(x)=7+\frac{-5}{2-x}$ فنجد :

- لدينا $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{-5}{2-x}=0$ ومنه $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=7$

وكذلك $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{-5}{2-x}=0$ ومنه $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=7$.

- لدينا من أجل كل x من $\mathbb{R}-\{2\}$، $f(x)=7-5\times\frac{1}{2-x}$. ندرس إشارة $2-x$:

x	$-\infty$ $\quad$ 2 $\quad$ $+\infty$
إشارة $2-x$	$+$ $\quad$ 0 $\quad$ $-$

بما أنّ $\lim\limits_{x\xrightarrow{<}2}\left(\frac{1}{2-x}\right)=+\infty$ وبالضرب في -5 وإضافة 7 نحصل على $\lim\limits_{x\xrightarrow{<}2}f(x)=-\infty$.

وبما أنّ $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}2}\left(\frac{1}{2-x}\right)=-\infty$ وبالضرب في -5 وإضافة 7 نحصل على $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}2}f(x)=+\infty$.

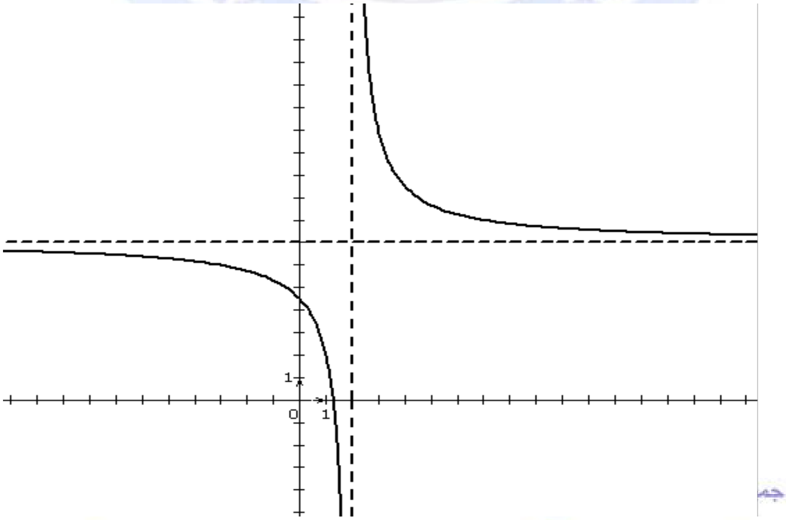
نستنتج أن المنحني (C_f) يقبل مستقيما مقاربا موازيا لمحور الفواصل معادلته $y=7$ ومستقيما مقاربا موازيا لمحور التراتيب معادلته $x=2$.

3. لدينا من أجل كل x من $\mathbb{R}-\{2\}$ ، $f'(x)=\dfrac{-5}{(2-x)^2}$.

وبما أنّ من أجل كل x من $\mathbb{R}-\{2\}$ ، $(2-x)^2>0$ ومنه $\dfrac{-5}{(2-x)^2}<0$

أي $f'(x)<0$ ، ومنه الدالة f متناقصة تماما على المجالين $]2;+\infty[$ و $]-\infty;2[$

4. لرسم المنحني (C_f) بدقة أكثر يمكن استعمال بعض النقط المساعدة، مثل $A\left(0;\dfrac{9}{2}\right)$ الناتجة عن تقاطع (C_f) مع محور التراتيب وذلك بحساب $f(0)$ والنقطة $B\left(\dfrac{9}{7};0\right)$ الناتجة عن تقاطع (C_f) مع محور الفواصل وذلك بحل المعادلة $f(x)=0$ ، ونقط أخرى.



تطبيقات

1. التعرف على المستقيمات المقاربة من جدول التغيرات

نعتبر فيما يأتي جداول تغيرات أربع دوال f_1 و f_2 و f_3 و f_4 :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f_1'(x)$		$+$	$\|$	$+$	
$f_1(x)$	-1	$\nearrow$	$+\infty \;\|\; -\infty$	$\nearrow$	-1

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f_2'(x)$		$-$	$\|$	$+$	
$f_2(x)$	0	$\searrow$	$-\infty \;\|\; -\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

x	0		5		$+\infty$
$f_3'(x)$		$-$	0	$+$	
$f_3(x)$	3	$\searrow$	-9	$\nearrow$	0

x	0		2		$+\infty$
$f_4'(x)$	$\|$	$-$	0	$+$	
$f_4(x)$	$\| \; -\infty$	$\nearrow$	7	$\searrow$	0

بقراءة متمعنة لكل جدول تغيرات من الجداول السابقة أجب عن الأسئلة الآتية :

أ) عيّن، بالنسبة لكل دالة، مجموعة تعريفها ونهاياتها عند أطراف مجالات التعريف.

ب) أعط تفسيرا بيانيا لكل نهاية من النهايات السابقة.

جـ) اشرح كيف يتم، انطلاقا من جدول التغيرات، التّعرّف على المستقيمات المقاربة الموازية لمحور التراتيب؟

د) اشرح كيف يتم، انطلاقا من جدول التغيرات، التّعرّف على المستقيمات المقاربة الموازية لمحور الفواصل؟

حل

أ) تعيين، بالنسبة لكل دالة، مجموعة تعريفها ونهاياتها عند أطراف مجالات التعريف.

• بالنسبة إلى الدالة f_1 :

مجموعة التعريف هي $D_{f_1} =]-\infty;0[\cup]0;+\infty[$

النهايات: بقراءة عمودية في الجدول نجد

$\lim\limits_{x\to-\infty} f_1(x) = -1$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f_1(x) = -1$

$\lim\limits_{x\xrightarrow{<}0} f_1(x) = +\infty$ و $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}0} f_1(x) = -\infty$

• بالنسبة إلى الدالة f_2 :

مجموعة التعريف هي $D_{f_2} =]-\infty;1[\cup]1;+\infty[$

النهايات: بقراءة عمودية في الجدول نجد

$\lim\limits_{x\to-\infty} f_2(x) = 0$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f_2(x) = +\infty$

$\lim\limits_{x\xrightarrow{<}1} f_2(x) = -\infty$ و $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}1} f_2(x) = -\infty$

• بالنسبة إلى الدالة f_3 :

مجموعة التعريف هي $D_{f_3} = [0;+\infty[$

النهايات: بقراءة عمودية في الجدول نجد

$\lim\limits_{x\to+\infty} f_3(x) = 0$. بينما عند 0 الدالة f_3 معرّفة و $f_3(0) = 3$ وكذلك عند 5 الدالة f_3 معرّفة و $f_3(5) = -9$

• بالنسبة إلى الدالة f_4 :

مجموعة التعريف هي $D_{f_4} =]0;+\infty[$

النهايات : بقراءة عمودية في الجدول نجد

$\lim\limits_{x \xrightarrow{>} 0} f_4(x) = -\infty$ و $\lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} f_4(x) = 0$

ب) التفسير البياني لكل نهاية من النهايات السابقة.

- بالنسبة إلى الدالة f_1 :

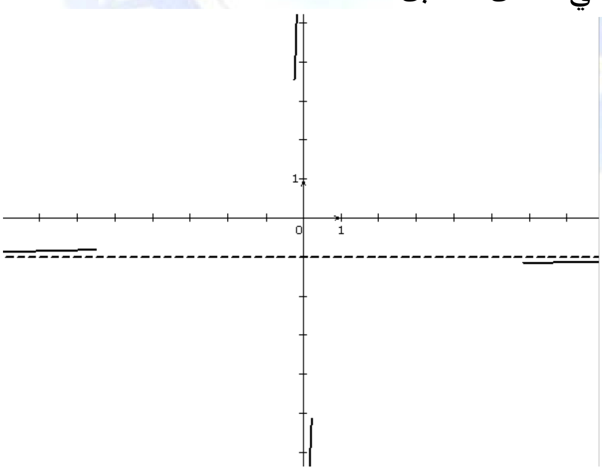
$\lim\limits_{x \to -\infty} f_1(x) = -1$ تعني أن منحني الدالة f_1 يقارب المستقيم ذي المعادلة $y = -1$ في جوار $-\infty$.

وكذلك بالنسبة إلى $\lim\limits_{x \to +\infty} f_1(x) = -1$ لكن في جوار $+\infty$.

$\lim\limits_{x \xrightarrow{<} 0} f_1(x) = +\infty$ تعني أن منحني الدالة f_1 يقارب حامل محور التراتيب في جوار 0 بقيم صغرى.

وكذلك بالنسبة إلى $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} 0} f_1(x) = -\infty$ ولكن في جوار 0 بقيم كبرى.

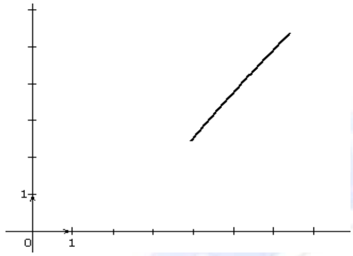
يمكن ملاحظة ذلك في الشكل المقابل



• بالنسبة إلى الدالة f_2 :

$\lim_{x \to -\infty} f_2(x) = 0$ تعني أن منحني الدالة f_2 يقارب حامل محور الفواصل في جوار $-\infty$.

$\lim_{x \to +\infty} f_2(x) = +\infty$ تعني أن منحني الدالة f_2 في جوار $+\infty$ لا يقارب مستقيما يوازي حامل محور الفواصل، ولا حامل محور التراتيب (انظر المثال في الشكل المقابل).



$\lim_{x \xrightarrow{<} 1} f_2(x) = -\infty$ تعني أن منحني الدالة f_1 يقارب المستقيم ذي المعادلة $x = 1$ في جوار 1 بقيم صغرى.

وكذلك بالنسبة إلى $\lim_{x \xrightarrow{>} 1} f_2(x) = -\infty$ ولكن في جوار 1 بقيم كبرى.

• بالنسبة إلى الدالة f_3 :

$\lim_{x \to +\infty} f_3(x) = 0$ تعني أن منحني الدالة f_3 يقارب حامل محور الفواصل في جوار $+\infty$.

• بالنسبة إلى الدالة f_4 :

$\lim_{x \longrightarrow +\infty} f_4(x) = 0$ تعني أن منحني الدالة f_4 يقارب حامل محور الفواصل في جوار $+\infty$.

$\lim_{x \xrightarrow{>} 0} f_4(x) = -\infty$ تعني أن منحني الدالة f_4 يقارب حامل محور التراتيب في جوار 0 بقيم كبرى.

ج) انطلاقا من جدول التغيرات، وجود النهاية $\lim\limits_{x \longrightarrow a} f(x) = -\infty$ أو $\lim\limits_{x \longrightarrow a} f(x) = +\infty$ حيث a عدد حقيقي (سواء كان x يؤول إلى a بقيم كبرى أو صغرى)، فإنّ هذا يعني أنّ منحني الدالة يقبل مستقيما مقاربا موازيا لمحور التراتيب معادلته $x = a$.

د) انطلاقا من جدول التغيرات، وجود الوضعية $\lim\limits_{x \longrightarrow -\infty} f(x) = b$ أو $\lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} f(x) = b$ حيث b عدد حقيقي، فإنّ هذا يعني أنّ منحني الدالة يقبل مستقيما مقاربا موازيا لمحور الفواصل معادلته $y = b$.

2. الربط بين دالة، جدول تغيرات وتمثيل بياني

إليك في ما يأتي ثلاث دوال، وثلاث جداول تغيرات وأربع تمثيلات بيانية. أرفق بكل دالة جدول تغيراتها وتمثيلها البياني مبررا في كل مرة اختيارك.

1. الدوال

- الدالة f معرفة على $]-\infty;2[\cup]2;+\infty[$ بِـ $f(x) = \dfrac{3-x}{x-2}$
- الدالة g معرفة على $]-\infty;2[\cup]2;+\infty[$ بِـ $g(x) = 1 - \dfrac{2}{x-2}$
- الدالة h معرفة على $]-\infty;2[\cup]2;+\infty[$ بِـ $h(x) = \dfrac{1}{3}x - \dfrac{1}{x-2}$

2. جداول التغيرات

x	$-\infty$		2		$+\infty$
			$+\infty$ ‖		$+\infty$
		$\nearrow$	‖	$\nearrow$	
	$-\infty$		‖ $-\infty$		

جدول (1)

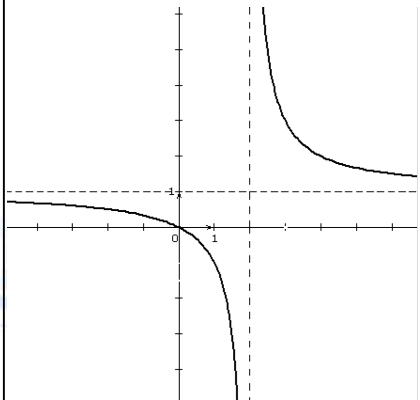
x	$-\infty$		2		$+\infty$
	-1		‖ $+\infty$		
		$\searrow$	‖	$\searrow$	-1
			$-\infty$ ‖		

جدول (2)

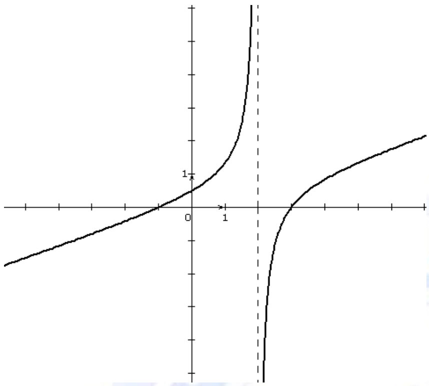
x	$-\infty$		2		$+\infty$
			$+\infty$ ‖		1
	1	$\nearrow$	‖	$\nearrow$	
			‖ $-\infty$		

جدول (3)

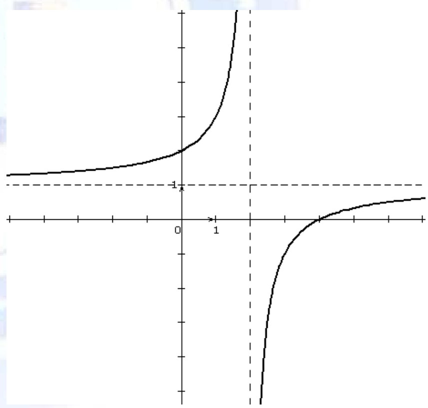
3. التمثيلات البيانية



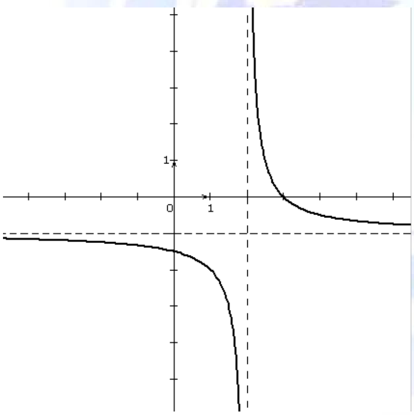
التمثيل (1)



التمثيل (2)



التمثيل (3)



التمثيل (4)

حل

• الدالة f المعرفة على $]-\infty;2[\cup]2;+\infty[$ بـ $f(x)=\dfrac{3-x}{x-2}$ جدول تغيّراتها هو الجدول(2)، وتمثيلها البياني هو التمثيل(4)، لأنّ

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-1$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-1$ و منحنيها يقبل مستقيما مقاربا موازيا لمحور الفواصل معادلته $y=-1$ و $\lim\limits_{x\underset{<}{\longrightarrow}2} f(x)=-\infty$ و $\lim\limits_{x\underset{>}{\longrightarrow}2} f(x)=+\infty$ ومنحنيها يقبل مستقيما مقاربا موازيا لمحور التراتيب معادلته $x=2$.

كما أنّ $f'(x)=\frac{-1}{(x-2)^2}$ أي $f'(x)$ سالبة دوما وبالتالي f متناقصة تماما على مجال تعريفها، ومنحنيها يقطع حامل محور الفواصل في النقطة $A(3;0)$ وحامل محور الترايتب في النقطة $B\left(0;-\frac{3}{2}\right)$.

- الدالة g المعرفة على $]-\infty;2[\cup]2;+\infty[$ بـ $g(x)=1-\frac{2}{x-2}$ جدول تغيّراتها هو الجدول(3)، وتمثيلها البياني هو التمثيل(3)، ونفسر ذلك بالنقاط التالية:

* $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=1$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)=1$ من جهة ومن جهة أخرى لدينا المنحنى في التمثيل (3) يقبل مستقيما مقاربا موازيا لمحور الفواصل معادلته $y=1$.

* $\lim\limits_{x\underset{<}{\longrightarrow}2} g(x)=+\infty$ و $\lim\limits_{x\underset{>}{\longrightarrow}2} g(x)=-\infty$ من جهة ومن جهة أخرى لدينا المنحنى (3) يقبل مستقيما مقاربا موازيا لمحور التراتيب معادلته $x=2$

* كما أنّ $g'(x)=\frac{4}{(x-2)^2}$ أي $g'(x)$ موجبة دوما وبالتالي g متزايدة تماما على مجال تعريفها وهو ما يوافق جدول التغيرات (3)

* لدينا أيضا المنحنى (3) يقطع حامل محور الفواصل في النقطة $A(4;0)$ وحامل محور التراتيب في النقطة $B(0;2)$. وهو ما يوافق $g(0)=2$ و $g(4)=0$.

• الدالة h المعرفة على $]-\infty;2[\cup]2;+\infty[$ بـِ $h(x)=\frac{1}{2}x-\frac{3}{x-2}$ جدول تغيّراتها هو الجدول(1)، وتمثيلها البياني هو التمثيل(2)، للأسباب التالية:

* لدينا من جهة $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x)=+\infty$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)=-\infty$ وهو ما يوافق الجدول (1).

* لدينا $\lim\limits_{x\overset{<}{\longrightarrow}2} h(x)=+\infty$ و $\lim\limits_{x\overset{>}{\longrightarrow}2} h(x)=-\infty$ ومنحنيها يقبل مستقيما مقاربا موازيا لمحور التراتيب معادلته $x=2$ و هو ما يوافق التمثيل (2) .

* كما أنّ $h'(x)=\frac{x^2-4x+7}{3(x-2)^2}$ أي $h'(x)$ موجبة دوما وبالتالي h متزايدة تماما على مجال تعريفها وهو ما يوافق الجدول (1).

* المنحني في التمثيل (2) يقطع حامل محور الفواصل في النقطتين $A(-1;0)$ و $B(3;0)$ وحامل محور التراتيب في النقطة $C(0;0,5)$. وهو ما يوافق $h(0)=0,5$ و $h(-1)=0$ و $h(3)=0$.

III.ملخص :

• الدّوال التّناظرية

نسمِّي دالة تناظرية كل دالة f حيث بِـ : $f\left(x\right)=\dfrac{ax+b}{cx+d}$ مع $c\neq 0$ و $ad-bc\neq 0$ ، وهي معرّفة على $\left]-\infty;-\dfrac{d}{c}\right[\cup\left]-\dfrac{d}{c};+\infty\right[$.

نرمز بِـ $\left(C_f\right)$ لتمثيلها البياني في مستوي منسوب إلى معلم $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$.

• نهايات الدوال التناظرية والمستقيمات المقاربة

1) $\lim\limits_{x\to-\infty} f\left(x\right)=\dfrac{a}{c}$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f\left(x\right)=\dfrac{a}{c}$

المنحني $\left(C_f\right)$ للدالة التناظرية f المعرّفة بِـ : $f\left(x\right)=\dfrac{ax+b}{cx+d}$ يقبل مستقيما مقاربا موازيا لمحور الفواصل معادلته $y=\dfrac{a}{c}$ في جوار $+\infty$ أو $-\infty$.

2) $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}0}\dfrac{1}{x}=+\infty$ و $\lim\limits_{x\xrightarrow{<}0}\dfrac{1}{x}=-\infty$

$\lim\limits_{x\xrightarrow{>}a}\dfrac{1}{x-a}=+\infty$ و $\lim\limits_{x\xrightarrow{<}a}\dfrac{1}{x-a}=-\infty$

عموما:

* الدالة f المعرّفة بِـ: $f(x)=\dfrac{ax+b}{cx+d}$ مع $c\neq 0$ و $ad-bc\neq 0$

نهايتها لما يؤول x إلى $-\dfrac{d}{c}$ بقيم كبرى (أو قيم صغرى) هي $+\infty$ أو $-\infty$ (تبعا لإشارة $ax+b$ وإشارة c). لذلك نحتاج عند حساب $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}-\frac{d}{c}} f(x)$ أو $\lim\limits_{x\xrightarrow{<}-\frac{d}{c}} f(x)$ إلى خطوتين هما:

1. تعويض x بالقيمة $-\dfrac{d}{c}$ في البسط $ax+b$ حيث نجد $a\left(-\dfrac{d}{c}\right)+b$ ثمّ نتعرّف على إشارة هذا العدد.

2. ندرس إشارة المقام $cx+d$ على يمين ثمّ على يسار القيمة $-\dfrac{d}{c}$ وذلك بإتباع طريقة دراسة إشارة الدالة التآلفية $x\mapsto cx+d$ (كما هو وارد في الفصل السابق)

* المنحني (C_f) للدالة التناظرية f المعرّفة بِـ: $f(x)=\dfrac{ax+b}{cx+d}$ يقبل مستقيما مقاربا موازيا لمحور التراتيب معادلته $x=-\dfrac{d}{c}$.

• **دراسة دالة تناظرية**

لدراسة دالة f ورسم تمثيلها البياني (C_f) في مستوي منسوب إلى معلم $(O;\vec{i},\vec{j})$ نتّبع الخطوات الآتية:

1. النهايات

نحسب نهاية الدالة f لما يؤول x إلى كل طرف من أطراف مجال (أومجالي) مجموعة التعريف.

2. المستقيمات المقاربة

نستنتج من النهايات مباشرة المستقيمات المقاربة للمنحني (C_f) في حالة وجودها.

3. المشتقة

نحسب الدالة المشتقة f' من أجل كل x من مجموعة التعريف، وندرس إشارتها لتحديد اتجاه تغيّر الدالة f .

4. جدول التغيرات

نسجل النتائج المتحصل عليها في جدول التغيرات، ونستغلّه في التمثيل البياني. (جدول التغيرات هوعبارة عن جدول تلخيصي للنتائج السابقة)

5. التمثيل البياني

لرسم المنحني (C_f) بأكثر دقة يمكن استعمال بعض النقط المساعدة، مثل تقاطع (C_f) مع حاملي محوري الاحداثيات ونقط أخرى.

IV. توظيف المعارف:

أ. تمارين

1. نعتبر الدالة f المعرفة على $]0;+\infty[$ بـِ : $f(x)=\frac{1-x}{x}$ وليكن (C_f) تمثيلها البياني في مستوى منسوب إلى معلم متعامد متجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1. اُدرس نهاية الدالة f عند $+\infty$، وأعط تفسيرا بيانيا للنتيجة.
2. اُدرس نهاية الدالة f عند 0، وأعط تفسيرا بيانيا للنتيجة.
3. اُدرس اتجاه تغير الدالة f ثم شكِّل جدول تغيراتها.
4. اُرسم المستقيم ذي المعادلة $y=-1$ والمنحني (C_f).

2. احسب نهاية الدالة f عندما x يؤول إلى a في كل حالة من الحالات الآتية:

1. $f(x)=\frac{x+2}{x+1}$ مع $a=-1$
2. $f(x)=\frac{x+2}{2x-1}$ مع $a=\frac{1}{2}$
3. $f(x)=\frac{2x-3}{2-x}$ مع $a=2$
4. $f(x)=\frac{x-3}{x}$ مع $a=0$

3. احسب نهايات الدالة f عندما x يؤول إلى $-\infty$ ثم إلى $+\infty$ في كل حالة من الحالات الآتية:

1. $f(x)=\frac{2x-1}{x+1}$
2. $f(x)=\frac{5x-1}{2x-2}$

3. $f(x)=\frac{-2x}{1-x}$ 4. $f(x)=\frac{x-1}{x-3}$

4. احسب $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ وأكّد فيما إذا كان منحني الدالة f يقبل مستقيماً مقارباً موازيا لحامل محور الفواصل، وعيّن معادلة له.

1. $f(x)=3-\frac{1}{x-2}$ 2. $f(x)=\frac{x}{x+5}$

3. $f(x)=\frac{-10x}{10x+20}$ 4. $f(x)=-6x+\frac{1}{x+3}$

5. $f(x)=\frac{-x}{2x+7}$ 6. $f(x)=\frac{2x}{1-4x}$

5. احسب النهايات الآتية :

1. $\lim_{x\to1}\frac{5x+3}{2x-2}$ ، 2. $\lim_{x\to3}\frac{-2x+1}{3-x}$

3. $\lim_{x\to-2}\frac{x-3}{x+2}$ ، 4. $\lim_{x\to\frac{1}{2}}\frac{x+1}{2x-1}$

5. $\lim_{x\to4}\frac{5-2x}{x-4}$ ، 6. $\lim_{x\to1}\frac{5x-6}{1-x}$

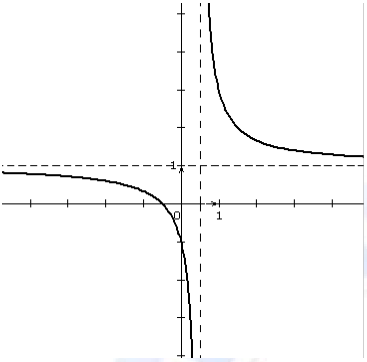
7. $\lim_{x\to2}\frac{3x-4}{2-x}$ ، 8. $\lim_{x\to-2}\frac{2x-4}{-x-2}$

6. f دالة عددية معرفة على $]-\infty;1[\cup]1;+\infty[$ بـ $f(x)=\frac{x+1}{x-1}$

أثبت أن المستقيم (D) الذي معادلته $y=1$ هو مستقيم مقارب للمنحني (C) الممثل للدالة f في جوار $(+\infty)$ و $(-\infty)$.

7. f دالة عددية معرفة على $]-\infty;2[$ بـ $f(x)=\frac{x}{2-x}$

أثبت أن المستقيم (D) الذي معادلته $y=-1$ هو مستقيم مقارب للمنحني (C) الممثل للدالة f .



8. f دالة تناظرية معرفة على $\mathbb{R}-\left\{\frac{1}{2}\right\}$ بتمثيلها البياني الممثل في الشكل المقابل.

بقراءة بيانية عيّن معادلة لكل من المستقيمين المقاربين للمنحني ثم شكِّل جدول تغيرات f .

9. نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}-\{-1\}$ وليكن جدول تغيراتها هو الجدول الآتي:

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
$f(x)$	$0 \searrow -\infty$	||	$+\infty \searrow 0$

1. عيّن نهايات الدالة f عند أطراف مجالي مجموعة التعريف.
2. أعط تفسيرا بيانيا للنهايات السابقة.

10. f الدالة العددية للمتغير الحقيقي x المعرفة على $\mathbb{R}-\{-2\}$ بِ

$$f(x)=2-\frac{2}{x+2}$$

1. أ) احسب نهايتي الدالة f عند $-\infty$ وعند $+\infty$ وفسِّر النتيجة بيانيا.

ب) احسب نهاية الدالة f عند -2، وفسِّر النتيجة بيانيا.

ج) احسب مشتقة الدالة f وادرس إشارتها.

د) شكّل جدول تغيرات الدالة f

2. المستوي منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$ نسمي (C) التمثيل البياني للدالة f

أ) عيّن إحداثيات نقط تقاطع المنحني (C) مع حاملي محوري الإحداثيات.

ب) اكتب معادلة المماس (Δ) للمنحني (C) عند النقطة التي فاصلتها 0 .

ج) أنشئ المماس (Δ) والمنحني (C).

11. f الدالة العددية للمتغير الحقيقي x المعرفة على $\mathbb{R}-\{-1\}$ بـِ $f(x)=\dfrac{2x-1}{x+1}$ ، و (C) تمثيلها البياني في مستوى منسوب إلى معلم متعامد متجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$.

1. اُدرس تغيرات الدالة f .
2. عيّن نقط تقاطع المنحني (C) مع حاملي محوري الإحداثيات.
3. A ، B نقطتان من المنحني (C) فاصلتاهما على الترتيب 0 ، 2− .
احسب $f'(0)$ و $f'(-2)$ ، ثم استنتج أن المنحني (C) يقبل مماسين متوازيين عند النقطتين A ، B ، واكتب معادلتيهما.
4. أنشئ المماسين ثم ارسم (C).

12. f الدالة العددية للمتغير الحقيقي x المعرفة على $\mathbb{R}-\{1\}$ بـِ $f(x)=\dfrac{-x+2}{x-1}$ ، و (C) تمثيلها البياني في مستوى منسوب إلى معلم متعامد متجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$.

1. ادرس تغيرات الدالة f ، وعيّن المستقيمات المقاربة للمنحني (C).

2. أ) عيّن إحداثيات نقطتي تقاطع المنحني (C) مع حاملي محوري الإحداثيات.
ب) بيِّن أنَّه توجد نقطتان من المنحني (C) يكون معامل توجيه المماس عند كل منهما يساوي (-1).
ج) عيّن معادلة كل من المماسين للمنحني (C) عند النقطتين اللتين فاصلتاهما 0 وَ 2.
3. أرسم المماسين والمنحني (C).

13. f دالة عددية للمتغير الحقيقي x معرفة على $]-\infty;2[$ بِـ $f(x)=\frac{x+1}{-x+2}$ ، و (C) تمثيلها البياني في مستوى منسوب إلى معلم متعامد متجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$.
1. بيِّن أنّه يوجد عددين حقيقيين a و b حيث $f(x)=a+\frac{b}{-x+2}$.
2. ادرس تغيرات الدالة f ، وعيّن المستقيمات المقاربة للمنحني (C).
3. ليكن (Δ) مستقيم معادلته $y=x+1$ ، عيّن تقاطع المنحني (C) والمستقيم (Δ) وحدّد الوضع النسبي لهما.
4. أرسم (Δ) و المنحني (C)

14. f و g دالتان عدديتان للمتغير الحقيقي x معرفتان على الترتيب على $\mathbb{R}$ و $\mathbb{R}-\{1\}$ بالعبارتين:

$$g(x)=\frac{x}{1-x} \quad \text{و} \quad f(x)=-\frac{1}{2}x^2$$

(C_f) وَ (C_g) منحنياهما البيانيان على الترتيب في مستو منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1. أ) اُدرس تغيرات كل من الدالتين f وَ g.

ب) عيّن معادلة لكل من المستقيمين المقاربين للمنحني (C_g).

2. عيّن نقط تقاطع المنحنيين (C_f) وَ (C_g)

3. أرسم المنحنيين (C_f) وَ (C_g).

15. (Δ) مستقيم معادلته $x-3y+3=0$ و (C) منحني الدالة المعرفة

$$f(x)=\frac{2x-9}{x-5}$$

1. اوجد حسابيا تقاطع المستقيم (Δ) والمنحني (C).

2. تحقق من النتائج بيانيا.

16. f دالة معرفة على $[0;1[\cup]1;+\infty[$ بـِ $f(x)=\dfrac{x}{-x+1}$ ، و (C) تمثيلها البياني في مستوى منسوب إلى معلم متعامد متجانس $(\text{O};\vec{i},\vec{j})$.

1. بيّن أن المنحني (C) يقبل مستقيما مقاربا موازيا لحامل محور الفواصل اُدرس وضعية المنحني (C) بالنسبة إلى هذا المستقيم.

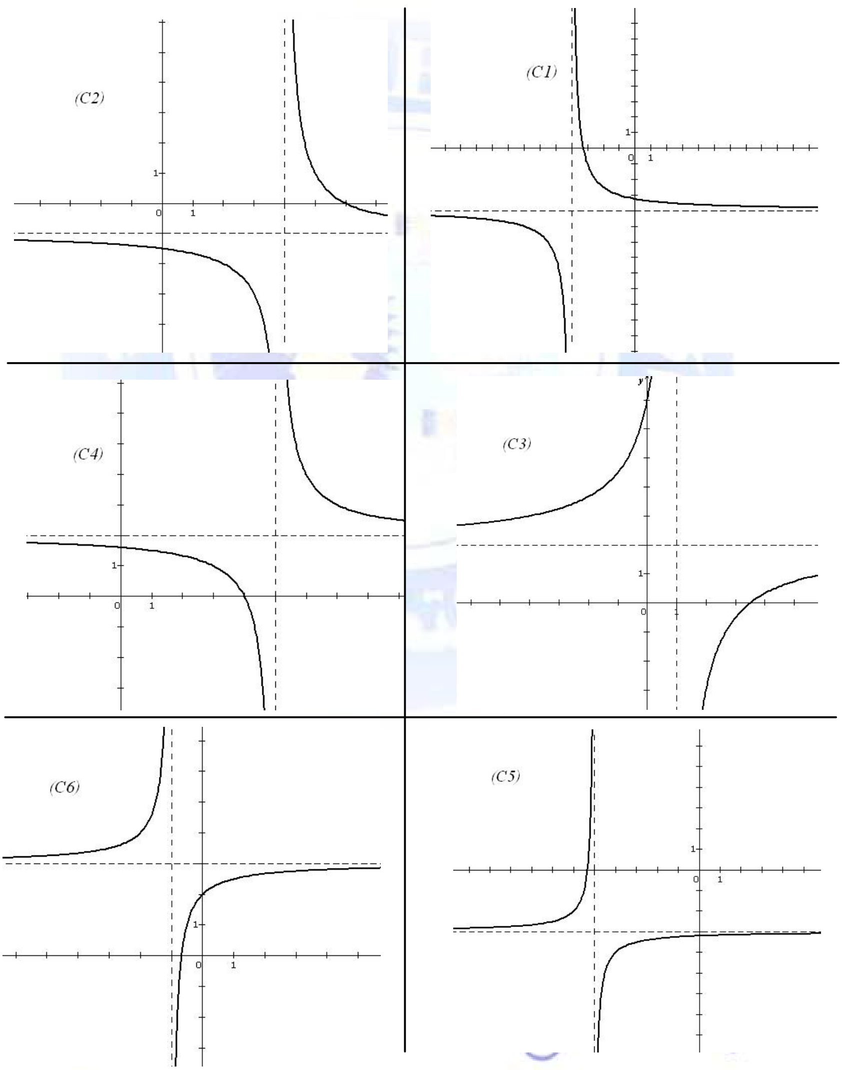
2. ارسم التمثيل البياني للدالة f .

3. ناقش بيانيا تبعا لقيم المتغير الحقيقي m عدد وإشارة حلول المعادلة $(m+1)x-m=0$ في $[0;1[\cup]1;+\infty[$.

17. أرفق بكل تمثيل بياني من التمثيلات في الشكل أدناه دالة من الدوال الآتية :

$f(x)=3-\dfrac{1}{x+1}$ ، $g(x)=2-\dfrac{5}{x-1}$ ، $h(x)=\dfrac{2}{x-4}-1$

$k(x)=-4+\dfrac{3}{x+4}$ ، $\ell(x)=2+\dfrac{2}{x-5}$ ، $\varphi(x)=\dfrac{-1}{x+5}-3$



18. لتكن الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}-\{2\}$ بـِ $f(x)=\dfrac{2x-3}{-x+2}$

و (C_f) تمثيلها البياني في مستوى منسوب إلى معلم متعامد متجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1. ادرس تغيرات الدالة f .

2. أ) عيّن معادلة المماس (T) للمنحني (C) عند النقطة التي فاصلتها 1.

ب) ادرس إشارة $f(x)-(x-2)$ ، فسر بيانيا النتيجة.

3. هل توجد نقط من المنحني (C) يكون عندها المماس له موازيا للمستقيم الذي معادلته $y=x+2$ ؟ إذا كان الجواب نعم، عيّن احداثياتها.

19. الهدف منه حل المعادلة $x^3-2x^2-4x+5=0$ في $\mathbb{R}$ بطريقتين بيانيا وجبريا.

الطريقة البيانية

1. بين أن حل المعادلة $x^3-2x^2-4x+5=0$ يؤول إلى حل المعادلة $x^2=\dfrac{4x-5}{x-2}$ حيث $(x\neq 2)$.

2. نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}-\{2\}$ بـِ $f(x)=\dfrac{4x-5}{x-2}$

أ) اكتب $f(x)$ على الشكل $a+\dfrac{b}{x-2}$ حيث $a\,;\,b$ عددان حقيقيان.

ب) عيّن اتجاه تغير الدالة f على المجال $]-\infty;2[$ والمجال $]2;+\infty[$.

ج) ارسم المنحني (C) الممثل للدالة f

3. نعتبر الدالة g المعرفة على $\mathbb{R}$ بـِ $g(x)=x^2$

ارسم في نفس المعلم المنحني (C_g) الممثل للدالة g .

4. بقراءة بيانية عيّن عدد حلول المعادلة : $x^3-2x^2-4x+5=0$

أعط قيمة مضبوطة إذا كان ذلك ممكنا أو قيمة مقربة لكل من الحلول.

الطريقة الجبرية

1. تحقق أنّ $x^3-2x^2-4x+5=(x-1)(x^2-x-5)$

ب) حل في $\mathbb{R}$ المعادلة $x^2-x-5=0$

3. عيّن جبريا القيم المضبوطة لحلول المعادلة $x^3-2x^2-4x+5=0$

ب. حلول للتمارين

1.

نعتبر الدالة f المعرفة على $]0;+\infty[$ بـ : $f(x)=\frac{1-x}{x}$ وليكن (C_f) تمثيلها البياني في مستوى منسوب إلى معلم متعامد متجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1. نهاية الدالة f عند $+\infty$

لدينا $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{-x}{x}=-1$ ومنه المنحنى (C_f) يقبل مستقيما مقاربا موازيا لحامل محور التراتيب معادلته $y=-1$.

2. نهاية الدالة f عند 0 بقيم كبرى

لدينا $f(x)=(1-x)\times\frac{1}{x}$ و $\lim\limits_{x\overset{>}{\to}0}\frac{1}{x}=+\infty$ و $\lim\limits_{x\overset{>}{\to}0}(1-x)=1$ ومنه $\lim\limits_{x\overset{>}{\to}0} f(x)=+\infty$ والمنحنى (C_f) يقارب حامل محور الفواصل في جوار $(+\infty)$.

3. اتجاه تغيّر الدالة f

المشتقة: $f'(x)=\frac{-1\times x-1\times(1-x)}{x^2}=\frac{-1}{x^2}$

ومن أجل كل x من المجال $]0;+\infty[$ لدينا $\frac{-1}{x^2}<0$ ومنه $f'(x)<0$

والدالة f متناقصة تماما على المجال $]0;+\infty[$

جدول تغيّرات الدالة f

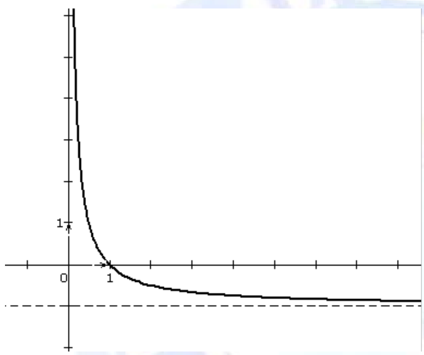
x	0		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$-$	
$f(x)$	‖ $+\infty$	$\searrow$	-1

4. رسم المستقيم ذي المعادلة

$y=-1$ والمنحني (C_f)

يمكن الاستعانة بنقط مساعدة مثل

$A(1;0)$



.2

لاحظ أنّ مقام كل عبارة $f(x)$ ينعدم من أجل القيمة المعطاة للعدد a و يغيّر إشارته قبلها وبعدها، وعليه ندرس نهاية $f(x)$ عند a بقيم كبرى وبقيم صغرى.

1. لاحظ إشارة المقدار $x+1$

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
$x+1$	$-$	0	$+$

ولدينا $\frac{x+2}{x+1}=(x+2)\frac{1}{x+1}$ و $\lim\limits_{x\overset{>}{\longrightarrow}-1}\frac{1}{x+1}=+\infty$ و $\lim\limits_{x\longrightarrow-1}(x+2)=1$

ومنه $\lim\limits_{x\overset{>}{\longrightarrow}-1}\frac{x+2}{x+1}=+\infty$ أي $\lim\limits_{x\overset{>}{\longrightarrow}-1}f(x)=+\infty$

وبطريقة مماثلة نجد $\lim\limits_{x\overset{<}{\longrightarrow}-1}f(x)=-\infty$

2. إنّ $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} 1/2} \frac{1}{2x-1} = +\infty$ و $\lim\limits_{x \xrightarrow{<} 1/2} \frac{1}{2x-1} = -\infty$ و $\lim\limits_{x \longrightarrow 1/2} (x+2) = \frac{5}{2}$

ومنه $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} 1/2} \frac{x+2}{2x-1} = +\infty$ و $\lim\limits_{x \xrightarrow{<} 1/2} \frac{x+2}{2x-1} = -\infty$

3. نبدأ بإشارة المقدار $2-x$ نجد

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$2-x$	+	0	−

إنّ $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} 2} \frac{1}{2-x} = -\infty$ و $\lim\limits_{x \xrightarrow{<} 2} \frac{1}{2-x} = +\infty$ و $\lim\limits_{x \longrightarrow 2} (2x-3) = 1$

ومنه $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} 2} \frac{2x-3}{2-x} = -\infty$ و $\lim\limits_{x \xrightarrow{<} 2} \frac{2x-3}{2-x} = +\infty$

4. إنّ $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} 0} \frac{1}{x} = +\infty$ و $\lim\limits_{x \xrightarrow{<} 0} \frac{1}{x} = -\infty$ و $\lim\limits_{x \longrightarrow 0} (x-3) = -3$

ومنه $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} 0} \frac{x-3}{x} = -\infty$ و $\lim\limits_{x \xrightarrow{<} 0} \frac{x-3}{x} = +\infty$

.3

نهايات الدالة التناظرية f عندما x يؤول إلى $-\infty$ أو $+\infty$ تساوي نهاية الحد الأكبر أس في عبارة البسط على الحد الأكبر أس في عبارة المقام، ومنه:

.1 $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{2x-1}{x+1} = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{2x}{x} = 2$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{2x-1}{x+1} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{2x}{x} = 2$

.2 $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{5x-1}{2x-2} = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{5x}{2x} = \frac{5}{2}$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{5x-1}{2x-2} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{5x}{2x} = \frac{5}{2}$

.3 $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{-2x}{1-x} = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{-2x}{-x} = 2$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{-2x}{1-x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{-2x}{-x} = 2$

.4 $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{x-1}{x-3} = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{x}{x} = 1$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x-1}{x-3} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x}{x} = 1$

.4

حساب $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ والتأكد فيما إذا كان منحني الدالة f يقبل مستقيماً مقارباً موازيا لمحور الفواصل، وتعيين معادلة له.

.1 إنّ $\lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x-2}=0$ ومنه $\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\left(3-\frac{1}{x-2}\right)=3$

ومنحني الدالة f يقبل مستقيماً مقارباً موازيا لحامل محور الفواصل، معادلة $y=3$.

.2 إنّ $\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{x}{x+5}=1$

ومنحني الدالة f يقبل مستقيماً مقارباً موازيا لحامل محور الفواصل، معادلة $y=1$.

.3 إنّ $\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{-10x}{10x+20}=-1$

ومنحني الدالة f يقبل مستقيماً مقارباً موازيا لحامل محور الفواصل، معادلة $y=-1$.

.4 بما أن $\lim_{x\to-\infty}(-6x)=+\infty$ و $\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x+3}=0$ فإنّ $\lim_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$

ومنحني الدالة f لا يقبل مستقيماً مقارباً موازيا لحامل محور الفواصل.

.5 إنّ $\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{-x}{2x+7}=-\frac{1}{2}$

ومنحني الدالة f يقبل مستقيماً مقارباً موازيا لحامل محور الفواصل، معادلة $y=-\frac{1}{2}$.

.6 إنّ $\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{2x}{1-4x}=-\frac{1}{2}$

ومنحني الدالة f يقبل مستقيماً مقارباً موازيا لحامل محور الفواصل، معادلة $y=-\frac{1}{2}$.

.5

بما أنّ مقام العبارة ينعدم من أجل القيمة التي يؤول إليها x ويغيّر إشارته، ندرس النهاية لما x يؤول إلى هذه القيمة يقيم كبرى وبقيم صغرى، وعليه:

1. بما أنّ $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} 1} \frac{1}{2x-2}=+\infty$ و $\lim\limits_{x \xrightarrow{<} 1} \frac{1}{2x-2}=-\infty$ و $\lim\limits_{x \xrightarrow{<} 1} (5x+3)=8$

فإنّ $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} 1} \frac{5x+3}{2x-2}=+\infty$ و $\lim\limits_{x \xrightarrow{<} 1} \frac{5x+3}{2x-2}=-\infty$

2. بما أنّ $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} 3} \frac{1}{3-x}=-\infty$ و $\lim\limits_{x \xrightarrow{<} 3} \frac{1}{3-x}=+\infty$ و $\lim\limits_{x \xrightarrow{<} 3} (-2x+1)=-5$

فإنّ $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} 3} \frac{-2x+1}{3-x}=+\infty$ و $\lim\limits_{x \xrightarrow{<} 3} \frac{-2x+1}{3-x}=-\infty$

3. وبالمماثلة لما سبق نجد

$\lim\limits_{x \xrightarrow{>} -2} \frac{x-3}{x+2}=-\infty$ و $\lim\limits_{x \xrightarrow{<} -2} \frac{x-3}{x+2}=+\infty$

.4 $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} \frac{1}{2}} \frac{x+1}{2x-1}=+\infty$ و $\lim\limits_{x \xrightarrow{<} \frac{1}{2}} \frac{x+1}{2x-1}=-\infty$

.5 $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} 4} \frac{5-2x}{x-4}=-\infty$ و $\lim\limits_{x \xrightarrow{<} 4} \frac{5-2x}{x-4}=+\infty$

.6 $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} 1} \frac{5x-6}{1-x}=+\infty$ و $\lim\limits_{x \xrightarrow{<} 1} \frac{5x-6}{1-x}=-\infty$

.7 $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} 2} \frac{3x-4}{2-x}=-\infty$ و $\lim\limits_{x \xrightarrow{<} 2} \frac{3x-4}{2-x}=+\infty$

.8 $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} -2} \frac{2x-4}{-x-2} = +\infty$ و $\lim\limits_{x \xrightarrow{<} -2} \frac{2x-4}{-x-2} = -\infty$

.6

لإثبات أن المستقيم (D) الذي معادلته $y=1$ هو مستقيم مقارب للمنحني (C) الممثل للدالة f في جوار $(+\infty)$ و $(-\infty)$، يكفي إثبات أنّ

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=1$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=1$ أو $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x)-1\right]=0$

و $\lim\limits_{x\to-\infty}\left[f(x)-1\right]=0$.

إنّ $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x+1}{x-1}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x}{x}=1$

و $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x+1}{x-1}=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x}{x}=1$

أو من $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x)-1\right]=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\frac{x+1}{x-1}-1\right]=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\frac{2}{x-1}\right]=0$

و $\lim\limits_{x\to-\infty}\left[f(x)-1\right]=\lim\limits_{x\to-\infty}\left[\frac{x+1}{x-1}-1\right]=\lim\limits_{x\to-\infty}\left[\frac{2}{x-1}\right]=0$

ومنه المستقيم (D) الذي معادلته $y=1$ هو مستقيم مقارب للمنحني (C) الممثل للدالة f في جوار $(+\infty)$ و $(-\infty)$.

.7

لإثبات أن المستقيم (D) الذي معادلته $y=-1$ هو مستقيم مقارب للمنحني (C) الممثل للدالة f في جوار $(-\infty)$،

يكفي إثبات أنّ $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=1$ أو $\lim\limits_{x\to-\infty}\left[f(x)-1\right]=0$.

إنّ $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x}{2-x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x}{-x}=-1$

و منه المستقيم (D) الذي معادلته $y=-1$ هو مستقيم مقارب للمنحني (C) الممثل للدالة f في جوار $(-\infty)$.

8.

نلاحظ من التمثيل البياني أنّ منحني الدالة f يقارب مستقيمين أحدهما يوازي حامل محور الفواصل معادلته هي $y=1$، والآخر يوازي حامل محور التراتيب معادلته $x=\frac{1}{2}$.

عند تشكيل جدول تغيّرات الدالة f يمكن ملاحظة أنّ الدالة متناقصة تماما على $\mathbb{R}-\left\{\frac{1}{2}\right\}$ وبالتالي دالتها المشتقة سالبة دوما.

x	$-\infty$	$1/2$	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	||	$-$
$f(x)$	$1 \searrow -\infty$	||	$+\infty \searrow 1$

9.

1. من جدول التغيّرات نجد أنّ:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=0 \quad \text{و} \quad \lim_{x\to+\infty} f(x)=0$$

$$\lim_{x\xrightarrow{>}-1} f(x)=+\infty \quad \text{و} \quad \lim_{x\xrightarrow{<}-1} f(x)=-\infty$$

2. التفسير بيانيا للنهايات السابقة هو:

منحني الدالة f يقارب مستقيمين أحدهما حامل محور الفواصل ومعادلته هي $y=0$، والآخر يوازي حامل محور التراتيب معادلته $x=-1$.

.10

.1 أ) إنّ $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(2-\frac{2}{x+2}\right)=2$ وكذلك $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=2$ لأنّ $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2}{x+2}=0$

ومنحني الدالة f يقبل مستقيماً مقارباً موازيا لحامل محور الفواصل، معادلة $y=2$.

ب) لدينا $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}-2} f(x)=\lim\limits_{x\xrightarrow{>}-2}\left(2-\frac{2}{x+2}\right)=-\infty$

و $\lim\limits_{x\xrightarrow{<}-2} f(x)=\lim\limits_{x\xrightarrow{<}-2}\left(2-\frac{2}{x+2}\right)=+\infty$ ، ومنحني الدالة f يقبل مستقيماً مقارباً موازيا لحامل محور التراتيب، معادلة $x=-2$.

ج) حساب مشتقة الدالة f ودراسة إشارتها.

من أجل كل x من $\mathbb{R}-\{-2\}$ لدينا $f'(x)=\frac{2}{(x+2)^2}$

وبما أنّ $(x+2)^2>0$ فإنّ $\frac{1}{(x+2)^2}>0$ أي $f'(x)>0$ والدالة f متزايدة تماما على $\mathbb{R}-\{-2\}$.

د) جدول تغيرات الدالة f

x	$-\infty$		-2		$+\infty$
$f'(x)$		+	‖	+	
$f(x)$	2 ↗		$+\infty$ ‖ $-\infty$		↗ 2

.2

أ) تعيين إحداثيات نقط تقاطع المنحني (C) مع حاملي محوري الإحداثيات

• مع (yy') نضع $x=0$ فنجد $f(0)=1$ ونقطة التقاطع هي $A(0;1)$

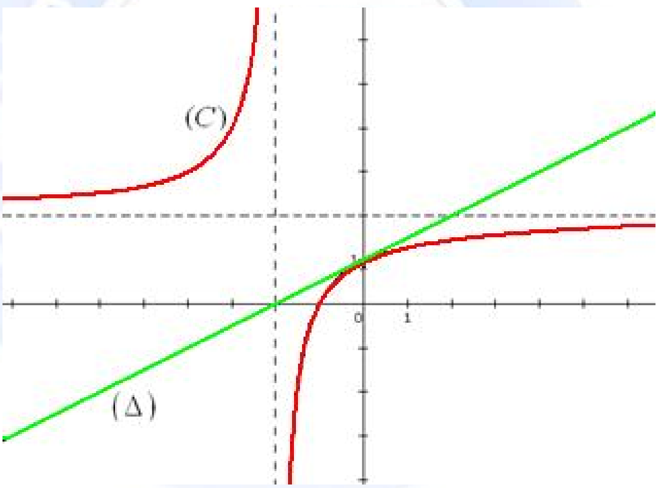
• مع (xx') نضع $y=0$ ونحل المعادلة $2-\frac{2}{x+2}=0$ فنجد $x=-1$
ونقطة التقاطع هي $\mathrm{B}(-1;0)$

ب) معادلة المماس (Δ) للمنحني (C) عند النقطة التي فاصلتها 0 هي:

$$y=f'(0)(x-0)+f(0)$$

وبما أنّ $f(0)=1$ و $f'(0)=\frac{1}{2}$ والمعادلة هي: $y=\frac{1}{2}x+1$

ج) في إنشاء المماس (Δ) والمنحني (C)، إضافة إلى النقطتين A و B يمكن الاستعانة بنقط أخرى من المنحني لإنجاز رسم دقيق.



.11

دراسة تغيّرات الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}-\{-1\}$ بِـ $f(x)=\frac{2x-1}{x+1}$

النهايات

• لدينا $\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{2x}{x}\right)=2$ وكذلك $\lim_{x\to+\infty} f(x)=2$

• ولدينا $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} -1} f(x) = \lim\limits_{x \xrightarrow{>} -1} (2x-1)\frac{1}{x+1} = -\infty$

كما أنّ $\lim\limits_{x \xrightarrow{<} -1} f(x) = +\infty$

المستقيمات المقاربة

نستنتج أنّ منحني الدالة f يقبل مستقيماً مقارباً موازيا لحامل محور الفواصل، معادلة $y=2$ ، ومستقيماً مقارباً موازيا لحامل محور التراتيب، معادلة $x=-1$.

المشتقة

من أجل كل x من $\mathbb{R}-\{-1\}$ لدينا $f'(x)=\frac{3}{(x+1)^2}$

و $(x+1)^2>0$ ومنه $\frac{3}{(x+1)^2}>0$ أي $f'(x)>0$ والدالة f متزايدة تماما على $\mathbb{R}-\{-1\}$

جدول التغيرات

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	$\Vert$	$+$
$f(x)$	$2 \nearrow +\infty$	$\Vert$	$-\infty \nearrow 2$

2. تعيين نقط تقاطع المنحني (C) مع حاملي محوري الإحداثيات.

• مع (yy') نضع $x=0$ فنجد $f(0)=-1$ ونقطة التقاطع هي $A(0;-1)$

• مع (xx') نضع $y=0$ ونحل المعادلة $\frac{2x-1}{x+1}=0$ فنجد $x=\frac{1}{2}$
ونقطة التقاطع هي $\mathrm{B}\left(\frac{1}{2};0\right)$

3. لدينا $f'(0)=\frac{3}{(0+1)^2}=3$ و $f'(-2)=\frac{3}{(-2+1)^2}=3$

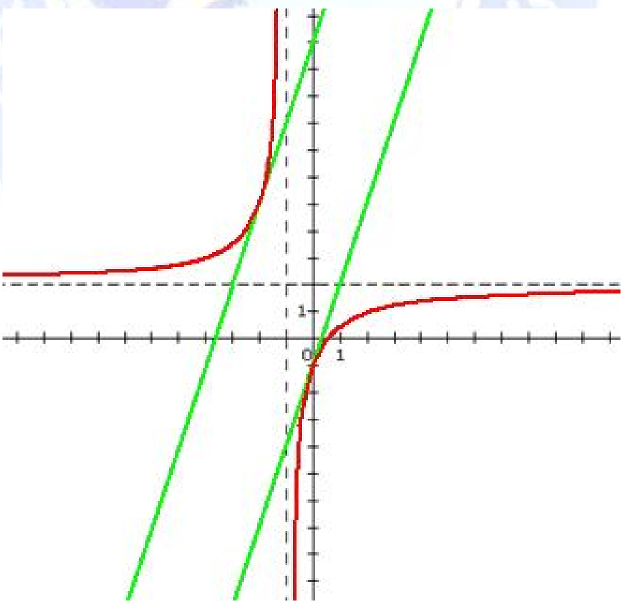
نستنتج أن المنحني (C) يقبل مماسين متوازيين معامل توجيه كل منهما هو 3 عند النقطتين A ، B.

لدينا $f(0)=-1$ و $f(-2)=5$ أي $\mathrm{A}(0;-1)$ و $\mathrm{B}(-2;5)$

معادلة المماس عند النقطة A هي $y=3x-1$

وعند النقطة B هي $y=3x+11$

4. إنشاء المماسين ورسم (C).



12.

1. عد إلى التمرين 11.

2. أ) عد إلى التمرين 11.

ب) لكي نبيّن أنّه توجد نقطتان من منحني الدالة f يكون معامل توجيه المماس عند كل منهما يساوي (-1) يكفي أن تبيّن أنّ للمعادلة $f'(x)=-1$ حلين متمايزين.

ج) معادلة المماس لمنحني الدالة f عند النقطة التي فاصلتها x_0 هي $y= f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$.

3. لرسم المماسين والمنحني (C) يمكن الاستفادة من نقط تقاطع المنحني مع حاملي محوري الإحداثيات إن وجدت، ونقط أخرى.

13.

1. لكي نبيِّن أنّه يوجد عددين حقيقيين a و b حيث $f(x)=a+\dfrac{b}{-x+2}$

يمكن انتهاج إحدى الطريقتين:

<u>الطريقة الأولى</u>

وفيها نكتب $f(x)=a+\dfrac{b}{-x+2}$ على شكل كسر أي

$$f(x)=\frac{-a\,x+(2a+b)}{-x+2}$$

ثمّ نطابق مع $f(x)=\dfrac{x+1}{-x+2}$ وذلك من أجل كل x من $]-\infty;2[$

أي من $\dfrac{-a\,x+(2a+b)}{-x+2}=\dfrac{x+1}{-x+2}$ نجد $\begin{cases}-a=1\\2a+b=1\end{cases}$

ومن جملة المعادلتين $\begin{cases}-a=1\\2a+b=1\end{cases}$ نجد $\begin{cases}a=-1\\b=3\end{cases}$

الطريقة الثانية

وفيها نستعمل القسمة (أُنظر العملية المقابلة)

$$\begin{array}{r|l} x+1 & -x+2 \\ \hline -(x-2) & -1 \\ \hline 3 & \end{array}$$

فنجد مباشرة $f(x)=-1+\dfrac{3}{-x+2}$

أي $a=-1$ و $b=3$

2. **إرشاد:** تغيرات الدالة f ، والمستقيمات المقاربة للمنحني (C)، نلخصها في جدول التغيرات المرفق.

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	||	$+$
$f(x)$	$-1 \nearrow +\infty$	||	$-\infty \nearrow -1$

3. لتعيين تقاطع المنحني (C) والمستقيم (Δ) نحل الجملة $\begin{cases} y=x+1 \\ y=f(x) \end{cases}$

أي $\begin{cases} y=x+1 \\ y=\dfrac{x+1}{-x+2} \end{cases}$ أي $\begin{cases} y=x+1 \\ (x+1)(-x+2)=x+1 \end{cases}$

من المعادلة الثانية نجد $x=1$ (وهي قيمة مقبولة لأنّها تنتمي إلى $]-\infty;2[$) أو $x=-1$ (مرفوض لأنّه لا ينتمي إلى $]2;-\infty[$)

و بالتعويض في المعادلة الثانية نجد $y=2$ ، ومنه المنحني (C) والمستقيم (Δ) يتقاطعان في النقطة $A(1;2)$.

لتحديد الوضع النسبي للمنحني (C) والمستقيم (Δ) ندرس إشارة الفرق $f(x)-y$.

لدينا

$$f(x)-y=\frac{x+1}{-x+2}-(x+1)=\frac{x+1-(x+1)(-x+2)}{-x+2}=\frac{x^2-1}{-x+2}$$

من $\frac{x^2-1}{-x+2}=0$ نجد $x=1$ (وهي قيمة مقبولة لأنّها تنتمي إلى $]-\infty;2[$) أو $x=-1$ (مرفوض لأنّه لا ينتمي إلى $]-\infty;2[$)

ويمكن تقديم إشارة العبارة $\frac{x^2-1}{-x+2}$ بالجدول الآتي:

x	$-\infty$		-1		1		2		$+\infty$
x^2-1		$+$	0	$-$	0	$+$	|	$+$	
$-x+2$		$+$	|	$+$	|	$+$	0	$-$	
$\frac{x^2-1}{-x+2}$		$+$	0	$-$	0	$+$	||	$-$	

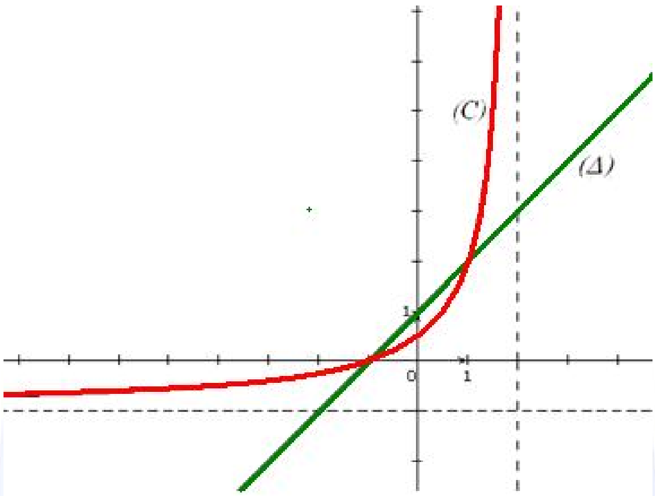
ومنه

x	$-\infty$		-1		1		2
$f(x)-y$		$+$	0	$-$	0	$+$	||

نستنتج مما سبق أنّه :

- في كل من المجالين $]-\infty;-1[$ و $]1;2[$ وجدنا $f(x)-y>0$ ومنه المنحني (C) فوق المستقيم (Δ).
- في المجال $]-1;1[$ وجدنا $f(x)-y<0$ ومنه المنحني (C) تحت المستقيم (Δ).

4. عند رسم (Δ) والمنحني (C) يمكن ملاحظة النتائج المحصل عليها فيما سبق.



.14

1. أ) تجد جدول تغيرات لكل من الدالتين f و g.

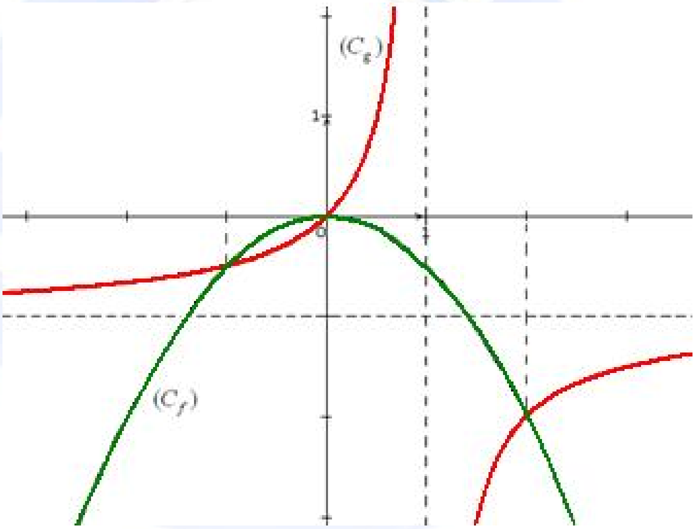
x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$		$-$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\searrow$	$-\infty$

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	$\Vert$	$+$	
$g(x)$	-1	$\nearrow$	$+\infty \Vert -\infty$	$\nearrow$	-1

ب) لاحظ نهايات الدالة g من جدول التغيرات، ومنها يمكن استنتاج معادلتي المستقيمين المقاربين.

2. يمكن تعيين نقط تقاطع المنحنيين (C_f) وَ (C_g) بحل جملة المعادلتين $\begin{cases} y = f(x) \\ y = g(x) \end{cases}$ والحصول على النقط $A(-1;-0,5)$ و $B(0;0)$ و $C(2;-2)$

3. رسم المنحنيين (C_f) وَ (C_g) وملاحظة نقط تقاطعهما.

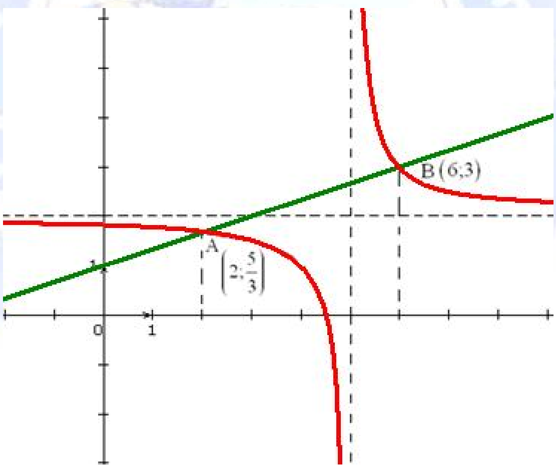


.15

1. للبحث حسابيا عن تقاطع المستقيم (Δ) والمنحني (C) نقوم بحل جملة المعادلتين التاليتين:

$\begin{cases} y=\dfrac{2x-9}{x-5} \\ x-3y+3=0 \end{cases}$ والحصول على النقطتين $\mathrm{A}\left(2;\dfrac{5}{3}\right)$ و $\mathrm{B}(6;3)$.

2. للتحقق من النتائج المحصل عليها في الجزء الأول بيانيا نرسم كلا من المستقيم (Δ) والمنحني (C) فتظهر النتائج.



.16

1. المنحني (C) يقبل مستقيما مقاربا (Δ) موازي لحامل محور الفواصل معادلته $x=-1$ لأنّ $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-1$.

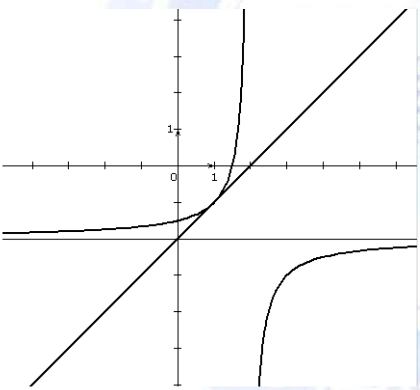
لدراسة وضعية المنحني (C) بالنسبة إلى (Δ) ندرس إشارة الفرق $f(x)-(-1)$ ، الذي يساوي $\dfrac{1}{-x+1}$

3. لمناقشة عدد وإشارة حلول المعادلة $(m+1)x-m=0$ في $[0;1[\cup]1;+\infty[$ بيانيا، ابدأ بكتابة المعادلة $(m+1)x-m=0$ على الشّكل $\frac{x}{-x+1}=m$.

17.

الدالة	f	g	h	k	ℓ	φ
تمثيلها البياني	$(C6)$	$(C3)$	$(C2)$	$(C1)$	$(C4)$	$(C5)$

18.



1. ادرس النهايات وإشارة الدالة المشتقة، وشكِّل جدول التغيرات.

2. أ) تجد معادلة المماس (T) هي $y=x-2$.

ب) بعد حساب العبارة $f(x)-(x-2)$ ودراسة إشارتها، نستنتج وضعية المنحني (C) بالنسبة إلى المماس (T).

3. المماس للمنحني (C) موازيا للمستقيم الذي معادلته $y=x+2$ معناه أن معامل توجيه المماس هو 1.

البحث عن نقط من المنحني (C) يكون عندها المماس له موازيا للمستقيم الذي معادلته $y=x+2$ (أي معامل توجيهه هو 1) يؤول إلى البحث عن فواصل هذه النقط بحل المعادلة $f'(x)=1$.

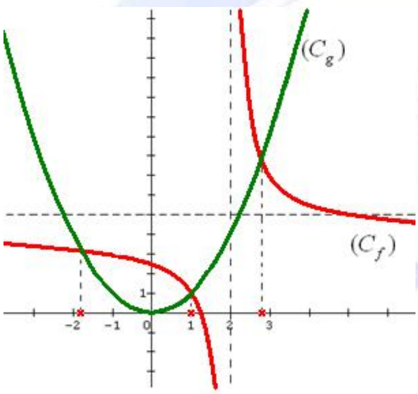
.19

.1 بضرب طرفي المعادلة $x^2=\frac{4x-5}{x-2}$ ، $(x\neq 2)$ في $x-2$ وكتابة معادلة صفرية تجد المعادلة $x^3-2x^2-4x+5=0$.

أ) استعمل القسمة أو المطابقة للحصول على $f(x)=4+\frac{3}{x-2}$

ب) الدالة f متناقصة تماما على المجال $]-\infty;2[$ والمجال $]2;+\infty[$.

.3 رسم منحني الدالتين f و g .



.4 بقراءة بيانية فإنّ عدد حلول المعادلة: $x^3-2x^2-4x+5=0$ هو عدد نقط تقاطع منحنيي الدالتين f و g وهو ثلاثة.

الحلول هي فواصل نقط التقاطع،

وهي: $-1,8$ (مقرّب) و 1

و $2,8$ (مقرّب).

الطريقة الجبرية

.1 واضح أنّ $x^3-2x^2-4x+5=(x-1)(x^2-x-5)$

ب) للمعادلة $x^2-x-5=0$ حلان هما:

$$x_1=\frac{1+\sqrt{21}}{2}\simeq 2,8 \quad \text{و} \quad x_2=\frac{1-\sqrt{21}}{2}\simeq -1,8$$

.3 حلول المعادلة $x^3-2x^2-4x+5=0$ هي:

$$x_1=\frac{1+\sqrt{21}}{2} \quad \text{و} \quad x_2=\frac{1-\sqrt{21}}{2} \quad \text{و} \quad x_3=1$$

V. التقويم الذاتي:

أ. اختيار من متعدد

في كل من الحالات الآتية ثلاثة اقتراحات، واحد منها فقط صحيح عيّنه.

1) f دالة للمتغير الحقيقي x معرفة بـِ $f(x)=\dfrac{4x-14}{10-2x}$

أ) الدالة f معرفة على $\mathbb{R}-\{-5\}$.

ب) الدالة f معرفة على $\mathbb{R}-\{5\}$.

ج) الدالة f معرفة على $]-\infty;10[\cup]10;+\infty[$.

2) f دالة معرفة على $\mathbb{R}-\{5\}$ بـِ $f(x)=\dfrac{2x-7}{5-x}$

أ) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-2$

ب) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=2$

ج) $\lim\limits_{x\xrightarrow{<}5} f(x)=-\infty$.

3) $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}\frac{1}{2}} \dfrac{2x+1}{1-2x}$ تساوي

أ) $+\infty$ ب) $-\infty$ ج) 0.

4) f دالة معرفة على $\mathbb{R}-\{5\}$ بـِ $f(x)=\dfrac{2x-7}{5-x}$

أ) منحني الدالة f لا يقطع حامل محور الفواصل.

ب) منحني الدالة f لا يقطع حامل محور التراتيب.

ج) منحني الدالة f يقطع حاملي محوري الاحداثيات.

5) f دالة للمتغير الحقيقي x معرفة بـِ $f(x)=\dfrac{2x-7}{5-x}$

أ) إشارة مشتقة الدالة f ثابتة على $\mathbb{R}-\{5\}$.

ب) للمعادلة $f'(x)=0$ حل في $\mathbb{R}-\{5\}$.

ج) الدالة f متناقصة تماما في $\mathbb{R}-\{5\}$.

6) منحني الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}-\{3\}$ بـِ $f(x)=\dfrac{2x}{3-x}$

أ) لا يقبل مستقيما مقاربا.

ب) يقبل مستقيما مقاربا معادلته $y=-2$.

ج) يقبل مستقيما مقاربا معادلته $x=-3$.

7) منحني الدالة f المعرفة بـِ $f(x)=-3x+\dfrac{\sqrt{5}}{3x-6}$

أ) يقبل مستقيما مقاربا معادلته $y=-3$.

ب) يقبل حامل محور التراتيب مستقيما مقاربا.

ج) يقبل مستقيما مقاربا معادلته $x=2$.

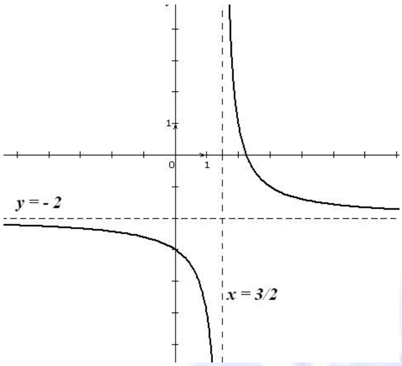
8) منحني الدالة f المعرفة بـِ $f(x)=\dfrac{2}{x+5}$ يقبل، عند النقطة التي فاصلتها -4، مستقيما مماسا معادلته:

أ) $y=2x+10$.

ب) $y=-2x-6$.

ج) $y=-2x-10$.

9) التمثيل البياني المقابل هو للدالة f المعرفة بـِ:



أ) $f(x)=\dfrac{4x-9}{2x-3}$.

ب) $f(x)=\dfrac{-9}{3-2x}$.

جـ) $f(x)=\dfrac{4x-9}{3-2x}$.

ب. صحيح أم خاطئ

في كل حالة مما يأتي خمسة نصوص، ميّز بين الصحيحة منها والخاطئة.

1) f دالة معرفة على $\mathbb{R}-\{0,5\}$ بـِ $f(x)=\dfrac{x+1}{0,5-x}$

أ) $\lim\limits_{x \xrightarrow{<} 0,5} f(x) = -\infty$.

ب) منحني الدالة f يقبل مستقيما مقاربا معادلته $x=-0,5$.

جـ) منحني الدالة f يقبل مستقيما مقاربا معادلته $y=-1$.

د) $f(x)=-1+\dfrac{1,5}{0,5-x}$ هي عبارة أخرى للدالة .

هـ) المستقيمان المقاربان لمنحني الدالة f يتقاطعان في النقطة التي إحداثياتها $(0;-1)$.

2) f دالة معرفة على $\mathbb{R}-\{3\}$ بـِ $f(x)=-2+\dfrac{1}{2x-6}$

أ) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -2$.

ب) منحني الدالة f يقبل مستقيما مقاربا معادلته $y=\dfrac{1}{2}$.

جـ) منحني الدالة f يقبل مستقيما مقاربا معادلته $x=3$.

د) $f(x)=\dfrac{-4x+13}{2x-6}$ هي عبارة أخرى للدالة .

ه) مشتقة الدالة f تنعدم مرة واحدة على الأقل.

3) f دالة معرفة على $\mathbb{R}-\{-2\}$ جدول تغيراتها

x	$-\infty$	-2	$+\infty$
$f(x)$	$0 \nearrow +\infty$	‖	$-\infty \nearrow 0$

أ) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -2$.

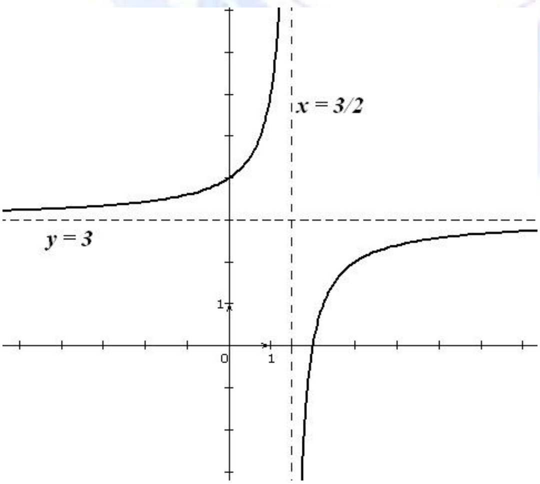
ب) منحني الدالة f يقطع حامل محور الفواصل.

ج) منحني الدالة f يقطع حامل محور التراتيب.

د) مشتقة الدالة f موجب تماما على $\mathbb{R}-\{-2\}$.

ه) إذا كان $x<-2$ فإن $f(x)<0$.

4) f دالة معرفة على $\mathbb{R}-\{3/2\}$ بتمثيلها البياني في الشكل المقابل.



أ) $\lim\limits_{x \xrightarrow{<} 3/2} f(x) = -\infty$.

ب) $\lim\limits_{X \to +\infty} f(x) = 3$.

جـ) مشتقة الدالة f موجب تماما على $\mathbb{R} - \{3/2\}$.

د) مشتقة الدالة f تنعدم مرة واحدة على الأقل.

هـ) إذا كان $x > 3/2$ فإن $f(x) < 3$.

أ. أجوبة اختيار من متعدد

1) ب
2) أ
3) ب
4) جـ
5) أ
6) ب
7) جـ
8) جـ
9) جـ

ب. أجوبة صحيح أم خاطئ

الحالة	النصوص الصحيحة	النصوص الخاطئة
1)	جـ. د.	أ. ب. هـ.
2)	أ. جـ. د.	ب. هـ.
3)	جـ. د. هـ.	أ. ب.
4)	ب. جـ. هـ.	أ. د.

VI. استعد للبكالوريا:

1. التمرين الثالث من الموضوع الأول (دورة جوان2009) (09 نقاط)

f دالة عددية معرفة على $\mathbb{R}-\{-1\}$ بـِ $f(x)=\dfrac{x-3}{x+1}$

و (C_f) تمثيلها البياني في مستوى منسوب إلى معلم متعامد متجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$

1) بيّن أنّ الدالة f تكتب على الشكل $f(x)=1+\dfrac{a}{x+1}$ حيث a عدد حقيقي يطلب تعيينه.

2) أُحسب نهاية الدالة f عند $(+\infty)$ و $(-\infty)$ و (-1)، ثمّ فسّر النتائج المحصل عليها بيانيا.

3) أُحسب $f'(x)$ ثمّ شكِّل جدول تغيرات f .

4) اكتب معادلة للمماس (Δ) للمنحني (C_f) عند النقطة التي فاصلتها 3.

5) عيّن إحداثيي نقط تقاطع المنحني (C_f) مع حاملي محوري الإحداثيات.

6) أُرسم كلا من (Δ) و (C_f).

حل	السلّم

1) كتابة $f(x)$ على الشكل $f(x)=1+\dfrac{a}{x+1}$ إما بالقسمة أو بالمطابقة والحصول على $f(x)=1+\dfrac{-4}{x+1}$ أي $a=-4$. — 0,5

2) بما أنّ

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
$x+1$		$-$	0	$+$	

فإنّ

$$\lim_{x \xrightarrow{<} -1} f(x)=+\infty \quad \text{و} \quad \lim_{x \xrightarrow{>} -1} f(x)=-\infty$$

$$\text{و} \quad \lim_{x\to+\infty} f(x)=1 \quad \text{و} \quad \lim_{x\to-\infty} f(x)=1$$

— 4×0,5

التفسير البياني: المنحني (C_f) يقبل مستقيمين مقاربين معادلتيهما: $x=-1$ و $y=1$. — 2×0,5

3) حساب $f'(x)$ والحصول على $f'(x)=\dfrac{4}{(x+1)^2}$ — 1

من أجل كل x من $\mathbb{R}-\{-1\}$ لدينا $(x+1)^2>0$

ومنه $f'(x)>0$ والدالة f متزايدة تماما على $\mathbb{R}-\{-1\}$.

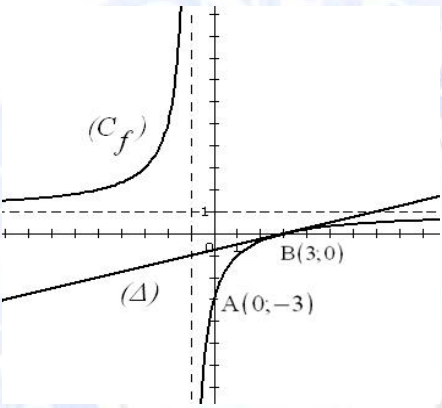
جدول التغيرات:

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	‖	$+$	
$f(x)$	1	↗	$+\infty$ ‖ $-\infty$	↗	1

— 2×0,5

4) معادلة المماس (Δ) هي:

$y= f'(3)(x-3)+ f(3)$ أي $y=\frac{1}{4}(x-3)$	1
5) تقاطع المنحني (C_f) مع حاملي محوري الإحداثيات: مع حامل محور التراتيب: $A(0;-3)$ مع حامل محور الفواصل: $B(3;0)$	2×0,5
6) رسم كل من (Δ) و (C_f).	1+0,5



2. التمرين الأول من الموضوع الثاني (دورة جوان2009) (08 نقاط)

لتكن f دالة عددية معرفة على المجال $]2;+\infty[$ بـ

$$f(x)=-2+\frac{3}{x-2}$$

• كل سؤال من الأسئلة الخمسة الآتية يتضمن إجابة واحدة صحيحة، تعرّف عليها، مع التبرير.

س1) يمكن كتابة الدالة f على الشكل :

1) $f(x)=\frac{7+2x}{x-2}$ 2) $f(x)=\frac{-2x+7}{x-2}$ 3) $f(x)=\frac{-2x-7}{x-2}$

س2) f' مشتق الدالة f على المجال $]2;+\infty[$ وعبارتها $f'(x)$ هي:

1) $f'(x)=\frac{3}{(x-2)^2}$ 2) $f'(x)=\frac{-2}{(x-2)^2}$ 3) $f'(x)=\frac{-3}{(x-2)^2}$

س3) نهاية $f(x)$ عند $(+\infty)$ هي:

1) $+\infty$ 2) $+3$ 3) -2

س4) المنحنى (C_f) يقبل مستقيما مقاربا معادلته هي:

1) $x=2$ 2) $x=3$ 3) $y=2$

س5) المنحنى (C_f) يقبل مماسا عند النقطة ذات الفاصلة $x_0=3$ معادلته هي:

1) $y=-\frac{1}{3}x+10$ 2) $y+3x-10=0$ 3) $y=3x-10$

حل	السلّم
ج1) يمكن كتابة الدالة f على الشكل: 2) $f(x)=\frac{-2x+7}{x-2}$ لأنّ $\frac{-2x+7}{x-2}=\frac{-2(x-2)+3}{x-2}=-2+\frac{3}{x-2}$	1+0,5
ج2) عبارة $f'(x)$ هي: 3) $f'(x)=\frac{-3}{(x-2)^2}$ لأنّ $f'(x)=0+\frac{0\times(x-2)-1\times3}{(x-2)^2}=\frac{-3}{(x-2)^2}$ أو $f'(x)=\frac{-2\times(x-2)-1\times(-2x+7)}{(x-2)^2}=\frac{-3}{(x-2)^2}$	1+0,5
ج3) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-2$ لأنّ $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(-2+\frac{3}{x-2}\right)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{3}{x-2}\right)=0$ أو $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{-2x+7}{x-2}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{-2x}{x}\right)=-2$	1+0,5
ج4) المنحنى (C_f) يقبل مستقيما مقاربا معادلته هي: 1) $x=2$ لأنّ $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}2} f(x)=+\infty$ وكذلك $\lim\limits_{x\xrightarrow{<}2} f(x)=-\infty$	1+0,5
ج5) المنحنى (C_f) يقبل مماسا عند النقطة ذات الفاصلة $x_0=3$ معادلته هي: 2) $y+3x-10=0$ لأنّ $f(3)=1$ و $f'(3)=-3$	2

وبالتعويض في $y = f'(3)(x-3) + f(3)$ نجد

$y = -3(x-3) + 1 = -3x + 10$ أي $y + 3x - 10 = 0$

3. تمرين مع الإرشاد

f دالة معرفة على $\mathbb{R} - \{3\}$ بـ $f(x) = \dfrac{2x-4}{x-3}$. و (C_f) تمثيلها البياني في مستوى منسوب إلى معلم متعامد متجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

1) أ) اُحسب نهايات الدالة f عند أطراف مجالات مجموعة التعريف.

ب) اُدرس اتجاه تغيّر الدالة f وشكّل جدول تغيّراتها.

2) اوجد نقط تقاطع المنحنى (C) مع حاملي محوري الإحداثيات.

3) أثبت أن المنحنى (C) يقبل مماسين (T) و (T') معامل توجيه كل منهما يساوي -2.

عيّن معادلة لكل من (T) و (T') .

4) اُرسم (T) و (T') والمنحني (C).

إرشادات لحل التمرين

1) أ) في جوار $(+\infty)$ أو $(-\infty)$ يمكن الاستفادة من نهاية كثير حدود هي نهاية الحد الأكبر أس فيه.

في جوار $(+3)$ انتبه إلى إشارة المقدار $(x-3)$

ب) ابدأ بحساب $f'(x)$ عبارة الدالة المشتقة، وادرس إشارتها، ثمّ شكِّل جدول التغيرات.

2) للبحث على إحداثيات تقاطع (C) مع (xx') يمكن وضع $y=0$ وحساب قيم x.

بينما في تقاطع (C) مع (yy') نضع $x=0$ ونحسب قيمة y.

3) المنحنى (C) يقبل مماسين معامل توجيه كل منهما يساوي -2 معناه للمعادلة $f'(x)=-2$ حلان متمايزان في $\mathbb{R}-\{3\}$.

معادلة المماس لمنحنى الدالة f في النقطة التي فاصلتها x_0 هي:

$$y=f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$$

4) لرسم (T) و (T') والمنحني (C) يمكن الاستعانة بنقط مساعدة، بالإضافة إلى نقط تقاطع (C) مع حاملي محوري الإحداثيات.