

13.



13. BELKI CIĄGŁE STATYCZNIE NIWYZNACZALNE

13.1. Metoda trzech momentów

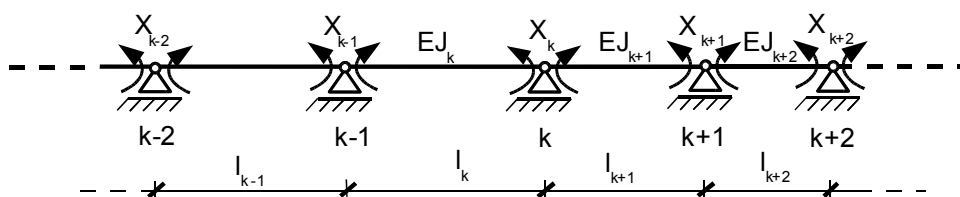
Rozwiązanie wieloprzęsłowych belek statycznie niewyznaczalnych można ułatwić w znaczącym stopniu przez dobranie odpowiedniego schematu podstawowego oraz zastosowanie szczególnej postaci metody sił zwanej metodą trzech momentów.

Rozważmy dowolnie obciążoną wieloprzęsłową belkę statycznie niewyznaczalną.



Rys. 13.1. Belka wieloprzęsłowa statycznie niewyznaczalna

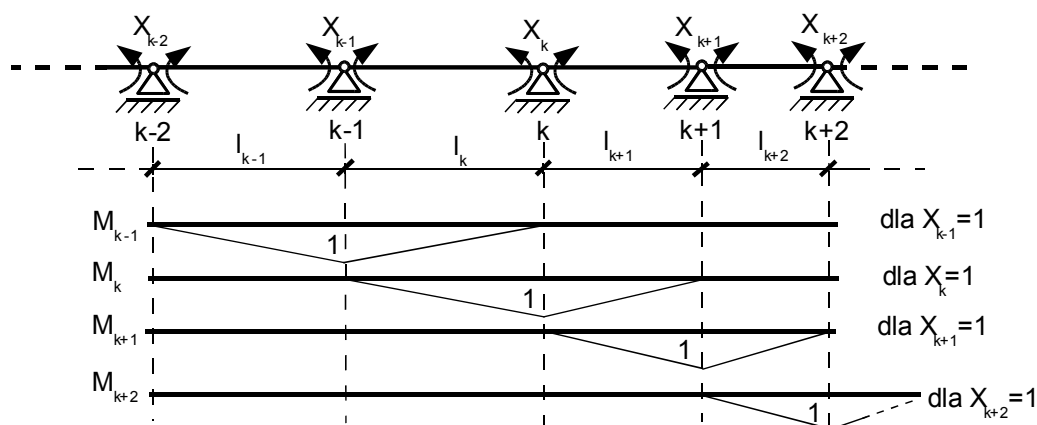
Najbardziej dogodnym schematem zastępczym (podstawowym), będzie schemat, w którym przerwiemy ciągłość belki przez wprowadzenie przegubów nad podporami i przyjmijemy nadliczbowe niewiadome w postaci momentów podporowych.



Rys. 13.2. Schemat podstawowy

Uwaga: przy tak dobranym układzie podstawowym macierz podatności będzie macierzą pasmową.

Rozważmy teraz dwa sąsiednie, dowolnie wybrane przęsła belki l_k oraz l_{k+1} , o różnej sztywności EJ_k , EJ_{k+1} , ale stałej na całej długości przęsła. Załóżmy także jako wiodący wpływ momentów (wpływ sił normalnych i poprzecznych w belce zginanej jest znikomy).



Rys. 13.3. Wykresy momentów w stanach jednostkowych

Układ równań kanonicznych zapiszemy w postaci:

$$\sum_{j=1}^n \delta_{ij} \cdot X_j + \Delta_{ip} = 0, \quad i=1, 2, \dots, n \quad (13.1)$$

W celu otrzymania współczynników k -tego wiersza macierzy podatności, należy wykres momentów M_k mnożyć kolejno przez pozostałe wykresy. Analizując wykresy momentów dla kolejnych stanów obciążeń (rys. 13.3) łatwo zauważyć, że wykres M_k pokrywa się jedynie z dwoma sąsiednimi wykresami. Stąd tylko trzy współczynniki z indeksem k będą miały wartość różną od zera.

$$\delta_{k-l,k} \neq 0 \quad \delta_{k-l,k} = \delta_{k,k-l} = \frac{1}{EJ_k} \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot l_k \cdot l \cdot \frac{1}{3} \cdot l \right) = \frac{l_k}{6 EJ_k} \quad (13.2)$$

$$\delta_{k,k} \neq 0 \quad \delta_{k,k} = \frac{1}{EJ_k} \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot l_k \cdot l \cdot \frac{2}{3} \cdot l \right) + \frac{1}{EJ_{k+1}} \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot l_{k+1} \cdot l \cdot \frac{2}{3} \cdot l \right) = \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{l_k}{EJ_k} + \frac{l_{k+1}}{EJ_{k+1}} \right) \quad (13.3)$$

$$\delta_{k+l,k} \neq 0 \quad \delta_{k+l,k} = \delta_{k,k+l} = \frac{1}{EJ_{k+1}} \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot l_{k+1} \cdot l \cdot \frac{1}{3} \cdot l \right) = \frac{l_{k+1}}{6 EJ_{k+1}} \quad (13.4)$$

Podstawiając otrzymane wartości i mnożąc przez 6 całe równanie kanoniczne otrzymujemy:

$$X_{k-l} \cdot \frac{l_k}{EJ_k} + 2 X_k \cdot \left(\frac{l_k}{EJ_k} + \frac{l_{k+1}}{EJ_{k+1}} \right) + X_{k+1} \cdot \frac{l_{k+1}}{EJ_{k+1}} + 6 \Delta_{kP} = 0 \quad (13.5)$$

Mnożąc następnie równanie przez sztywność porównawczą EJ_o uzyskujemy równanie zwane równaniem trzech momentów (nazwa pochodzi stąd, że w tym równaniu występują trzy sąsiednie momenty podporowe):

$$X_{k-1} \cdot l_k' + 2 X_k \cdot (l_k' + l_{k+1}') + X_{k+1} \cdot l_{k+1}' = -6 E J_o \Delta_{kP} \quad (13.6)$$

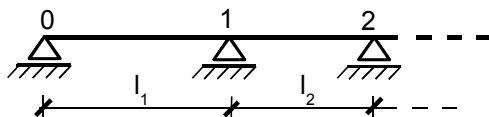
gdzie:

$$l_k' = l_k \cdot \frac{E J_o}{E J_k} \quad (13.7)$$

jest długością sprowadzoną (długość zastępcza).

Równanie trzech momentów na końcach belki wieloprzęsłowej wymaga pewnej modyfikacji – warunki brzegowe omówimy dla trzech przypadków zakończenia belki.

1. Przypadek pierwszy - belka jest podparta na końcu w sposób przegubowo przesuwny.

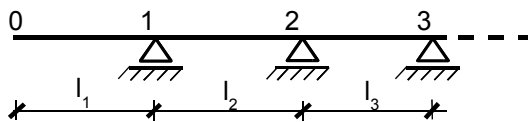


Rys. 13.4. Przegubowo-przesuwne zakończenie belki

Dla takiego zamocowania końca belki moment w punkcie 0 jest równy 0, stąd $X_0 = 0$ i równie trzech momentów będzie składało się tylko z trzech wyrazów.

$$2 X_1 \cdot (l_1' + l_2') + X_2 \cdot l_2' = -6 E J_o \Delta_{1P}$$

2. Przypadek drugi - belka z wolnym, nie podpartym końcem:



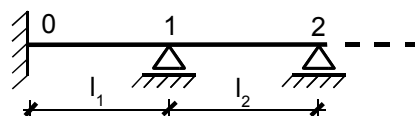
Rys. 13.5. Belka z przewieszeniem

W tym przypadku na końcu belki moment można łatwo wyznaczyć i wtedy $M_l = M$, $X_l \neq 0$

dla 1 $X_l = M$

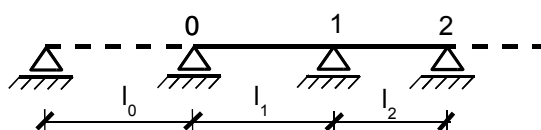
dla 2 $X_1 \cdot l_2' + 2 X_2 \cdot (l_2' + l_3') + X_3 \cdot l_3' = -6 E J_o \Delta_{2P}$

3. Przypadek trzeci – utwierdzenie na początku belki



Rys. 13.6. Utwierdzony początek belki

Taką belkę należy rozszerzyć o jedno przęsło wstecz, zakładając równocześnie, że $l_0 = 0$



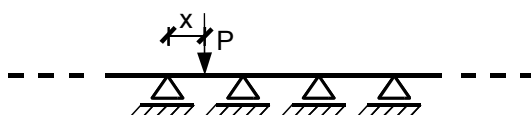
Rys. 13.7. Model zastępczy przy utwierdzeniu

Taki zabieg doprowadzi do uzyskania równania brzegowego w postaci:

$$2 X_0 \cdot l_1' + X_1 \cdot l_1' = -6 EJ_o \Delta_{0P} \quad (13.8)$$

13.2. Linie wpływu sił nadliczbowych X_i belek wieloprzęsłowych

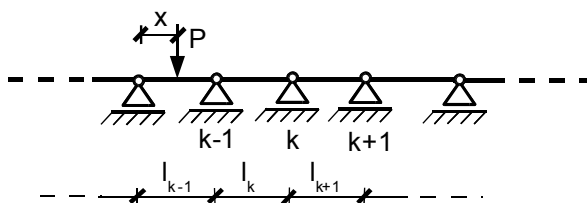
Rozpatrzmy sytuację, w której obciążenie belki wieloprzęsłowej, statycznie niewyznaczalnej jest zmienne.



Rys. 13.8. Belka wieloprzęsłowa statycznie niewyznaczalna

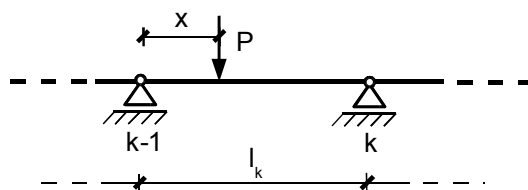
Wyznaczanie w układach statycznie niewyznaczalnych linii wpływu wielkości statycznych klasyczną metodą sił, należy rozpocząć od wyznaczenia linii wpływu nadliczbowych niewiadomych X_k . Zmiennymi będą wyrazy wolne Δ_{kP} i w konsekwencji także X_k przyjmują wartości zależne od położenia obciążenia.

Problemem jest sposób wyznaczenia Δ_{kP} przy obciążeniu poruszającym się po belce. Rozpocznijmy rozważania od rozwiązania tego problemu. Niech dana będzie belka wieloprzęsłowa, statycznie niewyznaczalna, po której porusza się siła P . Przyjmujemy układ podstawowy jak na rys. 13.2, wtedy Δ_{kP} jest wzajemnym obrotem przekroju lewego i prawego przy podporze k wywołany działaniem siły P .

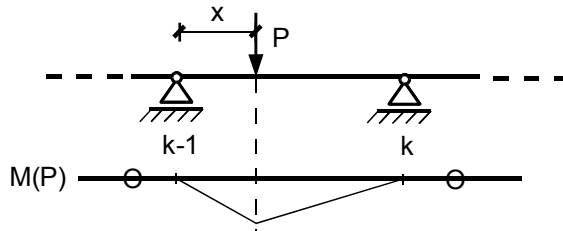


Rys. 13.9. Układ podstawowy obciążony siłą poruszającą się

Zatrzymajmy myślowo daną siłę P na jednym z przęseł (rys. 13.10).

Rys. 13.10. Siła P położona w danym przęśle ($k-1, k$)

Dla takiego, chwilowego położenia siły, wykres momentów wystąpi tylko w przęśle w którym działa siła P .

Rys. 13.11. Wykres momentów od siły P położonej w przęśle ($k-1, k$)

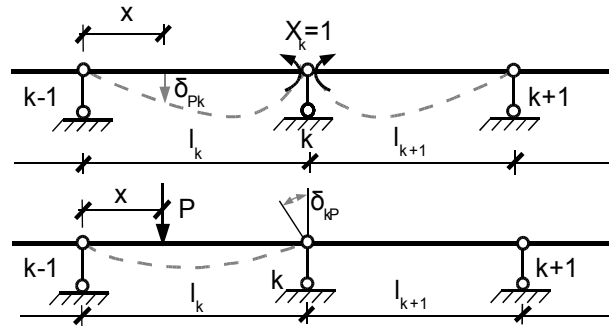
Jeżeli założymy, że $P = 1$ [-] możemy przejść na umowny zapis (wzajemny kąt obrotu jest równy podatności, tzn. przemieszczeniu od jednostkowej siły):

$$\Delta_{kP} = \delta_{kP} \quad (13.9)$$

Na mocy twierdzenia Maxwella wiadomo, że wzajemny kąt obrotu przekroju lewego i prawego przy przegubie k jest równy:

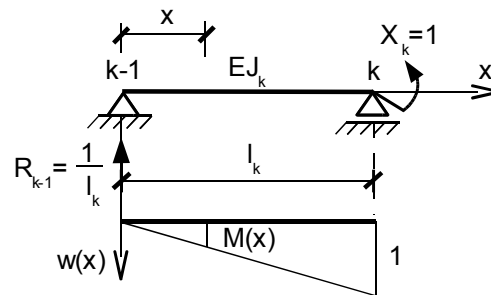
$$\delta_{kP} = \delta_{Pk} \quad (13.10)$$

gdzie δ_{Pk} jest to przemieszczenie pionowe pod punktem przyłożenia siły P , wywołane działaniem momentu $X_k = 1$ lub inaczej jest to linia ugięcia belki wywołana stałym momentem $X_k = 1$. Ugięcie to jest niezerowe tylko dla dwóch przęseł $(k-1, k)$ i $(k, k+1)$.



Rys. 13.12. Linie ugięcia belki przy działaniu X_k i P

Znajdźmy linię ugięcia belki $w(x)$ wywołaną znanym momentem $M(x)$ za pomocą całkowania równania różniczkowego.



Rys. 13.13. Momenty zginające w przęśle $(k-1, k)$ od przyłożonego momentu jednostkowego

Funkcję ugiętej osi belki opisuje równanie różniczkowe:

$$EJ_k \cdot \frac{d^2 w(x)}{dx^2} = -M(x) \quad (13.11)$$

Dla rozpatrywanej belki (rys. 13.13) moment $M(x)$ jest opisywany funkcją:

$$M(x) = \frac{1}{l_k} \cdot x \quad (13.12)$$

Podstawiając równanie momentu do wzoru (13.11) otrzymujemy:

$$EJ_k \cdot w''(x) = -\frac{I}{l_k} \cdot x \quad (13.13)$$

Wprowadźmy bezwymiarową zmienną:

$$\xi = \frac{x}{l_k} \quad (13.14)$$

Druga pochodna funkcji $w(\xi)$ po zmiennej x wynosi:

$$\frac{d^2 w(\xi)}{dx^2} = \frac{d^2 w(\xi)}{d\xi^2} \cdot \frac{1}{l_k^2} \quad (13.15)$$

Po podstawieniu (13.14) i (13.15) do (13.13) otrzymujemy równanie:

$$\begin{aligned} EJ_k \cdot \frac{1}{l_k^2} \cdot \frac{d^2 w(\xi)}{d\xi^2} &= -\xi \\ EJ_k \cdot \frac{1}{l_k^2} \cdot w''(\xi) &= -\xi \end{aligned} \quad (13.16)$$

Otrzymałą funkcję dwukrotnie całkujemy:

$$EJ_k \cdot \frac{1}{l_k^2} \cdot w'(\xi) = -\left(\frac{\xi^2}{2} + C\right) \quad (13.17)$$

$$EJ_k \cdot \frac{1}{l_k^2} \cdot w(\xi) = -\left(\frac{\xi^3}{6} + C\xi + D\right) \quad (13.18)$$

A po podstawieniu warunków brzegowych $w(0) = 0$ i $w(l) = 0$ otrzymujemy wartości stałych:

$$C = -\frac{I}{6} \quad D = 0$$

W ten sposób uzyskujemy funkcję linii ugięcia belki

$$w(\xi) = \frac{l_k^2}{6EJ_k} (\xi - \xi^3) \quad (13.19)$$

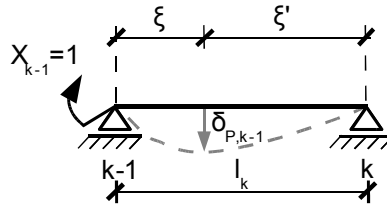
która jest poszukiwanym współczynnikiem δ_{kP} dla przęsła $(k-1, k)$

$$\delta_{kP} = \delta_{Pk} = w(\xi) = \frac{l_k^2}{6EJ_k} \cdot \omega(\xi) \quad (13.20)$$

Krzywiznę ugiętej belki opisuje wzór:

$$\omega(\xi) = \xi - \xi^3 \quad (13.21)$$

Wykres momentów M_P od siły działającej w przęśle $(k-1, k)$ (rys. 13.11) pokrywa się tylko z wykresami jednostkowymi $X_k=1$ i $X_{k-1}=1$ (rys. 13.3). Wobec tego dla dowolnego k tylko Δ_{kP} oraz $\Delta_{k-1,P}$ będą różne od 0. Δ_{kP} mamy już wyznaczone, problemem teraz pozostaje wyznaczenie $\Delta_{k-1,P} = \delta_{k-1,P} = \delta_{P,k-1}$ (gdzie $\delta_{P,k-1}$ jest przemieszczeniem pionowym pod siłą P wywołanym działaniem momentu skupionego X_{k-1}).



Rys. 13.14. Linia ugięcia belki od momentu jednostkowego przyłożonego w punkcie $k-1$

Współczynnik $\delta_{P,k-1}$ można wyznaczyć w analogiczny sposób co δ_{Pk} podstawiając jedynie do wyznaczonego wzoru (13.19) ξ' zamiast ξ .

Otrzymamy wówczas równanie:

$$\delta_{P,k-1} = \frac{l_k^2}{6EJ_k} (\xi' - \xi'^3) \quad (13.22)$$

Po podstawieniu zależności $\xi' = l - \xi$ i uporządkowaniu zapisu otrzymujemy:

$$\delta_{P,k-1} = \frac{l_k^2}{6EJ_k} [(l - \xi) - (l - \xi)^3] = \frac{l_k^2}{6EJ_k} (2\xi - 3\xi^2 + \xi^3) = \frac{l_k^2}{6EJ_k} \cdot \omega'(\xi) \quad (13.23)$$

Funkcję krzywizny opisuje wzór:

$$\omega'(\xi) = 2\xi - 3\xi^2 + \xi^3 \quad (13.24)$$

Uzyskane funkcje (13.20) i (13.22) trzeba wstawić do wzoru trzech momentów (13.6). Rozpiszemy występujące tam człony:

$$-6 EJ_o \Delta_{kP} = -6 EJ_o \cdot \frac{l_k^2}{6 EJ_k} (\xi - \xi^3) = -6 EJ_o \cdot \frac{l_k^2}{6 EJ_k} \cdot \omega(\xi) = -l_k \cdot l_k' \cdot \omega(\xi) \quad (13.25)$$

$$-6 EJ_o \Delta_{k-l,P} = -l_k \cdot l_k' \cdot \omega'(\xi) \quad (13.26)$$

gdzie:

$$l_k' = l_k \cdot \frac{EJ_o}{EJ_k}$$

Teraz możemy przejść do wyznaczenia nadliczbowych X_i - stosujemy zapis macierzowy:

$$[F] \cdot \{X\} + \{\Delta\} = \{0\} \quad (13.27)$$

$$[F] \cdot \{X\} = -\{\Delta\} \quad (13.28)$$

gdzie $\{X\}$ – wektor szukanych sił nadliczbowych, $[F] = [\delta_{ik}]$ - macierz podatności, $\{\Delta\} = [C_{kP}]$ - wektor wyrazów wolnych.

Po przeniesieniu $\{\Delta\}$ na drugą stronę równania i podzieleniu obu stron równania przez $[F]$ otrzymujemy:

$$\{X\} = -[F]^{-1} \cdot \{\Delta\} \quad (13.29)$$

Jeżeli zapiszemy, że $[F]^{-1} = [\beta_{ik}]$, to wzór ogólny na k-tą niewiadomą przyjmie postać:

$$X_k = \beta_{k1} \cdot C_{1P} + \beta_{k2} \cdot C_{2P} + \dots + \beta_{k,k-1} \cdot C_{k-1,P} + \beta_{kk} \cdot C_{kP} + \beta_{k,k+1} \cdot C_{k+1,P} + \dots \quad (13.30)$$

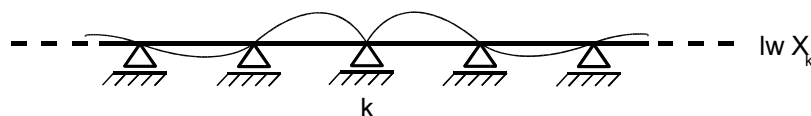
gdzie $C_{jP} = -6EJ_o \Delta_{jP}$, przy czym należy zaznaczyć, że w przypadku gdy siła jednostkowa porusza się w obrębie przęsła $(k-1, k)$, tylko dwa wyrazy C_{jP} są niezerowe:

$$C_{k-1,P} = -6 EJ_o \Delta_{k-1,P} = -l_k \cdot l_k' \cdot \omega'(\xi) \quad (13.31)$$

$$C_{k,P} = -6 EJ_o \Delta_{k,P} = -l_k \cdot l_k' \cdot \omega(\xi) \quad (13.32)$$

Wobec powyższego funkcja nadliczbowej X_k w każdym przęśle ma inną postać wyznaczoną w oparciu o dwa człony wyrażenia (13.30).

Linia wpływu nadliczbowej niewiadomej X_k przebiega następująco:

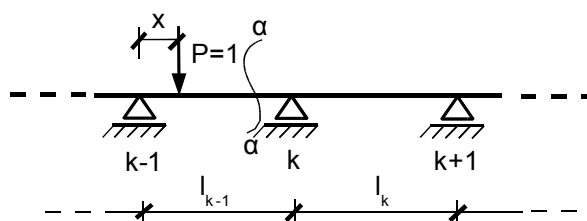


Rys. 13.15. Linia wpływu nadliczbowej niewiadomej X_k

Widać z rysunku, że linia wpływu przestała być prostokreślna (jak w przypadku linii wpływu w układach statycznie wyznaczalnych), jest natomiast krzywą trzeciego stopnia.

13.3. Linie wpływu sił wewnętrznych w belkach wieloprzęsłowych statycznie niewyznaczalnych.

Niech dana będzie belka wieloprzęsłowa statycznie niewyznaczalna, obciążona poruszającą się siłą jednostkową.



Rys. 13.16. Przekrój α - α w belce wieloprzęsłowej

W poprzednim punkcie wyznaczyliśmy już linie wpływu wszystkich wielkości nadliczbowych X_i . Do wyznaczenia linii wpływu sił wewnętrznych posłużymy się zasadą superpozycji:

$$S^{(n)} = S^{(o)} + \sum_i^n S^{(i)} \cdot X_i \quad (13.33)$$

gdzie:

$S^{(n)}$ – wielkość siły uogólnionej w układzie statycznie niewyznaczalnym,

$S^{(o)}$ - wielkość siły uogólnionej w układzie statycznie wyznaczalnym,

$S^{(i)}$ - wielkość siły uogólnionej w stanie $X_i = 1$.

Zasada superpozycji dla linii wpływu sił uogólnionych zostanie zapisana w następujący sposób:

$$Iw S^{(n)} = Iw S^{(o)} + \sum_i S^{(i)} \cdot Iw X_i \quad (13.34)$$

Wobec tego linia wpływu momentu w przekroju α - α w układzie statycznie niewyznaczalnym wynosi:

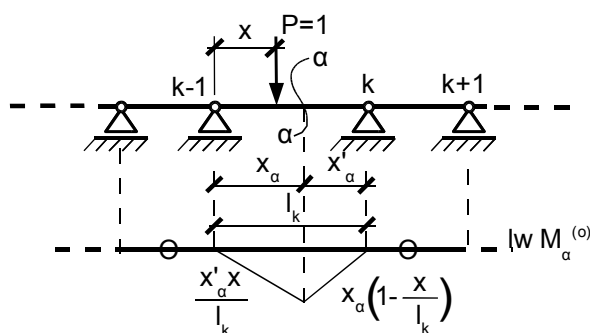
$$Iw M_\alpha^{(n)} = Iw M_\alpha^{(o)} + \sum_i M_\alpha^{(i)} \cdot Iw X_i \quad (13.35)$$

gdzie:

$Iw M_\alpha^{(o)}$ – linia wpływu momentu w przekroju α - α belki w układzie podstawowym (statycznie wyznaczalnym),

$M_\alpha^{(i)}$ – wartość momentu zginającego w przekroju α - α w stanie $X_i = I$.

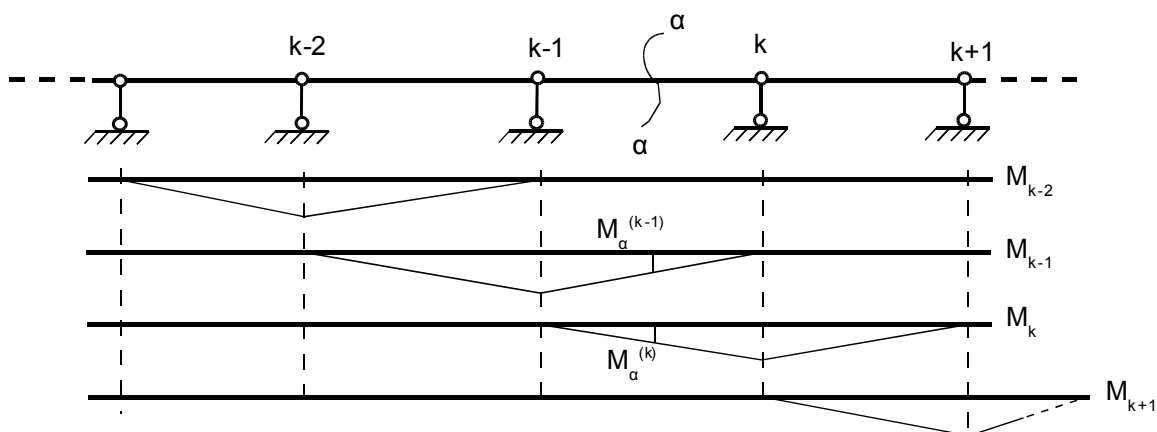
Rozpocznijmy od wyznaczenia linii wpływu momentu w przekroju α - α belki w układzie podstawowym od wędrującej siły jednostkowej. Dla układu podstawowego moment w przekroju α - α będzie różny od zera, wtedy gdy siła poruszająca się obciąża przęsło $(k-1, k)$, w którym zlokalizowany jest przekrój α - α .



Rys. 13.17. Linia wpływu momentu w przekroju $\alpha - \alpha$ w układzie podstawowym

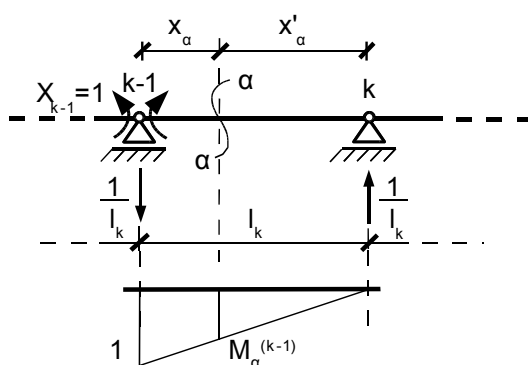
Następnie określmy wartości $M_\alpha^{(i)}$, czyli wartości momentu zginającego w przekroju $\alpha - \alpha$, gdy układ podstawowy będzie obciążony kolejno siłami $X_i = I$.

Spośród wszystkich wartości $M_\alpha^{(i)}$ tylko dwie są niezerowe:



Rys. 13.18. Wartości momentów $M_\alpha^{(i)}$ w stanach jednostkowych

- gdy obciążymy przęsło, na którym znajduje się przekrój α - α momentem jednostkowym $X_{k-1} = 1$ (obciążenie stacjonarne) przy lewej podporze,

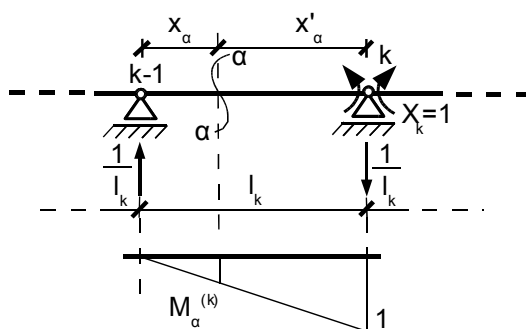


Rys. 13.19. Moment $M_\alpha^{(k-1)}$ przy obciążeniu lewej podpory przęsła siłą uogólnioną $X_{k-1} = 1$

wtedy:

$$M_\alpha^{(k-1)} = \frac{x'_\alpha}{l_k} \quad (13.36)$$

- oraz gdy obciążymy przęsło, na którym znajduje się przekrój α - α momentem jednostkowym $X_k = 1$ (obciążenie stacjonarne) przy prawej podporze,



Rys. 13.20. Moment $M_\alpha^{(k)}$ przy obciążeniu prawej podpory przęśłą siłą uogólnioną $X_k=1$

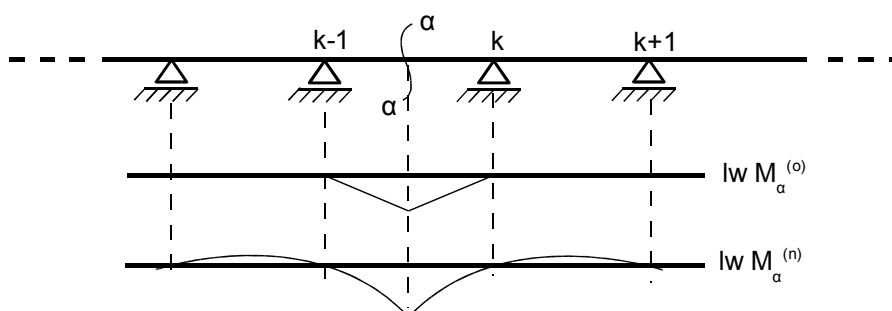
wtedy:

$$M_\alpha^{(k)} = \frac{x_\alpha}{l_k} \quad (13.37)$$

Podstawiając wyprowadzone wielkości, otrzymujemy wzór ostateczny linii wpływu momentu w przekroju $\alpha-\alpha$ (zlokalizowanego w przęśle $(i-l, i)$) belki wieloprzęsłowej statycznie niewyznaczalnej od wędrującej siły jedynekowej P :

$$lw M_\alpha^{(n)} = lw M_\alpha^{(o)} + \frac{x'_\alpha}{l_i} \cdot lw X_{i-1} + \frac{x_\alpha}{l_i} \cdot lw X_i \quad (13.38)$$

Przebieg linii wpływu momentu zginającego w przekroju $\alpha-\alpha$ dla układu podstawowego i rzeczywistego przedstawiono na rys. 13.21.

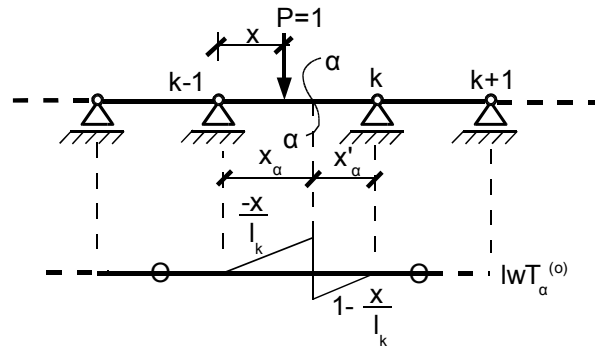


Rys. 13.21. Linia wpływowa momentu zginającego w przekroju $\alpha-\alpha$

Linia wpływu sił poprzecznych wyznaczmy analogicznie jak dla momentów zginających. Zapiszemy, zgodnie z zasadą superpozycji:

$$lwT_{\alpha}^{(n)} = lwT_{\alpha}^{(o)} + \sum_i^n T_{\alpha}^{(i)} \cdot lwX_i \quad (13.39)$$

Linia wpływu siły poprzecznej w przekroju $\alpha-\alpha$ w układzie podstawowym ogranicza się do przęsła, w którym występuje przekrój.



Rys. 13.22. Linia wpływu siły poprzecznej w przekroju $\alpha-\alpha$ dla układu podstawowego

Wartości siły poprzecznej $T_{\alpha}^{(i)}$ będą niezerowe, podobnie jak dla momentów, tylko w dwóch przypadkach:

- gdy obciążymy przęsło, na którym znajduje się przekrój $\alpha-\alpha$ momentem przy lewej podporze (rys. 13.19).

$$T_{\alpha}^{(k-1)} = -\frac{l}{l_k} \quad (13.40)$$

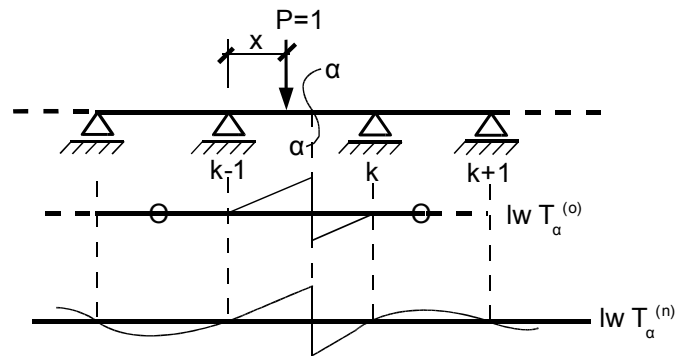
- oraz gdy obciążymy przęsło, na którym znajduje się przekrój $\alpha-\alpha$ momentem przy prawej podporze (rys. 13.20).

$$T_{\alpha}^{(k)} = \frac{l}{l_k} \quad (13.41)$$

po podstawieniu powyższych wartości do wzoru (13.39) otrzymujemy:

$$lwT_{\alpha}^{(n)} = lwT_{\alpha}^{(o)} - \frac{l}{l_i} \cdot lwX_{i-1} + \frac{l}{l_i} \cdot lwX_i \quad (13.42)$$

Przebieg linii wpływu siły poprzecznej w układzie podstawowym i rzeczywistym ilustruje rys. 13.23.



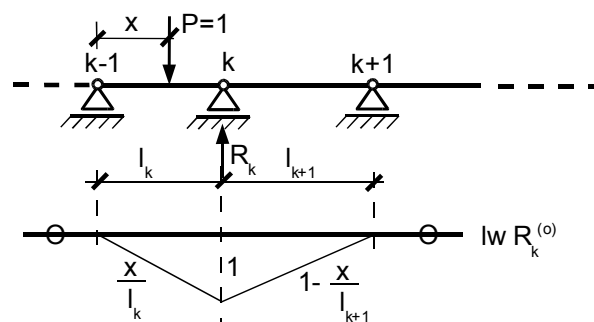
Rys. 13.23. Linia wpływu siły poprzecznej w przekroju $\alpha - \alpha$

13.4 Linie wpływu reakcji belki wieloprzęsłowej statycznie niewyznaczalnej.

Także w tym przypadku wykorzystamy zasadę superpozycji:

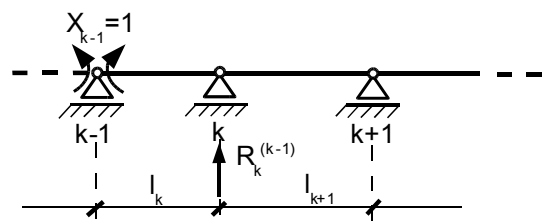
$$lw R_r^{(n)} = lw R_r^{(o)} + \sum_i^n R_r^{(i)} \cdot lw X_i \quad (13.43)$$

Linia wpływu reakcji w podporze k w układzie podstawowym $R_k^{(o)}$ swym zakresem obejmuje dwa przęsła.



Wartości reakcji $R_k^{(i)}$ będą niezerowe w trzech przypadkach (w trzech stanach jednostkowych):

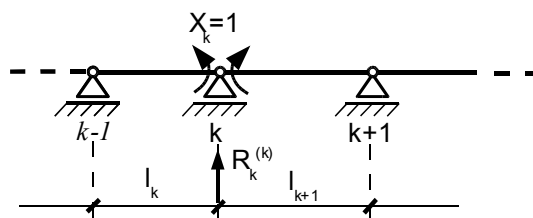
Pierwszy przypadek – przykładamy obciążenie jednostkowe w punkcie $k-1$:

Rys. 13.25. Reakcja w podporze k w stanie $X_{k-1} = 1$

wtedy:

$$R_k^{(k-1)} = \frac{l_{k+1}}{l_k} \quad (13.44)$$

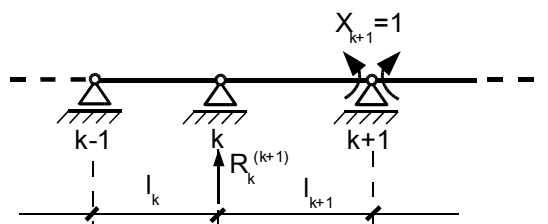
Drugi przypadek – obciążenia jednostkowe w podporze k :

Rys. 13.26. Reakcja w podporze k w stanie $X_k = 1$

wtedy:

$$R_k^{(k)} = -\frac{l_{k+1}}{l_k} - \frac{l_k}{l_{k+1}} \quad (13.45)$$

Trzeci przypadek – obciążenie jednostkowe w podporze $k+1$:

Rys. 13.27. Reakcja w podporze k w stanie $X_{k+1} = 1$

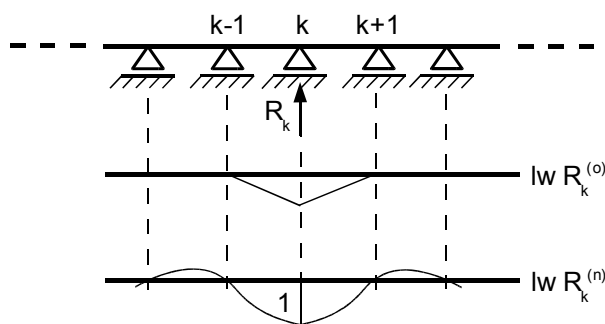
wtedy:

$$R_k^{(k+1)} = \frac{1}{l_{k+1}} \quad (13.46)$$

Po podstawieniu otrzymujemy ostateczny wzór na linie wpływu reakcji w podporze belki wieloprzęsłowej statycznie niewyznaczalnej:

$$lw R_i^{(n)} = lw R_i^{(o)} + \frac{1}{l_i} \cdot lw X_{i-1} - \left(\frac{1}{l_i} + \frac{1}{l_{i+1}} \right) \cdot lw X_i + \frac{1}{l_{i+1}} \cdot lw X_{i+1} \quad (13.47)$$

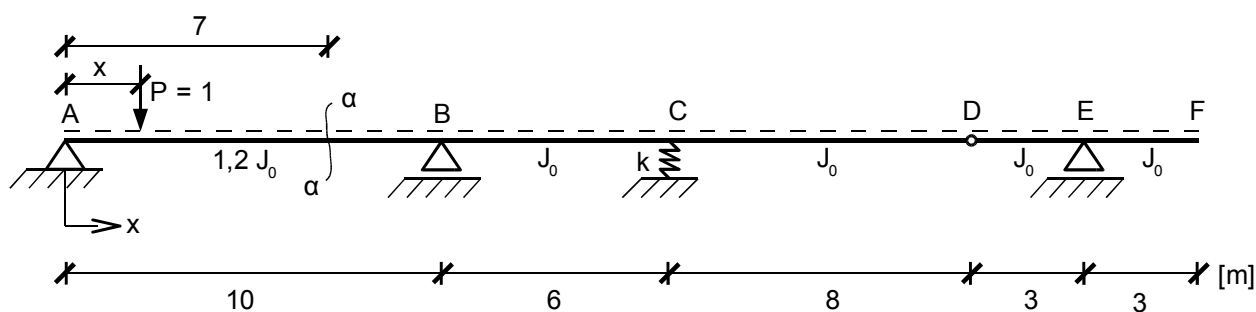
Przebieg linii wpływu reakcji (dla belki bez podpór sprężystych) przedstawiono poniżej:



Rys. 13.28. Linia wpływu reakcji w podporze k

Zadanie 1

Dla belki ciągłej przedstawionej na (rys. 13.29) wyznaczyć linie wpływowe momentów i reakcji podporowych oraz momentu zginającego i siły poprzecznej w zaznaczonym przekroju.



Rys. 13.29. Belka ciągła

Sztywność porównawcza belki wynosi EJ_0 , natomiast sztywność podpory sprężystej:

$$k = \frac{l}{5} EJ_0 \times m^{-3}$$

Rzędne linii wpływowych będą wyznaczone z dokładnością co 1,0 m.

Linie wpływowe w belkach ciągłych statycznie niewyznaczalnych oblicza się zgodnie z wzorem superpozycyjnym:

$$S^{(n)}(x) = S^o(x) + \sum_i S^{X_i=l} \cdot X_i(x) \quad (13.48)$$

gdzie:

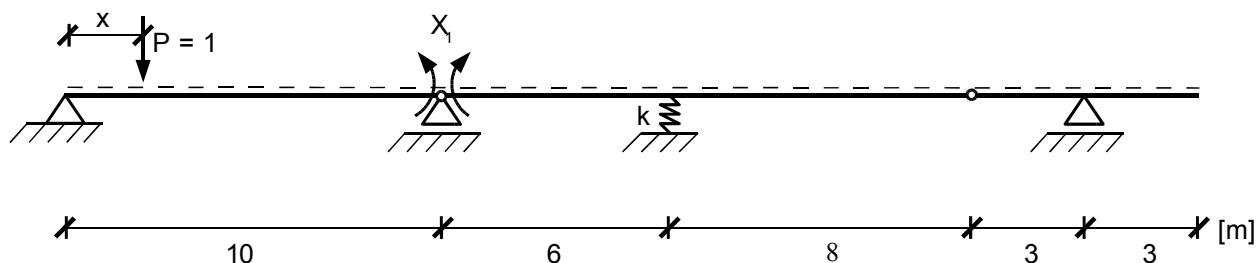
$S^{(n)}$ – wartość w układzie niewyznaczalnym

S^o – wartość w układzie wyznaczalnym

$S^{X_i=l}$ – wartość w stanie $X_i = l$

Układ jest jeden raz statycznie niewyznaczalny (SSN = 1)

W celu rozwiązania przyjmujemy układ podstawowy:



Rys. 13.30. Układ podstawowy

Równanie kanoniczne wyraża warunek kinematycznej zgodności.

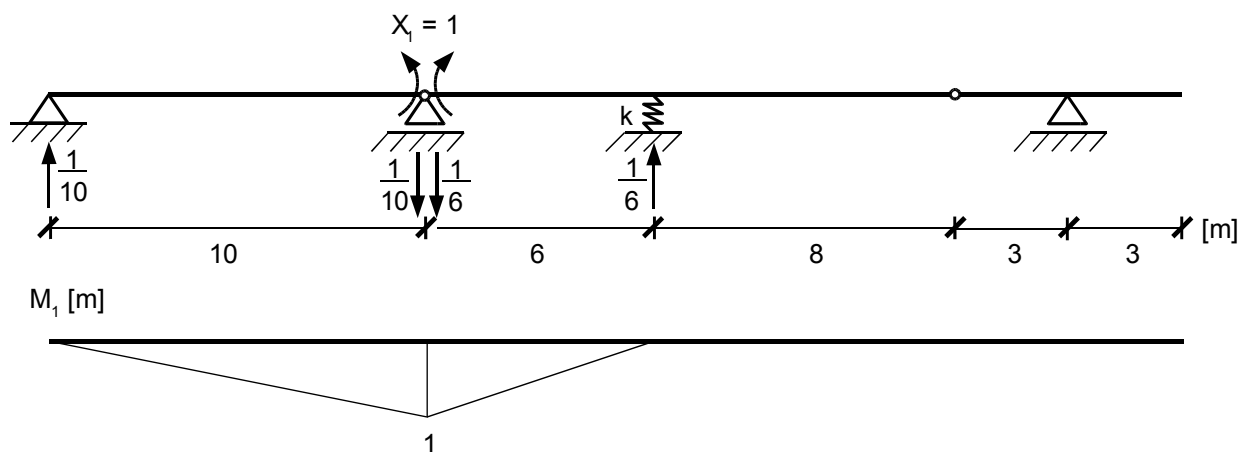
$$\Delta \varphi_B(x) = \delta_{11} \cdot X_1(x) + \delta_{1P}(x) = 0 \quad (13.49)$$

Przy obliczaniu wartości δ_{ij} korzystamy z równania pracy wirtualnej uwzględniającego prace momentów zginających i reakcji w podporach sprężystych.

$$\delta_{ij} = \int \frac{M_i M_j}{EJ} dx + \sum \frac{R^{(i)} R^{(j)}}{k} \quad (13.50)$$

W celu obliczenia przemieszczenia δ_{11} , wykonuję wykres momentów od siły jednostkowej przyłożonej w miejsce niewiadomej X_1

- Stan od obciążenia $X_1 = 1$



Rys. 13.31. Stan od obciążenia $X_1 = 1$

Wykorzystując wzór (13.50) otrzymujemy:

$$\delta_{11} = \frac{1}{1,2 EJ_0} \left(\frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 1 \cdot \frac{2}{3} \cdot 1 \right) + \frac{1}{EJ_0} \left(\frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 1 \cdot \frac{2}{3} \cdot 1 \right) + \frac{\frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6}}{\frac{1}{5} EJ_0} = \frac{4,91(6)}{EJ_0}$$

Zamiast obliczać przemieszczenie w danym punkcie od poruszającej się siły $P = 1$, skorzystamy z twierdzenia Maxwella i obliczymy przemieszczenia pionowe δ_{P1} punktu, nad którym stanie siła P od założonej, nieruchomej siły $X_1 = 1$. Ponieważ położenie siły P zmienia się funkcja $\delta_{P1}(x)$ jest linią ugięcia

$$\delta_{1P}(x) = \delta_{P1}(x) = y(x) \quad (13.51)$$

Aby obliczyć $\delta_{P1}(x)$ należy znaleźć linie ugięcia w każdym z przedziałów korzystając z równania różniczkowego linii ugięcia:

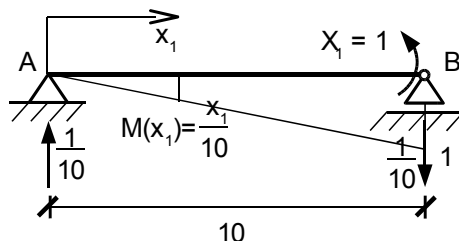
$$EJ \frac{d^2 y_i}{d x_i^2} = -M(x_i) \quad (13.52)$$

gdzie y_i , x_i to funkcja ugięcia i współrzędna punktu w i -tym przedziale.

Wyznaczamy linie ugięcia dla poszczególnych przedziałów (odcinków) belki:

- przedział AB

Przyjmujemy układ współrzędnych x_1 w zaczepiony w A



Rys. 13.32. Schemat belki w przedziale AB

Moment zginający w przekroju odległym o x_1 od A wynosi $M_1(x_1) = x_1/10$. Korzystając z zależności (13.52) obliczamy:

$$\begin{aligned}
 1,2 \quad EJ_0 \frac{d^2 y_1}{d x_1^2} &= -\frac{x_1}{10} \\
 EJ_0 \frac{d y_1}{d x_1} &= -\frac{1}{12} \cdot \frac{x_1^2}{2} + C_1 \\
 EJ_0 y_1 &= -\frac{1}{24} \cdot \frac{x_1^3}{3} + C_1 \cdot x_1 + D_1
 \end{aligned} \tag{13.53}$$

Warunki brzegowe dla przedziału AB:

$$\begin{aligned}
 x_1 = 0 \quad y_1 &= 0 \\
 x_1 = 10 \quad y_1 &= 0
 \end{aligned} \tag{13.54}$$

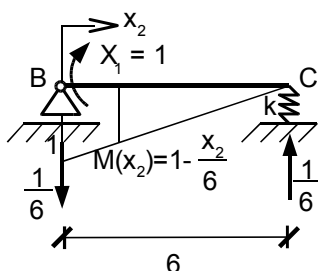
Pozwalają wyznaczyć wartości stałych całkowania

$$\begin{aligned}
 D_1 &= 0 \\
 C_1 &= \frac{25}{18}
 \end{aligned} \tag{13.55}$$

Po podstawieniu wartości (13.55) do równania (13.53) otrzymujemy równanie linii ugięcia na odcinku AB:

$$y_1 = \frac{1}{EJ_0} \left(-\frac{1}{72} x_1^3 + \frac{25}{18} x_1 \right) \tag{13.56}$$

- odcinek BC



Rys. 13.33. Schemat belki w przedziale BC

Korzystając z zależności (13.52) obliczamy:

$$\begin{aligned}
 EJ_0 \frac{d^2 y_2}{d x_2^2} &= -\left(1 - \frac{x_2}{6}\right) \\
 EJ_0 \frac{d y_2}{d x_2} &= \frac{1}{6} \cdot \frac{x_2^2}{2} - x_2 + C_2 \\
 EJ_0 y_2 &= \frac{1}{12} \cdot \frac{x_2^3}{3} - \frac{x_2^2}{2} + C_2 \cdot x_2 + D_2
 \end{aligned} \tag{13.57}$$

Warunki brzegowe dla przedziału BC mają następującą postać:

$$\begin{aligned}
 x_2 = 0 \quad y_2 &= 0 \\
 x_2 = 6 \quad y_2 &= \frac{R_k}{k} = \frac{\frac{1}{6}}{\frac{EJ_0}{5}} = \frac{5}{6 EJ_0}
 \end{aligned} \tag{13.58}$$

Po podstawieniu warunków brzegowych do równań (13.57) otrzymujemy:

$$\begin{aligned}
 D_2 &= 0 \\
 C_2 &= \frac{77}{36}
 \end{aligned} \tag{13.59}$$

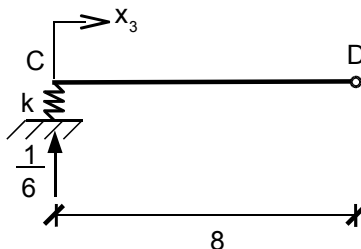
Wartości (13.59) wstawione do równania (13.57) prowadzą do funkcji linii ugięcia na odcinku BC :

$$y_2 = \frac{1}{EJ_0} \left(\frac{1}{36} x_2^3 - \frac{1}{2} x_2^2 + \frac{77}{36} x_2 \right) \tag{13.60}$$

i kąta obrotu przekroju

$$\phi_2 = \frac{1}{EJ_0} \left(\frac{x_2^2}{12} - x_2 + \frac{77}{36} \right) \tag{13.61}$$

- odcinek CD



Rys.13.34. Schemat belki w przedziale CD

Korzystając z zależności (13.52) obliczamy:

$$\begin{aligned}
 EJ_0 \frac{d^2 y_3}{d x_3^2} &= 0 \\
 EJ_0 \frac{d y_3}{d x_3} &= EJ_0 \phi_3 = C_3 \\
 EJ_0 y_3 &= C_3 \cdot x_3 + D_3
 \end{aligned} \tag{13.62}$$

Jak wcześniej ustalono przemieszczenie w podporze sprężystej wynosi

$$x_3 = 0 \quad y_3 = \frac{5}{6 EJ_0} \tag{13.63}$$

Natomiast kąt obrotu przekroju nad podporą jest taki sam z lewej i prawej strony

$$\phi_2(x_2 = 6) = \phi_3(x_3 = 0) \tag{13.64}$$

obliczamy kąt dla lewego przedziału

$$EJ_0 \phi_2(x_2 = 6) = \frac{6^2}{12} - 6 + \frac{77}{36} = -\frac{31}{36} \tag{13.65}$$

i przyrównujemy do funkcji z prawej strony

$$EJ_0 \phi_3(x_3 = 0) = C_3 \tag{13.66}$$

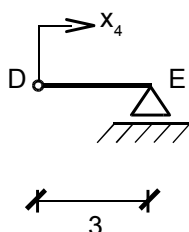
Ostatecznie otrzymujemy:

$$\begin{aligned} D_3 &= \frac{5}{6} \\ C_3 &= -\frac{3l}{36} \end{aligned} \quad (13.67)$$

Po ich wykorzystaniu otrzymujemy równanie linii ugięcia na odcinku CD:

$$y_3 = \frac{l}{EJ_0} \left(-\frac{3l}{36} x_3 + \frac{5}{6} \right) \quad (13.68)$$

- odcinek DE



Rys. 13.35. Schemat belki w przedziale DE

Również w tym przedziale moment w stanie $X_l = l$ wynosi zero. Podobnie jak poprzednio prowadzimy przekształcenia

$$\begin{aligned} EJ_0 \frac{d^2 y_4}{d x_4^2} &= 0 \\ EJ_0 \frac{d y_4}{d x_4} &= C_4 \\ EJ_0 y_4 &= C_4 \cdot x_4 + D_4 \end{aligned} \quad (13.69)$$

Przemieszczenie pionowe punktu D wyznaczone w przedziale CD musi być takie same jak w przedziale DE.

$$y_3(x_3=8) = y_4(x_4=0) \quad (13.70)$$

Dla przedziału CD mamy

$$EJ_0 y_3(x_3=8) = -\frac{3l}{36} \cdot 8 + \frac{5}{6} = -\frac{109}{18} \quad (13.71)$$

a dla DE wynosi

$$EJ_0 y_4(x_4=0) = D_4 \quad (13.72)$$

w punkcie E jest podpora więc dla

$$x_4 = 3 \quad y_4 = 0 \quad (13.73)$$

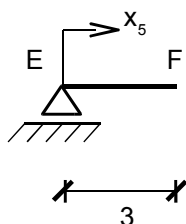
Z powyższych zależności otrzymujemy

$$\begin{aligned} D_4 &= -\frac{109}{18} \\ C_4 &= \frac{109}{54} \end{aligned} \quad (13.74)$$

i dalej:

$$y_4 = \frac{1}{EJ_0} \left(\frac{109}{54} x_4 - \frac{109}{18} \right) \quad (13.75)$$

- odcinek EF



Rys. 13.36. Schemat belki w przedziale EF

Moment w stanie X_1 wynosi 0 dla przedziału EF.

$$\begin{aligned} EJ_0 \frac{d^2 y_5}{d x_5^2} &= 0 \\ EJ_0 \frac{d y_5}{d x_5} &= C_5 \\ EJ_0 y_5 &= C_5 \cdot x_5 + D_5 \end{aligned} \quad (13.76)$$

warunki brzegowe dotyczą podpory w punkcie E.

Przemieszczenie jest równe zero

$$x_5 = 0 \quad y_5 = 0 \quad (13.77)$$

a kąt obrotu taki sam nad podporą liczony z lewej i z prawej strony:

$$\phi_4(x_4=3) = \phi_5(x_5=0) \quad (13.78)$$

z lewej strony już znamy wartość

$$EJ_0 \phi_4(x_4=3) = -\frac{109}{54} \quad (13.79)$$

z prawej strony musimy wyznaczyć

$$EJ_0 \phi_5(x_5=0) = C_5 \quad (13.80)$$

Po podstawieniu otrzymujemy:

$$\begin{aligned} D_5 &= 0 \\ C_5 &= \frac{109}{54} \end{aligned} \quad (13.81)$$

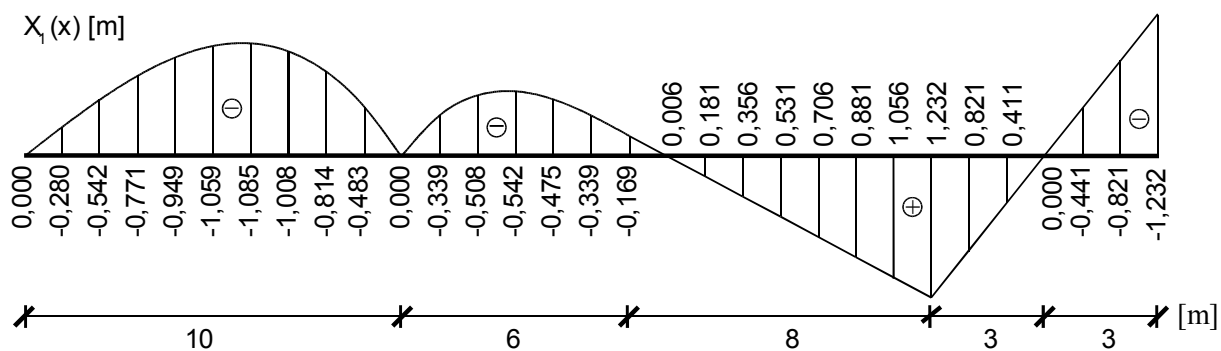
Ostatecznie równanie linii ugięcia na odcinku EF ma postać :

$$y_5 = \frac{1}{EJ_0} \left(\frac{109}{54} x_5 \right) \quad (13.82)$$

Znając równania linii ugięcia belki można obliczyć linię wpływu X_I . Z równania kanonicznego wyznaczamy funkcję

$$X_I(x) = -\frac{\delta_{IP}(x)}{\delta_{II}}$$

Obliczenia zestawiono w (tab. 13.1). Aby uzyskać wykres funkcji, prościej jest policzyć wartości δ_{IP} , a potem X_I np. co 1 metr.



Rys. 13.37. Linia wpływu momentu \$X_1(x)\$

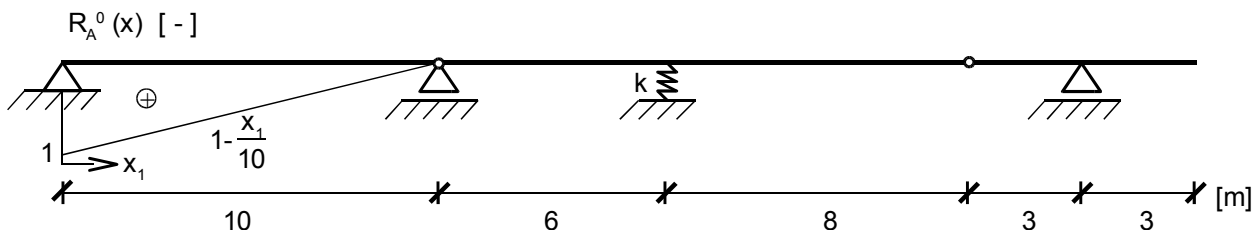
Linie wpływu reakcji podporowych oraz momentu zginającego i siły poprzecznej w przekroju obliczymy ze wzoru (13.48)

- Wyznaczenie linii wpływu \$R_A^{(n)}(x)\$

Ponieważ \$R_A^{X_1=l} = \frac{l}{10} [-]\$ to:

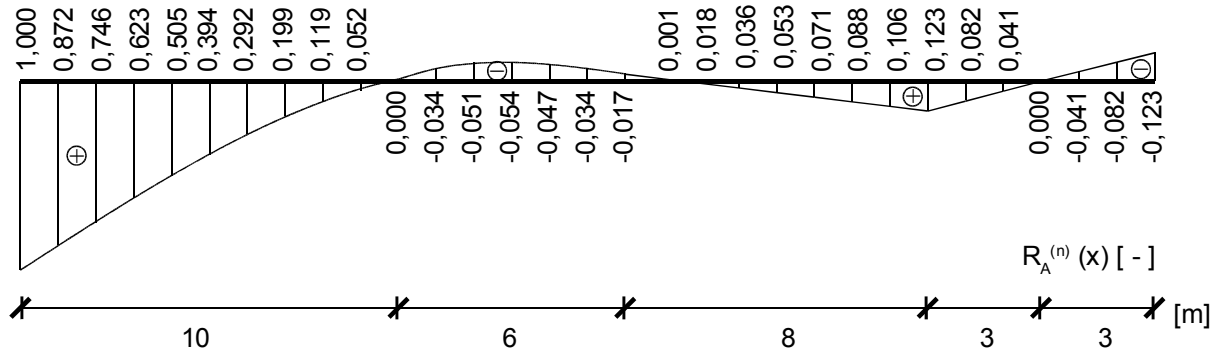
$$R_A(x) = R_A^0(x) + \frac{l}{10} X_1(x) \tag{13.83}$$

Natomiast \$R_A^0\$, oznacza linię wpływu reakcji \$R_A\$ w układzie podstawowym występującą w pierwszym przedziale i opisaną funkcją.



Rys. 13.38. Linia wpływu \$R_A^0(x)\$

Obliczenia dla \$R_A^{(n)}\$ zestawiono w (tab. 13.1) a wykres przedstawiono na rys. 13.39.



Rys. 13.39. Linia wpływu $R_A^{(n)}(x)$

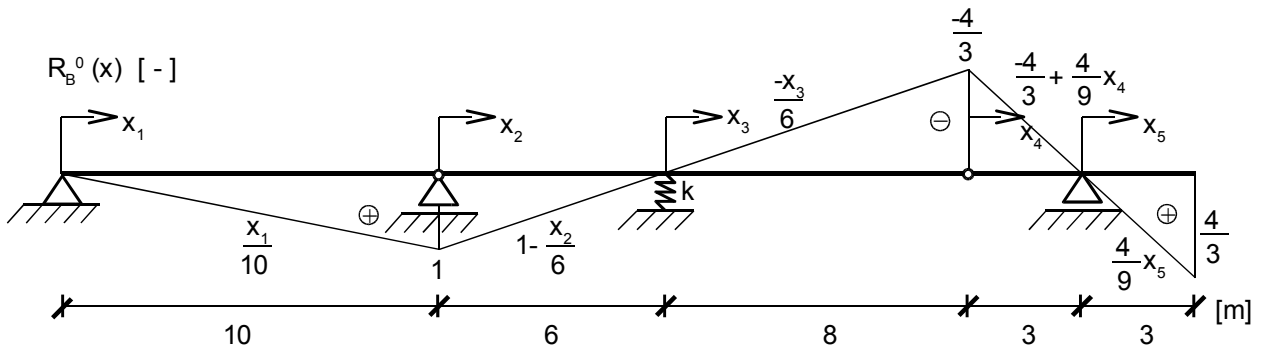
- Wyznaczenie linii wpływu $R_B^{(n)}(x)$

Reakcja R_B w stanie $X_I = 1$ wynosi $4/15$ i jest skierowana w dół.

Wobec tego:

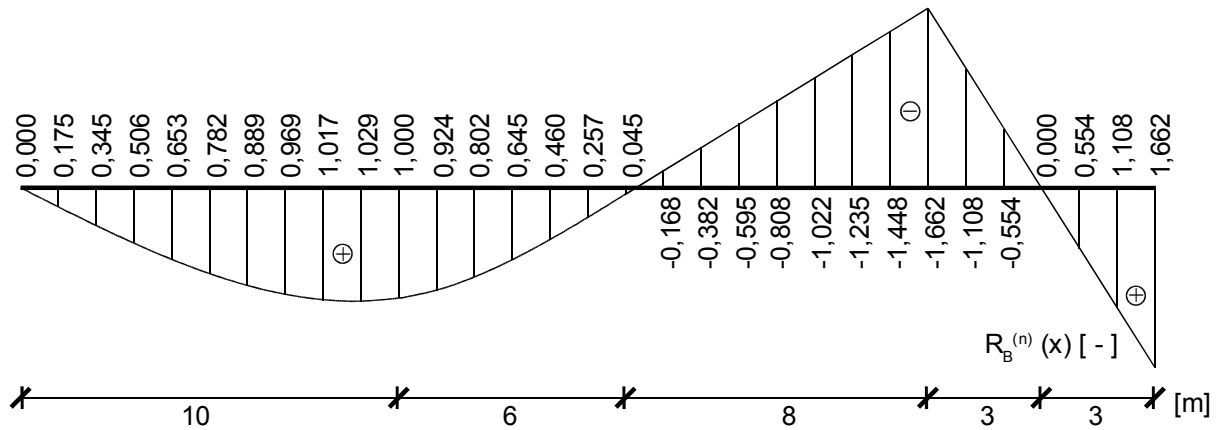
$$R_B^{(n)}(x) = R_B^0(x) - \frac{4}{15} X_I(x) \tag{13.84}$$

Linia wpływu R_B w układzie podstawowym opisana jest różnymi funkcjami w poszczególnych przedziałach (rys. 13.40).



Rys. 13.40. Linia wpływu $R_B^0(x)$

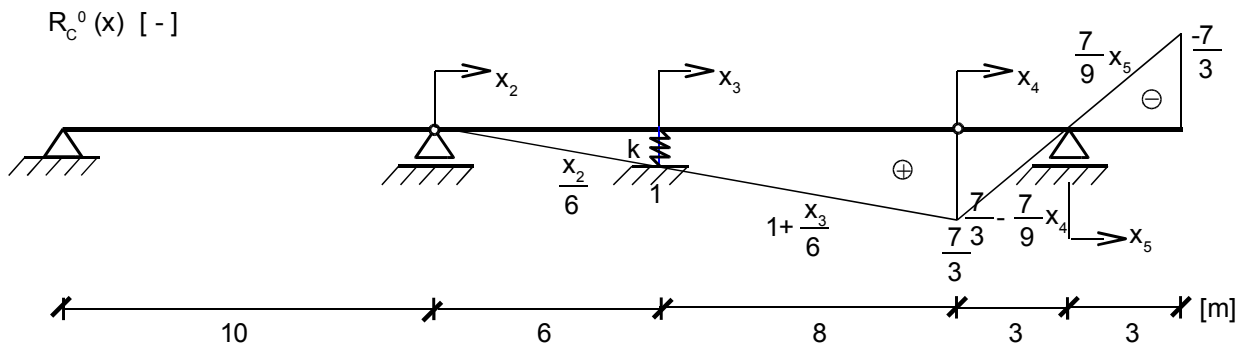
Wartości $R_B^{(n)}(x)$ obliczono w tabeli 13.1 i zaznaczono na rys. 13.41.



Rys. 13.41. Linia wpływu $R_B^{(n)}(x)$

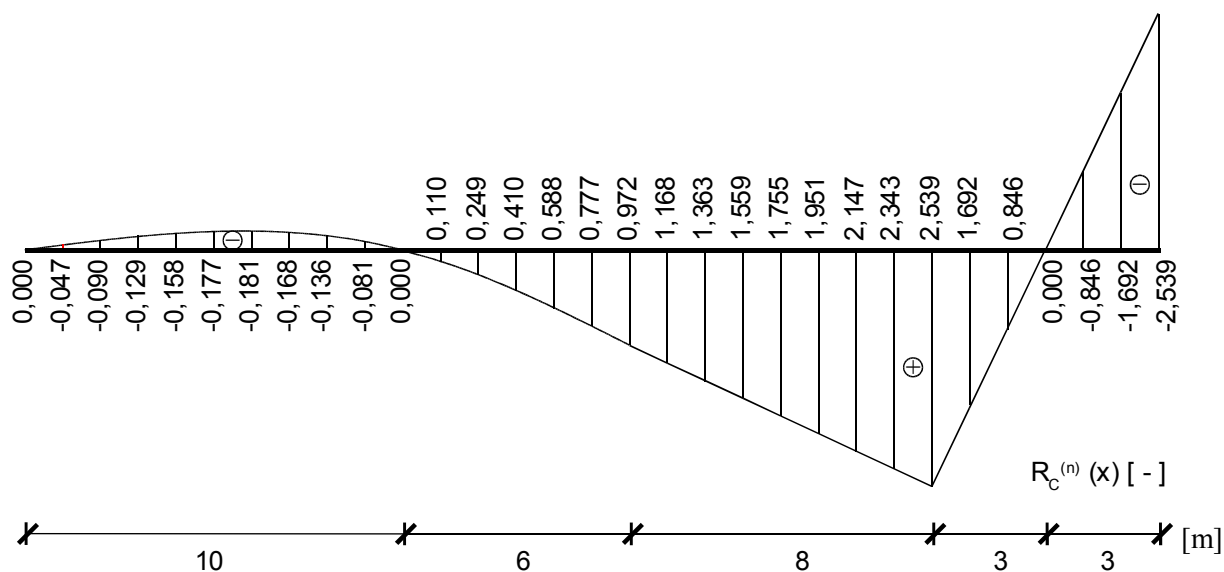
- Wyznaczenie linii wpływu $R_C^{(n)}(x)$
dla $X_I = 1$ reakcja R_C wynosi $1/6$

Linie wpływu reakcji R_C w układzie podstawowym przedstawiono na rys.13.42.



Rys. 13.42. Linia wpływu $R_C^0(x)$

a w układzie niewyznaczalnym na rys. 13.43.

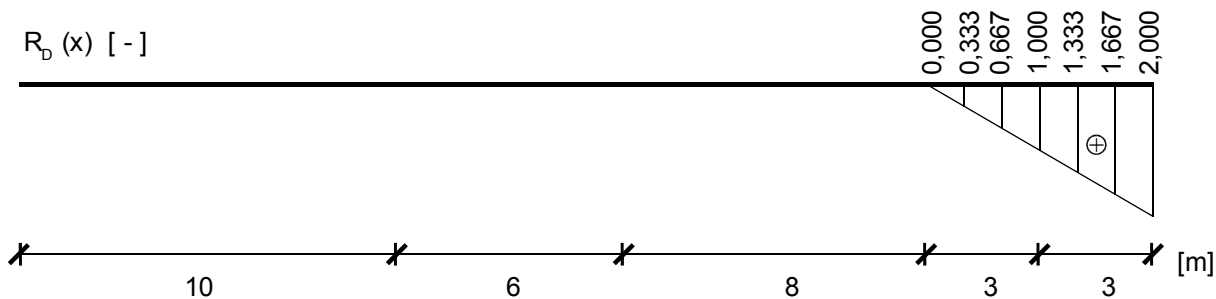


Rys. 13.43. Linia wpływu $R_c^{(n)}(x)$

- Wyznaczenie linii wpływu $R_D^{(n)}(x)$

ponieważ $R_D(X_I=I) = 0 [-]$ to:

$$R_D^{(n)}(x) = R_D^0(x)$$



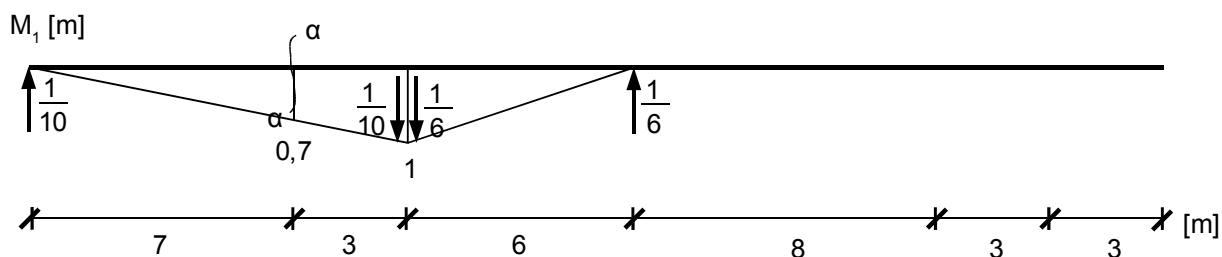
Rys. 13.44. Linia wpływu $R_D^{(n)}(x) = R_D^0(x)$

- Wyznaczenie linii wpływu $M_\alpha(x)$

Korzystając z zależności (13.48) możemy zapisać:

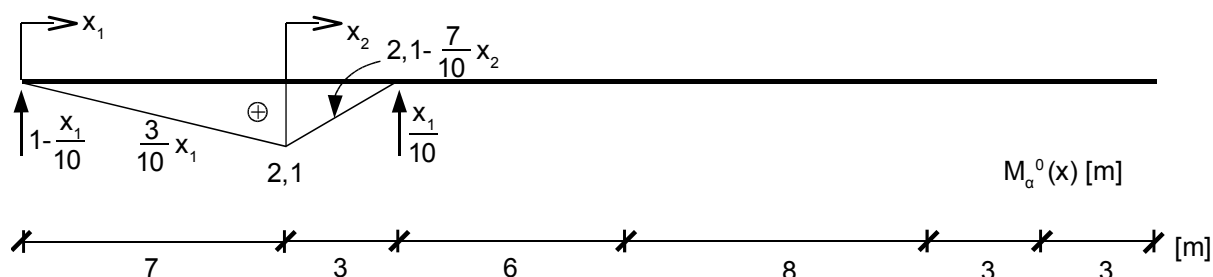
$$M_\alpha(x) = M_\alpha^0(x) + M_\alpha^{X_I=I} \cdot X_I(x) \tag{13.85}$$

Moment w przekroju α - α w stanie $X_I = I$ wynosi:



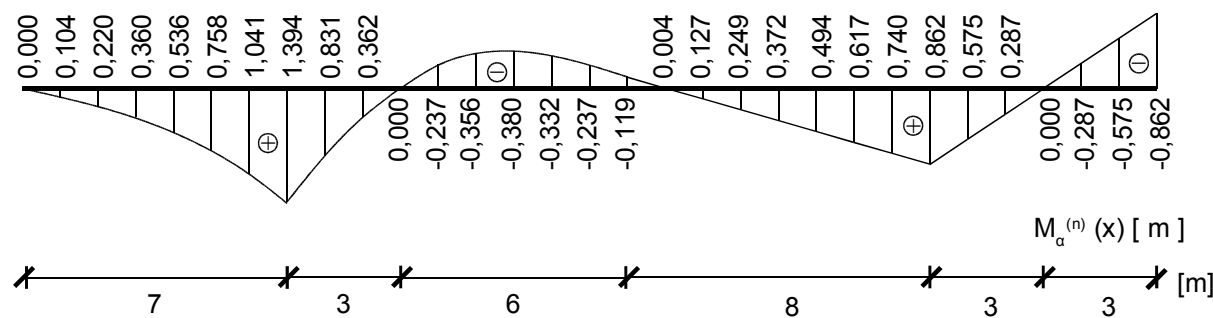
Rys. 13.45. Wykres momentów dla $X_i=1$

Natomiast linia wpływu M_α w układzie podstawowym jest różna od zera tylko w przedziale A-B.



Rys. 13.46. Linia wpływu $M_\alpha^0(x)$

Obliczenia $M_\alpha^{(n)}(x)$ zestawiono w (tab. 13.1)



Rys. 13.47. Linia wpływu $M_\alpha^{(n)}(x)$

- Wyznaczenie linii wpływu $T_\alpha(x)$

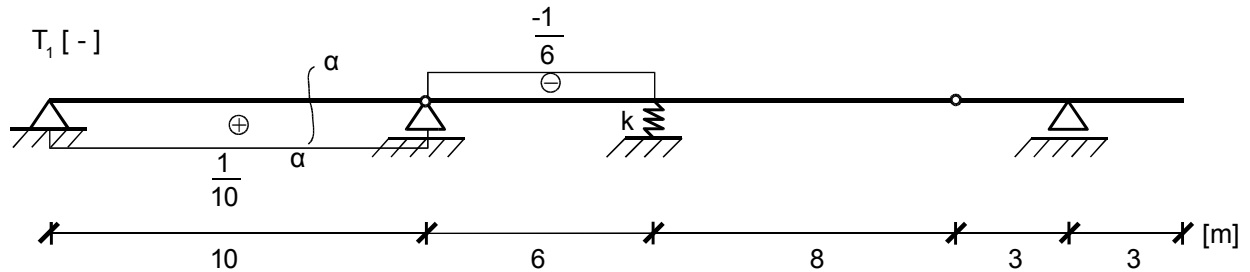
$$T_\alpha(x) = T_\alpha^0(x) + T_\alpha^{X_i=1} \cdot X_i(x) \tag{13.86}$$

gdzie:

$T_\alpha(X_i = 1)$ oznacza wartość siły poprzecznej w przekroju α - α od siły $X_i = 1$

T_α^0 oznacza linię wpływu siły poprzecznej T_α od siły $P = 1$ w układzie podstawowym.

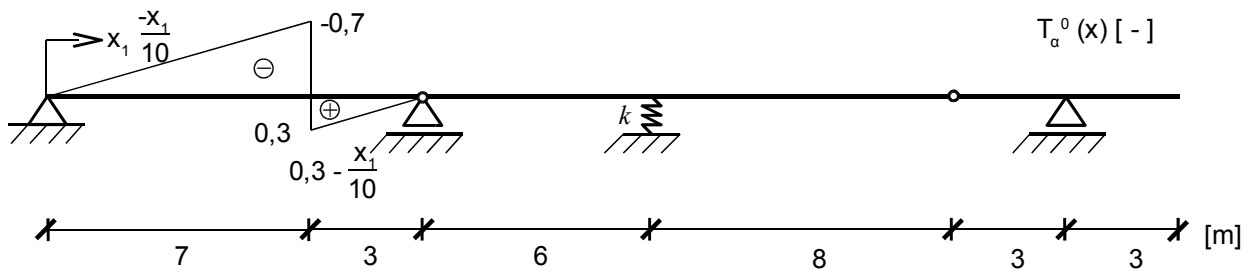
Na rys. 13.48 przedstawiono wykres sił poprzecznych w stanie $X_I = I$. Ponieważ w przedziale AB wartość siły tnącej jest stała to:



Rys. 13.48. Wykres sił tnących dla $X_I=1$

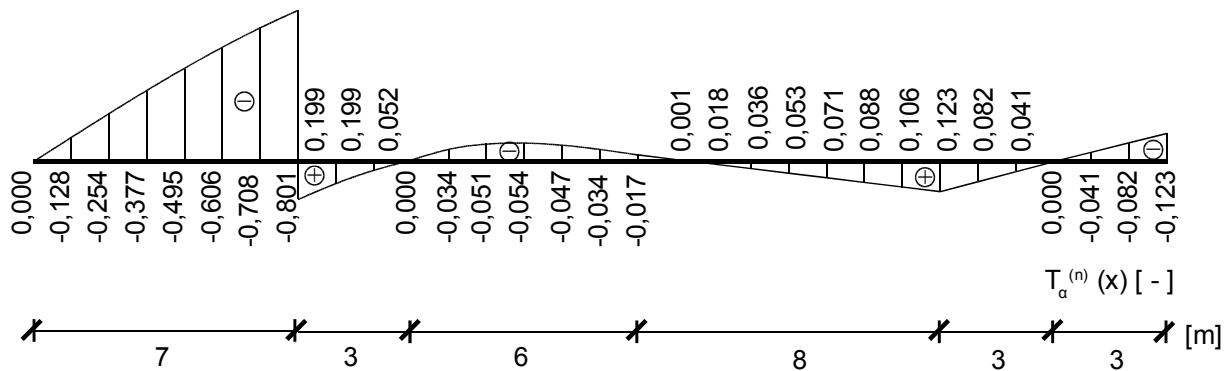
$$T_a(X_I = I) = 0,1 [-]$$

Najpierw wyznaczono linię wpływu w układzie podstawowym



Rys. 13.49. Linia wpływu $T_a^0(x)$

A następnie obliczono $T_a^{(n)}(x)$



Rys. 13.50. Linia wpływu $T_a^{(n)}(x)$

Tabela 13.1. Zestawienie obliczeń dla kolejnych punktów belki

| x | $\delta_{PI}(x)$ | $X_I(x)$ | $R_A^0(x)$ | $R_A^{(n)}(x)$ | $R_B^0(x)$ | $R_B^{(n)}(x)$ | $R_C^0(x)$ | $R_C^{(n)}(x)$ | $M_a^0(x)$ | $M_a^{(n)}(x)$ | $T_a^0(x)$ | $T_a^{(n)}(x)$ |
|-----|------------------|----------|------------|----------------|------------|----------------|------------|----------------|------------|----------------|------------|----------------|
| 0 | 0,00 | 0,000 | 1,00 | 1,000 | 0,00 | 0,000 | 0,00 | 0,000 | 0,00 | 0,000 | 0,00 | 0,000 |
| 1 | 1,38 | -0,280 | 0,90 | 0,872 | 0,10 | 0,175 | 0,00 | -0,047 | 0,30 | 0,104 | -0,10 | -0,128 |
| 2 | 2,67 | -0,542 | 0,80 | 0,746 | 0,20 | 0,345 | 0,00 | -0,090 | 0,60 | 0,220 | -0,20 | -0,254 |
| 3 | 3,79 | -0,771 | 0,70 | 0,623 | 0,30 | 0,506 | 0,00 | -0,129 | 0,90 | 0,360 | -0,30 | -0,377 |
| 4 | 4,67 | -0,949 | 0,60 | 0,505 | 0,40 | 0,653 | 0,00 | -0,158 | 1,20 | 0,536 | -0,40 | -0,495 |
| 5 | 5,21 | -1,059 | 0,50 | 0,394 | 0,50 | 0,782 | 0,00 | -0,177 | 1,50 | 0,758 | -0,50 | -0,606 |
| 6 | 5,33 | -1,085 | 0,40 | 0,292 | 0,60 | 0,889 | 0,00 | -0,181 | 1,80 | 1,041 | -0,60 | -0,708 |
| 7 | 4,96 | -1,008 | 0,30 | 0,199 | 0,70 | 0,969 | 0,00 | -0,168 | 2,10 | 1,394 | -0,70 | -0,801 |
| 7 | 4,96 | -1,008 | 0,30 | 0,199 | 0,70 | 0,969 | 0,00 | -0,168 | 2,10 | 1,394 | 0,30 | 0,199 |
| 8 | 4,00 | -0,814 | 0,20 | 0,119 | 0,80 | 1,017 | 0,00 | -0,136 | 1,40 | 0,831 | 0,20 | 0,119 |
| 9 | 2,38 | -0,483 | 0,10 | 0,020 | 0,90 | 1,029 | 0,00 | -0,081 | 0,70 | 0,362 | 0,10 | 0,052 |
| 10 | 0,00 | 0,000 | 0,00 | 0,000 | 1,00 | 1,000 | 0,00 | 0,000 | 0,00 | 0,000 | 0,00 | 0,000 |
| 10 | 0,00 | 0,000 | 0,00 | 0,000 | 1,00 | 1,000 | 0,00 | 0,000 | 0,00 | 0,000 | 0,00 | 0,000 |
| 11 | 1,67 | -0,339 | 0,00 | -0,034 | 0,83 | 0,924 | 0,10 | 0,110 | 0,00 | -0,237 | 0,00 | -0,034 |
| 12 | 2,50 | -0,508 | 0,00 | -0,051 | 0,67 | 0,802 | 0,33 | 0,249 | 0,00 | -0,356 | 0,00 | -0,051 |
| 13 | 2,67 | -0,542 | 0,00 | -0,054 | 0,50 | 0,645 | 0,50 | 0,410 | 0,00 | -0,380 | 0,00 | -0,054 |
| 14 | 2,33 | -0,475 | 0,00 | -0,047 | 0,33 | 0,460 | 0,67 | 0,588 | 0,00 | -0,332 | 0,00 | -0,047 |
| 15 | 1,67 | -0,339 | 0,00 | -0,034 | 0,17 | 0,257 | 0,83 | 0,777 | 0,00 | -0,237 | 0,00 | -0,034 |
| 16 | 0,83 | -0,169 | 0,00 | -0,017 | 0,00 | 0,045 | 1,00 | 0,972 | 0,00 | -0,119 | 0,00 | -0,017 |
| 16 | 0,83 | -0,169 | 0,00 | -0,017 | 0,00 | 0,045 | 1,00 | 0,972 | 0,00 | -0,119 | 0,00 | -0,017 |
| 17 | -0,03 | 0,006 | 0,00 | 0,001 | -0,17 | -0,168 | 1,17 | 1,168 | 0,00 | 0,004 | 0,00 | 0,001 |
| 18 | -0,89 | 0,181 | 0,00 | 0,018 | -0,33 | -0,382 | 1,33 | 1,363 | 0,00 | 0,127 | 0,00 | 0,018 |
| 19 | -1,75 | 0,356 | 0,00 | 0,036 | -0,50 | -0,595 | 1,50 | 1,559 | 0,00 | 0,249 | 0,00 | 0,036 |
| 20 | -2,61 | 0,531 | 0,00 | 0,053 | -0,67 | -0,808 | 1,67 | 1,755 | 0,00 | 0,372 | 0,00 | 0,053 |
| 21 | -3,47 | 0,706 | 0,00 | 0,071 | -0,83 | -1,022 | 1,83 | 1,951 | 0,00 | 0,494 | 0,00 | 0,071 |
| 22 | -4,33 | 0,881 | 0,00 | 0,088 | -1,00 | -1,235 | 2,00 | 2,147 | 0,00 | 0,617 | 0,00 | 0,088 |
| 23 | -5,19 | 1,056 | 0,00 | 0,106 | -1,17 | -1,448 | 2,17 | 2,343 | 0,00 | 0,740 | 0,00 | 0,106 |
| 24 | -6,06 | 1,232 | 0,00 | 0,123 | -1,33 | -1,662 | 2,33 | 2,539 | 0,00 | 0,862 | 0,00 | 0,123 |
| 24 | -6,06 | 1,232 | 0,00 | 0,123 | -1,33 | -1,662 | 2,33 | 2,539 | 0,00 | 0,862 | 0,00 | 0,123 |
| 25 | -4,04 | 0,821 | 0,00 | 0,820 | -0,89 | -1,108 | 1,56 | 1,692 | 0,00 | 0,575 | 0,00 | 0,082 |
| 26 | -2,02 | 0,411 | 0,00 | 0,041 | -0,44 | -0,554 | 0,78 | 0,846 | 0,00 | 0,287 | 0,00 | 0,041 |
| 27 | 0,00 | 0,000 | 0,00 | 0,000 | 0,00 | 0,000 | 0,00 | 0,000 | 0,00 | 0,000 | 0,00 | 0,000 |
| 27 | 0,00 | 0,000 | 0,00 | 0,000 | 0,00 | 0,000 | 0,00 | 0,000 | 0,00 | 0,000 | 0,00 | 0,000 |
| 28 | 2,02 | -0,411 | 0,00 | -0,041 | 0,44 | 0,554 | -0,78 | -0,846 | 0,00 | -0,287 | 0,00 | -0,041 |
| 29 | 4,04 | -0,821 | 0,00 | -0,082 | 0,89 | 1,108 | -1,56 | -1,692 | 0,00 | -0,575 | 0,00 | -0,082 |
| 30 | 6,06 | -1,232 | 0,00 | -0,123 | 1,33 | 1,662 | -2,33 | -2,539 | 0,00 | -0,862 | 0,00 | 0,123 |