

CONSECUENCIAS DEL EFECTO ALLEE EN EL
MODELO DE DEPREDACIÓN DE
MAY-HOLLING-TANNER

LINA MARÍA GALLEGO BERRÍO

Universidad del Quindío
Facultad de Ciencias Básicas
Maestría en Biomatemáticas
Armenia
2004

CONSECUENCIAS DEL EFECTO ALLEE EN EL
MODELO DE DEPREDACIÓN DE
MAY-HOLLING-TANNER

LINA MARÍA GALLEGO BERRÍO

Director: Doctor Eduardo González Olivares
Universidad Católica de Valapaiso

Trabajo presentado como requisito para obtener el título de Magister en Biomatemáticas

Universidad del Quindío 2004
Facultad de Ciencias Básicas
Maestría en Biomatemáticas
Armenia
2004

AGRADECIMIENTOS

En primer lugar agradezco a Dios por haberme dado una familia tan maravillosa como la que tengo, porque sin el apoyo de ellos no sería posible alcanzar mis metas. Y en especial a mi madre por los valores que me ha sabido inculcar, la comprensión, la paciencia y su invaluable amor.

Al profesor y amigo Eduardo González quien a través del *Proyecto Fondecyt No 10 10 399 “Dinámica de modelos de depredación y existencia de ciclos límites múltiples”*; pudo financiar mi estadía en Valparaíso Chile el presente año. Gracias Eduardo por toda la colaboración que me supo prestar a tiempo tanto a través del correo electrónico así como la asesoría directa que me brindó. Gracias a toda su maravillosa familia quienes me hicieron sentir como si estuviera en casa a Javier, Pablo y en especial a la señora Laura Violeta por su hospitalidad cariño y comprensión.

Al maestro Hernando Hurtado por el calor humano que tiene para con todas las personas cercanas o no a él. Por haber creído en mí, por darme la comprensión, el apoyo y el afecto que solo puede brindar un verdadero amigo.

A todos los profesores de la maestría quienes con sus conocimientos contribuyeron a mi formación en cada una de las áreas que ellos manejan; en especial a los maestros Jocirei, María Dolly, Hernando, Gladys y Dumar.

A mis compañeros y amigos de la maestría Rosa, Paulo, Deccy y Jorge con quienes tuve la oportunidad de compartir mis conocimientos, inquietudes, aciertos y desaciertos. En especial quiero agradecerle a Rosa María, Jorge Enrique y su esposa Blanca Nubia por su hospitalidad y la amistad que me han sabido brindar. A Paulo por compartir sus conocimientos conmigo y los demás compañeros.

A mis compañeros de la Vicerrectoría Académica Miriam, Guillermo y Julio por la comprensión y la amistad que me han sabido brindar para llevar a cabo mi trabajo diario como equipo de trabajo que somos y haber creído en mi responsabilidad laboral, lo que me permitió viajar a Chile y terminar con éxito esta tesis.

A todas y cada una de las personas con las que tuve la oportunidad de compartir diferentes momentos en la Universidad Católica de Valparaíso, por su hospitalidad y apoyo que hicieron que me sintiera como en casa pero sintiéndome orgullosa de ser colom-

biana. En especial a Betzabé, Verónica, Hector Meneses, Cristián, Bety, Alejandro, Jaime Mena, Jorge González, José Klenner, Camel Alire, Ana María y todos los demás integrantes del Grupo de Ecología Matemática cuyo nombre se me escapa en este momento.

RESUMEN

En este trabajo analizamos la dinámica de un modelo de depredación obtenido al considerar el efecto Allee en la ecuación de crecimiento de las presas en el modelo de May-Holling-Tanner, el cual asume que la interacción expresada por la respuesta funcional es del tipo Holling II.

Hacemos énfasis sobre el estudio del punto de equilibrio $(0, 0)$ pues tiene una fuerte influencia en el comportamiento global del sistema en especial para la coexistencia de ambas especies y para su extinción. Además, mostramos la existencia de una curva separatriz en el plano de fase, la cual explica porque el sistema es altamente sensible a las condiciones iniciales (caos).

Palabras claves: efecto Allee, bifurcaciones, ciclos límite, modelo presa-predador.

TABLA DE CONTENIDO

1. GENERALIDADES	10
1.1 EFECTO ALLEE DÉBIL Y FUERTE	10
1.1.1 ¿qué es el efecto Allee?	11
1.1.2 modelación del efecto Allee demográfico	13
1.1.3 modelos continuos para el efecto Allee	14
1.2 RESPUESTA FUNCIONAL DE LOS DEPREDADORES	15
2. CONSTRUCCIÓN DEL MODELO	19
2.1 FUNCIÓN DE CRECIMIENTO DE LAS PRESAS	19
2.2 FUNCIÓN DE CAPTURA O RESPUESTA FUNCIONAL DE LOS DEPREDADORES	21
2.3 FUNCIÓN DE CRECIMIENTO DE LOS DEPREDADORES	22
2.4 MODELO A ESTUDIAR	23
3. ESTUDIO DE LOS PUNTOS CRÍTICOS Y DIAGRAMA DE BIFURCACIONES PARA EL EFECTO ALLEE DÉBIL	25
3.1 TRANSFORMACIÓN DEL MODELO	25
3.2 RESULTADOS BÁSICOS	27
3.3 CONDICIONES DE EXISTENCIA DE LOS PUNTOS CRÍTICOS DEL SISTEMA	30
3.4 NATURALEZA DE LOS PUNTOS CRÍTICOS	35
3.4.1 Puntos críticos sobre los ejes	35
3.4.2 Desingularización del origen	35
3.4.3 Puntos críticos positivos	39
3.5 OTRAS PROPIEDADES DEL SISTEMA	49

3.5.1	Estabilidad y cantidad de ciclos límite	49
3.5.2	Teoremas generales	59
3.6	OBTENCIÓN DE LOS RETRATOS DE FASE.....	61
3.7	DIAGRAMA DE BIFURCACIONES	64
4.	ESTUDIO DE LOS PUNTOS CRÍTICOS PARA EL EFECTO ALLEE FUERTE	72
4.1	PUNTOS CRÍTICOS DEL SISTEMA	72
4.2	NATURALEZA DE LOS PUNTOS DE EQUILIBRIO.....	76
4.2.1	Puntos críticos sobre los ejes	76
4.2.2	Desingularización del origen	77
4.2.3	Puntos críticos positivos	79
5.	CONCLUSIONES	87
A	APENDICE BLOWING UP	89
A.1	BLOWING UP POLAR.....	90
A.1.1	Construcción	90
A.1.2	Notación.....	91
A.1.3	Cálculos concernientes al blowing-up	91
A.1.4	Un blowing-up direccional	94
6.	BIBLIOGRAFÍA	97

INTRODUCCIÓN

Un modelo importante para explicar la interacción presa-depredador en Ecología Matemática es el modelo propuesto por Robert May [Bel, May, Mur, Yod] también conocido como el modelo de May-Holling-Tanner [A P II]. El modelo de May, ha sido utilizado por Wolking y otros [Wok] para investigar numéricamente la dinámica de un sistema presa-predador de una peste en árboles frutales, bajo la hipótesis de que los parámetros dependen de la temperatura.

En un trabajo anterior [S G-O] ha sido estudiada la dinámica de este modelo, teniendo en cuenta que la tasa de crecimiento del tamaño natural de las presas es una función compensada de la forma $r(x) = r(1 - \frac{x}{K})$; pero no ha sido tenido en cuenta que hay una fuerte influencia de otros fenómenos biológicos sobre esta tasa que afectan toda la dinámica del sistema como son: la creciente dificultad para encontrar un compañero [McC], la reducida defensa antidepredador [Co G II], la fragmentación de la población [Gru] y los efectos de la depredación sobre las presas entre otros. Todos estos comportamientos son conocidos como comportamientos tipo Allee (de la tasa de nacimientos) y su efecto en la tasa de crecimiento de $r(x)$ sobre la población de las presas es conocido como efecto Allee, el cual trae consigo una función descompensada.

En consecuencia asumimos que el efecto Allee modifica la función de crecimiento de las presas, la cual se expresa ahora por la función $f(x) = r(1 - \frac{x}{K})(x - m)x$, donde el parámetro m es el *umbral de extinción*, o *mínimo de población viable*. La respuesta funcional es $h(x, y) = \frac{axy}{x+a}$ y la función de crecimiento de los depredadores es del tipo Leslie [Les] $\frac{dy}{dt} = sy(1 - \frac{y}{K_y})$ y en este caso consideramos que es proporcional a la abundancia de las presas, i.e $K_y = nx$. De este modo obtenemos un sistema de tipo Kolmogorov [G H].

En la dinámica poblacional cualquier mecanismo ecológico que pueda llevar a una relación positiva, entre un componente medible de la adaptación (fitnes) individual y el número o densidad de los conespecíficos puede ser llamado un mecanismo de *efecto Allee*, fenómeno que se da en algunas poblaciones animales y que expresa una relación positiva a bajas densidades, entre la tasa de crecimiento de la población y la densidad [Co G II, Ste, St S]. En el campo pesquero este fenómeno es llamado *depensación* [Ck I].

La introducción del efecto Allee produce una notable modificación en el comportamiento del sistema de May-Holling-Tanner estudiado en [S G-O] quienes demostraron que dicho sistema tiene un único punto de equilibrio al interior del primer cuadrante rodeado de dos ciclos límite, comprobando además que para cierto conjunto de parámetros, la estabilidad local no implica estabilidad global. En el modelo aquí estudiado aparece una variada gama de dinámicas que no son topológicamente equivalentes al sistema May-Holling original. Asumimos además en esta presentación, que el tamaño de las poblaciones varía en forma continua con respecto al tiempo y que ellas están uniformemente distribuidas en un medio ambiente, no considerando distinción por edades ni sexo. En el desarrollo del trabajo demostramos la ocurrencia de la bifurcación de Hopf y la bifurcación silla-nodo de codimensión dos tanto para el efecto Allee débil como fuerte, establecemos la cantidad de ciclos límite para el comportamiento global del sistema y por último hacemos una clasificación del comportamiento del sistema de acuerdo al juego de parámetros que se tengan (diagrama de bifurcaciones) efectuando este estudio sobre un sistema topológicamente equivalente al original que se consigue a través de un difeomorfismo [Chi, G H].

Para analizar este sistema utilizamos diversas herramientas matemáticas que hacen parte de la teoría cualitativa de ecuaciones diferenciales o de la teoría de los sistemas dinámicos, como lo son el Teorema de la Variedad Central, el Teorema de Poincaré-Bendixon, el Blowing-up polar y direccional, las formas normales, las cantidades de Liapunov y el Teorema de Andronov-Hopf entre otras; todas ellas para determinar el comportamiento mismo del modelo para los distintos juegos de parámetros y otras de carácter general, como es el caso de la existencia de una región invariante y la demostración que las soluciones son acotadas.

Todos los resultados que encontramos tienen explicación biológica, es mas, el modelo mismo puede representar la interacción de un sistema presa-depredador de la vida real.

1. GENERALIDADES

1.1 EFECTO ALLEE DÉBIL Y FUERTE

La manera en que las presas evitan ser comidas son tan diversas como las tácticas de caza que usan sus depredadores. El ocultamiento, la huida y una defensa activa pueden ser métodos efectivos contra la depredación, dependiendo de las circunstancias bajo las cuales se da la relación presa-depredador.

Por ejemplo, las praderas africanas ofrecen pocos lugares para ocultarse a los ciervos, antílopes y otros animales que pastan, de modo que la huida se constituye en la mejor opción y su eficacia depende de la temprana detección de los depredadores y del desarrollo de movimientos rápidos. Las plantas al no poder huir como los animales desarrollan espinas o sustancias químicas que evitan que sean comidas por los herbívoros.

Realmente existen muchas clases de estrategias antidepredatorias que podrían ser consideradas como refugios para la presa, el desarrollo de defensas químicas, la reducción de la visibilidad, mimetismo, etc.

Pero a pesar de que existen mecanismos de defensa contra la depredación estos pueden fallar y en algunas ocasiones vale la pena tomar en cuenta la influencia de otros fenómenos biológicos intra e inter específicos que afectan toda la dinámica de un sistema determinado, es entonces cuando entramos a considerar el *efecto Allee*.

Usualmente en el contexto de dinámica poblacional, el efecto Allee describe una situación en la cual la tasa de crecimiento poblacional decrece bajo alguna densidad crítica mínima [Ba], o bien una reducida capacidad de crecimiento poblacional [DR P]. En algunos casos esta tasa de crecimiento puede aun ser negativa, originando un umbral de extinción [Ba].

Este efecto, descrito por primera vez por Warder Clyde Allee y sus colaboradores como podemos ver en los artículos de Allee de 1931 y 1938 o también en Allee y otros escrito en 1949, se refiere a cualquier proceso por medio del cual una componente cualquiera de la adaptabilidad está correlacionada con el tamaño poblacional [Ba, L B].

1.1.1 ¿qué es el efecto Allee?

En una población, cualquier mecanismo ecológico que pueda llevar a una relación positiva entre un componente medible de la aptitud (fitness) individual y el número o densidad de los conoespecíficos puede ser llamado un mecanismo de efecto Allee [Kent, St S, Wer].

En un artículo publicado por Stephens en 1999 [Ste] denominan *efecto Allee componente* cuando la aptitud(fitness) individual es reducida a bajos tamaños de población y el efecto de competición resulta dominante, de manera que la variación respecto al tamaño poblacional es no positiva para cualquier tamaño poblacional, es decir, el éxito reproductivo de un individuo nunca aumenta cuando la población crece, debido a que la competición por los recursos crece cuando la cantidad de competidores se incrementa [F R].

En el artículo de Wertheim [Wer], expresan que el efecto Allee componente refleja solo un mecanismo aislado que produce un beneficio a la agregación, el cual puede o no ser suficiente para compensar los costos conexos. Ellos identifican este tipo de efecto Allee en la explotación de un recurso por larvas de un tipo de *Drosophila*, el cual puede explicar la evolución del uso de una feromona de agregación en esa especie, probando que el efecto puede incrementar la eficiencia de un grupo de larvas para moderar el crecimiento de unos hongos. A su vez, en [Av] se propone un modelo cuantitativo para esta interpretación del efecto Allee.

Es ampliamente aceptado que el efecto Allee puede incrementar el riesgo de extinción a bajas densidades de población; también es denominado efecto de competición negativa [Wa I] o costo de rareza [Sch] o dependencia inversa positiva de la densidad [DR P], allellocatalisis [L H]. Como término opuesto han sido empleados entre otros: apiñamiento, compensación y denso dependencia.

En el campo pesquero este fenómeno es llamado depensación [B C, Ck I, Ck II, Den I, Den II, L H] aunque hay algunos autores que no lo consideran equivalente al efecto Allee [B B], porque algunos biólogos dedicados a estudios pesqueros lo refieren a relaciones más bajas que las esperadas del reclutamiento de hembras, siendo principalmente un fenómeno de nivel de población, usualmente cuantificado con modificaciones a las funciones de Beverton-Holt o de Ricker para el reclutamiento de hembras.

En epidemiología, se denomina umbral de erradicación, al nivel de población de susceptibles bajo el cual una enfermedad infecciosa es eliminada de una población [Ba]. En el contexto de metapoblaciones, un umbral de extinción, expresa un valor crítico de parches bajo el cual una metapoblación va a la extinción, aun cuando algún habitat esté aun disponible [Ba].

Muchos ejemplos del efecto Allee han sido descritos para bajas densidades de población, pero este efecto en el sentido dado por Stephens et al [Ste], puede influir también en un amplio rango de densidades [Kok]. A su vez, las poblaciones pueden exhibir la dinámica de este efecto debido a un amplio rango de fenómenos biológicos tales como:

- dificultad en la búsqueda de pareja [McC]
- termoregulación social,
- reducida defensa antidepredador [Co I]
- reducida efectividad de la vigilancia antidepredador [Co I]
- fragmentación de la población [Gru]
- tiempo de gestación [A W]

Además, variados estudios empíricos de poblaciones naturales han mostrado la existencia de este fenómeno en diferentes tipos de organismos incluyendo mamíferos [Co G II, Ste], aves [Lam], peces [C C], invertebrados [Men, S R-C], metapoblaciones [Ba, Gre] y plantas [Fis, H Mc].

La dinámica del efecto Allee referida al reducido crecimiento de la población en bajos niveles de población tiene importancia para estudios sobre conservación [A E], éxito de colonización [Fag, F M, L K, Kei] y el manejo de la vida silvestre [L B].

El efecto Allee demográfico puede ser débil o fuerte, pero usualmente los ecólogos consideran que todo los efectos Allee son efectos Allee fuerte. Sin embargo es claro, de sus ejemplos, que Warder C. Allee (Allee 1931, 1938) consideró ambos tipos [Wa K, Wa II]. En modelos de pesquerías se denomina depensación crítica y depensación pura respectivamente [Ck I].

El efecto Allee es un fenómeno importante e interesante bajo las perspectivas ecológica y matemática. Desde el punto de vista ecológico, es una situación a bajas densidades de

la población donde la tasa de crecimiento por individuo es una función dependiente de la densidad [Den I] que incrementa su probabilidad de extinción [Co G I]; la importancia de este fenómeno ha sido enfatizada en desarrollos recientes en algunas áreas de la ecología y de la conservación y puede ser mirado como la base de la sociabilidad animal [St S].

Matemáticamente, modelos simples para este efecto pueden revelar mucho acerca de su dinámica [St S] e implicar la aparición de nuevos puntos de equilibrio que cambian la estabilidad estructural del sistema y pueden ocurrir cambios en la estabilidad de otros puntos de equilibrio.

La marcada diferencia entre el crecimiento logístico y el crecimiento sujeto a efecto Allee puede tener profunda influencia en la ecología poblacional de muchas especies, y una combinación de fluctuaciones de población y el efecto Allee han sido invocados para dar cuenta de la mas dramática extinción de los tiempos modernos: la de la paloma viajera, *Ectopistes migratorius* [St S].

Como resultado del efecto Allee, las especies sociales, particularmente aquellas que están obligadas a ser cooperadoras, pueden ser vulnerables a la extinción [St S]. Las especies que viven en grandes grupos con una escasa reproducción individual pueden declinar su población si están afectadas por el efecto Allee, pero la formación de grupos de defensa o el fenómeno de agregación, podría contrarrestar este efecto .

1.1.2 modelación del efecto Allee demográfico

El efecto Allee ha sido modelado de diferentes maneras usando distintas técnicas matemáticas, considerándolo principalmente un fenómeno determinista, que está frecuentemente asociado a fluctuaciones estocásticas de las poblaciones [Ba]. Los modelos propuestos se han expresado mediante ecuaciones diferenciales ordinarias [C S, L L, M-A G-O], ecuaciones en diferencias [B B, F R, Sc I, Sc II], ecuaciones integro-diferenciales [Eti, Wa K, Wa II], ecuaciones diferenciales en derivadas parciales [A W, DR P, Pet] y matrices [Cus].

El efecto Allee usualmente produce un fenómeno de biestabilidad asociado a un comportamiento caótico de las trayectorias, esto es, situaciones en que dos soluciones que tengan condiciones iniciales muy próximas pueden converger a dos distintos w -límites.

En nuestro caso usaremos una modelación determinista y continua, suponiendo que el tamaño de una población varía con el tiempo, y que está distribuída uniformemente en el espacio, asumiendo que no está dividida por edades ni sexo, ni está afectada por factores abióticos.

1.1.3 modelos contínuos para el efecto Allee

modelos para una sólo especie Las función mas conocida es una función que modifica a la logística y está descrita por:

$$\text{a. } \frac{dx}{dt} = rx \left(1 - \frac{x}{K}\right) (x - m),$$

[B C, Ck I, Ck II, C S, Ed-K, H W, Mur, Yod], donde r y K representan *las tasas de crecimiento intrínseco o potencial biótico* de la especie y la *capacidad de soporte del medio ambiente*, respectivamente. El parámetro m es llamado el mínimo de población viable (MPV) y cuando $m > 0$, se tiene el efecto Allee fuerte, mientras que si $m = 0$, la función representa el efecto Allee débil.

Nosotros postulamos que para representar el efecto Allee débil se puede usar también funciones de la forma:

$$\frac{dx}{dt} = r \left(1 - \frac{x}{K}\right) x^n,$$

llamadas logísticas sesgadas [Ck I], donde $n \geq 1$ mide la dificultad de crecimiento de la población a bajas densidades.

Otras funciones propuestas han sido

$$\text{b. } \frac{dx}{dt} = \left(r \left(1 - \frac{x}{R}\right) \left(\frac{x}{x+C}\right) - D\right) x,$$

[Wa I].

$$\text{c. } \frac{dx}{dt} = r \left(1 - \frac{x}{K}\right) \left(1 - \frac{b+C}{x+C}\right) x,$$

[B B].

$$\text{d. } \frac{dx}{dt} = x \left(r - \frac{rx}{K} - \frac{b}{x+C}\right),$$

[Ste]

modelos para la depredación con efecto Allee En la mayoría de los modelos de depredación se considera que el efecto Allee influye sobre la población de presas y este efecto es independiente del tipo de respuesta funcional o tasa de consumo que exprese el cambio de la depredación con el tamaño de la población de presas y cuantitativamente, la respuesta funcional tiene una influencia en la extensión de la región de biestabilidad [DR P].

En el artículo de Kent [Kent] proponen un modelo, en que el efecto Allee influye en la población de depredadores interpretado a través del sistema de ecuaciones:

$$X_{\mu} : \begin{cases} \frac{dx}{dt} = r \left(1 - \frac{x}{K}\right) x - \frac{qxy}{x+a} \\ \frac{dy}{dt} = \frac{p}{x+a} (x - c) y \end{cases}$$

donde c es el mínimo nivel de población de presas, para sostener a la población de depredadores.

Este modelo es conceptualmente análogo al conocido modelo Rosenzweig McArthur, pero no se da la paradoja de enriquecimiento.

Los modelos discretos para una sólo especie se pueden ver en la Tabla I presentada por Boukal & Berec, 2002 [B B], en los propuestos por Fowler and Ruxton, 2002 [F R] o en Lierman & Hilborn [L H].

1.2 RESPUESTA FUNCIONAL DE LOS DEPRADADORES

Cuando los depredadores se encuentran presentes, la mortalidad en la población de presas debida a la depredación se considera como el producto de la tasa de depredación, definida como el número de presas consumidas por depredador en la unidad de tiempo, y el número de depredadores. Por ejemplo, si la tasa de depredación está dada por una expresión de la forma bxy , (donde x e y son la presa y el depredador respectivamente) esta tasa corresponde a una capacidad de ataque ilimitada y que se incrementa linealmente con la densidad de la presa. Al dividir este término por el número de depredadores, podemos ver que la tasa de consumo por depredador es bx . Por lo tanto, las presas son consumidas en proporción directa con su densidad a un ritmo b , lo cual significa que los depredadores no se sacian, aspecto que se considera poco realista.

La manera como los depredadores remueven presas ha sido denominada como *respuesta funcional de los depredadores o tasa de consumo*. Varios estudios realizados por el entomólogo canadiense C. S. Holling [Hol] mostraron que la tasa de depredación se incrementa con el aumento de la densidad de la presa como lo indica la Figura 1.1, y la cual según él es característica de depredadores invertebrados.

El comportamiento de un sistema presa-depredador puede depender del tipo de respuesta funcional de los depredadores interpretado por una función $H(x, y)$. Tradicionalmente, se ha considerado que la función H dependa únicamente de la densidad de la presa, es decir, $H(x, y) = H(x)$ salvo en los modelos razón-dependiente donde la respuesta funcional depende del cociente presa-depredador, i.e, $H(x, y) = \frac{x}{y}$.

Holling clasificó la respuesta funcional en tres tipos que se denominan usualmente Holling Tipo I, Holling Tipo II y Holling Tipo III, como se muestra en la Figura 1.1. Donde $F(R)$ representa el *consumo por unidad de área por unidad de tiempo por consumidor*, y R es la *densidad del recurso*.

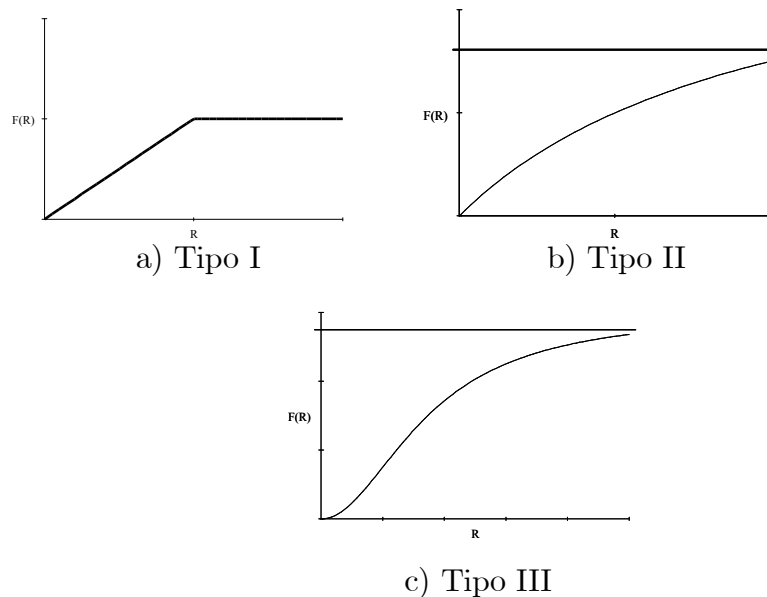


Figura 1.1: Tres tipos de respuesta funcional del depredador respecto a la densidad de su presa, propuesta por Holling.

Según Yodzis la *respuesta funcional tipo I* es poco común en la naturaleza y se presenta en el caso especial de cierta clase de crustáceos fijadores de alimentos que se alimentan de algas unicelulares. Esta respuesta funcional puede ocurrir para depurar el alimento, en

la cual simplemente se atrapa una proporción constante de individuos pasando a través del filtro, y saturándose luego abruptamente [Yod]. La *respuesta funcional tipo II*, en la cual el número de presas consumidas se eleva rápidamente a medida que se aumenta la densidad de las presas, pero que termina por nivelarse para nuevos incrementos es, como se mencionó antes, típica para depredadores invertebrados debido a que éstos les toma cierto tiempo matar y digerir sus presas. La *respuesta funcional tipo III* se asemeja a la tipo II en la medida en que tiene un límite superior para el consumo de presas, pero difiere en el sentido de que la respuesta de los depredadores se reduce con bajas densidades de la población de presas. Holling encontró una respuesta funcional tipo III en pruebas de laboratorio para el depredador vertebrado conocido como *Deermouse*, *Peromyscus leucopus*, y su presa, la pupa del insecto *Sawflies* [Hol]. Ver Figura 1.2.

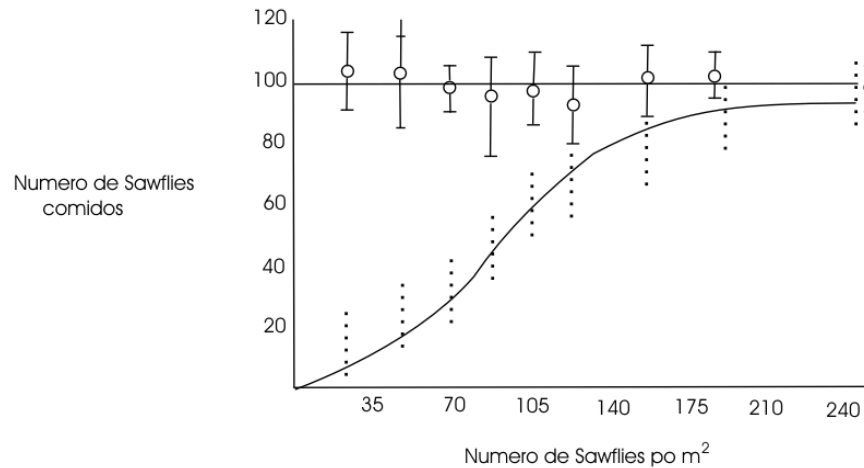


Figura 1.2: Efecto en la densidad de pupas de Sawflies de la cantidad comida por Deermouse. Círculos cerrados: Sawflies comidos. Círculos abiertos: comida alterna+Sawflies comidos.

En este experimento, la población de depredadores tenía una presa alterna en forma de galleta para perros, que estuvo presente todo el tiempo y en cantidades abundantes. Como resultado del experimento se encontró que el total de alimento ingerido fue constante, encontrándose variaciones únicamente en la tasa de ingestión de pupas de Sawflies de acuerdo a una respuesta funcional Tipo III. La forma sigmoide de la Figura 1.2 se debe a que cuando la pupa se hizo escasa, los deermouse no se percataron de su ausencia.

En general, se tiene que este tipo de respuesta funcional es típica de depredadores

vertebrados para los cuales hay una presa alternativa disponible.

Estudios posteriores muestran que estos tres tipos de respuesta funcional pueden ser utilizados para diferentes interacciones en la realidad, de hecho gran parte de los estudio matemáticos consideran la respuesta funcional Holling tipo II como la más típica de las respuestas funcionales. Y también existen trabajos que consideran respuestas funcionales que no son de ninguno de estos tipos como es el caso de $H(x) = ax^q$, $q < 1$ propuesta por Rosenzweig.[Ros].

2. CONSTRUCCIÓN DEL MODELO

En este capítulo establecemos las funciones necesarias para la obtención del modelo a estudiar, de la siguiente forma: en la sección (2.1) trataremos la función de crecimiento de las presas; en la sección (2.2) la función de captura o respuesta funcional de los depredadores; en la sección (2.3) la función de crecimiento de los depredadores y como resultado de estas funciones en la sección (2.4) presentaremos el tipo de modelo obtenido.

2.1 FUNCIÓN DE CRECIMIENTO DE LAS PRESAS

En el estudio de la dinámica del sistema propuesto hay que tener en cuenta el tipo de tasa intrínseca de crecimiento tanto para las presas como para los depredadores, considerando el efecto Allee débil y fuerte para las presas, como sigue:

- *Efecto Allee débil, esto es con $m = 0$*

Dado que la tasa de crecimiento per-cápita para las presas se asume que es de la forma:

$$r(x) = rx\left(1 - \frac{x}{K}\right) \quad (1)$$

donde la función (1) cumple las condiciones

$$\begin{aligned} r(x) &\geq 0, \quad r''(x) \leq 0 \quad \text{para } 0 \leq x \leq K \\ r'(x) &> 0 \quad \text{para } 0 < x < K^* \\ r'(x) &< 0 \quad \text{para } K^* < x < K \end{aligned}$$

decimos entonces que el modelo es descompensado para la presa [B C]. Ver Figura 2.1.

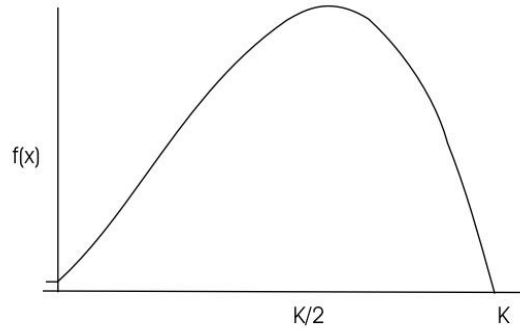


Figura 2.1: Función de depensación, donde la población no tiene un umbral de extinción

- *Efecto Allee fuerte, esto es con $0 < m < K$*

La tasa de crecimiento intrínseca de las presas para este caso es dada por

$$f(x) = xr(x) \text{ con } r(x) = r\left(1 - \frac{x}{K}\right)(x - m) \quad (2)$$

siendo $(x - m)$ una función de descompensación ya que hace que

$$f(x) < 0 \text{ para } 0 < x < m \quad (3)$$

y

$$f(x) \geq 0 \text{ para } m < x < K \quad (4)$$

como consecuencia del cumplimiento de las condiciones (3) y (4), $f(x)$ es una función descompensada crítica [B C]. Ver Figura 2.2.

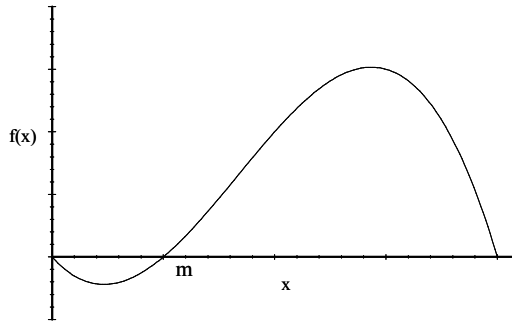


Figura 2.2: Función descompensada crítica

En la figura 2.2 m es el umbral de extinción; si por alguna razón (ver sección 1.1) la densidad cae bajo m , entonces la población irá a la extinción, porque 0 es un atractor local. La población de presas esta sujeta al efecto Allee fuerte, la tasa de crecimiento per-cápita muestra una encorvadura incrementando (de negativo a positivo) en bajas densidades, hasta alcanzar un máximo y luego declinando.

Cuando tenemos un sistema influenciado por una función descompensada crítica es cuando se dá el efecto Allee fuerte o simplemente efecto Allee. En este trabajo, como en muchos otros, se supone que cuando se tiene la influencia de la función descompensada hay un efecto Allee débil al igual que en este trabajo. Vale la pena aclarar que los términos *débil* y *fuerte* los interpretamos con $m = 0$ y $m \neq 0$ respectivamente, y en ambos casos el efecto Allee tiene una fuerte influencia sobre el comportamiento global del modelo como se verá más adelante.

2.2 FUNCIÓN DE CAPTURA O RESPUESTA FUNCIONAL DE LOS DEPREDADORES

En este trabajo consideramos una respuesta funcional Holling Tipo II de la forma:

$$h(x, y) = \frac{qxy}{x + a} \quad (5)$$

donde la función $h(x, y)$ es monotamente creciente y representa el efecto de los depredadores sobre la población de presas, mientras que la función

$$\frac{h(x, y)}{y} = h(x) = \frac{qx}{x+a} \quad (6)$$

representa la tasa de depredación, definida como la cantidad de presas consumidas por un depredador en cada unidad de tiempo. La función $h(x)$ es tal que $\lim_{x \rightarrow \infty} h(x) = q$, osea q es el máximo de la tasa de depredación de $h(x)$ como función de x . Una forma parecida (ver sección 1.2) fue propuesta por el entomólogo canadiense C. S. Holling y corresponde a una respuesta funcional Holling tipo II [Tay].

Por otro lado, podemos observar que si el tamaño de las presas es una constante a , entonces la tasa de depredación es $h(a) = \frac{q}{2}$, es decir, a representa la densidad de las presas donde la tasa de depredación alcanza la mitad de la tasa máxima q y por eso se llama *tasa de saturación media*.

2.3 FUNCIÓN DE CRECIMIENTO DE LOS DEPRADADORES

Los modelos del tipo Leslie [Ber] se caracterizan porque la ecuación del crecimiento de los depredadores es del tipo logístico, osea

$$\frac{dy}{dt} = sy \left(1 - \frac{y}{K_y} \right) \quad (7)$$

en la cual la capacidad de soporte del medio ambiente convencional K_y es dependiente de la cantidad de presas disponibles, es decir, $K_y = K(x)$; en este trabajo consideramos que es proporcional a la abundancia de presas, esto es $K_y = nx$, por supuesto que pueden asumirse algunas otras como $K(x) = nx + a$, $K(x) = nx^\alpha$, etc.

Tomando de la ecuación (7) $s(y) = s \left(1 - \frac{y}{K_y} \right)$ esta función cumple las condiciones:

$$s(y) \geq 0, \quad s'(y) \leq 0 \quad \text{para } 0 \leq y \leq K$$

por lo tanto suponemos que el modelo es compensado para el depredador [B C]. Ver Figura 2.3.

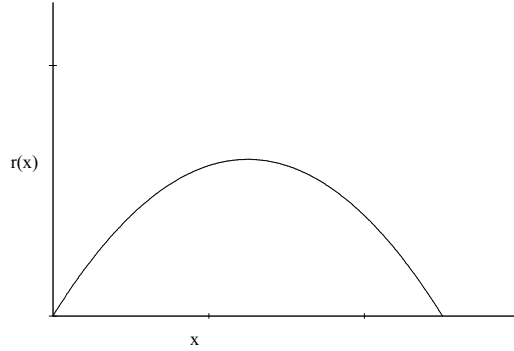


Figura 2.3: Función de compensación para el crecimiento de los depredadores

2.4 MODELO A ESTUDIAR

Teniendo en cuenta las ecuaciones (2), y (5) la ecuación que describe el crecimiento de las presas dentro de la población es dada por:

$$\frac{dx}{dt} = xr \left(1 - \frac{x}{K}\right) (x - m) - \frac{qxy}{x + a}$$

y para la función de crecimiento de los depredadores consideramos la ecuación (7)

$$\frac{dy}{dt} = sy \left(1 - \frac{y}{nx}\right)$$

Así, nuestro modelo es representado por un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias en el plano como sigue:

$$X_{\zeta} : \begin{cases} \frac{dx}{dt} = x \left(r \left(1 - \frac{x}{K}\right)(x - m) - \frac{qy}{x + a}\right) \\ \frac{dy}{dt} = s y \left(1 - \frac{y}{nx}\right) \end{cases} \quad (8)$$

el cual está definido en el conjunto

$$\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0, y \geq 0\}, \quad (9)$$

donde

$$\zeta \in \Delta = \{(r, K, q, a, s, n, m) \in \mathbb{R}_+^7 / 0 < a < K; 0 \leq m < K\}.$$

En el sistema (8), denotamos el tamaño de la población de presas por \mathbf{x} y el tamaño de la población de depredadores por \mathbf{y} .

El significado de los parámetros que aparecen en el modelo es como sigue:

K :capacidad de soporte del medio ambiente

r :tasa intrínseca de crecimiento o potencial biótico de las presas

q :tasa máxima de consumo (o capturabilidad) de los depredadores, es decir, la cantidad máxima de presas que puede ser comida por un depredador en cada unidad de tiempo

m :mínimo de población viable, esto es, el umbral bajo el cual el crecimiento de las presas puede mantenerse en el medio que habita; bajo esta cantidad la rapidez de crecimiento se hace negativa y luego la población de presas va a la extinción

a :tasa de saturación media, es decir, la cantidad de presas necesarias para alcanzar la de la tasa máxima de consumo q .

s :tasa intrínseca de crecimiento de los depredadores , y

n :medida de la calidad del alimento que la presa provee para la conversión de nacimientos de nuevos depredadores.

El sistema (8) es de tipo Kolmogorov [G H], puesto que los ejes son conjuntos invariantes (ver lema 2) y está definido en el primer cuadrante (ver (9)).

3. ESTUDIO DE LOS PUNTOS CRÍTICOS Y DIAGRAMA DE BIFURCACIONES PARA EL EFECTO ALLEE DÉBIL

En este capítulo determinamos las regiones o conjuntos de invarianza, demostramos que las soluciones del sistema son acotadas, establecemos las condiciones para la existencia de puntos de equilibrio al interior del primer cuadrante; también determinamos la naturaleza de cada una de las singularidades del sistema de ecuaciones diferenciales que modela el efecto Allee débil a través de un sistema topológicamente equivalente al sistema (8) usando un difeomorfismo. Además presentamos los lemas y teoremas que describen el comportamiento global del sistema (11), determinamos la cantidad de ciclos límite, la existencia de separatrices y demostramos la ocurrencia de la bifurcación de Hopf y la bifurcación silla-nodo para cierto conjunto de parámetros. Para finalizar presentamos el diagrama de bifurcaciones y algunos retratos de fase utilizando el software PHASER.

3.1 TRANSFORMACIÓN DEL MODELO

Debido a que el sistema (8) tiene siete parámetros y cada uno tiene sus propias unidades de medida que hacen difícil establecer comparaciones entre ellos y manejarlos simultáneamente dada la complejidad que presentan los cálculos, en esta sección hacemos un cambio de variables que se hace en función de los parámetros y un cambio de coordenadas dependiendo de los nuevos parámetros mediante un homeomorfismo el cual nos lleva a obtener un sistema topológicamente equivalente al original, posteriormente hacemos una reparametrización que nos lleva a obtener un sistema polinomial [And] con solo cuatro parámetros adimensionales.

Consideremos el siguiente cambio de coordenadas que incluye un reescalamiento del tiempo.

$$\varphi : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}$$

tal que

$$\varphi(u, v, \tau) = K(u, nv, \frac{r \tau}{u(Kv + a)}) = (x, y, t)$$

Puesto que $\det D\varphi(u, v, \tau) = \frac{K^2 nr}{u(Kv + a)} > 0$ tenemos que φ es un difeomorfismo tal que $Y_\eta = (D\varphi)^{-1} X_\zeta \varphi$, [And], donde Y_η es un sistema polinomialmente equivalente a X_ζ sobre $\tilde{\Omega} = \varphi^{-1}(\Omega \times \{0\})$ dado por el sistema (8).

Lema 1 El sistema (8) puede ser transformado a un sistema de la forma:

$$Y_\eta : \begin{cases} \frac{du}{d\tau} = u^2 [(1-u)(u-M)(u+A) - Qv] \\ \frac{dv}{d\tau} = Bv(u+A)(u-v) \end{cases} \quad (10)$$

donde, $\eta = (A, M, Q, B) \in \mathbb{R}_+^4$; $0 < A < 1$ y $0 \leq M < 1$.

Demostración

Sea $x = Ku$ e $y = nKv$, luego

$$\frac{dx}{dt} = K \frac{du}{dt} \text{ y } \frac{dy}{dt} = nK \frac{dv}{dt}$$

lo que implica

$$\begin{aligned} K \frac{du}{dt} &= Ku [r(1-u)(Ku - m) - \frac{qnKv}{Ku+a}] \\ nK \frac{dv}{dt} &= snKv (1 - \frac{nKv}{nKu}) \end{aligned}$$

osea

$$\begin{aligned} \frac{du}{dt} &= rKu [(1-u)(u - \frac{m}{K}) - \frac{qn}{rK} \frac{v}{u + \frac{a}{K}}] \\ \frac{dv}{dt} &= sv (1 - \frac{v}{u}). \end{aligned}$$

Consideremos el reescalamiento del tiempo dado por $\tau = \frac{rK}{u(u + \frac{a}{K})} t$.

y usando la regla de la cadena $\frac{dZ}{dt} = \frac{dZ}{d\tau} \frac{d\tau}{dt}$, con $Z = (u, v)$, tenemos que

$$\begin{aligned} \frac{du}{d\tau} \frac{rK}{u(u + \frac{a}{K})} &= rKu [(1-u)(u - \frac{m}{K}) - \frac{qn}{rK} \frac{v}{u + \frac{a}{K}}] \\ \frac{dv}{d\tau} \frac{rK}{u(u + \frac{a}{K})} &= sv (1 - \frac{v}{u}) \end{aligned}$$

es decir,

$$\begin{aligned}\frac{du}{d\tau} &= u^2 \left[(1-u) \left(u - \frac{m}{K}\right) \left(\frac{a}{K} + u\right) - \frac{qn}{rK} v \right] \\ \frac{dv}{d\tau} &= \frac{s}{r} v (u-v) \left(\frac{a}{K} + u\right)\end{aligned}$$

y renombrando los parámetros por: $A = \frac{a}{K}$, $M = \frac{m}{K}$, $Q = \frac{qn}{rK}$ y $B = \frac{s}{rK}$;

llegamos al sistema polinomial de quinto grado con sólo cuatro parámetros

$$\begin{aligned}\frac{du}{d\tau} &= u^2 \left[(1-u)(u-M)(A+u) - Qv \right] \\ \frac{dv}{d\tau} &= Bv(u-v)(A+u)\end{aligned}$$

Algunas observaciones respecto a este sistema son las siguientes:

1. Es claro que el sistema (10) puede ser extendido polinomialmente a \mathbb{R}^2 , .sin embargo, solamente en el primer cuadrante la dinámica del sistema (8) es de nuestro interés. Por esta razón el estudio del sistema (10) es restringido a la región

$$\bar{\Omega} = \tilde{\Omega} \cup \{(x, y) \mid x = 0\}$$

entonces se tiene la equivalencia topológica inducida por φ ,

$$\tilde{\varphi} : \tilde{\Omega} \times \mathbb{R} \rightarrow \Omega \times \mathbb{R}$$

tal que

$$\tilde{\varphi} = \varphi|_{\tilde{\Omega} \times \mathbb{R}}$$

preserva la orientación del tiempo.

2. En lo que sigue del trabajo consideraremos el sistema (10) para el efecto Allee fuerte; mientras que para el efecto Allee débil tendremos:

$$Y_\eta : \begin{cases} \frac{du}{d\tau} = u^2 [u(1-u)(u+A) - Qv] \\ \frac{dv}{d\tau} = Bv(u+A)(u-v) \end{cases}$$

3.2 RESULTADOS BÁSICOS

Para el sistema (10) tenemos los siguientes resultados:

Lema 2 Las soluciones del sistema (10) son acotadas.

Demostración

Usando la compactificación de Poincaré [Min].

Sea

$$X = \frac{u}{v} \text{ y } Y = \frac{1}{v},$$

entonces

$$\frac{dX}{dt} = \frac{1}{v^2} \left(v \frac{du}{d\tau} - u \frac{dv}{d\tau} \right)$$

y

$$\frac{dY}{dt} = -\frac{1}{v^2} \frac{dv}{d\tau},$$

en consecuencia el nuevo sistema es:

$$Z_v : \begin{cases} \frac{dX}{d\tau} &= Y^2 \left[\frac{1}{Y} \left(a_1 - \frac{Q}{Y} \right) - \frac{X}{Y} \left(B \frac{1}{Y} \left(\frac{X}{Y} + A \right) \left(\frac{X}{Y} - \frac{1}{Y} \right) \right) \right] \\ \frac{dY}{d\tau} &= -Y^2 B \frac{1}{Y} \left(\frac{X}{Y} + A \right) \left(\frac{X}{Y} - \frac{1}{Y} \right) \end{cases}$$

donde

$$a_1 = \left(\frac{X}{Y} \right)^2 \left(1 - \frac{X}{Y} \right) \left(\frac{X}{Y} - M \right) \left(\frac{X}{Y} + A \right)$$

ordenando esto llegamos a:

$$Z_v : \begin{cases} \frac{dX}{d\tau} &= -\frac{1}{Y^4} (X^5 + (-Y + AY - MY) X^4 + a_2 X^3 + a_3) \\ \frac{dY}{d\tau} &= -B (X - 1) \frac{X + AY}{Y} \end{cases}$$

con

$$a_2 = -Y^2 A + BY^2 + MY^2 - MY^2 A$$

$$a_3 = -BY^2 + MY^3 A + BY^3 AX^2 - XBY^3 A + QY^4$$

Para simplificar los cálculos vamos a considerar el reescalamiento en el tiempo dado por $T = \frac{1}{Y^4} \tau$, obtenemos entonces el sistema:

$$\bar{Z}_v : \begin{cases} \frac{dX}{dT} &= -(X^5 + (-Y + AY - MY) X^4 + a_2 X^3 + a_4) \\ \frac{dY}{dT} &= -Y^3 B (X - 1) (X + AY) \end{cases}$$

donde

$$a_4 = -BY^2 + MY^3 A + BY^3 AX^2 - XBY^3 A + QY^4$$

en consecuencia

$$D\bar{Z}_v(X, Y) = \begin{pmatrix} D\bar{Z}_v(X, Y)_{11} & D\bar{Z}_v(X, Y)_{12} \\ -Y^3 B (AY + 2X - 1) & -Y^2 B (X - 1) (3X + 4AY) \end{pmatrix}$$

donde

$$D\bar{Z}_\nu(X, Y)_{11} = -5X^4 + (4Y - 4AY + 4MY)X^3 + (-3BY^2 + 3Y^2A - 3MY^2 + 3MY^2A)X^2 + (2BY^2 - 2BY^3A - 2MY^3A)X + BY^3A$$

y

$$D\bar{Z}_\nu(X, Y)_{12} = (1 - A + M)X^4 + (-2BY + 2AY - 2MY + 2MYA)X^3 + (2BY - 3BY^2A - 3MY^2A)X^2 + 3XBY^2A - 4QY^3$$

luego

$$D\bar{Z}_\nu(0, 0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Para desingularizar el origen en el campo vectorial \bar{Z}_ν aplicamos el método del blowing up [Dum], haciendo $X = r$ y $Y = r^2s$, entonces $\frac{ds}{dT} = \frac{1}{r^2} \left(\frac{dY}{dT} - 2rs\frac{dr}{dT} \right)$ en consecuencia obtenemos:

$$\tilde{Z}_\nu : \begin{cases} \frac{dr}{dT} = \frac{dr}{dT} \\ \frac{ds}{dT} = \frac{1}{r^2} \left(\frac{dY}{dT} - 2rs\frac{dr}{dT} \right) \end{cases} .$$

donde

$$\frac{dr}{dT} = (-Ms^3A - Bs^3A - Qs^4)r^8 + (Ms^2A + s^2A + Bs^3A - Bs^2 - Ms^2)r^7 + (-As + Ms + s + Bs^2)r^6 - r^5$$

y

$$\frac{1}{r^2} \left(\frac{dY}{dT} - 2rs\frac{dr}{dT} \right) = sr^4[2r^3Qs^4 + (r^3BA - r^2BA + 2r^3MA)s^3 + (r^2B - rB - 2r^2A + 2r^2M - 2r^2MA)s^2 + (2rA - 2rM - 2r)s + 2]$$

Haciendo el reescalamiento en el tiempo dado por $\Upsilon = r^4T$, entonces

$$\tilde{Z}_\nu : \begin{cases} \frac{dr}{d\Upsilon} = \frac{dr}{dT} \\ \frac{ds}{d\Upsilon} = \frac{ds}{dT} \end{cases}$$

$$\frac{dr}{d\Upsilon} = -r[r^3Ms^3A + r^3Bs^3A + r^3Qs^4 - r^2Ms^2A - r^2s^2A - r^2Bs^3A + r^2Bs^2 + r^2Ms^2 + rAs - rMs - sr - rBs^2 + 1]$$

y

$$\frac{ds}{d\Upsilon} = s[r^2Bs^2 + r^3Bs^3A - rBs^2 - r^2Bs^3A + 2r^3Ms^3A + 2r^3Qs^4 - 2r^2Ms^2A - 2r^2s^2A + 2r^2Ms^2 + 2rAs - 2rMs - 2sr + 2]$$

obteniendo la matriz jacobiana para el sistema \tilde{Z}_ν llegamos a:

$$D\tilde{Z}_\nu(0, 0) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

y tenemos que $(0, 0)$ es un punto de silla del campo vectorial \tilde{Z} y \bar{Z} , para el cual el punto $(0, \infty)$ es un punto de silla en el campo vectorial compactificado. Entonces las

órbitas son limitadas.

Lema 3 El conjunto $\bar{\Omega} = \{0 \leq u \leq 1, v \geq 0\}$ es una región de invarianza para el sistema (10).

Demostracion

Claramente los ejes $u = 0$ y $v = 0$ son conjuntos invariantes.

Si $u = 1$, entonces tenemos que

$$\dot{u} = -Qv$$

y cualquiera que sea el signo de

$$\dot{v} = -Bv(1+A)(-1+v),$$

las trayectorias del campo entran a la región $\bar{\Omega}$.

3.3 CONDICIONES DE EXISTENCIA DE LOS PUNTOS CRÍTICOS DEL SISTEMA

Analizaremos el sistema

$$Y_\eta : \begin{cases} \frac{du}{d\tau} = u^2((1-u)(u+A) - Qv) \\ \frac{dv}{d\tau} = Bv(u+A)(u-v) \end{cases} \quad (11)$$

con $\eta = (A, Q, B) \in R_+^3$, donde $B, Q > 0$ y $0 < A < 1$

Los puntos de equilibrio son

$$(-A, 0), (0, 0), (1, 0)$$

y los que están en la intersección de las curvas

$$(1-u)(u)(u+A) - Qv = 0 \quad (12)$$

y

$$u - v = 0 \quad (13)$$

Como $v = u$, las singularidades al interior del primer cuadrante dependen de las soluciones de la ecuación cúbica:

$$(1 - u)(u)(u + A) - Q u = 0 \quad (14)$$

o también

$$u = 0 \text{ y } -u^2 + (1 - A)u + (A - Q) = 0,$$

esto es,

$$u^2 - (1 - A)u - (A - Q) = 0 \quad (15)$$

cuyas soluciones son

$$E_1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}A + \frac{1}{2}\sqrt{((A + 1)^2 - 4Q)} \text{ y } E_2 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}A - \frac{1}{2}\sqrt{((A + 1)^2 - 4Q)}$$

con $E_1 > E_2$.

Gráficamente tenemos tres posibilidades: no se tienen puntos de equilibrio positivos (ver Figura 3.1 a), existen dos puntos críticos en el interior del primer cuadrante (ver Figura 3.1 c) y sólo hay un punto de equilibrio positivo (ver Figura 3.1 d, e) y un único punto crítico de multiplicidad dos (ver Figura 3.1 b). Cabe anotar que estamos pasando de una situación (que es mostrada secuencialmente en la Figura 3.1) en la que no se tienen puntos críticos al interior del primer cuadrante y al hacer una perturbación en los parámetros obtenemos un punto crítico positivo de multiplicidad dos que es el colapso de los dos equilibrios positivos; posteriormente se separan para dar surgimiento a dos puntos de equilibrio positivos, luego el punto de equilibrio (E_2, E_2) colapsa con $(0, 0)$ y se mantiene el punto crítico (E_1, E_1) en el primer cuadrante y por último la singularidad (E_2, E_2) pasa a estar en el tercer cuadrante y la singularidad (E_1, E_1) permanece en el primer cuadrante. Notese que en cada una de las situaciones descritas siempre se cuenta con la existencia de los puntos críticos $(0, 0)$ y $(1, 0)$, los cuales son fundamentales en el comportamiento global de las soluciones como se verá mas adelante.

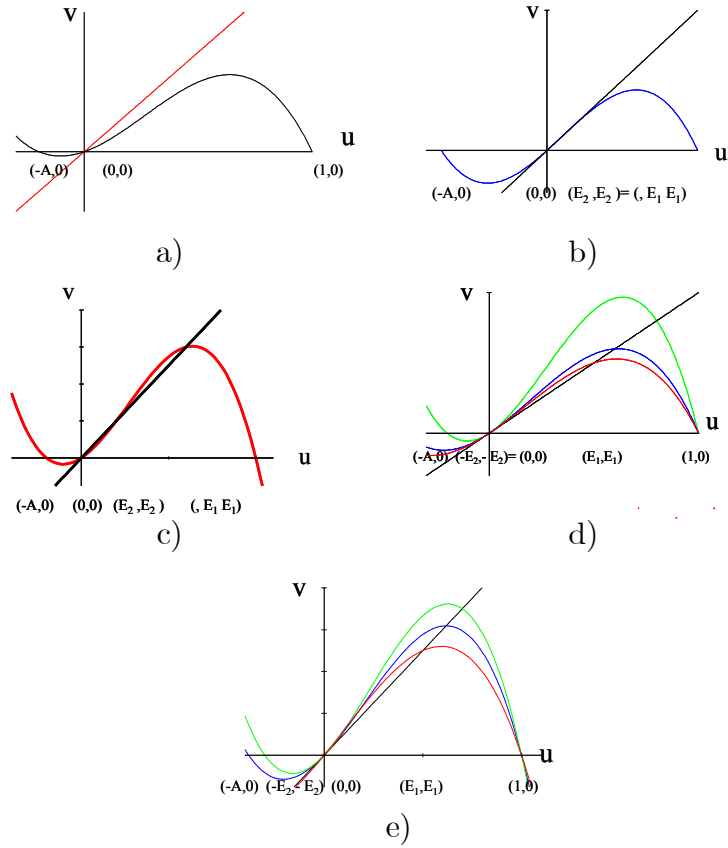


Figura 3.1: Puntos de equilibrio del sistema (11)

Lema 4 El sistema (11) cumple las siguientes condiciones:

i. no tiene puntos de equilibrio en el interior del primer cuadrante, si y sólo si,

$$Q > \frac{(A+1)^2}{4}$$

ii. tiene un único punto de equilibrio de multiplicidad dos al interior del primer cuadrante dos si y sólo si

$$Q = \frac{(1+A)^2}{4} \tag{16}$$

iii. tiene dos puntos de equilibrio en el interior del primer cuadrante, si y sólo si,

$$Q < \frac{(A+1)^2}{4} \quad y \quad Q > A \tag{17}$$

iv. tiene un único punto de equilibrio en el interior del primer cuadrante, si y sólo si,

$$Q = A$$

v. tiene un único punto de equilibrio en el interior del primer cuadrante, si y sólo si,

$$Q < A.$$

Demostración

i. En el sistema (11) no tenemos puntos de equilibrio cuando las raíces de la ecuación (15) sean imaginarias, esto es si y sólo si

$$((A + 1)^2 - 4Q) < 0.$$

es decir,

$$Q > \frac{(A + 1)^2}{4}$$

ii. Sólo tenemos una raíz positiva de multiplicidad dos si y sólo si

$$E_1 = E_2$$

si y sólo si

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{2}A - \frac{1}{2}\sqrt{((A + 1)^2 - 4Q)} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}A + \frac{1}{2}\sqrt{((A + 1)^2 - 4Q)}$$

si y sólo si

$$-\frac{1}{2}\sqrt{((A + 1)^2 - 4Q)} = \frac{1}{2}\sqrt{((A + 1)^2 - 4Q)}$$

si y sólo si

$$Q = \frac{(A + 1)^2}{4}$$

iii. Los puntos de equilibrio al interior del primer cuadrante para el sistema (11) están dados por las raíces de la ecuación (15), i.e

$$E_1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}A + \frac{1}{2}\sqrt{((A + 1)^2 - 4Q)}, \quad E_2 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}A - \frac{1}{2}\sqrt{((A + 1)^2 - 4Q)},$$

para que existan y sean diferentes el discriminante debe ser positivo, es decir,

$$((A + 1)^2 - 4Q) > 0.$$

o en forma equivalente

$$Q < \frac{(A + 1)^2}{4}$$

Como

$$1 - A > 0$$

ya que

$$0 < A < 1, \text{ entonces } E_1 > 0,$$

además para que

$$E_2 > 0$$

necesitamos que

$$1 - A - \sqrt{((A + 1)^2 - 4Q)} > 0,$$

de donde

$$Q > A.$$

De otro lado si

$$((A + 1)^2 - 4Q) > 0 \text{ y } Q > A$$

existen dos raíces diferentes para la ecuación (15) del sistema (11), luego $E_1, E_2 > 0$.

iv. \Rightarrow) Sólo tenemos una raíz al interior del primer cuadrante si

$$E_2 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}A - \frac{1}{2}\sqrt{((A + 1)^2 - 4Q)} = 0, \text{ y } E_1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}A + \frac{1}{2}\sqrt{((A + 1)^2 - 4Q)} > 0$$

así que

$$1 - A - \sqrt{((A + 1)^2 - 4Q)} = 0$$

osea

$$Q = A.$$

\Leftrightarrow) De otro lado si

$$Q = A$$

entonces

$$1 - A - \sqrt{((A + 1)^2 - 4Q)} = 0$$

luego

$$E_1 > 0 \text{ y } E_2 = 0$$

v. \Rightarrow) Sólo existe una raíz al interior del primer cuadrante si

$$E_2 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}A - \frac{1}{2}\sqrt{((A + 1)^2 - 4Q)} < 0, \text{ y } E_1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}A + \frac{1}{2}\sqrt{((A + 1)^2 - 4Q)} > 0$$

es decir

$$1 - A - \sqrt{((A + 1)^2 - 4Q)} < 0$$

de donde

$$Q < A.$$

\Leftrightarrow) De otro lado si

$$Q < A$$

entonces

$$1 - A - \sqrt{((A + 1)^2 - 4Q)} < 0$$

luego

$$E_1 > 0 \text{ y } E_2 < 0$$

Nota: Como $0 < A < 1$ entonces $Q < \frac{(A+1)^2}{4}$ luego $Q < 1$.

3.4 NATURALEZA DE LOS PUNTOS CRÍTICOS

Uno de los elementos básicos para analizar un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias es el cálculo de la matriz jacobiana, la cual para el sistema (11) está dada por:

$$DY_\eta(u, v) = \begin{pmatrix} -5u^4 + 4u^3(1 - A) + 3u^2A - 2uvQ & -Qu^2 \\ Bv(2u + A - v) & -B(u - 2v)(u + A) \end{pmatrix}$$

3.4.1 Puntos críticos sobre los ejes

Lema 5 Para todo $\eta = (A, B, Q) \in \mathbb{R}^3$ el punto $(1, 0)$ es una silla

Demostración

La matriz jacobiana evaluada en $(1, 0)$ es

$$DY_\eta(1, 0) = \begin{pmatrix} -1 - A & -Q \\ 0 & B(1 + A) \end{pmatrix}$$

como

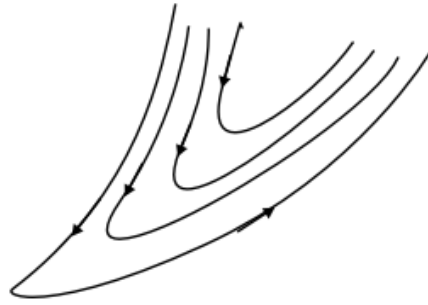
$$\text{Det}Y_\eta(1, 0) = -B(1 + A)^2 < 0$$

luego $(1, 0)$ es una silla.

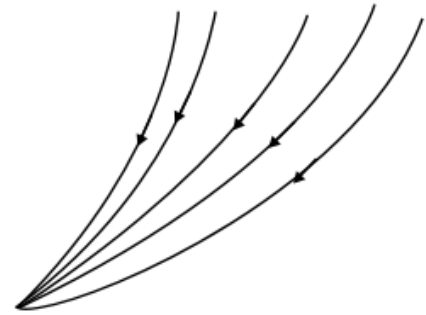
3.4.2 Desingularización del origen

Definición: Un sector hiperbólico, parabólico y elíptico es aquel que es topológica-

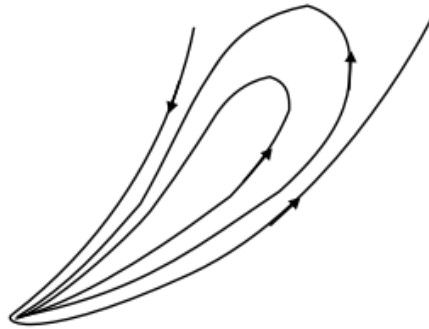
mente equivalente a los mostrados en la Figura 3.2 a, b,c respectivamente [Per].



a) Sector hiperbólico



b) Sector parabólico



c) Sector elíptico

Figura 3.2

Lema 6 En $\bar{\Omega}$, el sistema (11) tiene una singularidad no hiperbólica en el origen de los siguientes tipos:

- i un sector elíptico si $(v, u)/v < u$
- ii. un sector parabólico si $(v, u)/v > u$

Demostración

$Y_\eta : \mathbb{R}^2 \rightarrow T\mathbb{R}^2$ es el campo vectorial definido por el sistema (11), entonces

$$DY_\eta(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

en consecuencia el origen es una singularidad no hiperbólica. Para desingularizar el origen, consideramos el blowing up polar [Dum] dado por la transformación

$$\Phi : S^1 \times \mathbb{R}_0^+ \rightarrow \mathbb{R}^2$$

tal que

$$\Phi(r, \theta) = (r \cos \theta, r \sin \theta)$$

entonces

$$\Phi_*(Y_\eta) = (D\Phi)^{-1} Y_\eta \phi = \tilde{X},$$

donde

$$\tilde{X} = r\bar{X} : S' \times \mathbb{R}_0^+ \rightarrow T(S' \times \mathbb{R}_0^+)$$

con

$$\bar{X}(r, \theta) = rf(r, \theta) \frac{\partial}{\partial r} + g(r, \theta) \frac{\partial}{\partial \theta}$$

donde

$$\begin{aligned} f(r, \theta) &= \frac{1}{r^{k+2}} (r \cos \theta X_1(r \cos \theta, r \sin \theta) + r \sin \theta X_2(r \cos \theta, r \sin \theta)) \\ g(r, \theta) &= \frac{1}{r^{k+2}} (-r \sin \theta X_1(r \cos \theta, r \sin \theta) + r \cos \theta X_2(r \cos \theta, r \sin \theta)) \end{aligned}$$

en nuestro caso $K = 1$, así que

$$\begin{aligned} rf(r, \theta) &= r(-r^3 \cos^6 \theta + (-\cos^5 \theta) A + \cos^5 \theta) r^2 \\ &\quad + (-B \cos \theta \sin \theta + B \cos^3 \theta \sin \theta - (\cos^3 \theta) Q \sin \theta + (\cos^4 \theta) A \\ &\quad - B \cos^4 \theta + B \cos^2 \theta) r - B (\cos^3 \theta) A - BA \sin \theta + BA \sin \theta \cos^2 \theta \\ &\quad + B (\cos \theta) A \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} g(r, \theta) &= (\cos \theta \sin \theta) ((\cos^4 \theta) r^3 + ((\cos^3 \theta) A - \cos^3 \theta) r^2 \\ &\quad + (-B \cos \theta \sin \theta + (\cos \theta \sin \theta) Q + B \cos^2 \theta - (\cos^2 \theta) A) r \\ &\quad - BA \sin \theta + B (\cos \theta) A \end{aligned}$$

como $r > 0$, las dinámicas en $S^1 \times \mathbb{R}^+$ de \tilde{X} y \bar{X} son cualitativamente equivalentes y

$$\bar{X}(0, \theta) = -B (\cos \theta) A + B (\cos^3 \theta) A + BA \sin \theta \cos^2 \theta$$

Entonces,

$$\text{Sing} = \left\{ (0, 0), \left(0, \frac{\pi}{4}\right), \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \right\}$$

es el conjunto de posibles singularidades de \bar{X} en el primer cuadrante de S^1 . La respectiva matriz jacobiana evaluada en estas singularidades es:

$$D\bar{X}(0, \theta) = \begin{cases} C_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & BA \end{pmatrix} & \text{si } \theta = 0 \\ C_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \frac{1}{4}(Q-A) & -\frac{1}{2}BA\sqrt{2} \end{pmatrix} & \text{si } \theta = \frac{\pi}{4} \\ C_3 = \begin{pmatrix} -BA & 0 \\ 0 & BA \end{pmatrix} & \text{si } \theta = \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

Ahora utilizando el Blowing-down, podemos determinar el comportamiento del sistema (11) en el origen, i.e utilizando la transformación $\Phi^{-1} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$

$$\Phi^{-1} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 \\ (r \cos \theta, r \sin \theta) \rightsquigarrow (u, v)$$

bajo esta transformación obtenemos que

$$\begin{aligned} \Phi^{-1} & : (r, 0) \rightsquigarrow (u, 0), \\ \Phi^{-1} & : \left(r, \frac{\pi}{2}\right) \rightsquigarrow (0, v), \text{ y} \\ \Phi^{-1} & : \left(r, \frac{\pi}{4}\right) \rightsquigarrow \left(\sqrt{u^2 + v^2}, \arctan \frac{v}{u}\right) = (u, u) \end{aligned}$$

así que el ángulo de inclinación de la separatriz es de

$$v = \tan \frac{\pi}{4} u$$

i. luego de lo anterior tenemos que si

$$(v, u)/v < u$$

entonces $(0, 0)$ tiene un sector elíptico. (ver Figura 3.2c)

ii. y si

$$(v, u)/v > u$$

entonces tenemos un sector parabólico. (ver Figura 3.2b).

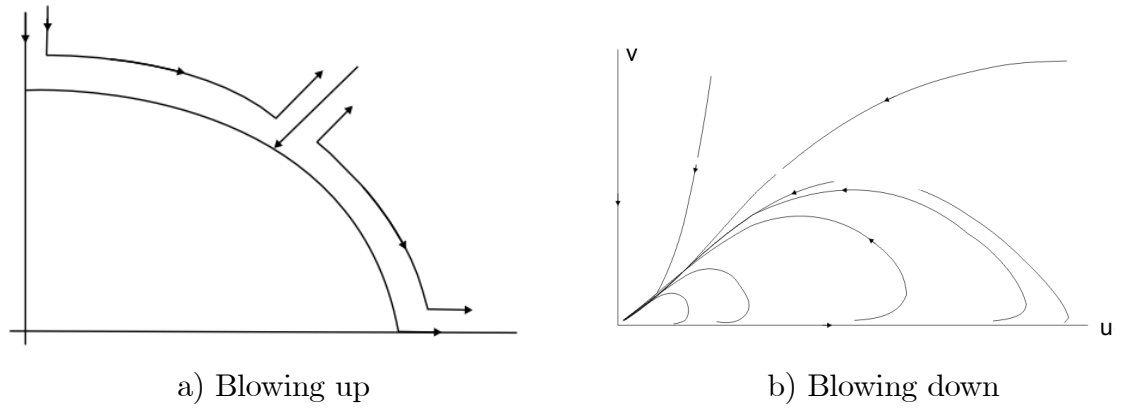


Figura 3.3

3.4.3 Puntos críticos positivos

Considerando para el estudio de los puntos críticos positivos el lema 4, dividiremos el estudio en cuatro casos como (ver la Figura 3.1 b, c, d y e respectivamente).

Colapso de los dos puntos críticos

Bajo la condición $Q = \frac{(1+A)^2}{4}$ del lema 4, tenemos un colapso cuando existen dos puntos críticos que se encuentran al interior del primer cuadrante, ie,

$$(E_1, E_1) = (E_2, E_2) = (E_c, E_c) = \left(\frac{1-A}{2}, \frac{1-A}{2} \right)$$

Lema 7 El punto crítico $(E_c, E_c) = \left(\frac{1-A}{2}, \frac{1-A}{2} \right)$ es:

- i. Silla nodo atractor si $\text{Traza}(E_c, E_c) = \frac{1}{16}(-1+A)(1+A)(A^2-1+4B) \leq 0$
- ii. Silla nodo repulsor si $\text{Traza}(E_c, E_c) = \frac{1}{16}(-1+A)(1+A)(A^2-1+4B) > 0$

Demostración

La matriz jacobiana evaluada en el punto crítico

$$(E_c, E_c) = \left(\frac{1-A}{2}, \frac{1-A}{2} \right)$$

es

$$DY_\eta \left(\frac{1-A}{2}, \frac{1-A}{2} \right) = \begin{pmatrix} \frac{1}{16}(-1+A)^2(1+A)^2 & -\frac{1}{16}(-1+A)^2(1+A)^2 \\ -\frac{1}{4}(-1+A)B(1+A) & \frac{1}{4}(-1+A)B(1+A) \end{pmatrix}$$

con $\text{Det } DY_\eta \left(\frac{1-A}{2}, \frac{1-A}{2} \right) = 0$.

i.a) Como $\text{Det } DY_\eta \left(\frac{1-A}{2}, \frac{1-A}{2} \right) = 0$ la naturaleza de este punto depende de la traza, i.e.

$$\text{Traza } DY_\eta \left(\frac{1-A}{2}, \frac{1-A}{2} \right) = \frac{1}{16} (1-A)(1+A)(1-A^2-4B)$$

el signo de los dos primeros factores es fijo, i.e positivo así que el signo de la traza depende de la relación $B > \frac{1-A^2}{4}$, de donde obtenemos que

$$\text{Traza } DY_\eta \left(\frac{1-A}{2}, \frac{1-A}{2} \right) < 0$$

aplicamos el teorema de la variedad central [G H] concluimos que la naturaleza de este punto corresponde a una silla nodo atractor.

i.b) Para determinar la naturaleza del punto crítico $E = \frac{1-A}{2}$, cuando el parámetro B asume el valor $B = \frac{1-A^2}{4}$, el cual hace que la traza se anule, trasladamos al origen el punto de equilibrio (E, E) por medio del cambio de coordenadas

$$\begin{cases} \gamma = u - E = u - \frac{1-A}{2} \\ \delta = v - E = v - \frac{1-A}{2} \end{cases} \quad (18)$$

donde

$$\begin{cases} u = \gamma + \frac{1-A}{2} \\ v = \delta + \frac{1-A}{2} \end{cases} \quad (19)$$

Haciendo el cambio de coordenadas (18) este transforma el sistema (11) en:

$$Y_\kappa = \begin{cases} \frac{d\gamma}{d\tau} = (\gamma + \frac{1-A}{2})^2 \left((1 - \gamma - \frac{1-A}{2})(\gamma + \frac{1-A}{2})(\gamma + \frac{1-A}{2} + A) - \frac{(1+A)^2}{4} (\delta + \frac{1-A}{2}) \right) \\ \frac{d\delta}{d\tau} = B(\delta + \frac{1-A}{2}) (\gamma + \frac{1-A}{2} + A)(\gamma - \delta) \end{cases}$$

evaluando Y_κ en el valor de bifurcación en $B = \frac{1-A^2}{4}$ y simplificando obtenemos

$$Y_\kappa = \begin{cases} \frac{d\gamma}{d\tau} = (\gamma + \frac{1-A}{2})^2 ((\frac{1+A}{2} - \gamma)(\gamma + \frac{1-A}{2})(\gamma + \frac{1+A}{2}) - \frac{(1+A)^2}{4} (\delta + \frac{1-A}{2})) \\ \frac{d\delta}{d\tau} = (\frac{1-A^2}{4}) (\delta + \frac{1-A}{2}) (\gamma + \frac{1+A}{2})(\gamma - \delta) \end{cases} \quad (20)$$

La matriz jacobiana del sistema (20) evaluada en $(0,0)$ es

$$DY_\kappa(0,0) = \begin{pmatrix} \frac{1}{16}(1-A)^2(1+A)^2 & -\frac{1}{16}(1-A)^2(1+A)^2 \\ \frac{1}{16}(1-A)^2(1+A)^2 & -\frac{1}{16}(1-A)^2(1+A)^2 \end{pmatrix}$$

o en forma equivalente

$$DY_\kappa(0,0) = \frac{1}{16}(1-A)^2(1+A)^2 \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \quad (21)$$

Ahora procedemos a hallar la forma de Jordan [A P II] para la matriz $DY_\kappa(0,0)$, esta tiene iguales valores propios y un sólo vector propio, i.e $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \leftrightarrow 0$. Este vector propio va ser la primera columna de la matriz de transformaciones M . Para obtener la segunda columna escogemos un vector que haga la matriz M no singular, en este caso tomemos $\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$, quedando

$$M = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

entonces $M^{-1}AM$ es

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{16}(1-A)^2(1+A)^2 & -\frac{1}{16}(1-A)^2(1+A)^2 \\ \frac{1}{16}(1-A)^2(1+A)^2 & -\frac{1}{16}(1-A)^2(1+A)^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

simplificando, obtenemos la forma de Jordan para la matriz (21)

$$\begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{16}(1-A)^2(1+A)^2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

la cual corresponde a una bifurcación silla nodo de codimensión dos; por ser el colapso de una silla (ver lema 8) y un nodo (ver lema 9). La naturaleza de este punto crítico en ningún caso corresponde a un punto cúspide puesto que el punto de equilibrio $(1,0)$ es siempre una silla cuya variedad inestable está dada para el eje v .

ii) De manera similar como en i. la naturaleza del punto crítico (E_c, E_c) depende del signo de la traza, así si

$$B < \frac{1 - A^2}{4}$$

entonces

$$\text{Traza } DY_\eta \left(\frac{1-A}{2}, \frac{1-A}{2} \right) > 0$$

y aplicando el teorema de la variedad central $[G/H]$, la naturaleza del punto crítico $\left(\frac{1-A}{2}, \frac{1-A}{2}\right)$ corresponde a un silla-nodo repulsor.

Observación:

Más aún para verificar que esta topología es la correspondiente al sistema (20) consideremos el cambio de variables dado por

$$\begin{pmatrix} \gamma \\ \delta \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$$

es decir,

$$\begin{pmatrix} \gamma \\ \delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix},$$

osea

$$\begin{aligned} \gamma &= p - q \\ \delta &= p \end{aligned}$$

Despejando en términos de las nuevas variables obtenemos

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} &= M^{-1} \begin{pmatrix} \gamma \\ \delta \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma \\ \delta \end{pmatrix} \end{aligned}$$

o bien

$$\begin{aligned} p &= \delta \\ q &= -\gamma + \delta \end{aligned}$$

Así el nuevo sistema es:

$$\bar{Y}_\sigma = \begin{cases} \frac{dp}{d\tau} &= \frac{d\delta}{d\tau} \\ \frac{dq}{d\tau} &= -\frac{d\gamma}{d\tau} + \frac{d\delta}{d\tau} \end{cases}$$

donde

$$\begin{aligned} \frac{d\delta}{d\tau} &= \left(\frac{1}{4}p + \frac{1}{8} - \frac{1}{8}A - \frac{1}{8}A^2 + \frac{1}{8}A^3 - \frac{1}{4}A^2p \right) q^2 \\ &+ \left(-\frac{1}{4}p^2 + \frac{1}{4}A^2p - \frac{1}{4}p + \frac{1}{4}A^2p^2 - \frac{1}{16} + \frac{1}{8}A^2 - \frac{1}{16}A^4 \right) q \\ &= -\frac{1}{16}(-1 + A^2)(-2p - 1 + A)(2p - 2q + 1 + A)q \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} -\frac{d\gamma}{d\tau} + \frac{d\delta}{d\tau} &= p^5 + \left(-\frac{3}{2}A - 5q + \frac{3}{2} \right) p^4 + \left(-6q + \frac{3}{4} + \frac{3}{4}A^2 + 6Aq - \frac{3}{2}A + 10q^2 \right) p^3 \\ &+ \left(-\frac{9}{4}q + 5Aq + 9q^2 + \frac{1}{8} - \frac{1}{8}A^3 - \frac{7}{4}A^2q - \frac{3}{8}A + \frac{3}{8}A^2 - 10q^3 - 9Aq^2 \right) p^2 \\ &+ \left(-\frac{11}{2}Aq^2 + 6q^3A + Aq - \frac{3}{2}A^2q + \frac{3}{2}A^2q^2 + 5q^4 - 6q^3 + 2q^2 - \frac{1}{4}q \right) p \\ &+ \frac{1}{4}A^3q^2 + 2q^3A - \frac{1}{2}q^3A^2 - \frac{1}{2}q^3 - \frac{3}{4}Aq^2 + \frac{3}{2}q^4 + \frac{1}{2}A^2q^2 - \frac{3}{2}q^4A - q^5 \end{aligned}$$

y la correspondiente matriz jacobiana en términos de p y q evaluada en $(0,0)$ es:

$$D\bar{Y}_\sigma(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{16}(1-A)^2(1+A)^2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Dos puntos críticos

Con las condiciones en los parámetros $Q < \frac{(1+A)^2}{4}$ y $Q > A$; existen dos singularidades al interior del primer cuadrante de la forma:

$$P_1 = (E_1, E_1) = \left(\frac{1 - A + \sqrt{(A+1)^2 - 4Q}}{2}, \frac{1 - A + \sqrt{(A+1)^2 - 4Q}}{2} \right)$$

y

$$P_2 = (E_2, E_2) = \left(\frac{1 - A - \sqrt{(A+1)^2 - 4Q}}{2}, \frac{1 - A - \sqrt{(A+1)^2 - 4Q}}{2} \right)$$

con $P_1 > P_2$, ver Figura 3.1 c.

Lema 8 El punto crítico (E_2, E_2) es una silla

Demostración

La matriz jacobiana del sistema (11) evaluada en (E_2, E_2) es:

$$DY_\eta(E_2, E_2) = \begin{pmatrix} -5E_2^4 + (-4A + 4)E_2^3 + (-2Q + 3A)E_2^2 & -E_2^2Q \\ E_2B(E_2 + A) & -E_2B(E_2 + A) \end{pmatrix}$$

donde

$$\text{Det } Y_\eta(E_2, E_2) = E_2^3B(E_2 + A)(5E_2^2 - 4(1 - A)E_2 + 3Q - 3A)$$

cuyo signo depende de

$$5E_2^2 - 4(1 - A)E_2 + 3Q - 3A \quad (22)$$

reemplazando en (22) las coordenadas del punto crítico (E_2, E_2) y factorizando obtenemos

$$\frac{(A + 1)^2 - 4Q + \sqrt{((A + 1)^2 - 4Q)(A - 1)}}{2}$$

el signo de esta última expresión depende de

$$F = (A + 1)^2 - 4Q + \sqrt{((A + 1)^2 - 4Q)(A - 1)}$$

sea $T = ((A + 1)^2 - 4Q)$, luego tenemos que $F = T - (1 - A)\sqrt[2]{T}$, tomando $F = 0$, elevando al cuadrado y factorizando obtenemos

$$T(T - (1 - A)) = 4(A - Q)((A + 1)^2 - 4Q) < 0$$

condición que siempre se cumple por el lema 4, porque para este caso tenemos la condición $Q > A$ en consecuencia

$$\text{Det}Y_\eta(E_2, E_2) < 0$$

y el punto crítico (E_2, E_2) es una silla.

Lema 9 El punto crítico (E_1, E_1) es:

- i. Un foco atractor si $B > -E_1 \frac{5E_1^2 - 4E_1(1-A) + 2Q - 3A}{E_1 + A}$ y $T^2 - 4D < 0$
- ii. Un foco débil de orden uno rodeado por un ciclo límite si $B = -E_1 \frac{5E_1^2 - 4E_1(1-A) + 2Q - 3A}{E_1 + A}$
- iii. Un foco repulsor rodeado de un ciclo límite si $B < -E_1 \frac{5E_1^2 - 4E_1(1-A) + 2Q - 3A}{E_1 + A}$ y

$$T^2 - 4D < 0$$

iv. Un nodo atractor si $B > -E_1 \frac{5E_1^2 - 4E_1(1-A) + 2Q - 3A}{E_1 + A}$ y $T^2 - 4D > 0$

v. Un nodo repulsor si $B < -E_1 \frac{5E_1^2 - 4E_1(1-A) + 2Q - 3A}{E_1 + A}$ y $T^2 - 4D > 0$

donde

$$T^2 = (-5E_1^4 + 4E_1^3(1-A) + (-2Q + 3A)E_1^2 - B(E_1)(E_1 + A))^2$$

y

$$D = (BE_1^3(E_1 + A)(5E_1^2 - 4E_1(1-A) - 3A + 3Q))$$

Demostración

La matriz jacobiana del sistema (11) evaluada en (E_1, E_1) es:

$$DY_\eta(E_1, E_1) = \begin{pmatrix} -5E_1^4 + 4E_1^3(1-A) + 3E_1^2A - 2E_1^2Q & -Q(E_1)^2 \\ B(E_1)(E_1 + A) & -B(E_1)(E_1 + A) \end{pmatrix}$$

con

$$\text{Det}DY_\eta(E_1, E_1) = BE_1^3(E_1 + A)(5E_1^2 - 4E_1(1-A) - 3A + 3Q)$$

y su signo depende de

$$5E_1^2 - 4E_1(1-A) - 3A + 3Q$$

reemplazando

$$(E_1, E_1) = \left(\frac{1-A + \sqrt{(A+1)^2 - 4Q}}{2}, \frac{1-A + \sqrt{(A+1)^2 - 4Q}}{2} \right)$$

$$\left(5 \left(\frac{1-A + \sqrt{(A+1)^2 - 4Q}}{2} \right)^2 - 4 \left(\frac{1-A + \sqrt{(A+1)^2 - 4Q}}{2} \right) + 4 \left(\frac{1-A + \sqrt{(A+1)^2 - 4Q}}{2} \right) A - 3A + 3Q \right)$$

y simplificando tenemos:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} + A + \frac{1}{2}\sqrt{(A^2 + 2A + 1 - 4Q)} + \frac{1}{2}A^2 - \frac{1}{2}A\sqrt{(A^2 + 2A + 1 - 4Q)} - 2Q \\ & = \frac{(1+A)^2 - 4Q + \sqrt{(A^2 + 2A + 1 - 4Q)}(1-A)}{2} > 0 \end{aligned}$$

por el lema 4. Luego

$$D = \text{Det}Y_\eta(E_1, E_1) > 0$$

Lo anterior significa la naturaleza de este punto crítico depende únicamente de traza,

$$T = \text{Tr } DY_\eta(E_1, E_1) = -5E_1^4 + 4E_1^3(1 - A) + (-2Q + 3A)E_1^2 - B(E_1)(E_1 + A)$$

así que

i. Si

$$B > -E_1 \frac{5E_1^2 - 4E_1(1 - A) + 2Q - 3A}{E_1 + A}$$

entonces $\text{Tr } DY_\eta(E_1, E_1) < 0$; además si $T^2 - 4D < 0$ luego la naturaleza del punto crítico (E_1, E_1) corresponde a un foco atractor.

ii. Si

$$B = -E_1 \frac{5E_1^2 - 4E_1(1 - A) + 2Q - 3A}{E_1 + A}$$

entonces $\text{Tr } DY_\eta(E_1, E_1) = 0$ y la naturaleza de este punto crítico corresponde la de un foco débil de orden uno, esto se sigue del cumplimiento de los supuestos del teorema de Hopf $[G/H]$ verificados en el lema 10 y la aplicación del teorema 16.

iii. Si

$$B < -E_1 \frac{5E_1^2 - 4E_1(1 - A) + 2Q - 3A}{E_1 + A}$$

entonces $\text{Tr } DY_\eta(E_1, E_1) > 0$; además si $T^2 - 4D < 0$, luego la naturaleza del punto crítico (E_1, E_1) corresponde a un foco repulsor rodeado por un ciclo límite por el Teorema de Poincaré-Bendixon.

iv. Si

$$B > -E_1 \frac{5E_1^2 - 4E_1(1 - A) + 2Q - 3A}{E_1 + A}$$

entonces $\text{Tr } DY_\eta(E_1, E_1) < 0$; además si $T^2 - 4D > 0$ luego la naturaleza del punto crítico (E_1, E_1) corresponde a un nodo atractor.

v. Si

$$B < -E_1 \frac{5E_1^2 - 4E_1(1 - A) + 2Q - 3A}{E_1 + A}$$

entonces $\text{Tr } DY_\eta(E_1, E_1) > 0$; además si $T^2 - 4D > 0$, luego la naturaleza del punto crítico (E_1, E_1) corresponde a un nodo repulsor.

Lema 10 En el sistema (11) para el punto crítico (E_1, E_1) se presenta la bifurcación de Hopf.

Demostración

La prueba se sigue del lema anterior ya que el determinante es siempre positivo y la traza cambia de signo. Además para verificar la condición de transversalidad tenemos que:

$$\frac{dTr DY_{\eta}(E_1, E_1)}{dB} = -E_1(E_1 + A) < 0$$

Colapso de (E_2, E_2) con $(0, 0)$

Bajo la condición $Q = A$ del lema 4, tenemos un colapso del punto de equilibrio (E_2, E_2) con el punto de equilibrio $(0, 0)$, i.e,

$$(E_2, E_2) = (0, 0)$$

y el punto de equilibrio (E_1, E_1) toma la forma

$$(E_1, E_1) = (E_q, E_q) = (1 - A, 1 - A)$$

Lema 11 El punto crítico $(1 - A, 1 - A)$ es:

- i. Un foco atractor si $B > A^3 - 4A^2 + 4A - 1$ y $T^2 - 4D < 0$
- ii. Un foco débil de orden uno rodeado de un ciclo límite si $B = A^3 - 4A^2 + 4A - 1$
- iii. Un foco repulsor si rodeado de un ciclo límite si $B < A^3 - 4A^2 + 4A - 1$ y $T^2 - 4D < 0$
- iv. Un nodo atractor si $B > A^3 - 4A^2 + 4A - 1$ y $T^2 - 4D > 0$
- v. Un nodo repulsor si $B < A^3 - 4A^2 + 4A - 1$ y $T^2 - 4D > 0$

donde

$$T^2 = ((1 - A)(A^3 - 4A^2 + 4A - B - 1))^2$$

y

$$D = B(1 - A)^5$$

Demostración

La matriz jacobiana del sistema (11) evaluada en $(1 - A, 1 - A)$ es:

$$DY_{\eta}(1 - A, 1 - A) = \begin{pmatrix} -A^4 + 5A^3 - 8A^2 + 5A - 1 & -A(1 - A)^2 \\ (1 - A)B & -(1 - A)B \end{pmatrix}$$

con

$$D = \text{Det}Y_\eta(1 - A, 1 - A) = B(1 - A)^5 > 0$$

Lo anterior significa la naturaleza de este punto crítico depende únicamente de traza,

$$T = \text{Tr} DY_\eta(1 - A, 1 - A) = (1 - A)(A^3 - 4A^2 + 4A - B - 1)$$

así que

i. Si

$$B > A^3 - 4A^2 + 4A - 1$$

entonces $\text{Tr} DY_\eta(E_1, E_1) < 0$; además si $T^2 - 4D < 0$ luego la naturaleza del punto crítico $(1 - A, 1 - A)$ corresponde a un foco atractor.

ii. Si

$$B = A^3 - 4A^2 + 4A - 1$$

entonces $\text{Tr} DY_\eta(1 - A, 1 - A) = 0$ y la naturaleza de este punto crítico corresponde la de un foco débil de orden uno rodeado de un ciclotímite, esto se sigue de la aplicación del teorema 16 y el teorema de Hopf.

iii. Si

$$B < A^3 - 4A^2 + 4A - 1$$

entonces $\text{Tr} DY_\eta(1 - A, 1 - A) > 0$; además si $T^2 - 4D < 0$, luego la naturaleza del punto crítico $(1 - A, 1 - A)$ corresponde a un foco repulsor rodeado por un ciclo límite por el Teorema de Poincaré-Bendixon.

iv. Si

$$B > A^3 - 4A^2 + 4A - 1$$

entonces $\text{Tr} DY_\eta(1 - A, 1 - A) < 0$; además si $T^2 - 4D > 0$ luego la naturaleza del punto crítico $(1 - A, 1 - A)$ corresponde a un nodo atractor.

v. Si

$$B < A^3 - 4A^2 + 4A - 1$$

entonces $\text{Tr} DY_\eta(1 - A, 1 - A) > 0$; además si $T^2 - 4D > 0$, luego la naturaleza del punto crítico $(1 - A, 1 - A)$ corresponde a un nodo repulsor.

Un único punto crítico en el interior del primer cuadrante

Cuando $Q < A$ existe un único punto crítico en el interior del primer cuadrante de la forma (E_1, E_1) , donde

$$(E_1, E_1) = \left(\frac{1 - A + \sqrt{(A+1)^2 - 4Q}}{2}, \frac{1 - A + \sqrt{(A+1)^2 - 4Q}}{2} \right)$$

y un punto crítico en el interior del tercer cuadrante de la forma (E_2, E_2) donde

$$(E_2, E_2) = \left(\frac{1 - A - \sqrt{(A+1)^2 - 4Q}}{2}, \frac{1 - A - \sqrt{(A+1)^2 - 4Q}}{2} \right)$$

El estudio de estos dos puntos críticos fue hecho en los lemas 8 y 9 respectivamente, la única diferencia con dicho estudio radica en la ubicación del punto de equilibrio (E_2, E_2) que ahora se encuentra en el tercer cuadrante y como sabemos de el lema 3 que la región $\bar{\Omega} = \{0 \leq u \leq 1, v \geq 0\}$ es invariante, este punto crítico no será tenido en cuenta en el diagrama de bifurcaciones..

3.5 OTRAS PROPIEDADES DEL SISTEMA

3.5.1 Estabilidad y cantidad de ciclos límite

A continuación pretendemos usar las Cantidades de Liapunov para hallar la cantidad de ciclos límite que se presentan en el sistema (11) y determinar su su estabilidad.

Usaremos un algoritmo presentado por los profesores Jaime Figueroa, Eduardo Saez e Iván Szánto de la Universidad Técnica Federico Santa María de Valparaiso, Chile.

La metodología requiere tener el sistema en una forma canónica pero antes se hace necesario trasladar el punto crítico al origen y transformar el sistema a la forma de Jordán y posteriormente a la forma normal.

Lema 12 El sistema (11) es topológicamente equivalente al sistema

$$\bar{Y}_\eta = \begin{cases} \frac{d\gamma}{d\tau} = (\gamma + E)^2 ((1 - \gamma - E)(\gamma + E)(\gamma + E + A) - Q(\delta + E)) \\ \frac{d\delta}{d\tau} = B(\gamma + \delta)(\gamma + E + A)(\gamma - \delta) \end{cases}$$

Demostración

Traslademos al origen el punto de equilibrio (E_1, E_1) por medio del cambio de coordenadas

$$\begin{cases} \gamma = u - E_1 = u - \frac{1-A + \sqrt{(A+1)^2 - 4Q}}{2} \\ \delta = v - E_1 = v - \frac{1-A + \sqrt{(A+1)^2 - 4Q}}{2} \end{cases} \quad (23)$$

donde

$$\begin{cases} u = \gamma + \frac{1-A + \sqrt{(A+1)^2 - 4Q}}{2} \\ v = \delta + \frac{1-A + \sqrt{(A+1)^2 - 4Q}}{2} \end{cases} \quad (24)$$

y renombrando

$$E = \frac{1 - A + \sqrt{(A + 1)^2 - 4Q}}{2}$$

(24) se transforma en

$$\begin{cases} u = \gamma + E \\ v = \delta + E \end{cases}$$

Haciendo el cambio de coordenadas (23) este transforma el sistema (11) en:

$$\bar{Y}_\eta = \begin{cases} \frac{d\gamma}{d\tau} = (\gamma + E)^2 ((1 - \gamma - E)(\gamma + E)(\gamma + E + A) - Q(\delta + E)) \\ \frac{d\delta}{d\tau} = B(\gamma + \delta)(\gamma + E + A)(\gamma - \delta) \end{cases} \quad (25)$$

que es topológicamente equivalente al sistema (11).

Lema 13 El sistema (25) tiene como asociada como matriz de de Jordan a

$$J = \begin{pmatrix} 0 & -W \\ J_{21} & 0 \end{pmatrix}$$

con

$$J_{21} = -\left(-\frac{1}{W}(-1 + E)(E + A)E^2 + \frac{1}{W}E^2(3E^2 - 2E(1 - A) - A)\right) \\ E^2(3E^2 - 2E(1 - A) - A)$$

Demostración

La matriz jacobiana del sistema (25) evaluada en $(0, 0)$ es

$$DY_{\eta}(0, 0) = \begin{pmatrix} -5E^4 + 4E^3(1 - A) - E^2(-3A + 2Q) & -E^2Q \\ EB(E + A) & -EB(E + A) \end{pmatrix} \quad (26)$$

reemplazando en la ecuación (15) u por E y despejando de la ecuación (15) el valor de Q , obtenemos

$$Q = -E^2 + (1 - A)E + A \quad (27)$$

reemplazando el valor de Q en el valor de bifurcación B_0 y simplificando llegamos a

$$B_0 = -E \frac{3E^2 + 2EA - 2E - A}{E + A} \quad (28)$$

ahora reemplazando Q y B_0 (26) obtenemos

$$A(0, 0) = \begin{pmatrix} -E^2(3E^2 + 2EA - 2E - A) & (-1 + E)(E + A)E^2 \\ -E^2(3E^2 + 2EA - 2E - A) & E^2(3E^2 + 2EA - 2E - A) \end{pmatrix}$$

donde

$$\text{Traza } A(0, 0) = 0$$

y

$$\text{Det } A(0, 0) = -E^5(2E - 1 + A)(3E^2 + 2EA - 2E - A)$$

La matriz de Jordan [A P II] asociada al sistema trasladado (25) y considerando (27) y (28) es:

$$J = \begin{pmatrix} 0 & -W \\ J_{21} & 0 \end{pmatrix}$$

donde

$$J_{21} = \frac{-\left(-\frac{1}{W}(-1 + E)(E + A)E^2 + \frac{1}{W}E^2(3E^2 - 2E(1 - A) - A)\right)}{E^2(3E^2 - 2E(1 - A) - A)}$$

Lema 14 La forma normal del sistema (25) es

$$\begin{aligned}\frac{dp}{dT} &= -q + a_{11}pq + a_{02}q^2 + a_{21}p^2q + a_{12}pq^2 \\ \frac{dq}{dT} &= p + b_{20}p^2 + b_{11}pq + b_{02}q^2 + T.O.S\end{aligned}$$

donde

$$a_{11} = -\frac{W^2}{E^4} \frac{2E+A}{(2E-1+A)(E+A)}$$

$$a_{02} = W \frac{1}{E+A}$$

$$a_{21} = -\frac{W^4}{E^7(2E-1+A)^2(E+A)}$$

$$a_{12} = \frac{W^3}{E^4(2E-1+A)(E+A)}$$

$$b_{20} = W^2 \frac{-3+7E+3A}{E^4(2E-1+A)^2}$$

$$b_{11} = -W \frac{2W^2E+W^2A-32E^8-52E^7A+10E^6A-22E^6A^2+2E^5A^2-2E^5A^3+8E^7+64E^8A+40E^7A^2+8E^6A^3+32E^9}{E^7(2E-1+A)^2(E+A)}$$

$$b_{02} = W^2 \frac{W^2-19E^7-33E^6A+5E^6+7E^5A-16E^5A^2+18E^8+37E^7A+24E^6A^2+5E^5A^3+2E^4A^2-2E^4A^3}{E^3(2E-1+A)(E+A)}$$

Demostración

La matriz de cambio de base para el sistema (25) es:

$$M = \begin{pmatrix} -E^2(3E^2 - 2E(1-A) - A) & -W \\ -E^2(3E^2 - 2E(1-A) - A) & 0 \end{pmatrix}$$

Para llevar el sistema (25) a la forma normal consideremos el cambio de variables dado por

$$\begin{pmatrix} \gamma \\ \delta \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$$

es decir,

$$\begin{pmatrix} \gamma \\ \delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -E^2(3E^2 - 2E(1-A) - A) & -W \\ -E^2(3E^2 - 2E(1-A) - A) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}\gamma &= (-E^2(3E^2 - 2E(1 - A) - A))p - Wq \\ \delta &= (-E^2(3E^2 - 2E(1 - A) - A))p\end{aligned}$$

Despejando en términos de las nuevas variables obtenemos

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} &= M^{-1} \begin{pmatrix} \gamma \\ \delta \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{E^2(3E^2 - 2E(1 - A) - A)} \\ -\frac{1}{W} & \frac{1}{W} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma \\ \delta \end{pmatrix}\end{aligned}$$

o bien

$$\begin{aligned}p &= -\frac{\delta}{E^2(3E^2 - 2E(1 - A) - A)} \\ q &= -\frac{1}{W}\gamma + \frac{1}{W}\delta\end{aligned}$$

Así el nuevo sistema es de la forma

$$\tilde{Y}_{\tilde{\eta}} = \begin{cases} \frac{dp}{d\tau} = -\frac{1}{E^2(3E^2 + 2EA - 2E - A)} \frac{d\delta}{d\tau} \\ \frac{dq}{d\tau} = -\frac{1}{W} \left(\frac{d\gamma}{d\tau} - \frac{d\delta}{d\tau} \right) \end{cases} \quad (29)$$

donde

$$\begin{aligned}\frac{dp}{dT} &= -Wq + a_{11}pq + a_{02}q^2 + a_{21}p^2q + a_{12}pq^2 \\ \frac{dq}{dT} &= Wp + b_{20}p^2 + b_{11}pq + b_{02}q^2 + T.O.S\end{aligned}$$

con

$$a_{11} = -\frac{W^3}{E^4} \frac{2E+A}{(2E-1+A)(E+A)}$$

$$a_{02} = W^2 \frac{1}{E+A}$$

$$a_{21} = -\frac{W^5}{E^7(2E-1+A)^2(E+A)}$$

$$a_{12} = \frac{W^4}{E^4(2E-1+A)(E+A)}$$

$$b_{20} = W^3 \frac{-3+7E+3A}{E^4(2E-1+A)^2}$$

$$b_{11} = -W^2 \frac{2W^2E + W^2A - 32E^8 - 52E^7A + 10E^6A - 22E^6A^2 + 2E^5A^2 - 2E^5A^3 + 8E^7 + 64E^8A + 40E^7A^2 + 8E^6A^3 + 32E^9}{E^7(2E-1+A)^2(E+A)}$$

$$b_{02} = W^3 \frac{W^2 - 19E^7 - 33E^6A + 5E^6 + 7E^5A - 16E^5A^2 + 18E^8 + 37E^7A + 24E^6A^2 + 5E^5A^3 + 2E^4A^2 - 2E^4A^3}{E^3(2E-1+A)(E+A)}$$

y los términos de orden superior son como sigue

$$b_{30} = 3W^5 \frac{-1+3E+A}{E^8(2E-1+A)^3} p^3$$

$$b_{21} = -W^4 \frac{56E^8 + (104A-48)E^7 + (10-70A+58A^2)E^6 + (-23A^2+10A^3+11A)E^5 + (A^2-A^3)E^4 + W^2}{E^{10}(2E-1+A)^3(E+A)} p^2 q$$

$$b_{12} = W^3 \frac{W^2 + 11E^6 + 58E^8 + 2E^4A^2 - 2E^4A^3 + 109E^7A - 77E^6A + 62E^6A^2 + 13E^5A - 28E^5A^2 + 11E^5A^3 - 51E^7}{E^7(2E-1+A)^2(E+A)} p q^2$$

$$b_{03} = -W^2 (10E^2 - 4E + 4EA - A) q^3$$

$$b_{40} = W^7 \frac{5E-1+A}{E^{12}(2E-1+A)^4} p^4$$

$$b_{31} = -4W^6 \frac{5E-1+A}{E^9(2E-1+A)^3} p^3 q$$

$$b_{22} = 6W^5 \frac{5E-1+A}{E^6(2E-1+A)^2} p^2 q^2$$

$$b_{13} = -4W^4 \frac{5E-1+A}{E^3(2E-1+A)} p q^3$$

$$b_{04} = W^3 (5E - 1 + A) q^4$$

$$b_{50} = \frac{W^9}{E^{15}(2E-1+A)^5} p^5$$

$$b_{41} = -5 \frac{W^8}{E^{12}(2E-1+A)^4} p^4 q$$

$$b_{32} = 10 \frac{W^7}{E^9(2E-1+A)^3} p^3 q^2$$

$$b_{23} = -10 \frac{W^6}{E^6(2E-1+A)^2} p^2 q^3$$

$$b_{14} = \frac{5W^5}{E^3(2E-1+A)} p q^4$$

$$b_{05} = -W^4 q^5$$

haciendo un reescalamiento en el tiempo dado por $T = W\tau$ obtenemos

$$\frac{dp}{dT} = -q + a_{11}pq + a_{02}q^2 + a_{21}p^2q + a_{12}pq^2$$

$$\frac{dq}{dT} = p + b_{20}p^2 + b_{11}pq + b_{02}q^2 + T.O.S$$

donde

$$a_{11} = -\frac{W^2}{E^4} \frac{2E+A}{(2E-1+A)(E+A)}$$

$$a_{02} = W \frac{1}{E+A}$$

$$a_{21} = -\frac{W^4}{E^7(2E-1+A)^2(E+A)}$$

$$a_{12} = \frac{W^3}{E^4(2E-1+A)(E+A)}$$

$$b_{20} = W^2 \frac{-3+7E+3A}{E^4(2E-1+A)^2}$$

$$b_{11} = -W \frac{2W^2E+W^2A-32E^8-52E^7A+10E^6A-22E^6A^2+2E^5A^2-2E^5A^3+8E^7+64E^8A+40E^7A^2+8E^6A^3+32E^9}{E^7(2E-1+A)^2(E+A)}$$

$$b_{02} = W^2 \frac{W^2-19E^7-33E^6A+5E^6+7E^5A-16E^5A^2+18E^8+37E^7A+24E^6A^2+5E^5A^3+2E^4A^2-2E^4A^3}{E^3(2E-1+A)(E+A)}$$

que es la forma normal del sistema (25).

En este punto debemos tener en cuenta los siguiente,

Sean L_k , $k = 0, 1$ las dos primeras cantidades de Liapunov [B L, S G-O] en la

singularidad (E_1, E_1) del campo vectorial (11), tenemos que:

$$L_0(A, E) = \text{Traza } \bar{Y}_{\bar{\eta}}(0, 0) = 0$$

Para calcular la segunda cantidad de Liapunov de la singularidad (E, E) , consideramos la conjugación

$$\Psi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$$

tal que

$$\Psi(p, q) = \left(\frac{dp}{d}, \frac{dq}{dt} \right)$$

entonces

$$\Psi \circ (\bar{Y}_{\bar{\eta}}) = (D\Psi)^{-1} \circ \bar{Y}_{\bar{\eta}} \circ \Psi = \tilde{Y}_{\bar{\eta}}.$$

Lema 15 La segunda cantidad de Liapunov está dada por:

$$L_1(A, E, W) = \frac{Li}{8E(A+E)^2(-1+A+2E)^3} \quad (30)$$

con

$$\begin{aligned} Li = & -W(E^5(-60E^3 + 64E^2 - 21E + 2)A^8 - E^5(784E^4 - 1074E^3 + 510E^2 - 97E + 6)A^7 \\ & + (-E(4433E^9 - 7372E^8 + 4538E^7 - 1263E^6 + 153E^5 - 6E^4 + 28E - 15) - 2)A^6 \\ & + (-El_5 + 6958)A^5 + (-El_4 - 2)A^4 + (-E(El_3 + 17)A^3 - E^2(El_2 + 50)A^2 \\ & - E^3(El_1 + 54)A + E^4(1 - 2E)(El_0 - 18)). \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} l_5 &= 240E^{10} - 20557E^9 + 20630E^8 - 7456E^7 + 1315E^6 - 99E^5 + 2E^4 + 272E^2 \\ &\quad - 225E + 13964 \\ l_4 &= 6968E^{11} - 47673E^{10} + 54009E^9 - 23736E^8 + 5406E^7 - 585E^6 + 22E^5 + 1079E^3 \\ &\quad - 1188E^2 + 21297E - 13966 \\ l_3 &= 34480E^{11} - 85010E^{10} + 84667E^9 - 43343E^8 + 11920E^7 - 1646E^6 + 87E^5 \\ &\quad + 2228E^3 - 3017E^2 + 1440E - 278 \\ l_2 &= 26208E^{11} - 70756E^{10} + 78196E^9 - 45177E^8 + 14342E^7 - 2360E^6 + 156E^5 \\ &\quad + 2512E^3 - 3972E^2 + 2293E - 568 \\ l_1 &= 11136E^{11} - 32424E^{10} + 38988E^9 - 24774E^8 + 8769E^7 - 1638E^6 + 126E^5 \\ &\quad + 1456E^3 - 2583E^2 + 1705E - 497 \\ l_0 &= 1008E^{10} - 2616E^9 + 2700E^8 - 1386E^7 + 354E^6 - 36E^5 + 168E^2 - 239E + 113 \end{aligned}$$

Demostración

Corriendo el programa Findeta desde el software Mathematica [Wol] para cálculos simbólicos obtenemos la segunda cantidad de Liapunov, i.e Eta2 que es dada por la expresión:

$$L_1(A, E, W) = \frac{Li}{8E^{11}(A+E)^2(-1+A+2E)^4}$$

donde

$$\begin{aligned}
Li = & W\{1152E^{18} + 528E^{16} - 1104E^{17} - 480E^{19} - 126E^{15} - 2286A^4E^{15} \\
& + 1872A^2E^{14} + 12E^{14} + 978A^3E^{13} - 306A^2E^{13} - 216A^5E^{12} + 228A^4E^{12} \\
& - 1296A^4E^{13} - 12A^7E^{12} + 90A^6E^{12} + 27AE^{13} + 4560AE^{17} \\
& + [2E^{10}(4E - 1)(5E - 2)A^7 + 2E^{10}(-6 + 68E + 241E^3 - 231E^2)A^6 \\
& + E^5(-228E^6 - 3104E^8 - 5 + 14E + 12E^5 + 2468E^9 + 1342E^7)A^5 \\
& - 2E^5(-3040E^8 - 56E^2 + 755E^7 - 76E^6 + 37E + 5376E^9 + 2E^5 - 3482)A^4 \\
& + E^5(690E^7 - 21196E^{10} - 325E^2 - 5 + 84E + 11632E^{11} - 4736E^8 - 34E^6 \\
& + 14674E^9 + 349E^3)A^3 + E^6(-613E^2 + 19508E^9 + 526E^3 - 24040E^{10} \\
& - 7646E^8 + 1430E^7 + 11536E^{11} + 222E - 100E^6 - 24)A^2 + E^7(2E - 1) \\
& + E^8(180E^8 - 190E^7 + 50E^6 + 13)(2E - 1)^3]W^2 + [(-2E^5 + 5E^6)A^5 \\
& (3136E^{10} - 5736E^9 + 3864E^8 - 1130E^7 + 120E^6 + 190E^2 - 163E + 33)A \\
& + (-31E^6 + 52E^7 + 4E^5)A^4 + (3 + 39E^6 - 173E^7 - 2E^5 + 211E^8)A^3 \\
& + (418E^9 - 3 + 15E - 13E^6 - 442E^8 + 142E^7)A^2 \\
& + (219E^8 - 8E - 29E^7 + 24E^2 - 524E^9 + 404E^{10})A + 12E^3 - 5E^2 - 20E^8 \\
& - 232E^{10} + 118E^9 + 152E^{11}]W^4 + [4E^3 + 4AE^2 - AE + A^2E - 2E^2]W^6 \\
& + 7344A^2E^{16} - 3888A^3E^{16} - 3888A^2E^{17} - 2112AE^{18} + 747A^5E^{13} \\
& - 3672A^3E^{14} + 1632AE^{15} - 5364A^2E^{15} + 6192A^3E^{15} - 792A^5E^{14} \\
& - 150A^6E^{13} - 3888AE^{16} + 2916A^4E^{14} + 3A^7E^{11} - 108A^3E^{12} \\
& + 18A^2E^{12} - 12A^6E^{11} + 3A^3E^{11} - 12A^4E^{11} + 18A^5E^{11} - 336AE^{14}\}
\end{aligned}$$

siendo

$$W = E^2 \sqrt{(E(1 - A - 2E)(3E^2 - 2E(1 - A) - A))}$$

reemplazando el valor de $W^2 = (-E^5(2E - 1 + A)(3E^2 + 2EA - 2E - A))$, simplificando y colectando respecto a A obtenemos

$$L_1(A, E, W) = \frac{Li}{(8E(A + E)^2(-1 + A + 2E)^3)}$$

con

$$\begin{aligned}
Li = & -W(E^5(-60E^3 + 64E^2 - 21E + 2)A^8 - E^5(784E^4 - 1074E^3 + 510E^2 - 97E + 6)A^7 \\
& + (-E(4433E^9 - 7372E^8 + 4538E^7 - 1263E^6 + 153E^5 - 6E^4 + 28E - 15) - 2)A^6 \\
& + (-El_5 + 6958)A^5 + (-El_4 - 2)A^4 + (-E(El_3 + 17)A^3 - E^2(El_2 + 50)A^2 \\
& - E^3(El_1 + 54)A + E^4(1 - 2E)(El_0 - 18)).
\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}
l_5 &= 240E^{10} - 20\,557E^9 + 20\,630E^8 - 7456E^7 + 1315E^6 - 99E^5 + 2E^4 + 272E^2 \\
&\quad - 225E + 13\,964 \\
l_4 &= 6968E^{11} - 47\,673E^{10} + 54\,009E^9 - 23\,736E^8 + 5406E^7 - 585E^6 + 22E^5 + 1079E^3 \\
&\quad - 1188E^2 + 21\,297E - 13\,966 \\
l_3 &= 34\,480E^{11} - 85\,010E^{10} + 84\,667E^9 - 43\,343E^8 + 11\,920E^7 - 1646E^6 + 87E^5 \\
&\quad + 2228E^3 - 3017E^2 + 1440E - 278 \\
l_2 &= 26\,208E^{11} - 70\,756E^{10} + 78\,196E^9 - 45\,177E^8 + 14\,342E^7 - 2360E^6 + 156E^5 \\
&\quad + 2512E^3 - 3972E^2 + 2293E - 568 \\
l_1 &= 11\,136E^{11} - 32\,424E^{10} + 38\,988E^9 - 24\,774E^8 + 8769E^7 - 1638E^6 + 126E^5 \\
&\quad + 1456E^3 - 2583E^2 + 1705E - 497 \\
l_0 &= 1008E^{10} - 2616E^9 + 2700E^8 - 1386E^7 + 354E^6 - 36E^5 + 168E^2 - 239E + 113
\end{aligned}$$

Teorema 16 Para el sistema (11) existe un único ciclo límite estable en el primer cuadrante.

Demostración

Tomando la segunda cantidad de Liapunov del lema anterior, podemos establecer que $Li \neq 0$ puesto que sus raíces en el intervalo $(A, E) \in (0, 1) \times [0, 1)$ son $(A, E) = (0, 0)$, $(A, E) = (0, \frac{1}{2})$ y $(A, E) = (\frac{3479}{2} - \frac{59}{2}\sqrt{3477}, 0)$ pero $0 < A < 1$, y si $E = 0$ no es un foco como se vió en el lema 6.

Más aún $Li < 0$, la gráfica 3.4 nos muestra que $L > 0$ para todo $(A, E) \in (0, 1) \times [0, 1)$ con

$$\begin{aligned}
L &= (E^5(-60E^3 + 64E^2 - 21E + 2)A^8 - E^5(784E^4 - 1074E^3 + 510E^2 - 97E + 6)A^7 \\
&\quad + (-E(4433E^9 - 7372E^8 + 4538E^7 - 1263E^6 + 153E^5 - 6E^4 + 28E - 15) - 2)A^6 \\
&\quad + (-E(240E^{10} - 20\,557E^9 + 20\,630E^8 - 7456E^7 + 1315E^6 - 99E^5 + 2E^4 \\
&\quad + 272E^2 - 225E + 13964 + 6958)A^5 + (-E(6968E^{11} - 47\,673E^{10} + 54\,009E^9 \\
&\quad - 23\,736E^8 + 5406E^7 - 585E^6 + 22E^5 + 1079E^3 - 1188E^2 + 21\,297E - 13\,966 - 2)A^4 \\
&\quad + (-E(34\,480E^{12} - 85\,010E^{11} + 84\,667E^{10} - 43\,343E^9 + 11\,920E^8 - 1646E^7 \\
&\quad + 87E^6 + 2228E^4 - 3017E^3 + 1440E^2 - 278E + 17))A^3 \\
&\quad - E^2(26\,208E^{12} - 70\,756E^{11} + 78\,196E^{10} - 45\,177E^9 + 14\,342E^8 - 2360E^7 \\
&\quad + 156E^6 + 2512E^4 - 3972E^3 + 2293E^2 - 568E + 50)A^2 \\
&\quad - E^3(11\,136E^{12} - 32\,424E^{11} + 38\,988E^{10} - 24\,774E^9 + 8769E^8 - 1638E^7 \\
&\quad + 126E^6 + 1456E^4 - 2583E^3 + 1705E^2 - 497E + 54)A + E^4(1 - 2E) \\
&\quad (1008E^{11} - 2616E^{10} + 2700E^9 - 1386E^8 + 354E^7 - 36E^6 + 168E^3 - 239E^2 + 113E - 18 \\
&\quad + 113E - 18))
\end{aligned}$$

y como $Li = -WL$ entonces $Li < 0$.

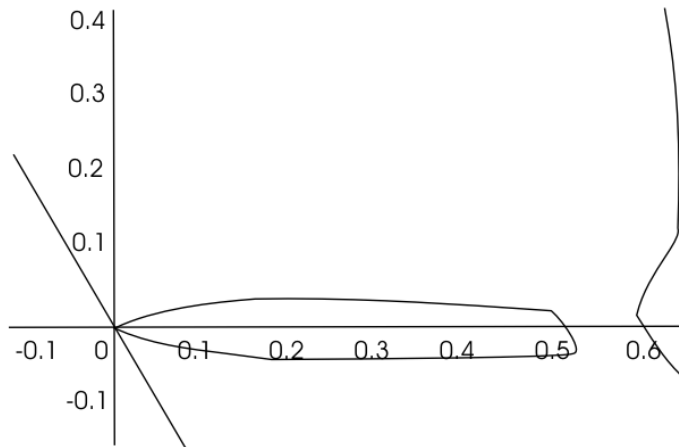


Figura 3.4: $L(A,E)$

como $L_2 < 0$ para todo $(A, E) \in (0, 1) \times [0, 1)$. luego el sistema (11) tiene un único ciclo límite en el interior del primer cuadrante.

3.5.2 Teoremas generales

Teorema 17 La variedad estable W^s del punto no hiperbólico $(0, 0)$ divide el comportamiento de las trayectorias, así que el punto $(0, 0)$ es atractor y es w – límite de todas las soluciones que están sobre la variedad W^s .

Demostración

Por el lema 6 el punto $(0, 0)$ tiene una variedad estable W^s que separa las trayectorias y toda solución sobre la variedad W^s tienen a $(0, 0)$ como w – límite. De acuerdo a la posición de W^s y W^u (las variedades estables de $(0, 0)$ y $(1, 0)$ respectivamente), el punto $(0, 0)$ será atractor global o atractor local.

Teorema 18 Siendo W^s y W^u las variedades estables e inestables de $P_0 = (0, 0)$ y $P_3 = (1, 0)$ respectivamente, entonces existe un subconjunto de parámetros para los cuales $W^s = W^u$ dando origen a la heteroclina que une el punto P_0 y el punto silla P_3 .

Demostración

Por el lema 6 el punto $(0,0)$ tiene una separatriz con un ángulo de inclinación de 45° y por el lema 5 el punto $(1,0)$ es una silla..

Sean W^s, W^u las variedades estable e inestable del punto P_0 y P_3 , es claro que el α -límite de W^s y el w -límite de W^u no están en el infinito en la dirección del eje- v ; entonces existen puntos $(u^*, v^s) \in W^s$ y $(u^*, v^u) \in W^u$, donde v^s y v^u son funciones de los parámetros A, B y Q , i.e, $v^s = f_1(A, B, Q)$ y $v^u = f_2(A, B, Q)$ Es fácil ver que si $0 < u \ll 1$ entonces, $v^s < v^u$ y si $0 \ll u < 1$ entonces $v^s > v^u$. Como el campo vectorial Y_η es continuo con respecto a los parámetros, entonces la variedad estable W^s intersecta la variedad inestable W^u ; luego existe $(u_s^*, v_s^*) \in \Gamma$, tal que $v_s^* = v_s^*$. Esta ecuación define una superficie en el espacio de parámetros para los cuales existe la heteroclínica.

Teorema 19 Sea $(u^*, v^s) \in W^s$ y $(u^*, v^u) \in W^u$, donde v^s y v^u son funciones de los parámetros A, Q y B ; asumiendo que $v^s < v^u$ y $0 < E_1 \ll 1$, entonces el punto de equilibrio $P_1 = (E_1, E_1)$ es repulsor, el punto de equilibrio $(0,0)$ es atractor global y allí existe una heteroclina que los une.

Demostración

Si $v^s < v^u$, entonces la variedad estable W^s está por debajo de la variedad estable W^u . Por unicidad de las soluciones, las trayectorias que se alejan del punto (E_1, E_1) , no pueden intersectar a W^u y como $(1,0)$ es punto silla, por el Teorema de Poincaré-Bendixon tenemos a $(0,0)$ o a un ciclo límite como w -límite, cuando $\text{Tr } DY_\eta(E_1, E_1) > 0$.

De otro lado, el ciclo que aparece por la bifurcación de Hopf se incrementa hasta desaparecer cuando la curva heteroclina que junta los puntos $(0,0)$ y $(1,0)$ se rompe, entonces allí existe un subconjunto de parámetros para los cuales el punto $(0,0)$ es global asintóticamente estable.

Por otra parte, allí existe una trayectoria originada en (E_1, E_1) y finalizando en $(0,0)$, formando una nueva curva heteroclina.

Teorema 20 Si $(A, B, Q) \in R_1$, el punto $P_0 = (0,0)$ es global asintóticamente estable para el sistema (11)

Demostración

La prueba es inmediata de los lemas 5 y 6; además teniendo en cuenta que para $(1, 0)$ la W^u está dada para el eje v .

3.6 OBTENCIÓN DE LOS RETRATOS DE FASE

En esta sección daremos un esbozo de algunos retratos de fase del sistema (11), para ciertos valores de los parámetros. Estas simulaciones fueron hechas con el software PHASER.

1. La figura 3.5 nos muestra una silla y nodo para los valores de los parámetros $Q = 0.48$, $A = 0.4$, $M = 0$ y $B = 1$.

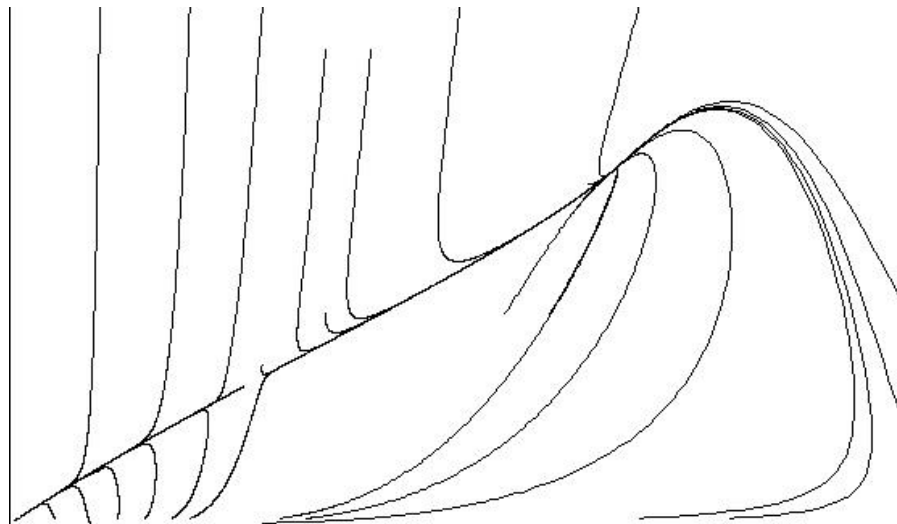


Figura 3.5

2. En la figura 3.6 vemos una silla y un foco débil de orden uno rodeado por un ciclo límite atractor creado vía bifurcación de Hopf para los valores de parámetros $Q = 0.48$, $A = 0.4$, $M = 0$ y $B = 0.2$. En la figura 3.7 podemos observar un

acercamiento de este ciclo límite.

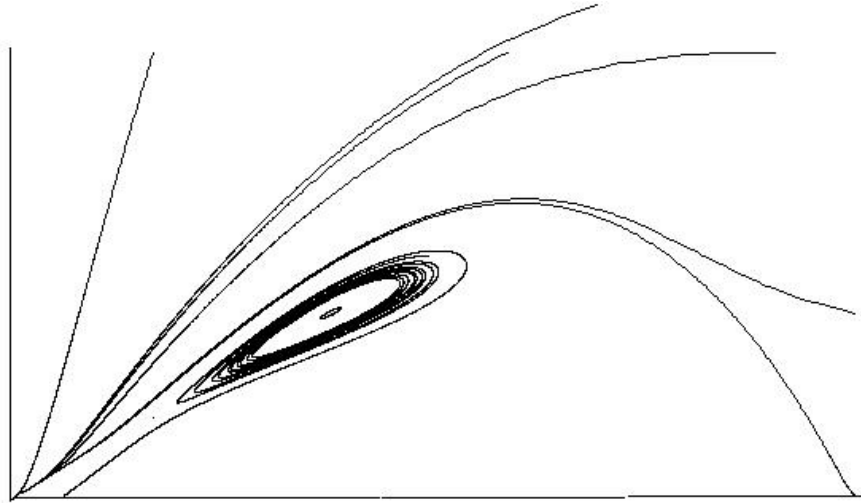


Figura 3.6

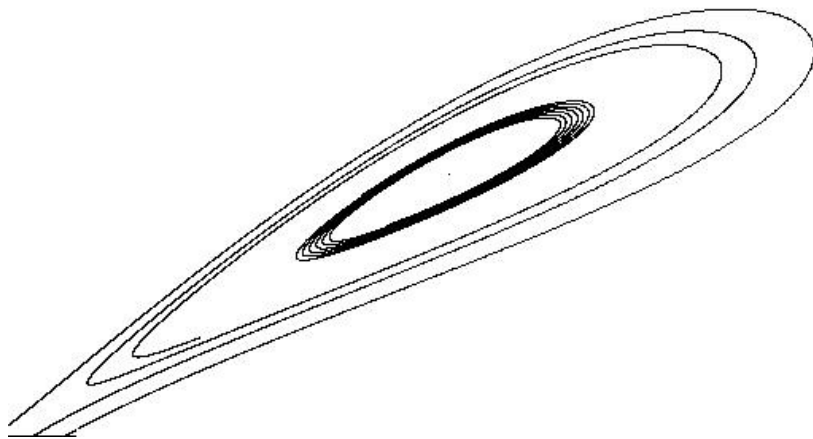


Figura 3.7

3. En la figura 3.8 vemos una silla y un foco atractor para los valores de parámetros $Q = 0.48$, $A = 0.4$, $M = 0$ y $B = 0.1$.

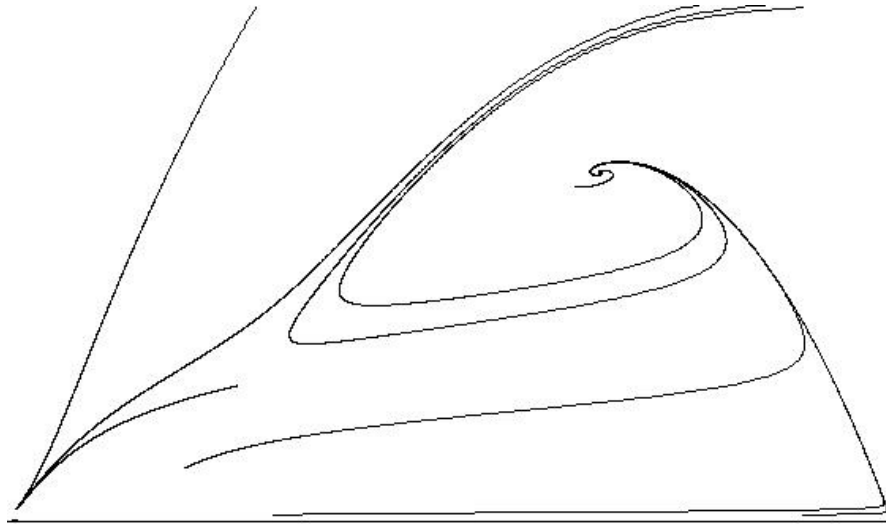


Figura 3.8

4. En la figura 3.9 podemos observar la bifurcación silla-nodo atractor para los valores de parámetros $Q = 0.5625$ $A = 0.5$, $M = 0$ y $B = 0.7$.

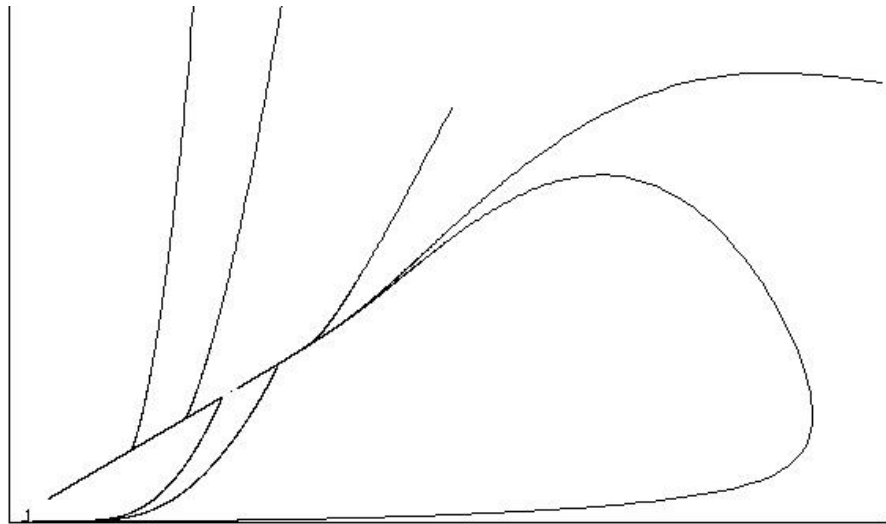


Figura 3.9

5. La figura 3.10 nos muestra el punto de equilibrio $(0, 0)$ como atractor global para el sistema (11), esto se da para cualquier conjunto de parámetros en la región 1 (ver diagrama de bifurcaciones).

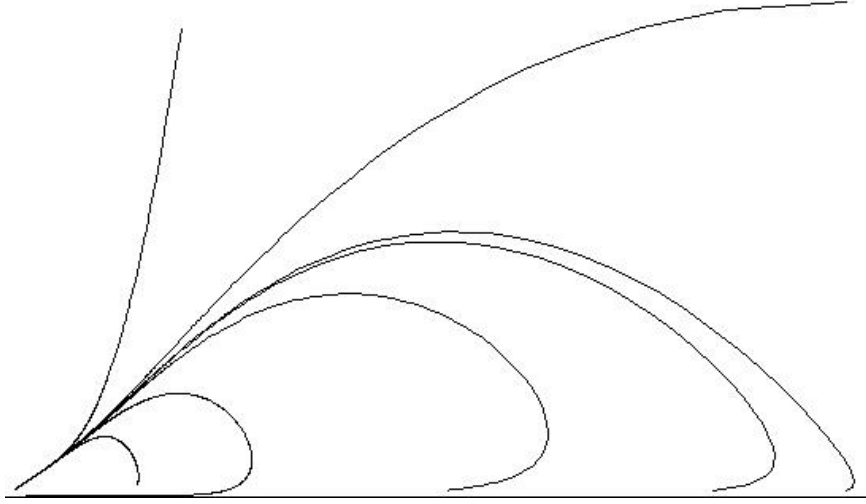


Figura 3.10

3.7 DIAGRAMA DE BIFURCACIONES

Del lema 3 sabemos que $\bar{\Omega} = \{0 \leq u \leq 1, v \geq 0\}$ es la región de invarianza del sistema (11); además el conjunto de posibles singularidades en $\bar{\Omega}$ está dado por:

$$P_0 = (0, 0), \quad P_1 = (E_1, E_1), \quad P_2 = (E_2, E_2), \quad \text{y} \quad P_3 = (1, 0)$$

Con el análisis que se ha dado a lo largo de este capítulo podemos establecer las siguientes regiones que dividen el espacio de parámetros de la forma:

$$\begin{aligned} R_1 &= \left\{ (A, B, Q) \in \mathbb{R}^3 \mid Q > \frac{(1+A)^2}{4} \right\} \\ R_2 &= \left\{ (A, B, Q) \in \mathbb{R}^3 \mid Q = \frac{(1+A)^2}{4} \right\} \\ R_3 &= \left\{ (A, B, Q) \in \mathbb{R}^3 \mid Q > A \text{ y } Q < \frac{(1+A)^2}{4} \right\} \\ R_4 &= \{ (A, B, Q) \in \mathbb{R}^3 \mid Q = A \} \\ R_5 &= \{ (A, B, Q) \in \mathbb{R}^3 \mid Q < A \} \end{aligned}$$

La figura 3.11 muestra la existencia de los puntos críticos por regiones

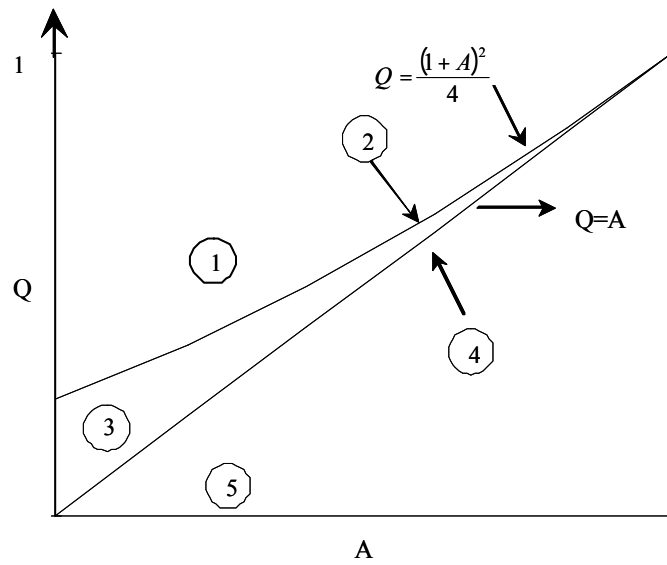
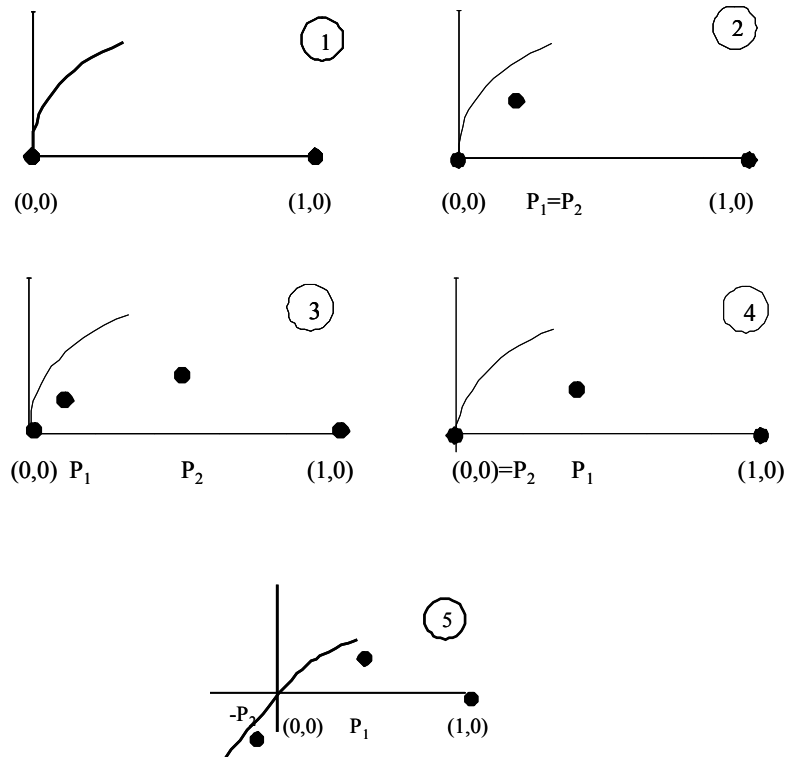


Figura 3.11



Ahora procedemos a resumir en la siguiente tabla la dinámica global del sistema (11) de acuerdo a la región definida por cada conjunto de parámetros.

Además asumimos las siguientes equivalencias:

$$T_1 = \text{Traza } DY_\eta(E_1, E_1) = -5E_1^4 - 4(1-A)E_1^3 + (-2Q + 3A)E_1^2 - E_1B(E_1 + A)$$

$$T_2 = \text{Traza } DY_\eta(E_c, E_c) = \frac{1}{16}(1+A)(A-1)(A^2 - 1 + 4B)$$

$$T_3 = \text{Traza } DY_\eta(E_q, E_q) = (1-A)(A^3 - 4A^2 + 4A - B - 1)$$

$$D_1 = \text{Det}DY_\eta(E_1, E_1) = BE_1^3(E_1 + A)(5E_1^2 - 4E_1(1-A) - 3A + 3Q)$$

$$D_3 = \text{Det}Y_\eta(E_q, E_q) = B(1-A)^5$$

Región	Puntos críticos	Naturaleza	w-límite
R ₁	P ₀ = (0, 0) P ₃ = (1, 0)	Para todo (A, B, Q) es un atractor no hiperbólico. Para todo (A, B, Q) es una silla hiperbólica.	(0, 0) (0, 0)
R ₂	P ₀ P _c = (E _c , E _c) P ₃	Es silla nodo repulsor si T ₂ > 0 Es silla-nodo atractor de codimensión dos si T ₂ = 0. Es silla nodo atractor si T ₂ < 0.	(0, 0) o (E _c , E _c) (0, 0) (E _c , E _c) o (0, 0) (E _c , E _c) o (0, 0)
R ₃	(0, 0) (1, 0), (E ₂ , E ₂) (E ₁ , E ₁)	Para todo (A, B, Q) son una sillas hiperbólicas. Es un foco atractor si T ₁ < 0 y T ₁ ² - 4D ₁ < 0. Es un foco débil de orden uno uno rodeado de un ciclo límite si T ₁ = 0. Es un foco repulsor si T ₁ > 0 y T ₁ ² - 4D ₁ < 0. Es un nodo atractor si T ₁ < 0 y T ₁ ² - 4D ₁ > 0. Es un nodo repulsor si T ₁ > 0 y T ₁ ² - 4D ₁ > 0.	(0, 0) (0, 0) o (E ₁ , E ₁) o el ciclo límite atractor. (E ₁ , E ₁) o (0, 0) El ciclo límite atractor que se forma vía bifur- cación de Hopf o (0, 0). El ciclo límite atractor que se forma por th de Poincaré Bendixon o (0, 0). (E ₁ , E ₁) o (0, 0) (E ₂ , E ₂) o (0, 0)

<i>Región</i>	<i>Puntos críticos</i>	<i>Naturaleza</i>	<i>w-límite</i>
R ₄	P_0, P_3 y (E_q, E_q)	<p>Es un foco atractor si $T_3 < 0$ y $T_3^2 - 4D_3 < 0$.</p> <p>Es un foco débil de orden uno rodeado de un ciclo límite si $T_3 = 0$.</p> <p>Es un foco repulsor si $T_3 > 0$ y $T_3^2 - 4D_3 < 0$</p> <p>Es un nodo atractor si $T_3 < 0$ y $T_3^2 - 4D_3 > 0$</p> <p>Es un nodo repulsor si $T_3 > 0$ y $T_3^2 - 4D_3 > 0$</p>	<p>(E_q, E_q) o $(0, 0)$</p> <p>El ciclo límite atractor que se forma vía bifurcación de Hopf o $(0, 0)$.</p> <p>El ciclo límite atractor que se forma por th de Poincaré-Bendixon o $(0, 0)$.</p> <p>(E_q, E_q) o $(0, 0)$.</p> <p>$(0, 0)$.</p>
R ₅	P_0, P_3 (E_1, E_1)	<p>Es un foco atractor si $T_1 < 0$ y $T_1^2 - 4D_1 < 0$.</p> <p>Es un foco débil de orden uno rodeado de un ciclo si límite si $T_1 = 0$.</p> <p>Es un foco repulsor si $T_1 > 0$ y $T_1^2 - 4D_1 < 0$.</p> <p>Es un nodo atractor si $T_1 < 0$ y $T_1^2 - 4D_1 > 0$.</p> <p>Es un nodo repulsor si $T_1 > 0$ y $T_1^2 - 4D_1 > 0$.</p>	<p>$(0, 0)$ (E_1, E_1) o $(0, 0)$</p> <p>El ciclo límite que se forma vía bifurcación de Hopf o $(0, 0)$.</p> <p>El ciclo límite atractor que se forma por th de Poincaré-Bendixon o $(0, 0)$.</p> <p>(E_1, E_1) o $(0, 0)$.</p> <p>$(0, 0)$.</p>

Teorema 21 El comportamiento del sistema es como se muestra en las siguientes figuras.

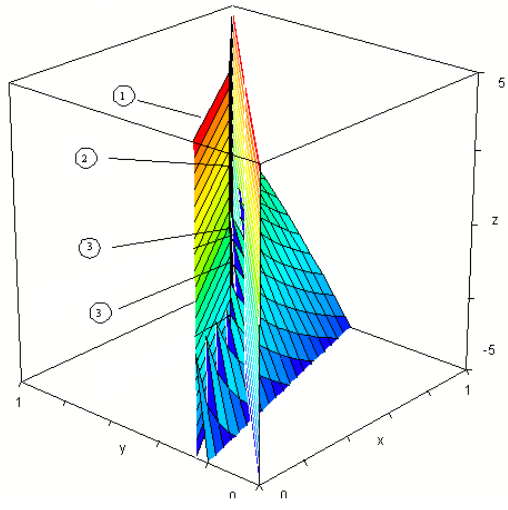
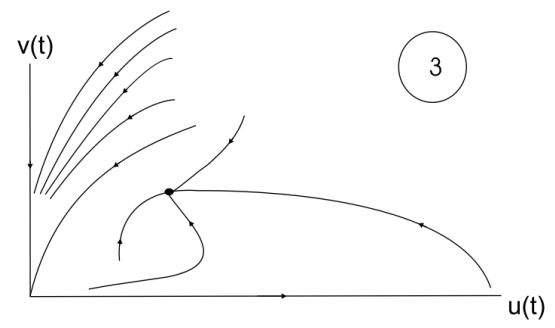
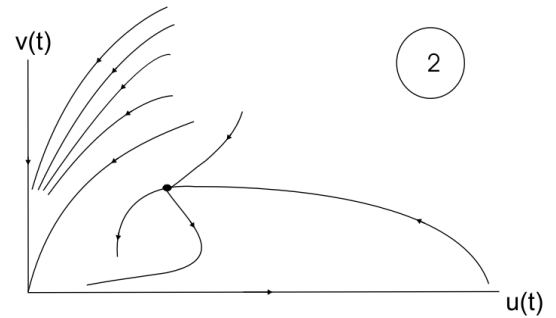
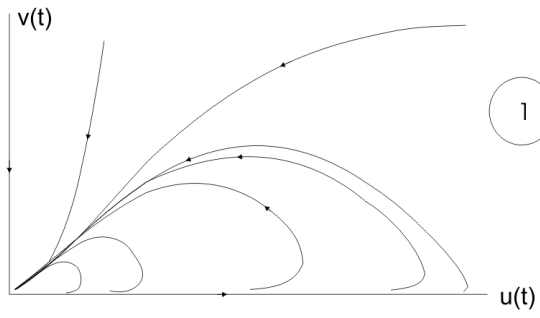
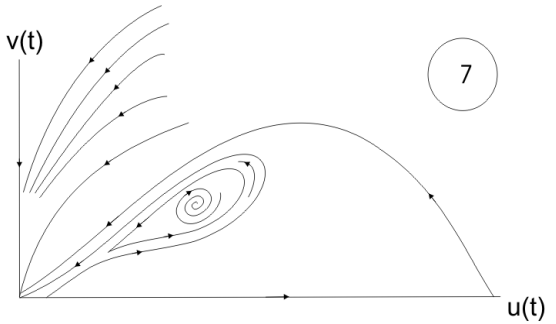
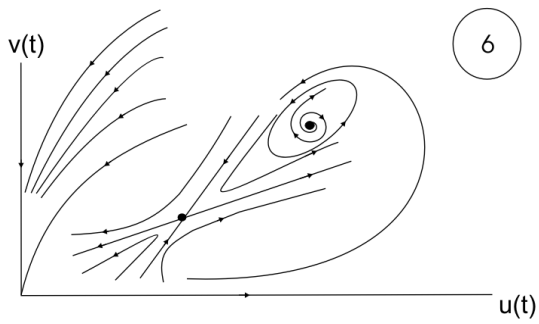
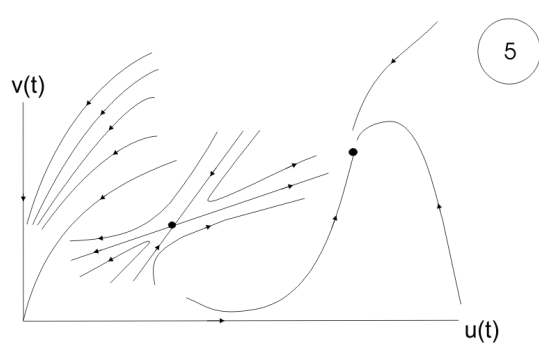
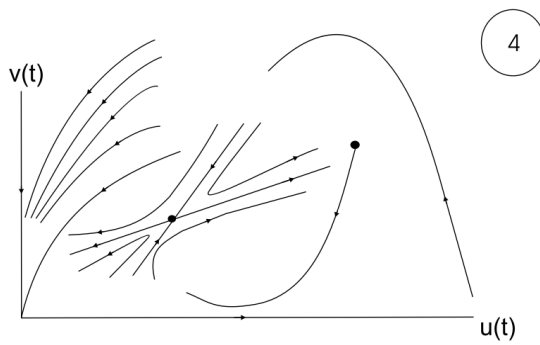
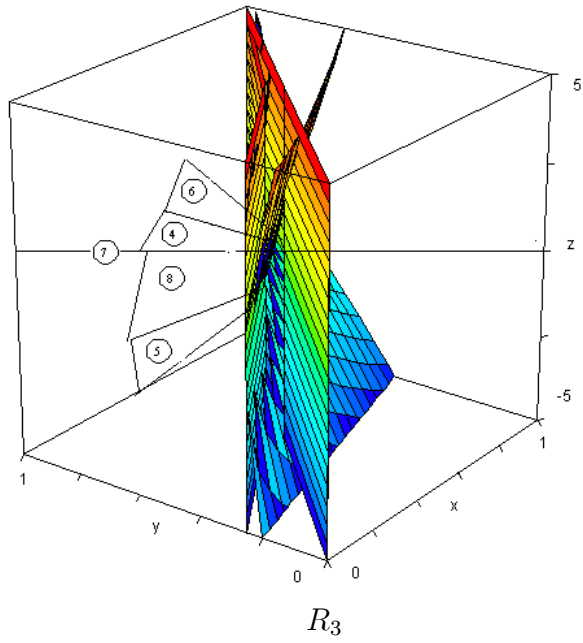
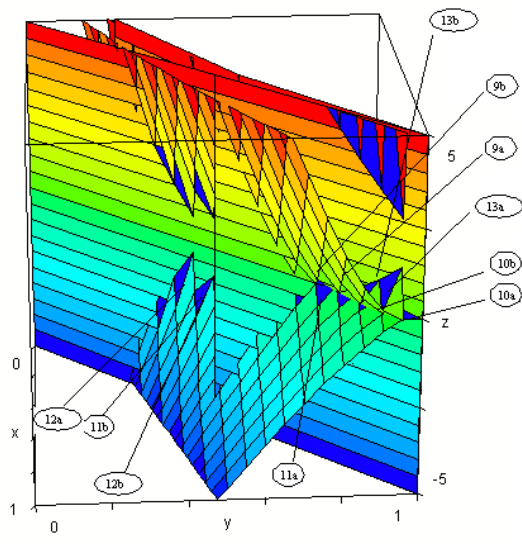


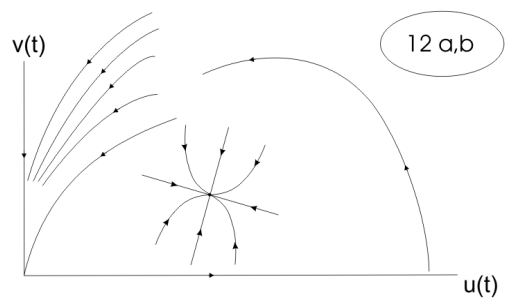
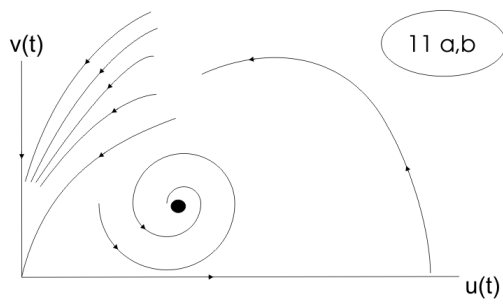
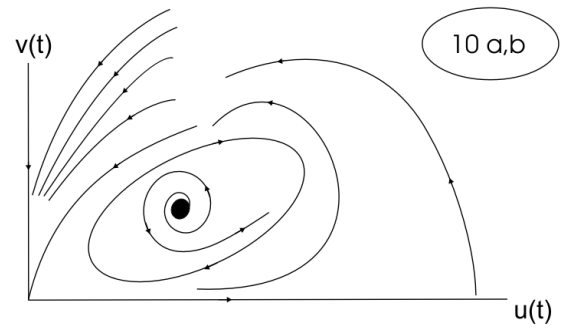
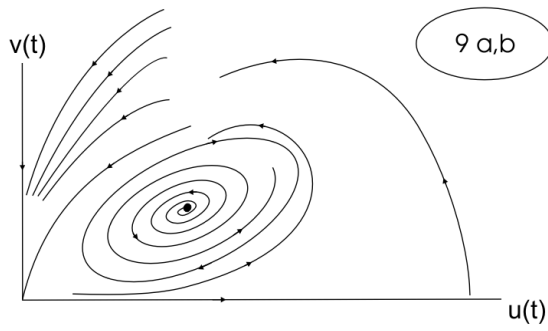
Figura: R_1 y R_2

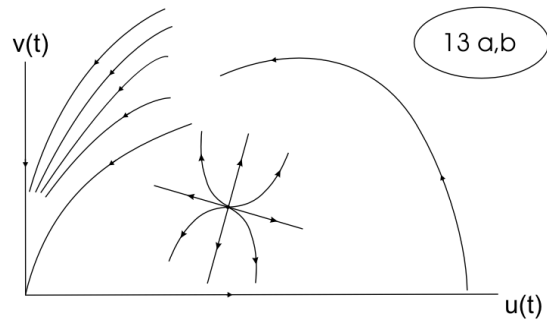






R_4 y R_5





4. ESTUDIO DE LOS PUNTOS CRÍTICOS PARA EL EFECTO ALLEE FUERTE

En este capítulo establecemos las condiciones para la existencia de puntos de equilibrio al interior del primer cuadrante; determinamos la naturaleza de cada una de las singularidades del sistema de ecuaciones diferenciales que modela el efecto Allee fuerte. Al igual que en el Capítulo anterior el estudio se hace a través del sistema topológicamente equivalente al sistema (8). Además presentamos los lemas y teoremas que describen el comportamiento global del sistema (31), la existencia de separatrices y demostramos la ocurrencia de las bifurcaciones de Hopf y silla-nodo degenerada de codimensión dos para cierto conjunto de parámetros. Para finalizar presentamos algunos retratos de fase utilizando el software PHASER .

4.1 PUNTOS CRÍTICOS DEL SISTEMA

De acuerdo a lo visto en la sección 3.1, el modelo (8) es equivalente a:

$$Y_\eta : \begin{cases} \frac{du}{d\tau} &= u^2 ((1-u)(u-M)(u+A) - Qv) \\ \frac{dv}{d\tau} &= Bv(u+A)(u-v) \end{cases} \quad (31)$$

con

$$\eta = (A, M, Q, B) \in R_+^4, \text{ donde } 0 < A, M < 1 \text{ y } B, Q > 0$$

Los puntos de equilibrio son

$$(-A, 0), (0, 0), (M, 0) \text{ y } (1, 0)$$

y los que están en la intersección de las curvas

$$(1-u)(u-M)(u+A) - Qv = 0 \quad (32)$$

y

$$u - v = 0$$

Como $v = u$, las singularidades al interior del primer cuadrante dependen de las soluciones de la ecuación cúbica:

$$(1 - u)(u - M)(u + A) - Q u = 0, \quad (33)$$

esto es,

$$u^3 - (1 - A + M) u^2 - ((1 + M) A - M - Q) u + MA = 0, \quad (34)$$

donde el coeficiente

$$a_2 = 1 - A + M$$

es siempre positivo y

$$a_1 = (1 + M) A - M - Q$$

puede tener cualquier signo.

Usando la Regla de signos de Descartes, deducimos que la ecuación tiene dos raíces reales positivas diferentes, una repetida (de multiplicidad dos) o ninguna, para cualquiera sea el signo de a_1 , incluido que sea cero.

Para determinar las condiciones de existencia un único punto de equilibrio (ver Figura 4.1) consideremos las funciones:

$$f(u) = u \quad \text{y} \quad g(u) = \frac{1}{Q}(1 - u)(u - M)(u + A) \quad (35)$$

Cuando $f(u) = g(u)$, tenemos la ecuación cúbica que pretendemos resolver y obtendremos el caso límite en que ambas curvas son tangentes.

Las derivadas de f y g son:

$$\frac{d}{dy}(f(u)) = 1$$

$$\frac{d}{du}((1-u)(u-M)(u+A)) = \frac{1}{Q}(-3u^2 + 2(1-A+M)u + A - M + MA)$$

luego las curvas son tangentes si y sólo sí,

$$-3u^2 + 2(1-A+M)u + A - M + MA - Q = 0$$

y satisfacen la siguiente ecuación (ver (34))

$$u^3 - (1-A+M)u^2 - ((1+M)A - M - Q)u + MA = 0$$

Tenemos entonces que el punto de tangencia satisface la ecuación

$$3u^2 - 2(1-A+M)u - ((1+M)A - M - Q) = 0, \quad (36)$$

cuyas soluciones son una positiva y otra negativa por haber dos cambios de signo (Regla de Descartes). Estas soluciones están dadas por:

$$u^* = \frac{1}{3} \left((1-A+M) + \sqrt{1+A-M+A^2+MA+M^2-3Q} \right),$$

$$u' = \frac{1}{3} \left((1-A+M) - \sqrt{1+A-M+A^2+MA+M^2-3Q} \right)$$

siempre que

$$W^2 = 1 + A - M + A^2 + MA + M^2 - 3Q > 0$$

Tenemos entonces tres posibilidades que analizamos en el lema 22 a continuación.

Lema 22 Supuesto que

$$3(u^*)^2 - 2(1-A+M)u^* - ((1+M)A - M - Q) = 0 \quad (37)$$

el sistema (31)

i) tiene un único punto de equilibrio en el interior del primer cuadrante, si y sólo si,

$$(u^*)^3 - (1 - A + M)(u^*)^2 - ((1 + M)A - M - Q)u^* + MA = 0 \quad (38)$$

ii) tiene dos puntos de equilibrio en el interior del primer cuadrante, si y sólo si,

$$(u^*)^3 - (1 - A + M)(u^*)^2 - ((1 + M)A - M - Q)u^* + MA < 0$$

iii) no tiene puntos de equilibrio en el interior del primer cuadrante, si y sólo si,

$$(u^*)^3 - (1 - A + M)(u^*)^2 - ((1 + M)A - M - Q)u^* + MA > 0. \quad (39)$$

Demostración

i) \Rightarrow Por hipótesis

$$3(u^*)^2 - 2(1 - A + M)u^* - ((1 + M)A - M - Q) = 0,$$

(por ser $f(u)$ y $g(u)$ tangentes en u^*), además el sistema tiene un único punto de equilibrio al interior del primer cuadrante de multiplicidad dos por el teorema de Descartes, es decir,

$$f(u^*) = g(u^*),$$

como

$$h(u) = f(u) - g(u)$$

entonces

$$h(u^*) = 0$$

\Leftarrow Si

$$h(u^*) = 0$$

entonces

$$h(u^*) = f(u^*) - g(u^*)$$

entonces

$$f(u^*) = g(u^*)$$

y como u^* satisface la ecuación (36), entonces

$$f'(u^*) = g'(u^*)$$

luego

$$f(u) \text{ y } g(u)$$

son tangentes en u^* , por lo tanto $h(u)$ tiene un único punto de equilibrio al interior del primer cuadrante.

ii) y iii) La curva $g(u)$ siempre pasa por los puntos $(M,0)$ y $(1,0)$. Al perturbar la curva $g(u)$ podemos tener dos situaciones de modo que la diferencia

$$f(u^*) - g(u^*) > 0 \text{ o } f(u^*) - g(u^*) < 0$$

El primer caso implica que existen dos puntos de intersección entre $f(u)$ y $g(u)$ y el segundo caso demuestra que no hay ninguno.

La Figura 4.1a y 4.1b muestran la situación descrita.

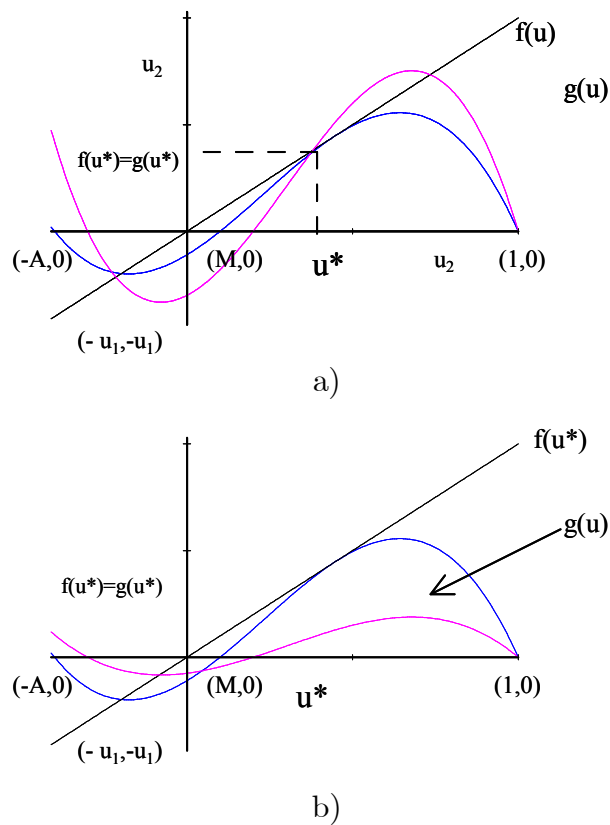


Figura 4.1: Puntos críticos del sistema (31)

4.2 NATURALEZA DE LOS PUNTOS DE EQUILIBRIO

4.2.1 Puntos críticos sobre los ejes

Lema 23 Lema Para todo (A, B, M, Q) el punto $(1, 0)$ es una silla La matriz de jacobiana evaluada en $(1, 0)$ es

$$DY_\eta(1, 0) = \begin{pmatrix} -(1+A)(1-M) & -Q \\ 0 & B(1+A) \end{pmatrix}$$

como

$$\text{Det } DY_\eta(1, 0) = -(1+A)^2(1-M)B < 0$$

luego $(1, 0)$ es una silla.

Lema 24 Lema Para todo (A, B, M, Q) el punto $(M, 0)$ es un nodo repulsor **Demostración**

La matriz jacobiana evaluada en $(M, 0)$ es

$$DY_\eta(M, 0) = \begin{pmatrix} M^2(1-M)(M+A) & -M^2Q \\ 0 & BM(M+A) \end{pmatrix}$$

como

$$\text{Det } DY_\eta(M, 0) = M^3(1-M)(M+A)^2B > 0$$

y

$$\text{Traza } DY_\eta(M, 0) = M^2(1-M)(M+A) + B(M+A)M > 0.$$

luego el punto de equilibrio $(M, 0)$ es un nodo repulsor.

Notemos que si $M = 0$ esta singularidad colapsa con $(0, 0)$.

4.2.2 Desingularización del origen

Lema 25 El punto crítico $(0, 0)$ tiene

i) un sector parabólico si $(v, u)/v > \frac{B}{M+B}$

ii) un sector elíptico si $(v, u)/v < \frac{B}{M+B}$

Demostración

El campo vectorial Y_η está dado por el sistema polinomial de quinto grado

$$Y_\eta : \begin{cases} \frac{du}{d\tau} = u^2((1-u)(u-M)(u+A) - Qv) \\ \frac{dv}{d\tau} = Bv(u+A)(u-v) \end{cases} \quad (40)$$

con

$\eta = (A, M, Q, B) \in R_+^4$, donde $0 < A, M < 1$ y $B, Q > 0$
La matriz jacobiana del sistema (40) es

$$DY_{\eta}(u, v) = \begin{pmatrix} J11 & -u^2Q \\ Bv(-v + 2u + A) & B(u - 2v)(u + A) \end{pmatrix}$$

donde

$$J11 = -u(5u^3 - 4u^2 + 4u^2A - 4u^2M - 3uA + 3uM - 3uMA + 2Qv + 2MA)$$

Como

$$DY_{\eta}(0, 0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

efectuamos un Blowing-up horizontal dado por la función $\Psi(p, q) = (pq, q) = (p, q)$, luego $\frac{dp}{d\tau} = \frac{1}{q}(\frac{du}{d\tau} - p \frac{dq}{d\tau})$ y $\frac{dq}{d\tau} = \frac{dv}{d\tau}$; entonces sustituyendo en el sistema (31) obtenemos:

$$Z_{\omega} : \begin{cases} \frac{dp}{d\tau} = pq(((1 - pq)(pq - M)(pq + A) - Qq) p - B(pq + A)(p - 1)) \\ \frac{dq}{d\tau} = Bq^2(p - 1)(pq + A) \end{cases} \quad (41)$$

y haciendo un reescalamiento del tiempo dado por $T = q\tau$ tenemos que:

$$\frac{1}{q}Z_{\omega} = \overline{Z}_{\omega} : \begin{cases} \frac{dp}{dT} = p([((1 - pq)(pq - M)(pq + A) - Qq) p - B(pq + A)(p - 1)]) \\ \frac{dq}{dT} = Bq(p - 1)(pq + A) \end{cases}$$

Si $q = 0$, $\frac{dq}{dT} = 0$ y además $\frac{dp}{dT} = (-AMp - AB(p - 1))p$

Cuando $\frac{dp}{dT} = 0$ tenemos las soluciones $p = 0$ o $p = \frac{B}{M+B}$. como $0 < p < 1$ y $0 < M < 1$, entonces $B < M + B$.

La matriz jacobiana del sistema \overline{Z}_{ω} es

$$D\overline{Z}_{\omega}(p, q) = \begin{pmatrix} \overline{Z}_{\omega 11} & p^2Q \\ Bq(2qp - q + A) & B(p^2q - 2qp + Ap - A) \end{pmatrix}$$

donde

$$\begin{aligned}\overline{Z}_{\omega 11} = & [p^3q^2 + p^2qA - p^2qM - pMA - p^4q^3 - p^3q^2A + p^3q^2M + p^2qMA - pQq - Bp^2q \\ & + Bpq - BAp + BA] + p[-4p^3q^3 - 3p^2q^2A + 3p^2q^2M + 2pqMA + 3p^2q^2 + 2pqA \\ & - 2pqM - MA - Qq - 2Bpq + Bq - BA]\end{aligned}$$

En $(0, 0)$ la jacobiana resulta

$$D\overline{Z}_{\omega}(0, 0) = \begin{pmatrix} BA & 0 \\ 0 & -BA \end{pmatrix}$$

por lo tanto, $(0, 0)$ del campo \overline{Z}_{ω} es un punto silla, y el punto $(0, 0)$ del sistema (31) es un punto silla no hiperbólica, independiente de los valores de los parámetros.

Para el caso $(\frac{B}{M+B}, 0)$ la jacobiana resulta $D\overline{Z}_{\omega}(\frac{B}{M+B}, 0) = \begin{pmatrix} -BA & 0 \\ 0 & -\frac{B}{M+B}MA \end{pmatrix}$ por lo tanto $(\frac{B}{M+B}, 0)$ del sistema (41) es un nodo atractor para todo valor de los parámetros.

Ahora haciendo el Blowing-down dado por la función $\Psi^{-1}(pq, q) = (u, v)$ obtenemos $(u, \frac{M+B}{B}u)$ quedando dividido el plano de fase en dos sectores

i) un sector parabólico si $v > \frac{B}{M+B}$ y

ii) un sector elíptico si $v < \frac{B}{M+B}$

4.2.3 Puntos críticos positivos

Dos puntos críticos

Existen dos puntos de equilibrio en el interior del primer cuadrante, esto es asumiendo que

$$(u^*)^3 - (1 - A + M)(u^*)^2 - ((1 + M)A - M - Q)u^* + MA < 0$$

y sean $0 < u_1 < u_2 < 1$, las raíces positivas diferentes de la ecuación

$$u^3 - (1 - A + M)u^2 - ((1 + M)A - M - Q)u + MA = 0$$

tales que $u_1 = \alpha u^*$ y $u_2 = \beta u^*$, donde $0 < \alpha < 1$, y $1 < \beta < \frac{1}{u^*}$ esto se sigue del hecho de que estos puntos críticos no son tangentes a la recta $v = u$ y además su valor debe estar en el intervalo $[0, 1]$.

Para el estudio de la naturaleza de los puntos de equilibrio del sistema (31) vamos a considerar la ecuación (42).

$$F(u, v) = (1 - u)(u - M)(u + A) - Q v \quad (42)$$

como

$$\dot{u} = u^2 F(u, v)$$

entonces

$$\frac{d}{du} (u^2 F(u, v)) = 2uF(u, v) + u^2 F'_u(u, v) \quad (43)$$

de la ecuación (33) sabemos que $F(u, u) = 0$ siendo (u, u) punto crítico, y como (43) va a ser la primera componente de la matriz jacobiana evaluada en puntos críticos de la forma (u, u) entonces

$$\frac{d}{du} (u^2 F(u, u)) = u^2 F'_u(u, u) = u^2 (-3(u)^2 + 2(1 - A + M)u + A - M + MA) \quad (44)$$

Lema 26 El punto de equilibrio $(\beta u^*, \beta u^*)$ es

- i) un atractor si $B > \beta u^* \frac{-3(\beta u^*)^2 + (2M+2-2A)\beta u^* + A + M(-1+A)}{\beta u^* + A}$
- ii) un repulsor si $B < \beta u^* \frac{-3(\beta u^*)^2 + (2M+2-2A)\beta u^* + A + M(-1+A)}{\beta u^* + A}$ rodeado de un ciclo límite estable.

iii) un foco débil de orden uno rodeado de un ciclo límite atractor si

$$B = \beta u^* \frac{-3(\beta u^*)^2 + (2M+2-2A)\beta u^* + A + M(-1+A)}{\beta u^* + A}$$

Demostración

La matriz jacobiana evaluada en $(\beta u^*, \beta u^*)$ es

$$DY_\omega(\beta u^*, \beta u^*) = \begin{pmatrix} DY_{11} & -Q(\beta u^*)^2 \\ B(\beta u^*)(\beta u^* + A) & -B(\beta u^*)(\beta u^* + A) \end{pmatrix}$$

con

$$DY_{11} = (\beta u^*)^2 (-3(\beta u^*)^2 + 2(1 - A + M)\beta u^* + A - M + MA)$$

luego

$$\det DY_\omega(\beta u^*, \beta u^*) = (\beta u^*)^3 B(\beta u^* + A) \left([3(\beta u^*)^2 - 2(1 - A + M)u - MA - A + M] + Q \right)$$

y su signo depende de

$$[3(\beta u^*)^2 - 2(1 - A + M)\beta u^* - A + M - MA] + Q \quad (45)$$

como (45) es de la forma

$$-F'_u(\beta u^*, \beta u^*) + Q \quad (46)$$

para determinar el signo de (46), las raíces de

$$F'_u(\beta u^*, \beta u^*) = -3(\beta u^*)^2 + 2(1 - A + M)\beta u^* + A - M + MA$$

están dadas por

$$\left\{ \begin{aligned} \beta u_1^* &= \frac{1}{3}M + \frac{1}{3} - \frac{1}{3}A + \frac{1}{3}\sqrt{(M^2 - M + MA + 1 + A + A^2)} \\ \beta u_2^* &= \frac{1}{3}M + \frac{1}{3} - \frac{1}{3}A - \frac{1}{3}\sqrt{(M^2 - M + MA + 1 + A + A^2)} \end{aligned} \right\}$$

donde $\beta u_2^* < \beta u_1^*$ y $F'_u(\beta u^*, \beta u^*) < 0$ para $\beta u < \beta u_2^*$ o $\beta u > \beta u_1^*$ como $\beta u^* > \beta u_1^*$ por ser $\beta > 1$ entonces $F'_u(\beta u^*, \beta u^*) < 0$ luego la ecuación (46) es siempre positiva para $(\beta u^*, \beta u^*)$ y por lo tanto

$$\det DY_\omega(\beta u^*, \beta u^*) > 0$$

y la naturaleza de este punto crítico depende de la traza, i.e

$$\text{Tr } DY_\omega(\beta u^*, \beta u^*) = \beta u^* \left(-3(\beta u^*)^3 + 2(1 - A + M)(\beta u^*)^2 + (M(A - 1) - B + A)\beta u^* - BA \right)$$

pero el signo de la traza depende de

$$-3(\beta u^*)^3 + 2(1 - A + M)(\beta u^*)^2 + (M(A - 1) - B + A)\beta u^* - BA$$

i) Si $B > \beta u^* \frac{-3(\beta u^*)^2 + (2M+2-2A)\beta u^* + A + M(-1+A)}{\beta u^* + A}$ entonces $\text{Tr } DY_\omega(\beta u^*, \beta u^*) < 0$ y el punto crítico $(\beta u^*, \beta u^*)$ es un atractor.

ii) Si $B < \beta u^* \frac{-3(\beta u^*)^2 + (2M+2-2A)\beta u^* + A + M(-1+A)}{\beta u^* + A}$ entonces $\text{Tr } DY_\omega(\beta u^*, \beta u^*) > 0$ y el punto crítico $(\beta u^*, \beta u^*)$ es un repulsor rodeado de un ciclo límite por el Teorema de Poincaré-Bendixon.

iii) Si $B = \beta u^* \frac{-3(\beta u^*)^2 + (2M+2-2A)\beta u^* + A + M(-1+A)}{\beta u^* + A}$ entonces el punto $(\beta u^*, \beta u^*)$ es un foco débil de orden uno rodeado de un ciclo límite atractor; esto se sigue de la aplicación del teorema 16 y el lema que sigue a continuación.

Lema 27 En el sistema (31) para el punto crítico $(\beta u^*, \beta u^*)$ se presenta la bifurcación de Hopf.

La prueba se sigue del lema anterior ya que el determinante es siempre positivo y la traza cambia de signo. Además para verificar la condición de transversalidad tenemos que:

$$\frac{dTr DY_\eta(\beta u^*, \beta u^*)}{dB} = -\beta u^* (A + \beta u^*) < 0.$$

Lema 28 El punto $(\alpha u^*, \alpha u^*)$ es una silla hipérbolica

Demostración

La matriz jacobiana evaluada en $(\alpha u^*, \alpha u^*)$ es

$$DY_\omega(\alpha u^*, \alpha u^*) = \begin{pmatrix} DY_{11} & -Q(\alpha u^*)^2 \\ B(\alpha u^*)(\alpha u^* + A) & -B(\alpha u^*)(\alpha u^* + A) \end{pmatrix}$$

con

$$DY_{11} = (\alpha u^*)^2 (-3(\alpha u^*)^2 + 2(1 - A + M)\alpha u^* + A - M + MA)$$

luego

$$\det DY_\omega(\alpha u^*, \alpha u^*) = (\alpha u^*)^3 B(\alpha u^* + A) ([3(\alpha u^*)^2 - 2(1 - A + M)\alpha u^* - MA - A + M] + Q)$$

y su signo depende de

$$[3(\alpha u^*)^2 - 2(1 - A + M)\alpha u^* - MA - A + M] + Q$$

que es de la forma

$$-F'_u(\alpha u^*, \alpha u^*) + Q \quad (47)$$

para determinar el signo de (47), las raíces de

$$F'_u(\alpha u^*, \alpha u^*) = -3(\alpha u^*)^2 + 2(1 - A + M)\alpha u^* + A - M + MA \quad (48)$$

están dadas por

$$\left\{ \begin{aligned} \alpha u_1^* &= \frac{1}{3}M + \frac{1}{3} - \frac{1}{3}A + \frac{1}{3}\sqrt{(M^2 - M + MA + 1 + A + A^2)} \\ \alpha u_2^* &= \frac{1}{3}M + \frac{1}{3} - \frac{1}{3}A - \frac{1}{3}\sqrt{(M^2 - M + MA + 1 + A + A^2)} \end{aligned} \right\}$$

donde $\alpha u_2^* < \alpha u_1^*$ y $F'_u(\alpha u^*, \alpha u^*) < 0$ para $\alpha u < \alpha u_2^*$ o $\alpha u > \alpha u_1^*$ como $\alpha u_2^* < \alpha u^* < \alpha u_1^*$ (por el teorema del valor medio siendo F'_u continua) además como $0 < \alpha < 1$

entonces $-F'_u(\beta u^*, \beta u^*) < 0$ y para determinar el signo de la ecuación (47) despejando de (37) el valor de Q obtenemos

$$Q = -3(u)^2 + 2(1 - A + M)u + A - M + MA$$

con $u = \alpha u^*$ la ecuación (47) toma la forma

$$-2F'_u(\alpha u^*, \alpha u^*) < 0$$

luego

$$\det DY_\omega(\alpha u^*, \alpha u^*) < 0$$

y el punto de equilibrio $(\alpha u^*, \alpha u^*)$ es una silla hipérbolica.

Un punto de colapso Existe un sólo punto de equilibrio en el primer cuadrante donde colapsan los puntos críticos $(\alpha u^*, \alpha u^*)$ y $(\beta u^*, \beta u^*)$; nombrando este punto de colapso como $(u^*, u^*) = (\alpha u^*, \alpha u^*) = (\beta u^*, \beta u^*)$. tenemos lo siguiente:

Lema 29 El punto crítico (u^*, u^*) es:

- i. Un silla-nodo repulsor si $B < -u^2 + (1 + M)u - M$
- ii. Un silla-nodo atractor si $B \geq -u^2 + (1 + M)u - M$

Demostración

En este caso tenemos que la matriz jacobiana es:

$$DY_\eta(u^*, u^*) = \begin{pmatrix} DY_{11} & -Q(u^*)^2 \\ B(u^*)(u^* + A) & -B(u^*)(u^* + A) \end{pmatrix}$$

donde

$$\begin{aligned} DY_{11} &= -5u^4 + 4(1 - A + M)u^3 + (3(A - M + MA) - 2Q)u^2 - 2MAu \\ &= -u(5u^3 - 4(1 - A + M)u^2 - (3(A - M + MA) - 2Q)u + 2MA) \end{aligned}$$

como

$$u^3 - (1 - A + M)u^2 - ((1 + M)A - M - Q)u + MA = 0$$

para $u = u^*$ obtenemos

$$\begin{aligned} DY_{11} &= -u(4u^3 - 3(1 - A + M)u^2 - (2(A - M + MA) - Q)u + MA) \\ &= -u((4u^2 - 3(1 - A + M)u - (2(A - M + MA) - Q))u + MA) \end{aligned}$$

y como también satisface la ecuación (36) tenemos que

$$3u^2 - 2(1 - A + M)u - ((1 + M)A - M - Q) = 0$$

y por lo tanto:

$$DY_{11} = -u((u^2 - (1 - A + M)u - (A - M + MA))u + MA)$$

Luego

$$\begin{aligned} \text{Det } DY_{\eta}(u^*, u^*) &= (u^* ((u^{*2} - (1 - A + M)u^* - (A - M + MA))u^* + MA)) Bu^*(u^* + A) \\ &\quad + Q(u^*)^2 B(u^*)(u^* + A) \\ &= B(u^*)^2 (u^* + A) \\ &\quad (((u^*)^2 - (1 - A + M)(u^*) - (A - M + MA))u^* + MA) + Q(u^*) \end{aligned}$$

De donde despejamos Q , obtenemos

$$Q = \frac{1}{u} (-u^2 A + uA + uMA - MA - u^3 + u^2 + u^2 M - uM)$$

que es el mismo valor de Q en (38), luego por el lema 22

$$\text{Det } DY_{\eta}(u^*, u^*) = 0$$

así que la naturaleza de este punto crítico depende de la traza, i.e

$$\text{Traza } DY_{\eta}(u^*, u^*) = u^*(u^* + A)(-u^{*2} + (1 + M)u^* - B - M)$$

Como el signo de la traza depende de

$$-u^{*2} + (1 + M)u^* - B - M$$

i) Si

$$B < -u^2 + (1 + M)u - M$$

entonces

$$\text{Traza } DY_{\eta}(u^*, u^*) > 0$$

y el punto de equilibrio (u^*, u^*) es no hiperbólico, usando el Teorema de la variedad central [G H] concluimos que la naturaleza de esta singularidad corresponde a un sillanodo repulsor.

ii a) Para determinar la naturaleza del punto crítico (u^*, u^*) cuando el parámetro B asume el valor

$$B = -(u^*)^2 + (1 + M)u^* - M$$

el cual hace que la traza se anule, trasladamos al origen el punto de equilibrio (u^*, u^*) por medio del cambio de coordenadas

$$\begin{cases} \gamma = u - u^* \\ \delta = v - u^* \end{cases} \quad (49)$$

donde

$$\begin{cases} u = \gamma + u^* \\ v = \delta + u^* \end{cases} \quad (50)$$

Haciendo el cambio de coordenadas (49) este transforma el sistema (31) en:

$$Y_\kappa = \begin{cases} \frac{d\gamma}{d\tau} = (\gamma + u^*)^2((1 - \gamma - u^*)(\gamma + u^* - M)(\gamma + u^* + A) - Q(\delta + u^*)) \\ \frac{d\delta}{d\tau} = B(\delta + u^*)(\gamma + u^* + A)(\gamma - \delta) \end{cases} \quad (51)$$

como

$$(u^*)^3 - (1 - A + M)(u^*)^2 - ((1 + M)A - M - Q)u^* + MA = 0$$

por el lema 22 despejamos el valor del parámetro Q obteniendo

$$Q = \frac{-(u^*)^3 + (1 - A + M)(u^*)^2 + (A + MA - M)u^* - MA}{u^*}$$

reemplazando en Y_η el valor de bifurcación en $B = -(u^*)^2 + (1 + M)u^* - M$, el valor de Q y simpificando obtenemos

$$Y_\kappa = \begin{cases} \frac{d\gamma}{d\tau} = (\gamma + u^*)((\gamma + u^*) - 1)((\gamma + u^*) - (\delta + u^*)((\gamma + u^*) + A) - (\gamma + u^*) + M) \\ \frac{d\delta}{d\tau} = (\delta + u^*)((\gamma + u^*) - 1)(-(\gamma + u^*) + M)((\gamma + u^*) + A)((\gamma + u^*) - (\delta + u^*)) \end{cases} \quad (52)$$

La matriz jacobiana de (52) evaluada en $(0,0)$ es

$$DY_\kappa(0,0) = \begin{pmatrix} (u^* - 1)(M - u^*)(u^* + A)u^* & -(u^* - 1)(M - u^*)(u^* + A)u^* \\ (u^* - 1)(M - u^*)(u^* + A)u^* & -(u^* - 1)(M - u^*)(u^* + A)u^* \end{pmatrix}$$

o en forma equivalente

$$DY_\eta(0,0) = (u^* - 1)(M - u^*)(u^* + A)u^* \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \quad (53)$$

Ahora procedemos a hallar la forma de Jordan [A P II] para la matriz $Y_\eta(0,0)$, esta tiene iguales valores propios y un sólo vector propio, i.e $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \leftrightarrow 0$. Este vector propio va ser la primera columna de la matriz de transformaciones M . Para obtener la

segunda columna escogemos un vector que haga la matriz M no singular, en este caso tomemos $\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$, quedando

$$M = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

entonces $M^{-1}AM$ es

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (u^* - 1)(M - u^*)(u^* + A)u^* & -(u^* - 1)(M - u^*)(u^* + A)u^* \\ (u^* - 1)(M - u^*)(u^* + A)u^* & -(u^* - 1)(M - u^*)(u^* + A)u^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

simplificando, obtenemos la forma de Jodan para la matriz (53)

$$\begin{pmatrix} 0 & (1 - u^*)(M - u)(u^* + A)u^* \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

la cual corresponde a una bifurcación silla-nodo de codimensión dos (por ser el colapso de una silla y un nodo, ver los lemas 28 y 26 respectivamente).

ii.b) Si

$$B > -u^2 + (1 + M)u - M$$

entonces

$$\text{Traza } DY_\eta(u^*, u^*) < 0$$

y el punto de equilibrio (u^*, u^*) es no hiperbólico, usando el Teorema de la variedad central [G H] concluimos que la naturaleza de esta singularidad corresponde a un silla-nodo atractor.

Teorema 30 Si (A, B, Q, M) cumplen la condición (39), el punto $P_0 = (0, 0)$ es global asintóticamente estable para el sistema (31).

Demostración

La prueba es inmediata de los lemas 23 y 25; además teniendo en cuenta que para $(1, 0)$ la W^u está dada para el eje v .

Para finalizar notemos que para el sistema (31) son válidos los teoremas 17, 18 y 19.

5. CONCLUSIONES

En esta parte interpretamos los resultados obtenidos en los capítulos anteriores y establecemos las comparaciones pertinentes para el modelo de May-Holling-Tanner.

- El modelo que obtuvimos al incorporar el efecto Allee en la ecuación de crecimiento de las presas es altamente sensible a las condiciones iniciales, lo cual implica que dos soluciones muy próximas pueden tener w – *límites* diferentes, esto es el sistema es caótico en \mathbb{R}^2 .
- La estabilidad del punto de equilibrio $(0, 0)$ tiene una fuerte influencia en el comportamiento global del sistema para cada una de las regiones descritas en el diagrama de bifurcaciones ya bien sea para el efecto Allee débil o fuerte, como consecuencia de la separatriz que origina, dando siempre lugar a que exista una cierta región de condiciones iniciales en la cual se da la extinción de las especies.
- En el modelo de May-Holling-Tanner el punto de equilibrio $(0, 0)$ tiene un sector parabólico y un sector hiperbólico, mientras que al incorporar el efecto Allee este mismo punto de equilibrio tiene un sector parabólico y un sector elíptico.
- La dinámica del sistema presa-predador que analizamos tuvo un cambio de comportamiento ya bien fuera al incorporar el efecto Allee débil o fuerte, lo que dio lugar a la aparición de nuevos puntos de equilibrio en el interior del primer cuadrante, situación que marca una drástica diferencia con respecto al modelo de May-Holling-Tanner.
- Además hay unicidad del ciclo límite cuando existe, mientras que en el trabajo anterior hay condiciones en los parámetros para las cuales hay dos ciclos límite.
- En este trabajo encontramos que estabilidad local no implica estabilidad global cuando se tiene un único punto de equilibrio positivo para este tipo de modelos presa-predador como se tiende a generalizar en algunos trabajos. Más bien lo que encontramos es una situación de biestabilidad como consecuencia del comportamiento que tiene el punto de equilibrio $(0, 0)$ o dicho de otra manera cuando tenemos un único punto de equilibrio positivo hay una bacia o región de atracción que hace que ambas especies se preserven si los tamaños iniciales permanecen en esa región, de lo contrario van inexorablemente a la extinción.
- El comportamiento del sistema (11) bajo la condición en los parámetros $Q = A$ y $Q < A$ no tiene un comportamiento equivalente porque aunque el punto de equilibrio positivo se comporta de igual manera, el otro punto de equilibrio que estaba en el primer cuadrante para el caso $Q = A$ colapsa con $(0, 0)$, mientras que para el caso

$Q < A$ ese mismo punto de equilibrio pasa a estar en el tercer cuadrante; razón por la cual ambas situaciones fueron consideradas por separado.

- Para el caso del efecto Allee débil el hecho de tener el parámetro $m = 0$ implicó un colapso del punto crítico $(m, 0)$ con el origen. Y el caso $m \neq 0$ produjo una situación de bifurcación silla-nodo para la naturaleza del único punto crítico al interior del primer cuadrante (situación de tangencia); si en el efecto Allee débil tenemos un único punto crítico positivo este tiene una variada gama de situaciones; una de ellas es la de bifurcación silla-nodo y existen otras que no son topológicamente equivalentes a la que obtuvimos al considerar el efecto Allee fuerte.
- Como los puntos de equilibrio al interior del primer cuadrante no son globalmente estables nunca es posible encontrar funciones de Liapunov para demostrar la no existencia de ciclos para ciertos conjuntos de parámetros.
- El efecto Allee tiene gran importancia en los estudios de modelos de conservación de especies que pueden ser modelados por un sistema como el aquí estudiado y se deberían tomar en cuenta las condiciones aquí encontradas para preservar dicha relación presa-predador a través del tiempo. Y si el modelo se ajusta para el control de epidemias o plagas, se puedan tomar las medidas apropiadas para el control de tales situaciones.
- El cálculo de las cantidades de Liapunov para el caso del efecto Allee fuerte no fue posible hacerlo puesto que habiendo llevado el sistema hasta la forma normal requerida, el computador disponible se caía al pretender correr el programa Findeta, debido a la complejidad de los cálculos implicados en el proceso y la memoria misma del computador. De todas maneras cabe anotar que conjeturamos que sólo existe un único ciclo límite al interior del primer cuadrante para esta situación porque la aparición del parámetro $m \neq 0$ genera un punto de equilibrio sobre el eje x que es un nodo repulsor. Los comportamientos del sistema para el efecto Allee débil y fuerte son sin considerar el punto $(0, 0)$ equivalentes para el caso en que teníamos dos puntos críticos positivos.

Appendix A

APENDICE BLOW- ING UP

La clasificación topológica de puntos singulares aislados en el plano es simple. Genéricamente hay sólo singularidades hiperbólicas, pero obviamente existen singularidades no-hiperbólicas, como por ejemplo la *SILLA-NODO*, para el campo $X(x, y) = (x^2, -y)$ como nos muestra la figura A.1.

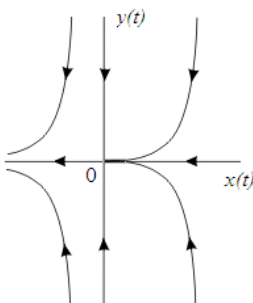


Figura A.1

Un método útil para estudiar el comportamiento de soluciones cercanas a un punto singular no-hiperbólico para sistemas bidimensionales es el *Método de Blowing-ups*. Este método es una técnica que permite descomponer una singularidad no trivial en otras más simples. Este método fué introducido por Gomory en su artículo *Trajectories tending to a critical point in 3-space*, escrito en 1955; luego fue estudiado en 1960 por Nemytskii y Stepanov en su libro *Qualitative Theory of Differential Equations*, de Pinceton University Press y posteriormente estudiado por Dumortier [Dum].

Presentaremos una descripción del método para campos de clase C^∞ , el caso C^k es prácticamente el mismo.

A.1 BLOWING UP POLAR

La idea es:

- a) Mediante una “*explosión*” (blowing-up) asociar a un punto singular en el origen de un campo de vectores X un conjunto de puntos singulares de un campo X en el cilindro $S^1 \times \mathbb{R}$, dispuestos en $S^1 \times \{0\}$.
- b) Analizar la conducta de X en torno a cada uno de estos puntos singulares y,
- c) Por un proceso dual (Blowing-down), volver al campo original.

A.1.1 Construcción

Paso 1: Sea X un campo vectorial de clase C^∞ definido en \mathbb{R}^2 o en una vecindad de 0, con $X(0) = 0$. Sea la transformación

$$\Phi : S^1 \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$$

definida en coordenadas polares. Esto es

$$\Phi(r, \theta) = (r \cos \theta, r \sin \theta)$$

Entonces hay un campo vectorial \tilde{X} de clase C^∞ sobre $S^1 \times \mathbb{R}$, tal que en cada $q \in S^1 \times \mathbb{R} : \tilde{X}(q) = X(\Phi(q))$.

El campo vectorial \tilde{X} sobre $S^1 \times \mathbb{R}$ es de hecho nada X escrito en coordenadas polares.

Paso 2: Si el campo vectorial X tiene la propiedad que $j_k(X(0)) = 0$ y $j_{k+1}(X(0)) \neq 0$, entonces dividimos \tilde{X} por r^k , lo cual tiene sentido [Dum]. En consecuencia, por el “blowing-up”, lo cual significa la construcción principal de $\bar{X} = \frac{1}{r^k} \tilde{X}$, donde k es el mayor entero tal que $j_k(X(0)) = 0$.

A.1.2 Notación

Escribimos

$$\bar{X} = \eta_1 \frac{\partial}{\partial \theta} + r \eta_2 \frac{\partial}{\partial r},$$

donde

$$\frac{\partial}{\partial \theta} \text{ y } r \frac{\partial}{\partial r}$$

son tales que

$$\begin{aligned} \Phi_* \left(\frac{\partial}{\partial \theta} \right) (\theta, r) &= \left(x \frac{\partial}{\partial y} - y \frac{\partial}{\partial x} \right) (\Phi(\theta, r)), \\ \Phi_* \left(r \frac{\partial}{\partial \theta} \right) (\theta, r) &= \left(x \frac{\partial}{\partial x} + y \frac{\partial}{\partial y} \right) (\Phi(\theta, r)), \\ \eta_1(\theta, r) &= \frac{1}{r^{k+2}} \left\langle X_1 \frac{\partial}{\partial x} + X_2 \frac{\partial}{\partial y}, x \frac{\partial}{\partial y} - y \frac{\partial}{\partial x} \right\rangle (\theta, r) \\ &= \frac{1}{r^{k+2}} [-r \sin \theta \cdot X_1(r \cos \theta, r \sin \theta) + r \cos \theta \cdot X_2(r \cos \theta, r \sin \theta)], \\ \eta_2(\theta, r) &= \frac{1}{r^{k+2}} \left\langle X_1 \frac{\partial}{\partial x} + X_2 \frac{\partial}{\partial y}, x \frac{\partial}{\partial y} + y \frac{\partial}{\partial x} \right\rangle (\theta, r) \\ &= \frac{1}{r^{k+2}} [r \cos \theta \cdot X_1(r \cos \theta, r \sin \theta) + r \sin \theta \cdot X_2(r \cos \theta, r \sin \theta)] \end{aligned}$$

A.1.3 Cálculos concernientes al blowing-up

i). Sea el campo vectorial X teniendo la propiedad $j_k(X)(0) = 0$ y $j_{k+1}(X)(0) \neq 0$. El campo vectorial \bar{X} induce a un campo vectorial \bar{X}_0 sobre $S^1 \times \{0\}$: $\bar{X}_0 = \eta_1(\theta, 0) \frac{\partial}{\partial \theta}$. Observando la expansión en serie de Taylor de X en 0, obtenemos

$$\eta_1(\theta, 0) = \sum_{i=0}^{k+1} (b_i^{k+1} \cos \theta - a_i^{k+1} \sin \theta) \cos^i \theta \cdot \sin^{k+1-i} \theta,$$

donde

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left[\left(\sum_{i=0}^k a_i^k x^i y^{k-i} \right) \frac{\partial}{\partial x} + \left(\sum_{i=0}^k b_i^k x^i y^{k-i} \right) \frac{\partial}{\partial y} \right]$$

representa el ∞ -jet en 0. Las singularidades sobre $S^1 \times \{0\}$ son exactamente los puntos $(\theta, 0)$, donde $\eta_1(\theta, 0) = 0$.

Según Dumortier [Dum] en el libro “Elements of the Theory of Algebraic Curves” escrito en 1968 por Seidenberg, usando argumentos como el teorema de Bezout es fácil ver que:

Proposición: $\eta_1(\theta, 0)$ satisface una de las siguientes condiciones:

i. $\eta_1(\theta, 0)$ en ninguna parte es 0.

ii. $\eta_1(\theta, 0) = 0$ tiene un número finito de soluciones (como máximo $2k+4$)

iii. para todo $\theta \in [0, 2\pi[$, $\eta_1(\theta, 0) = 0$.

ii) Cuando θ_0 es una solución de $\eta_1(\theta, 0) = 0$, es claro que $\theta_0 + \pi$ es también solución, es decir, $\eta_1(\theta_0 + \pi, 0) = 0$.

Además, de $\eta_1(\theta + \pi, -r) = (-1)^k \eta_1(\theta, r)$ y $\eta_2(\theta + \pi, -r) = (-1)^k \eta_2(\theta, r)$, notemos que \bar{X} en una vecindad de $(\theta_0 + \pi, 0)$ tiene el mismo comportamiento que en $(\theta_0, 0)$, lo mismo pasa con \bar{X} o $-\bar{X}$ en una vecindad de $(\theta_0, 0)$, de acuerdo a si k es par o impar. Incluso en el caso donde k es impar, las órbitas de \bar{X} en la vecindad de $(\theta_0 + \pi, 0)$ son análogas a las órbitas de \bar{X} en la vecindad de $(\theta_0, 0)$. La única posible diferencia es en el sentido. Así que es suficiente considerar solamente una de estas singularidades, para obtener la información topológica acerca de ambas, entonces podemos hablar de “un par de singularidades simétricas”

Ejemplo: Consideremos el campo $X(x, y) = (x^2 - xy, y^2 - xy)$ el cual posee una singularidad aislada no hiperbólica en $(0, 0)$, es decir, la matriz jacobiana del campo X es:

$$DX = \begin{pmatrix} 2x - y & -x \\ -y & 2y - x \end{pmatrix}$$

y evaluda en el punto de equilibrio $(0, 0)$

$$DX(0, 0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Luego, para desingularizar el origen consideramos el blowing-up polar [Dum] dado por la transformación

$$\Phi : S^1 \times \mathbb{R}_0^+ \rightarrow \mathbb{R}^2$$

tal que

$$\Phi(r, \theta) = (r \cos \theta, r \sin \theta)$$

entonces

$$\Phi_*(X) = (D\Phi)^{-1} X \phi = \tilde{X},$$

donde

$$\tilde{X} = r\bar{X} : S' \times \mathbb{R}_0^+ \rightarrow T(S' \times \mathbb{R}_0^+)$$

con

$$\bar{X}(\theta, r) = \eta_1 \frac{\partial}{\partial \theta} + r \eta_2 \frac{\partial}{\partial r}$$

en nuestro caso $K = 1$, así que

$$\begin{aligned}\eta_1(\theta, r) &= \frac{1}{r^{k+2}} [-r \sin \theta \cdot X_1(r \cos \theta, r \sin \theta) + r \cos \theta \cdot X_2(r \cos \theta, r \sin \theta)] \\ &= 2 \cos \theta \sin \theta (\sin \theta - \cos \theta) \\ \eta_2(\theta, r) &= \frac{1}{r^{k+2}} [r \cos \theta \cdot X_1(r \cos \theta, r \sin \theta) + r \sin \theta \cdot X_2(r \cos \theta, r \sin \theta)] \\ &= \cos^3 \theta - \cos^2 \theta \sin \theta + \sin^3 \theta - \cos \theta \sin^2 \theta\end{aligned}$$

en consecuencia

$$\bar{X}(\theta, r) = (2 \cos \theta \sin \theta (\sin \theta - \cos \theta), r (\cos^3 \theta - \cos^2 \theta \sin \theta + \sin^3 \theta - \cos \theta \sin^2 \theta))$$

$$\theta = 0, \theta = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2} \quad \text{y} \quad \theta = \frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}$$

Si miramos una vecindad de $S^1 \times \{0\}$, las únicas singularidades en $r = 0$ están en los valores para los cuales el campo $\bar{X}(0, \theta) = 0$, es decir

$$\bar{X}(0, \theta) = 2 \cos \theta \sin \theta (\sin \theta - \cos \theta)$$

Entonces,

$$\text{Sing} = \left\{ (0, 0), \left(0, \frac{\pi}{4}\right), \left(0, \frac{\pi}{2}\right), \left(0, \frac{5\pi}{4}\right), \left(0, \frac{3\pi}{2}\right) \right\}$$

es el conjunto de posibles singularidades de \bar{X} en el primer cuadrante de S^1 . La respectiva matriz jacobiana del sistema \bar{X} es:

$$\begin{pmatrix} 6 \cos^2 \theta \sin \theta - 6 \cos^3 \theta - 2 \sin \theta + 4 \cos \theta & 0 \\ r(-6 \cos^2 \theta \sin \theta + 5 \cos \theta - 6 \cos^3 \theta + \sin \theta) & 2 \cos^3 \theta - 2 \cos^2 \theta \sin \theta + \sin \theta - \cos \theta \end{pmatrix}$$

y evaluada en las singularidades anteriores es:

$$D\bar{X}(\theta, 0) = \begin{cases} \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} & \text{si } \theta = 0 \\ \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} & \text{si } \theta = \frac{\pi}{4} \\ \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} & \text{si } \theta = \frac{\pi}{2} \\ \begin{pmatrix} -\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} & \text{si } \theta = \frac{5\pi}{4} \\ \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} & \text{si } \theta = \frac{3\pi}{2} \end{cases}$$

Así el comportamiento de estos puntos corresponde a puntos críticos del tipo silla para las singularidades $(0, 0)$, $(0, \frac{\pi}{2})$ y $(0, \frac{3\pi}{2})$. Mientras que para las singularidades $(0, \frac{\pi}{4})$ y $(0, \frac{5\pi}{4})$ su comportamiento está determinado por la aplicación del teorema de la

variedad central y corresponden a silla-nodo repulsor y atractor respectivamente. La figura A.2 nos muestra la situación descrita .

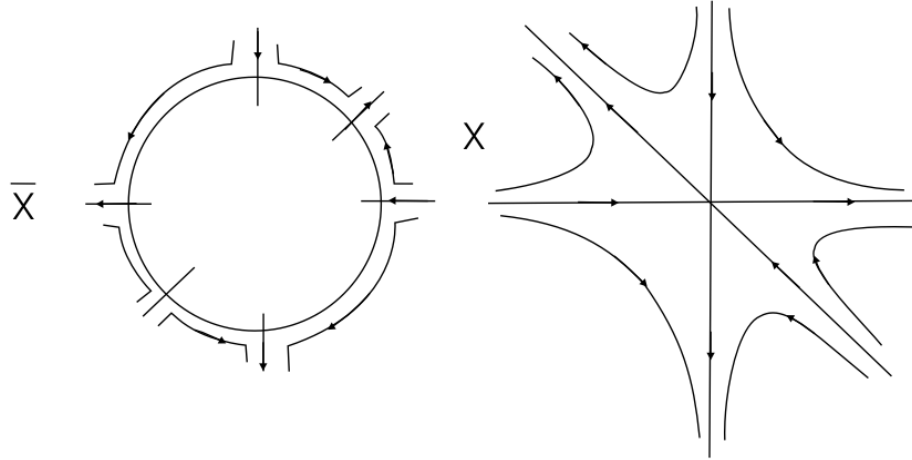


Figura A.2: Blowing up y Blowing down para el ejemplo 1

Blowing-ups sucesivos. En general, después de hacer un blowing-up y dividir por una potencia adecuada de r , aparecen en $S^1 \times \{0\}$ en principio un número finito de singularidades y aquellas donde no tenemos herramientas para clasificarlas es conveniente, usar nuevamente el blowing-up local. Esta técnica se llama blowing-ups sucesivos.

A.1.4 Un blowing-up direccional

A veces es conveniente abrir una singularidad a lo largo de una recta en vez de un círculo con el fin de simplificar los cálculos. Este procedimiento se llama *Blowing-up direccional* el cual puede ser hecho en la dirección del eje- x o el eje- y .

construcción Consideremos un campo X , de clase C^∞ , en \mathbb{R}^2 con $X(0) = 0$; la transformaciones

$$\Psi_x : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$$

$$(x, y) \rightarrow (\bar{x}, \bar{x}\bar{y})$$

y

$$\Psi_y : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$$

$$(x, y) \rightarrow (\bar{x}\bar{y}, \bar{y})$$

definen el blowing-up direccional en la dirección del eje- y y del eje- x respectivamente.

Lema A.1: Si X es un campo vectorial de clase C^∞ en \mathbb{R}^2 con $X(0) = 0$, entonces

allí existe un campo vectorial de clase C^∞ \tilde{X}^1 sobre \mathbb{R}^2 , tal que para cada $p \in \mathbb{R}^2$:
 $\Psi_*^1(\tilde{X}^1(p)) = X(\Psi^1(p))$.

Demostración:

Puesto que

$$\Psi_*^1 \frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} + \frac{y}{x} \frac{\partial}{\partial y}$$

y

$$\Psi_*^1 \frac{\partial}{\partial y} = x \frac{\partial}{\partial y}$$

\tilde{X}^1 es de la forma

$$\tilde{f}_1 \frac{\partial}{\partial x} + \tilde{f}_2 \frac{\partial}{\partial y}$$

donde

$$\begin{aligned} \tilde{f}_1(x, y) &= X_1(x, xy) \\ \tilde{f}_2(x, y) &= \frac{1}{x} (X_2(x, xy) - y(X_1(x, xy))). \end{aligned}$$

Esta expresión tiene sentido para \tilde{f}_2 porque $X(0) = Y(0) = 0$.

Si $j_k(X)(0) = 0$ y $j_{k+1}(X)(0) \neq 0$, entonces dividimos \tilde{X}^1 por x^k y llamamos al campo vectorial resultante \bar{X}^1 el cual por nuestros supuestos es de clase C^∞ .

Hay que resaltar que el Blowing-up direccional es el mismo Blowing-up polar, pero restringido a un pequeño dominio y transformado por un cambio local de coordenadas [Dum]..

Por otro lado, la composición de funciones

$$\Psi_y^n : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2,$$

tal que

$$\Psi_y^n(x, y) = (x, x^n y)$$

definen Blowing-ups sucesivos en la dirección del eje-y. En forma análoga, se definen Blowing-ups sucesivos en la dirección del eje-x.

Para tener una interpretación geométrica del efecto de un Blowing-up sucesivo en la dirección del eje-y, consideremos la imagen de una recta horizontal de ecuación $y = k$, k constante, es decir

$$\Psi_y^n(x, y) = (x, x^n y), \quad n \in \mathbb{N}$$

Pero,

$$\begin{cases} u = x \\ v = x^n k \end{cases}$$

es un sistema de ecuaciones paramétricas con parámetro x en el plano uv de una ecuación algebraica, en efecto, eliminando el parámetro obtenemos,

$$v = u^n k$$

La Figura, ilustra que las imágenes de la recta $y = k$, en el origen, tienen tangencia de tipo par (impar) con el eje $v = 0$ si n es par (impar).

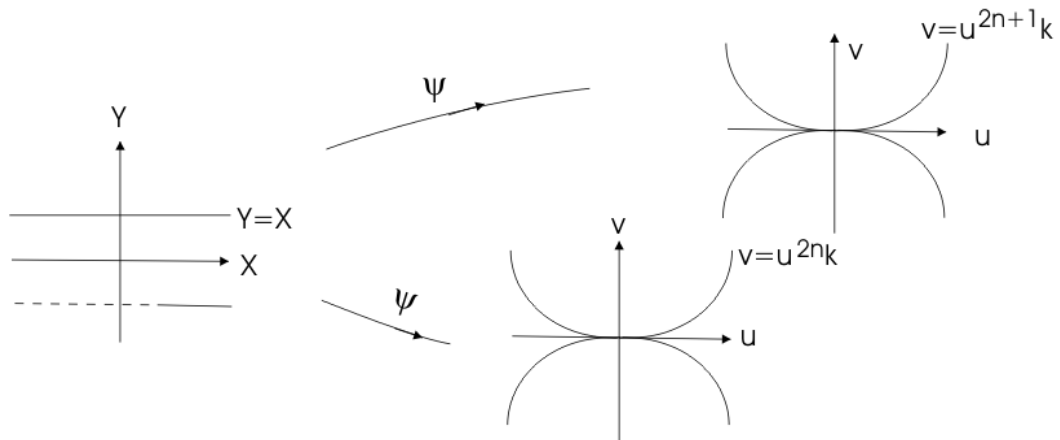


Figura A.3

Para concluir, se puede decir que a nivel de Blowing-ups se puede clasificar la naturaleza de los puntos de equilibrio de los campos de vectores, en una forma no trivial.

6. BIBLIOGRAFÍA

- [And] Andronov, A. A., Leontovich, E. A., Gordon I. & Maier, A. G. [1973], *Qualitative theory of second-order dynamic systems*, A Halsted Press Book, John Wiley & Sons, New York.
- [A E] Armstrong, D. P. & Ewen, J. G. Assessing the value of follow-up translocations: a case study using New Zealand robins, *Biological Conservation*, Vol. 101, 239-247.
- [A P I] Arrowsmith, D. K. & Place, C. M. [1990], *An Introduction to Dynamical Systems*, Cambridge University Press.
- [A P II] Arrowsmith, D. K. & Place, C. M. [1992], *Dynamical Systems: Differential equations, maps and chaotic behaviour*. Chapman and Hall.
- [A W] Ashih, A. C. & Wilson, W. G. [2001], Two-sex population dynamics in space: effects of gestation time on persistence, *Theoretical Population Biology*, Vol. 160, 93-106.
- [Av] Avilés, L. [1999], Cooperation and non-linear dynamics: An ecological perspective on the evolution of sociality, *Evolutionary Ecology Research*, Vol. 1, 459-477.
- [Ba] Bascompte, J. [2003], Extinction thresholds: insights from simple models, *Ann. Zool. Fennici*, Vol 40, 99-114.
- [Bel] Beltrami, E. [1989], *Mathematics for dynamic modeling*. Academic Press Inc. Harcourt Brace Jovanovich Publishers.
- [Ber] Berryman, A. A., Gutierrez, A. P., & Arditi, R. [1995], Credible, Parsimonious and Useful Predator-Prey Models - A reply to Abrams, Gleeson, and Sarnelle. *Ecology* 76 (6), pp. 1980-1985.
- [B L] Blows, T. R. & Lloyd, N.G. [1984], The number of limit cycles of certain polynomial differential equations. *Proceedings of the Royal Soc. of Edimburgh*, 98A, pp. 215-239
- [B C] Brauer, F. and Castillo-Chavez, C. [2001], *Mathematical Models in Population*

Biology and Epidemiology. Texts in Applied Mathematics . Springer-Verlag.

- [B B] Boukal, D. S. & Berec, L. [2002], Single-species models and the Allee effect: Extinction boundaries, sex ratios and mate encounters, *Journal of Theoretical Biology*, Vol 218, 375-394.
- [C C] Chen, D. G, Irvine, J. R.& Cass, A. J. [2002], Incorporating Allee effects in fish stock-recruitment models and applications for determining reference points, *Canadian Journal of Fisheries and Aquatic Sciences* 59, 242-249.
- [Chi] Chicone C. [1999], *Ordinary differential equations with applications*, Text in Applied Mathematics 34, Springer.
- [Ck I] Clark, C. W. [1990], *Mathematical Bioeconomic: The optimal management of renewable resources*, (second edition). John Wiley and Sons.
- [Ck II] Clark, C. W. [1985], *Bioeconomic modelling and fisheries management*, John Wiley and sons.
- [Col] Collings, J. B. [1995], Bifurcation and stability analysis of a temperature-dependent mite predator-prey interaction model incorporating a prey refuge. *Bulletin of Mathematical Biology*, Vol. 57, N^o 1, pp 63-76.
- [C S] Conway, E. D., and Smoller, J. A. [1986], Global analysis of a system of predator-prey equations. *SIAM J. Applied Mathematics*, Vol 46, Nu 4, 630-642.
- [Co I] Courchamp, F., Grenfell, B. T. & Clutton-Brock, T. H. [1999b], Population dynamics of obligate cooperators, *Proceedings Royal Society of London B*, Vol. 266, 557-563.
- [Co G I] Courchamp, F. T. Clutton-Brock & Grenfell, B. [1999a],. Inverse dependence and the Allee effect, *Trends in Ecology and Evolution* Vol. 14, N^o 10, 405-410.
- [Co G II] Courchamp, F., Clutton-Brock, T.& Grenfell, B. [2000],. Multipack dynamics and the Allee effect in the African wild dog, *Lycaon pictus*, *Animal Conservation*, 3. 277-285.
- [Cus] Cushing, J. M. [1986], The Allee effect in age structured population dynamics, In T Hallam, (ed) *World Scientific Publishing*, 479-505.

- [Den I] Dennis, B. [1989], Allee effects: population growth, critical density, and the chance of extinction, *Natural Resource Modeling*, Vol 3, N° 4, 481-538.
- [Den II] Dennis, B. [2002], Allee effects in stochastic populations, *Oikos* Vol. 96, 389-401.
- [DR P] De Roos, A. M., & Persson, L. [2002], Size-dependent life-history traits promote catastrophic collapses of top predators, *PNAS*, Vol 99 N° 20, 12907-12912.
- [Dum] Dumortier, F. [1978], *Singularities of vector fields*. Monografías de Matemáticas N°. 32, Instituto de Matemáticas Pura y Aplicada IMPA Brasil.
- [Ed-K] Edelstein-Keshet, L. [1988], *Mathematical models in Biology*, *Birkhäuser Mathematics series*, Mc-Graw Hill, Inc.
- [Eti] Etienne, R., Wertheim, B., Hemerik, L., Schneider P. & Powell, J. [2002], The interaction between dispersal, the Allee effect and scramble competition affects population dynamics, *Ecological Modelling* Vol. 148, 153-168.
- [Fag] Fagan, W. F., Lewis, M. A., Neubert, M. G. & Van Den Driesche, P. [2002], *Ecology Letters*, Vol. 5, 148-157
- [F M] Ferdy, J-B. & Molofsky, J. [2002], Allee effect, spatial structure and species coexistence, *Journal Theoretical Biology*, Vol. 217, 413-424.
- [Fis] Fischer, M., Van Kleunen, M. & Schmid, B. [2000], Genetic Allee effects on performance, plasticity and developmental stability in a clonal plant, *Ecological Letters* 3, 530-539.
- [F R] Fowler, M. S. & Ruxton, G. D. [2002], Population dynamic consequences on Allee effects, *Journal of Theoretical Biology*, Vol. 215, 39-46.}
- [Gre] Greene, C. M. [2003], Habitat selection reduces extinction of populations subject to Allee effects, *Theoretical Population Biology*, 64, 1-10.
- [Gru] Gruntfest, Y., Arditi, R. & Dombrovsky, Y. [1997], A fragmented population in a varying environment, *Journal of Theoretical Biology*, Vol. 185, 539-547.
- [G H] Guckenheimer, J. & Holmes, P. [1983], *Nonlinear oscillations, dynamical systems and bifurcations of vector fields*. Springer-Verlag.

- [H Mc] Hackney, E. E. & McGraw, J. M. [2001], Experimental demonstration of an Allee effect in American Ginseng, *Conservation Ecology*, Vol. 15, N° 1, 129-136.
- [H W] Hilborn, R. & Walters, C. J. [1992], *Quantitative fisheries stock assessment. Choice dynamics and uncertainty*, Chapman and Hall.
- [Hol] Holling, C. S. [1956], The Components of Predation as Revealed by a Study of Small Mammal Predation of the European Pine Sawfly. Tenth International Congress of Entomology, Montreal.
- [Kei] Keitt, T. H., Lewis M. A. & Holt, R. D. [2001], Allee effects, invasion pinning, and species borders, *The American Naturalist*, Vol 157, N° 2, 303-216.
- [Kent] Kent, A., Doncaster, C. P. & Sluckin, T. [2003], Consequences for depredators of rescue and Allee effects on prey, *Ecological Modelling* Vol. 162, 233-245.
- [Kok] Kokko, H. & Sutherland, W.J. [2001], Ecological traps in changing environments: Ecological and evolutionary consequences of a behaviourally mediated Allee effect, *Evolutionary Ecology research*, 3, 537-551.
- [Lam] Lamberson, R. H., McKelvey, R., Noon, B.R. & Voss, C. [1992], A dynamic analysis of northern spotted owl viability in a fragmented forest landscape, *Conservation Biology*, Vol. 6, N° 4, 505-512.
- [Les] Leslie, P. H. [1948], Some further notes on the use of matrices in population mathematics, *Biometrika*, Vol 35, pp. 213-245.
- [L K] Lewis, M. A. & Kareiva, P. [1993], Allee dynamics and spread of invading organism, *Theoretical Population Biology*, 43, 141-158.
- [L B] Liebhold, A. & Bascompte, J. [2003], The Allee effect, stochastic dynamics and the eradication of alien species, *Ecology Letters* 6 133-140.
- [L H] Liermann, M. & Hilborn, R. [2001], Depensation: evidence, models and implications, *Fish and Fisheries*, Vol. 2, 33-58.
- [L L] Lin, Z-S., Li, B.-L. [2002], The maximum sustainable yield of Allee dynamic system, *Ecological Modelling*, Vol 154, 1-7.

- [May] May, R. M. [1974], *Stability and complexity in model ecosystems*, Princeton University Press.
- [McC] McCarthy, M. A. [1997], The Allee effect, finding mates and theoretical models. *Ecological Modelling* 103, 99-102.
- [Men] Menéndez, R., Gutierrez, D. & Thomas, C. D. [2002], Migration and Allee effects in the six-spot burnet moth *Zygaena filipendulae*, *Ecological Entomology* Vol. 27, 317-325.
- [M-A G-O] Meneses-Alcay, H & González-Olivartes E. [2004], Consequences of the Allee effect on Rosenzweig-McArthur predator-prey model, In R. Mondini (Ed.) *Proceedings of the Third Brazilian Symposium on Mathematical and Computational Biology*, E-Papers Serviços Editoriais Ltda, Rio de Janeiro, en prensa.
- [Min] Minorsky, N. [1962], *Nonlinear Oscillations*, D. Van Nostrand Company, INC.
- [Mur] Murray, J. D. [1989], *Mathematical Biology*, Springer - Verlag New-York.
- [Per] Perko, L. [1996], *Differential Equations and Dynamical Systems*. Text in Applied Mathematics Srpinger-Verlag.
- [Pet] Petrovskii, S. V., Morozov, A. Y. & Venturino, E. [2002], Allee effect makes possible patchy invasion in a predator-prey system, *Ecological Letters* Vol. 5 , 345-352.
- [Ros] Rosenzweig, Michael. L. [1971], Paradox of Enrichment: Destabilization of Exploitation Ecosystems in Ecological Time, *Science* 171, pp. 385-387.
- [S G-O] Sáez, E. & González-Olivares, E. [1999], Dynamics on a Predator-prey, Model. *SIAM Journal of Applied Mathematics*, Vol. 59, Nu 5, pp. 1867-1878.
- [Sc I] Schreiber, S. J. [2003a], On Allee effect in structured populations, *Proceedings of the American Mathematical Society*, submitted.
- [Sc II] Schreiber, S. J. [2003b], Allee effects, and chaotic transients in simple population models, *Theoretical Population Biology*, submitted.
- [Sch] Scheuring, I. [1999], Allee effect increases the dynamical stability of populations.

Journal of Theoretical Biology 109, 407-414.

- [St S] Stephens, P. A. & Sutherland, W. J. [1999], Consequences of the Allee effect for behaviour, ecology and conservation. *Trends in Ecol. Evo.*, Vol. 14 N° 10 401-405.
- [Ste] Stephens, P. A., Sutherland, W. J. & Freckleton, R. P. [1999], What is the Allee effect?, *Oikos* Vol. 87, 185-190.
- [S R-C] Stoner, A. W. & Ray-Culp, M. [2000], Evidence for Allee effects in an over-harvested marine gastropod: density-dependent mating and egg production, *Marine Ecology Progress Series*, Vol. 202, 297-302.
- [Tay] Taylor, R. J. [1984], *Predation* Chapman and Hall.
- [Wa I] Wang, X., Liang, G. & Wang, F-Z. [1999], The competitive dynamics of populations subject to an Allee effect, *Ecological Modelling* 124, 183-192.
- [Wa II] Wang, M-H, Kot, M. & Neubert, M. G. [2002], Integrodifference equations, Allee effects, and invasions, *Journal of Mathematical Biology*, Vol. 44, 130-168.
- [Wa K] Wang, M-H & Kot, M. [2001], Speeds of invasion in a model with strong or weak Allee effects, *Mathematical Biosciences* Vol 171, N° 1, 83-97.
- [Wer] Wertheim, B., Marchais, J., Vet, L. E. M. & Dicke, M. [2002], Allee effect in larval resource exploitation in *Drosophila*: an interaction among density of adults, larvae, and micro-organisms, *Ecological Entomological*, Vol. 27, 608-617.
- [Wok] Wollkind, D. J., Collings, J.B. & Logan, J. [1988], Metastability in temperature-dependent model system for Predator-Prey Mite outbreak interactions on Fruit Trees. *Bull. of Mathematical Biology*. Vol 50 N° 4, pp 379-409, Pergamon.
- [Wol] Wolfram Research INC., *Mathematica A System for Doing Mathematics by Computer*.
- [Yod] Yodzis, P. [1943], *Introduction to theoretical ecology*. Harper & Row, Publisher, New York.