“Eratóstenes, um gênio do tamanho da Terra”

“Eratostenes, a genius of Earth’s size”

Discentes:
André Amarante Luiz[1]
Josiele Prampolin Pastre[2]
Maria da Glória Aparecida Pereira[3]
Mariana Aparecida Delfino de Souza[4]
Ricardo Renato Bortoletto Parra[5]

Professor orientador:
Hermes Antonio Pedroso
Departamento de Matemática, IBILCE, UNESP,
15054-000, São José do Rio Preto, SP
E-mail: hermes@ibilce.unesp.br

Resumo: *Há mais de dois mil anos, Eratóstenes, personagem que se destacou em diversas áreas do conhecimento de seu tempo, foi o primeiro homem a descobrir as dimensões da Terra, utilizando um método bem simples. No entanto, na época não se tinha noção exata do erro envolvido nas medidas por ele realizadas. Consequentemente não foi possível avaliar a qualidade do resultado. Hoje existem meios bem mais avançados para se determinar as dimensões da Terra, mas o método desenvolvido por Eratóstenes ainda mantém sua engenhosidade e beleza e é reproduzido por pessoas do mundo todo.*

Palavras-chave: *Eratóstenes, História, Matemática, Astronomia, medida, raio da Terra.*

1. Introdução: Quem foi Eratóstenes de Cirene?

Figura 1: Eratóstenes de Cirene

Contemporâneo de Arquimedes e Apolônio, entre outros, Eratóstenes foi singularmente talentoso em praticamente todos os ramos do conhecimento de seu tempo. Distinguiu-se como matemático, geógrafo, historiador, astrônomo, poeta, filósofo e atleta.

Eratóstenes nasceu por volta 276 a.C. Seus pais eram gregos e moravam em Cirene, uma cidade grega situada em um ponto da costa da África onde hoje é a Líbia.

Ainda criança foi para escola, naquele tempo, chamada de ginásio. Quando completou o ginásio, mudou-se para Atenas. Lá estudou matemática, filosofia e ciências. Além de um grande perguntador, Eratóstenes era um incrível fazedor de listas. Era uma boa maneira de organizar as informações

[1]Licenciatura em Matemática, IBILCE - UNESP, bolsista FAPESP. Vinculado ao Projeto História da Matemática. E-mail: andrezinho@msn.com
[2]Licenciatura em Matemática, IBILCE - UNESP, bolsista Ciência na UNESP. Vinculada ao Projeto História da Matemática. E-mail: jprampolin@itelefonica.com.br
[3]Licenciatura em Matemática, IBILCE - UNESP, bolsista BAEE 2. Vinculada ao Projeto História da Matemática. E-mail: mariahtoza@hotmail.com
[4]Bacharelado em Matemática Pura, IBILCE - UNESP, bolsista FAPESP. Vinculada ao Projeto História da Matemática. E-mail: maridelfino6@yahoo.com.br
[5]Licenciatura em Matemática, IBILCE - UNESP, bolsista Ciência na UNESP. Vinculado ao Projeto História da Matemática. E-mail: ric_matic@yahoo.com.br

de modo que fossem úteis também às outras pessoas. Fez listas de todas as datas importantes da Grécia e uma lista de todos os vencedores dos jogos olímpicos entre outras.

Começou então, a escrever livros. Escreveu, entre outros temas, sobre comédias, sobre história e sobre constelações. Foi a partir daí que seu nome começou a ficar conhecido.

Sendo um homem de grande cultura, dedicou-se a diversas áreas filosóficas, incluindo as ciências da época. Teve como professores o estudioso Lisanias de Cirene e o filósofo Ariston de Chios, que por sua vez estudou com Zenão o fundador da escola de filosofia Estóica. Também estudou com Calímaco, outro estudioso, que também era poeta e nascido em Cirene. Com Arquimedes de Siracusa, também manteve excelentes relações.

Quando Ptolomeu III Evergetes sucedeu a seu pai, Ptolomeu II Filadelfo, em 245 a.C., convidou Eratóstenes a ir para Alexandria como tutor do seu filho, Filopator.

Para Eratóstenes isso foi excelente, pois não havia melhor lugar para pesquisar sobre as grandes questões da época. Em Alexandria, havia uma grande biblioteca, a famosa Biblioteca de Alexandria, idealizada por Ptolomeu I Soter e cujo projeto acabou por ser concluído sob a égide de Ptolomeu II Filadelfo, seu filho. A Biblioteca era basicamente constituída por cópias dos trabalhos feitos com base nos livros de Aristóteles. Ptolomeu II Filadelfo nomeou então, o professor de Eratóstenes, Calímaco, como o segundo Bibliotecário. Com a morte de Calímaco, por volta de 240 a.C., Eratóstenes foi promovido tornando-se o terceiro bibliotecário-chefe da Biblioteca de Alexandria, cargo que exerceu até sua morte. A Biblioteca ficava num templo às Musas chamado *Mouseion*. Diz-se que ela continha centenas de milhares de documentos e livros, que depois do grande incêndio, se perderam, sobrando apenas alguns exemplares.

Eratóstenes foi um erudito notável, célebre em sua própria época pela versatilidade e pela amplitude de seus interesses. Consta que os alunos da Universidade de Alexandria costumavam chamá-lo de *Pentatlus*, o que significa campeão em cinco esportes atléticos. Era também conhecido como *Beta* e a respeito dessa alcunha existem algumas hipóteses. Alguns acreditam que, devido ao seu saber amplo e brilhante, era alçado à condição de um segundo Platão. Uma explicação menos abonadora propõe que, não obstante fosse ele talentoso em muitos campos, nunca conseguiu ser o primeiro de seu tempo em campo nenhum; em outras palavras, era sempre o segundo. Essas explicações se enfraquecem quando se toma conhecimento de que certo astrônomo de nome Apolônio (muito provavelmente Apolônio de Perga) era chamado de *Epsilon*. Devido a isso, pensa-se que talvez Beta e Epsilon indicassem os números gregos (2 e 5) de certos gabinetes ou salas de leitura da Universidade, associados de alguma maneira particular aos dois homens. Por certo esta é uma alcunha "pesada" para se colocar a um homem cujos feitos e descobertas, em diversas áreas diferentes, são lembradas não só como historicamente importantes, bem como em muitos casos, ainda são a base de muitos métodos científicos modernos.

Há relatos de que Eratóstenes ao entrar em idade avançada, ficou praticamente cego devido a uma oftalmia. Desgostoso, por volta de 194 a.C., acabou suicidando-se através de greve de fome.

2. Alguns dos contemporâneos de Eratóstenes

2.1. Arquimedes de Siracusa (287 a.C. - 212 a.C.)

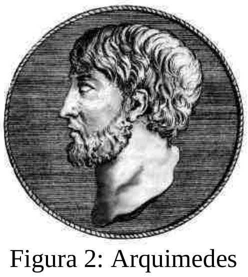


Figura 2: Arquimedes de Siracusa

Matemático grego e pioneiro da Matemática Aplicada nasceu em Siracusa. Começou a frequentar a Biblioteca de Alexandria e a estudar Matemática muito jovem. Entre suas invenções estão catapultas de bombardeio construídas com base no princípio da alavanca, por ele descrito. Graças a elas, Siracusa resistiu por três anos aos ataques romanos. Deixou também importantes contribuições à Geometria, como a descoberta do volume de uma esfera: dois terços do volume de um cilindro circunscrito a ela. Arquimedes valorizou tanto esse achado que pediu para gravar em seu túmulo o desenho de um cilindro circunscrito em uma esfera. Formulou um princípio

(Princípio de Arquimedes), que afirma que todo corpo mergulhado num fluido recebe um impulso de baixo para cima igual ao peso do volume do fluido deslocado. Com isso, conseguiu explicar por que os corpos mais densos afundam na água e os menos densos flutuam.

2.2. Apolônio de Perga (262 a.C. - 200 a.C.)

Matemático grego, foi chamado de “O Grande Geômetra”. Viveu durante os últimos anos do século III até princípios do século II a.C.

Autor do famoso Tratado das Seções Cônicas que é considerado como uma das principais obras científicas da Antiguidade, dando-lhe assim, o direito de ser a mais eminente figura da ciência grega no campo da geometria pura.

2.3. Aristarco de Samos (310 a.C. - 230 a.C.)

Aristarco de Samos, autor do tratado *Das Dimensões e Distâncias do Sol e da Lua*, apresentou uma interessantíssima e significativa teoria: o héliocentrismo. Ele procurou determinar essas distâncias relativamente uma à outra, calculando a distância angular entre os dois astros quando a Lua está no quarto crescente, isto é, quando as retas que unem o Sol à Lua e esta à Terra formam um ângulo reto na Lua. Em *Contador de Areia*, Arquimedes comenta a teoria de Aristarco discordando da essência do trabalho.

Não podemos saber se essa notável antecipação da teoria de Copérnico era fruto de uma convicção ou simples especulação feliz, mas de qualquer modo, ela não foi aceita, e por isso, não teve vida longa.

2.4. Hiparco de Nicéia (180 a.C. - 126 a.C.)

Hipparkhos, em grego, foi um astrônomo e matemático do séc. II a.C. que nasceu em Nicéia, na Bitínia. Viveu em Alexandria, mas trabalhou sobretudo em Rodes, entre 161 a 126 a.C.

Destacou-se pelo método e rigor de suas observações. Criou instrumentos tecnicamente aperfeiçoados que lhe permitiram elaborar um catálogo de aproximadamente oitenta estrelas. Determinou as coordenadas celestes de cada uma e as dividiu em seis grandezas, de acordo com sua luminosidade. Essa pesquisa foi inspirada pela descoberta (134 a.C.) de uma estrela nova.

Hiparco foi um dos cientistas mais representativos da época Alexandrina. Inventou um dioptro especial para medir as variações no diâmetro aparente do Sol e da Lua e introduziu na Grécia a divisão do círculo em 360º, cada um divisível em 60 minutos de 60 segundos, sistema inventado pelos babilônios. Dividindo o diâmetro do círculo em 120 partes, determinou, pelo cálculo, e não simplesmente por aproximações práticas, o valor das cordas com relação às diversas partes do diâmetro.

Empreendeu uma formulação primitiva da trigonometria; estabeleceu uma tabela de cordas de modo a facilitar os cálculos astronômicos que exigem recurso aos diversos valores destas e desenvolveu um método para a Solução dos triângulos esféricos. No campo da geometria plana, elaborou um resultado conhecido como o Teorema de Ptolomeu.

3. A obra de Eratóstenes

Pode parecer estranho o fato de um homem que nos deu tantas respostas ter deixado tantas perguntas a responder sobre si mesmo. Pois Eratóstenes continua sendo um mistério para nós. Apesar de todos os livros que escreveu, não deixou documentos pessoais, diários ou dados sobre seu nascimento. É claro que muita coisa já se escreveu sobre sua época. Historiadores clássicos e científicos conhecem bem o tempo em que Eratóstenes viveu e reuniram aqui e ali fragmentos de informação sobre ele, principalmente sobre os anos em que trabalhou como bibliotecário-chefe na grande biblioteca de Alexandria, no Egito. Há muita coisa que não sabemos e sem dúvida nunca saberemos. Essas lacunas existem em toda história. Não podemos preenchê-las inventando fatos, mas podemos de forma responsável e honesta, tentar imaginar, com base naquilo que já se conhece.

Seus interesses se estendiam à literatura, à cronologia, à matemática, à geografia e à cartografia, e à filosofia. Chegaram até nós, notadamente, graças à sua difusão entre os estudiosos que o sucederam, as contribuições no campo da cronologia, da matemática e da geografia. Infelizmente, a maior parte é de natureza doxográfica.

Eratóstenes foi um intelectual de primeira linha e um homem de convicções independentes, firmes e honestas. Afirmou, por exemplo, que o mérito dos sistemas políticos dos “bárbaros” (i.e., não-gregos) devia ser medido unicamente por sua moralidade, e não por critérios relativos à raça.

Restam apenas fragmentos e citações de sua obra, além de resumos e comentários de autores posteriores. As suas mais importantes observações tiveram por objetivo a medida do **meridiano terrestre** e a determinação da **obliquidade da eclíptica** (relaciona-se com o ângulo formado entre o plano do equador e a circunferência máxima descrita pelo Sol em seu movimento anual aparente em volta da Terra na esfera celeste). Eratóstenes é também conhecido por ter inventado o primeiro algoritmo que nos fornece números primos. Conhecido como **Crivo de Eratóstenes**, este algoritmo com as devidas alterações, ainda é uma ferramenta útil e importante na pesquisa da teoria dos números.

3.1. Contribuições à Cronologia

Eratóstenes estabeleceu os fundamentos científicos de um sistema cronológico na obra *Cronografias*, ao criar um calendário com anos bissextos, que começava a partir da Guerra de Tróia, cuja ocorrência foi estimada por ele em 1184 a.C.

Compilou também uma lista dos vencedores dos jogos olímpicos (*Olimpiônicas*) e, com base nela, estimou que a data das primeiras Olimpíadas correspondia ao ano 776 a.C.

3.2. Contribuições à Literatura

Eratóstenes foi o primeiro estudioso a chamar a si mesmo de "filólogo", palavra que no original significa "amigo da palavra, do argumento, do raciocínio". Não se deve confundir com o significado moderno da palavra; na época de Eratóstenes, ser *filólogo* significava interessar-se por várias coisas e, ao mesmo tempo, pela explicação dessas coisas.

Seu mais importante trabalho de crítica literária, *Da Comédia Antiga*, em 12 livros, perdeu-se. Compôs diversos poemas, mas só temos fragmentos de dois pequenos épicos, o *Hermes* (em hexâmetros, sobre o nascimento e a juventude do deus e inspirado na Astronomia) e o *Anterinis* (ou *Hesíodo*, sobre a morte do poeta), e a elegia *Erígone*, sobre o mito do ateniense Icário e sua filha. Compôs ainda obras literárias na área do teatro e da ética, que eram temas favoritos dos Gregos.

A temática de sua poesia é, evidentemente, helenística, mas uma de suas afirmações, “toda poesia é para entreter, não para instruir” parece um alerta contra os excessos da poesia erudita, em moda naquela época.

Em pelo menos dois dos poemas mencionados, um ou mais personagens ascendem aos céus, transformados em corpos celestes; no Hermes, há também uma descrição da estrutura do cosmo. Talvez por essa razão uma obra em prosa do séc. II a.C., *Catasterismos*, que contém lendas sobre a origem das constelações, foi atribuída a ele. Na realidade, o autor é desconhecido e devemos, portanto, chamá-lo de pseudo-Eratóstenes.

Escreveu também uma pequena biografia da rainha Arsinoé III Filopator, falecida em 204 a.C. durante um golpe palaciano.

3.3. Contribuições à Geografia

Eratóstenes ainda fez grandes contribuições para a Geografia. Consta que foi ele quem criou, por volta de 200 a.C., a palavra geografia que significa "descrição da Terra". Sua obra *Geografia* era dividida em três partes: introdução histórica, geografia matemática e cartografia dos lugares conhecidos da Terra. Eratóstenes foi o primeiro geógrafo a estudar sistematicamente todos os temas geográficos e devemos considerá-lo, sem dúvida, o criador da matemática geográfica, isto é, da aplicação de cálculos matemáticos no estudo da geografia. Demonstrou como medir, com alto grau de precisão para a época, a circunferência da Terra. Sobre isso comentaremos melhor adiante.

Ele desenhou, com precisão, o trajeto do Nilo para Khartoum, mostrando os pontos para pagar tributos. Ele também sugeriu que as fontes do Nilo seriam lagos. Um estudo já havia sido levado a cabo por diversos estudiosos antes de Eratóstenes na tentativa de explicar o estranho comportamento do rio, mas a maior parte deles, como Tales, por exemplo, estava muito enganada nas suas explicações. Eratóstenes foi o primeiro a dar uma resposta essencialmente correta quando sugeriu que fortes chuvas caíam nas regiões perto da nascente e que estas explicavam as inundações mais abaixo.

Outra contribuição que ele deu à Geografia foi a sua descrição da região "Eudaimon Arabia", agora o Iémen, habitada por 4 raças diferentes. A situação era um pouco mais complicada do que o proposto por Eratóstenes, mas os nomes sugeridos por ele ainda hoje são usados para denominar essas raças (Minaeans, Sabaeans, Qatabanians e Hadramites).

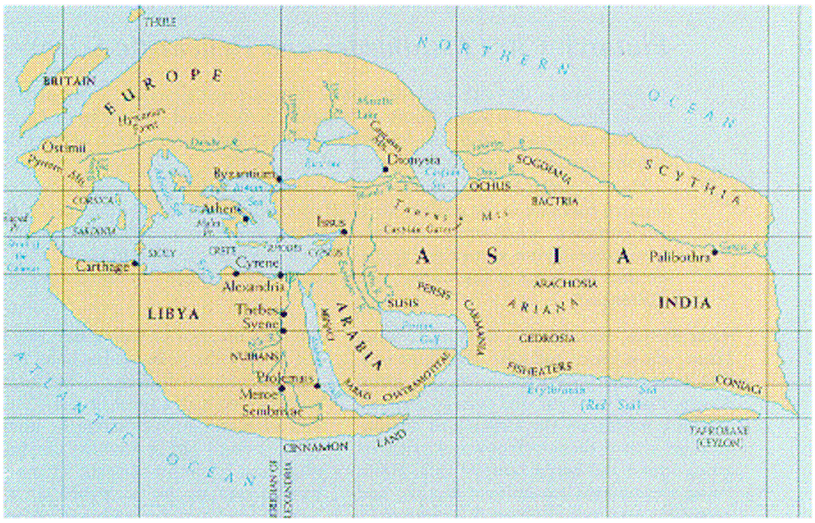


Figura 3 - Mapa da época

3.4. Contribuições à Matemática

Eratóstenes estudou, aparentemente, diversas questões teóricas e práticas de Matemática (e possivelmente até de música). Escreveu pelo menos duas obras, *Dos Meios Geométricos* e *Da Duplicação do Cubo*, mas atualmente é mais conhecido pelo seu *crivo*, um método sistemático para isolar números primos.

Um dos mais importantes trabalhos de Eratóstenes foi o *Platonicus*, que lidava com a Matemática, que por sua vez tinha a filosofia de Platão inerente. Este trabalho foi exaustivamente utilizado por Theon de Smyrna quando este escreveu *Exposito rerum mathematicarum* e, apesar do *Platonicus* se ter perdido, Theon de Smirna diz-nos que o trabalho de Eratóstenes estudava as definições básicas de geometria e aritmética, assim como cobria outros tópicos como, por exemplo, a música.

Existem outros pormenores que Eratóstenes escreveu no seu *Platonicus* que nos são dados por Theon de Smirna. Em particular descreveu a história do problema da duplicação do Cubo:

> *...quando Deus proclamou aos Gregos através do Oráculo que, para se livrarem da peste, eles deveriam construir um altar com o dobro do*

> *existente, os seus artesãos mergulharam em grande perplexidade com os seus esforços para descobrir como um sólido poderia ser o dobro de um sólido similar; eles antes tinham ido perguntar a Platão acerca disto, e ele respondeu que o que o Oráculo queria dizer era que Deus, não queria um altar desse tamanho, mas sim que desejava, ao dar-lhes a tarefa, envergonhar os Gregos pela negligência que manifestavam pelas Matemáticas e pela sua contenção no estudo da Geometria.*

Uma outra surpreendente fonte de informação concernente a Eratóstenes, chega-nos através da crônica de Eutócito à Proposição 1 do livro 2 de *Esfera e Cilindro*, de Arquimedes, na qual se reproduz uma carta supostamente enviada por Eratóstenes a Ptolomeu III Evergetes:

> *Se, meu bom amigo, tentares obter de qualquer pequeno cubo um outro cubo com o dobro do tamanho, e transformar devidamente qualquer sólido geométrico em outro, tal está em teu poder; através deste método, poderás encontrar a medida de um cercado, de um fosso ou da largura do fundo de um poço vazio, ou seja, se tentares encontrar entre duas réguas, dois meios (centros) com as duas extremidades convergindo. Não procures fazer o difícil trabalho dos cilindros de Arquitas, nem cortar o cone nas tríades de Menaequimus, nem entender semelhante forma circular de linhas como a descrita pelo temente a Deus Eudoxus. Não poderias, nestas tabuletas, encontrar facilmente uma infinidade de meios, começando por uma pequena base. Feliz és tu, Ptolomeu, por seres um pai igual a seu filho em vigor juvenil, tu próprio lhe deste tudo o que é querido a musas e reis e talvez no futuro, ó Zeus, deus do Céu, também receba o centro nas tuas mãos. Assim seja e que quem quer que veja esta oferta possa dizer: "Esta é a dádiva de Eratóstenes de Cirene".*

Esta carta descreve a história do problema da duplicação do Cubo e, em particular, descreve um engenho mecânico inventado por Eratóstenes destinado a descobrir os segmentos de reta x e y, tais que, para os segmentos dados *a* e *b*, tem-se:

$$a/x = x/y = y/b.$$

Este famoso resultado atribuído a Hipócrates, permitiu concluir que resolver o problema de descobrir 2 médias proporcionais entre um número e o seu dobro era equivalente a descobrir a Solução para o problema da duplicação do Cubo.

3.4.1. A Duplicação do cubo vista por Eratóstenes

À semelhança de outros matemáticos, a proposta de Eratóstenes também consistia numa construção mecânica. Como se sabe a resolução do problema da duplicação do cubo sob a condição do uso apenas de régua não graduada e compasso, é impossível. Vale lembrar que o problema consiste em obter um cubo cujo volume seja o dobro do volume de um outro cubo.

É importante citar que se deduz serem de Hipócrates os primeiros passos na longa caminhada à procura da Solução deste célebre problema, o mais famoso dos problemas clássicos da matemática grega: a duplicação do cubo, a trissecção do ângulo e a quadratura do círculo.

Estes passos concretizam-se na redução do problema a um outro: o de encontrar dois meios proporcionais. Este novo problema pertencente ao âmbito da geometria plana, mantém a regra de utilizar-se apenas régua não graduada e compasso para sua resolução.

Segundo Hipócrates "se dado um cubo de aresta *a* e encontrando-se dois segmentos *x* e *y* tais que $\frac{a}{x}=\frac{x}{y}=\frac{y}{b}$ isto é, encontrando-se dois meios proporcionais entre os segmentos *a* e *b*, então o cubo de aresta *x* tem o volume ampliado na razão *b/a*." A duplicação nada mais é do que o caso $b = 2a$.

De fato, esta redução do problema fez com que os esforços posteriores fossem dedicados à descoberta de construções para os dois meios proporcionais. Tais buscas foram muito frutíferas no desenvolvimento da matemática, sendo um exemplo de tal fato, o estudo das seções cônicas.

Eratóstenes foi um dos que seguiu esse caminho e desenvolveu uma Solução do problema dos dois meios proporcionais através de um instrumento mecânico. Este instrumento é conhecido pelo nome de mesolabo.

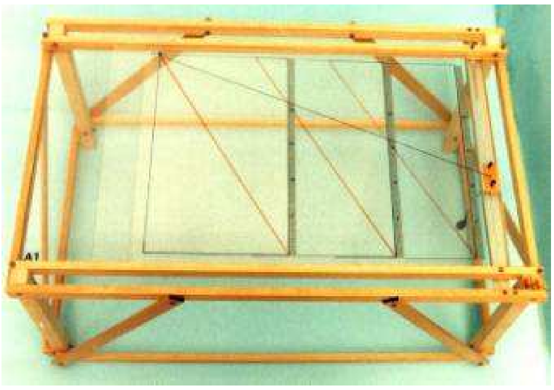


Figura 4: Mesolabo

O engenho consiste numa estrutura retangular ao longo da qual deslizam três paralelogramos (ou de forma equivalente, os triângulos que são metade dos primeiros) de altura igual à altura da estrutura. Os paralelogramos, ou triângulos, movem-se sempre de modo que as suas bases descrevem uma linha reta. A posição original dos elementos são as exibidas abaixo. Note que *ABCD* é um retângulo e que os triângulos *DFE*, *IHG* e *LKJ* são congruentes. (Fig. 5)

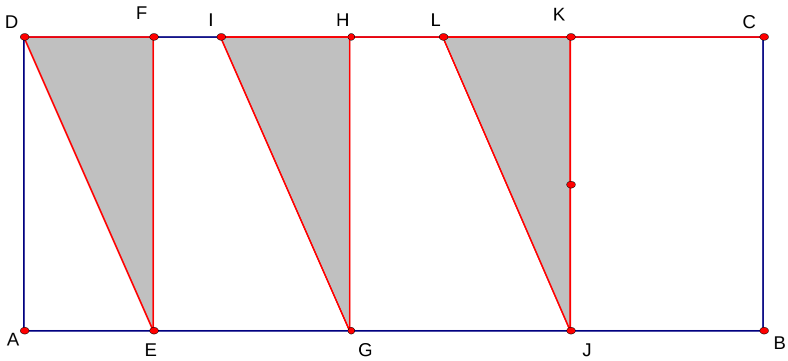


Figura 5

Repare que se o cubo a ser duplicar tem lado *a* então o mesolabo deve ser construído de modo que $AD = 2a$.

Considere *M* o ponto médio do lado *KJ* e fixo o triângulo *DFE*. Deslocando os outros dois de forma que os pontos *N* e *O*, (o primeiro intersecção de *HG* com *LJ* e o segundo, intersecção de *FE* com *IG*) sejam colineares com *D* e *M*, obtemos a Figura 6:

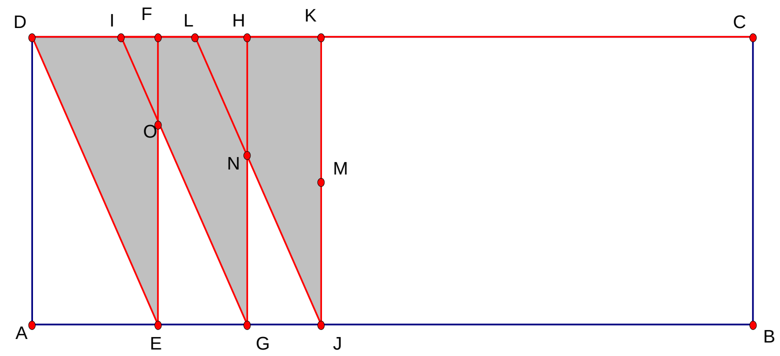


Figura 6

Da intersecção da semirreta *DM* com *AB* obtemos o ponto *P*:

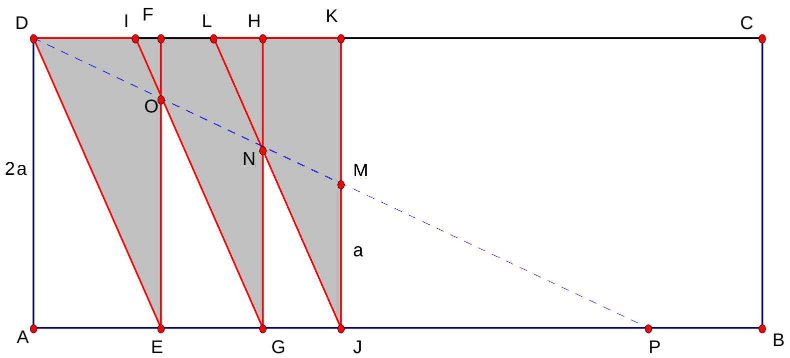


Figura 7

Observando a Figura 7 concluímos que os triângulos *DAP*, *OEP*, *NGP* e *MJP* são semelhantes. Logo:

$$\frac{MJ}{NG} = \frac{NG}{OE} = \frac{OE}{DA}.$$

Assim, *MJ*, *NG*, *OE* e *DA* estão em “proporção continua” e *NG* e *OE* são os meios proporcionais pretendidos. Como $MJ = a$ e $DA = 2a$, temos:

$$\frac{a}{NG} = \frac{NG}{OE} = \frac{OE}{2a}$$

De onde obtemos o sistema:

$$\begin{cases} a \cdot OE = NG^2 \\ 2a^2 = NG \cdot OE \end{cases}$$

Por fim, resolvendo-se este sistema (por exemplo, somando-se as equações membro a membro), obtém-se $NG^3 = 2a^3$, ou seja, o volume do cubo de aresta *NG* é o dobro do volume do cubo de aresta *a*.

3.4.2. O Crivo de Eratóstenes

Eratóstenes também estudou os números primos. Ele desenvolveu um método que permite obter uma tabela de números primos até um limite escolhido que ficou conhecido como *"Crivo de Eratóstenes"*. Este crivo, de uma forma modificada, é ainda hoje uma ferramenta importante nas pesquisas da Teoria dos Números. O crivo aparece na *Introdução à Aritmética*, de Nicomedes.

O método consiste nos seguintes passos: escreve-se a sucessão natural dos números inteiros até ao número desejado. Suprime-se o número 1. O número 2 é o menor número primo. A partir do que lhe segue (3), cortam-se todos os múltiplos de 2. O número 3, o primeiro que não foi cortado, é primo. A partir do que se lhe segue cortamos todos os múltiplos de três. O primeiro não riscado é 5, que será número primo, e a partir de 6 cortamos todos os múltiplos de cinco.

É fácil ver que o corte dos diferentes números pode começar a fazer-se, não a partir do número que se segue a um dado primo, mas a partir do quadrado desse número primo, pois verifica-se facilmente que são primos todos os números não riscados até ao quadrado do novo número primo a partir do qual se devia continuar a operação. Assim, depois da supressão dos múltiplos de 2, os números não riscados 3, 5, 7 são primos por serem inferiores a $3^2 = 9$.

Exemplo: Escrevem-se todos os números naturais, por exemplo, até 100 e procede-se do seguinte modo:

~~1~~	**2**	**3**	~~4~~	**5**	~~6~~	**7**	~~8~~	~~9~~	~~10~~
11	~~12~~	**13**	~~14~~	~~15~~	~~16~~	**17**	~~18~~	**19**	~~20~~
~~21~~	~~22~~	**23**	~~24~~	~~25~~	~~26~~	~~27~~	~~28~~	**29**	~~30~~
31	~~32~~	~~33~~	~~34~~	~~35~~	~~36~~	**37**	~~38~~	~~39~~	~~40~~
41	~~42~~	**43**	~~44~~	~~45~~	~~46~~	**47**	~~48~~	~~49~~	~~50~~
~~51~~	~~52~~	**53**	~~54~~	~~55~~	~~56~~	~~57~~	~~58~~	**59**	~~60~~
61	~~62~~	~~63~~	~~64~~	~~65~~	~~66~~	**67**	~~68~~	~~69~~	~~70~~
71	~~72~~	**73**	~~74~~	~~75~~	~~76~~	~~77~~	~~78~~	**79**	~~80~~
~~81~~	~~82~~	**83**	~~84~~	~~85~~	~~86~~	~~87~~	~~88~~	**89**	~~90~~
~~91~~	~~92~~	~~93~~	~~94~~	~~95~~	~~96~~	**97**	~~98~~	~~99~~	~~100~~

1) Corta-se o número 1;
2) Cortam-se todos os múltiplos de 2, exceto o 2 (1º número primo);
3) O 1º número não cortado também é primo (neste caso o 3);
4) A seguir cortam-se todos os múltiplos de 3 maiores que 3;
5) Repetem-se os passos 3 e 4 sucessivamente;
Nota: É suficiente eliminar os múltiplos de cada um dos números a partir do seu quadrado.

Tabela 1: O crivo de Eratóstenes até 100

3.5. Contribuições à astronomia

Eratóstenes mediu também a distância entre a Terra e a Lua e entre a Terra e o Sol, através de informações obtidas durante eclipses lunares. Segundo seus cálculos, a distância até o Sol era de 804.000.000 de estádios, e a distância até a Lua era de 780.000 estádios. O *estádio* era uma antiga medida ática de distância equivalente à extensão de um campo grego de jogos esportivos, ou estádio. Correspondia a cerca de 177,6 metros, mas podia variar ligeiramente. Os resultados, nesses casos, não foram tão bons como na medida da circunferência da Terra.

Mediu ainda a inclinação do eixo da Terra, obtendo provavelmente o valor de 24º ou 2/15 de 180°. Segundo Cláudio Ptolomeu (85 – 165 d.C.), o valor obtido por Eratóstenes foi 11/83 de 180°, isto é, 23° 51' 15", mas muitos eruditos modernos atribuem esse valor ao próprio Ptolomeu. O eixo da Terra é inclinado em relação a uma perpendicular ao plano da eclíptica em 23.45°. Essa inclinação é a causa das quatro estações do ano: primavera, verão, outono e inverno. Como o eixo é inclinado, diferentes partes do globo terrestre se voltam para o Sol em diferentes momentos do ano. O verão é mais quente do que o inverno em cada hemisfério porque os raios Solares atingem a Terra, no verão, em ângulo mais direto do que no inverno, e também porque os dias de verão são mais longos. As estações do ano não são produzidas pelas diferentes distâncias entre a Terra e o Sol ao longo do ano, pois essas diferenças são extremamente pequenas. O plano da eclíptica é um plano determinado pela forma achatada do sistema Solar. A eclíptica é o plano da órbita da Terra (e da maioria dos outros planetas) em relação ao Sol. Durante o ano o Sol traça, ao longo da eclíptica, um caminho aparente no céu.

Ele ainda compilou um catálogo de 675 estrelas, que não chegou até nós, e também se credita a ele a invenção da *esfera armilar* (c. -255), instrumento astronômico que mostra as principais divisões do céu e o movimento dos corpos celestes. Posteriormente, ela foi aperfeiçoada e usada por Hiparco.

3.6. A medida do tamanho da Terra por Eratóstenes

Eratóstenes fez uma medida surpreendentemente correta da circunferência da Terra. Pormenores são relatados no seu livro *"Sobre as medições da Terra"*, que também desapareceu. Contudo, alguns detalhes destes cálculos aparecem em trabalhos de outros autores como, por exemplo, Cleomedes, Theon de Smyrna e Strabo.

Quando começou suas pesquisas na biblioteca de Alexandria, Eratóstenes deparou-se com um problema: as informações estavam separadas em muitos lugares diferentes. Com a intenção de organizar todas essas informações, ele percebeu que tinha que escrever o primeiro livro completo sobre geografia. E mais, ele queria descobrir como medir a circunferência da Terra e sabia que seu livro não estaria completo sem isso.

Ninguém jamais pensara em medir o tamanho de uma circunferência tão grande quanto a Terra. Ninguém a não ser Eratóstenes. Talvez ele tivesse imaginado a Terra cortada ao meio e separada em diversas frações iguais. Se ele soubesse a quantidade de frações iguais e o comprimento do arco de uma dessas frações, bastaria multiplicar o comprimento desse arco pelo número de frações para obter o comprimento total da Terra.

De que maneira Eratóstenes poderia descobrir quantas frações eram necessárias? Sabia que uma circunferência tem 360 graus e se ele descobrisse o ângulo de uma dessas frações poderia dividir 360 por esse ângulo e então encontrar o número de frações iguais que compõe o todo. Eratóstenes imaginou uma das frações da Terra com a borda exterior indo de Alexandria até Siena, uma cidade ao sul do Egito, hoje chamada Assuã. Se ele conseguisse calcular a distância entre Alexandria e Siena, e se conseguisse medir o ângulo interno da fração que as duas cidades formavam, seria capaz de calcular a circunferência da Terra. Mas de que jeito poderia calcular aquele ângulo?

Eratóstenes percebera que o Sol seria de grande ajuda para Solucionar o problema do ângulo e tinha razões para escolher a cidade de Siena. Ouvira dos homens de uma caravana que passara por Alexandria que no vigésimo primeiro dia de junho aconteceria o Solstício de verão, e precisamente ao meio dia o Sol brilharia direto dentro de um poço em Siena e iluminaria seu fundo sem que nenhuma sombra se projetasse em suas paredes.

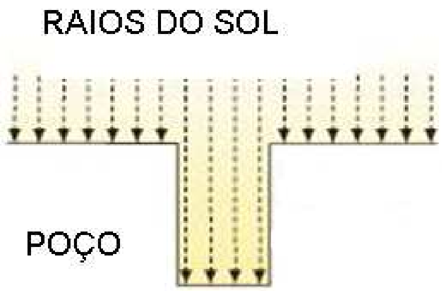


Figura 8: Os raios do Sol entram de modo perfeitamente vertical dentro do poço em Siena, quando o Sol está a pino sobre esta cidade ao meio dia (em 21 de junho). Neste momento, as paredes não projetam sombra alguma.

Entretanto, em Alexandria, exatamente à mesma hora, havia sombras sendo projetadas. Eratóstenes sabia o motivo: porque a Terra é redonda. Se fosse plana, os raios Solares incidiriam em todos os lugares formando o mesmo ângulo, e as sombras seriam sempre iguais. Eratóstenes tinha alguns conhecimentos sobre ângulos e sombras. Sabia que é possível medir o ângulo do Sol pela sombra projetada pelos objetos. E sabia também, por causa dos textos matemáticos que havia lido que o ângulo do Sol em Alexandria ao meio-dia de 21 de junho formaria, lá no centro da Terra, a fração da Terra formada pela distância entre Alexandria e Siena.

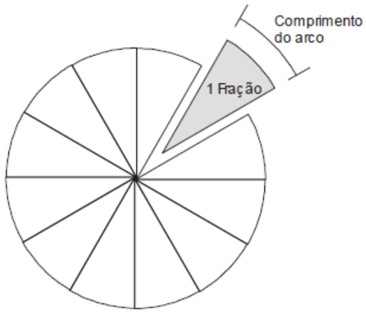


Figura 10: Terra cortada ao meio e dividida em frações

Assim, Eratóstenes saiu da biblioteca em vinte e um de junho alguns minutos antes do meio dia para medir a sombra exatamente naquele momento em Alexandria, enquanto, em Siena, no mesmo instante, a luz do Sol entrava a pino dentro do poço. Ele mediu um ângulo de cerca de 7,2 graus. Depois, dividiu 360 por 7,2, o que dá 50. Agora, sabia que eram necessárias 50 frações iguais à medida da distância entre Alexandria e Siena para formar a circunferência da Terra.

No entanto, ele ainda não tinha terminado. Faltava descobrir qual era a extensão do arco dessa fração: a distância entre as duas cidades. Depois, só teria que multiplicar esse número por 50 para descobrir a medida do contorno de toda a Terra.

Inicialmente Eratóstenes tentou fazer essa medida com camelos, mas eles eram um problema. Os camelos eram o principal meio de transporte do deserto e Eratóstenes tinha planejado medir a distância entre as cidades calculando quanto tempo os camelos levariam para ir de uma para a outra. Achava que esses animais seriam perfeitos para isso. Mas esqueceu como eles são difíceis de controlar. Algumas caravanas de camelos seguiam lentamente, outras iam depressa demais, alguns camelos disparavam na direção errada.

Por mais que tentasse, não conseguia registrar tempos de viagens realizadas com camelos que fossem suficientemente precisos e servissem para suas equações matemáticas.

Por fim, acabou pedindo ajuda ao rei. Perguntou ao rei se poderia utilizar os serviços de seus melhores bematistas, que eram agrimensores treinados para caminhar com passos sempre do mesmo tamanho. Desse modo, as distâncias lineares poderiam ser medidas com certa precisão.

O rei consentiu. E os bematistas fizeram esse trabalho. Eratóstenes descobriu que a distância entre Alexandria e Siena era de 5.000 estádios. A unidade de medida, o estádio que Eratóstenes usou, tinha pouco mais de 157 metros.

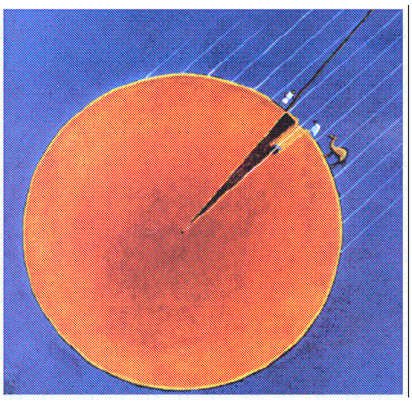


Figura 11: Representação da fração formada pelas cidades de Alexandria e Siena

Eratóstenes agora podia calcular a circunferência da Terra que tinha 250.000 estádios, ou 39.250 quilômetros. Quando a Terra foi novamente medida no nosso século, havia apenas uma diferença de cerca de 320 quilômetros entre o resultado atual e o que Eratóstenes obteve mais de dois mil anos atrás!

As medições de Eratóstenes proporcionaram a criação do primeiro mapa da Terra baseado em cálculos matemáticos.

3.6.1. A idéia de Eratóstenes

Vamos analisar mais detalhadamente a idéia de Eratóstenes. Vamos, a partir do esquema da figura abaixo, definir as grandezas envolvidas no problema:

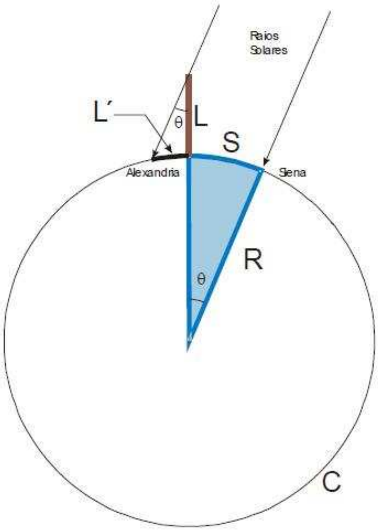


Figura 12: Esquema da idéia de Eratóstenes

- *S* é a distância entre Siena e Alexandria;
- θ é o ângulo formado da fração formada pelas cidades de Siena e Alexandria;
- *C* é a circunferência da Terra;
- *D* é o diâmetro da Terra;
- *R* é o raio da Terra;
- *L* é o comprimento do poste;
- *L´* é o comprimento da sombra do poste;

Podemos calcular a circunferência da Terra, utilizando a seguinte relação trigonométrica:

$$\frac{S}{C} = \frac{\theta}{2\pi}.$$

Ou seja, a razão entre a distância das cidades (*S*) e a circunferência da Terra (*C*) é igual à razão do ângulo formado pelas cidades e o ângulo total da circunferência terrestre. Aqui estamos realizando os cálculos considerando os ângulos expressos em radianos.

Isolando *C* teremos a seguinte relação para o comprimento da circunferência da Terra:

$$C = \left(\frac{2\pi}{\theta}\right) \cdot S$$

Bem, para calcular a circunferência necessitamos do ângulo θ e de *S*.

3.6.2. O ângulo entre as cidades (θ)

Mais uma vez, observando o esquema acima, pode-se notar que o poste, sua sombra e a linha imaginária dos raios Solares formam um triângulo, onde um dos ângulos é exatamente o ângulo θ. Assim, necessitamos saber apenas o comprimento do poste (*L*) e o comprimento de sua sombra (*L*) para conhecer o ângulo θ.

Para isso é necessário lembrar do conceito de tangente:

$$\tan\theta = \frac{L'}{L}$$

Isolando o ângulo θ teremos a seguinte relação

$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{L'}{L}\right)$$

Evidentemente não havia uma calculadora para resolver a inversa da tangente. O que Eratóstenes utilizou foram tabelas com a relação entre o ângulo e a razão do comprimento do arco pelo raio. A única informação que temos é que o ângulo calculado foi de 7,2°.

3.6.3. A distância entre as cidades (S)

A distância entre as cidades é obtida pela multiplicação do número de passos dados de Siena até Alexandria pelos bematistas do Rei, pelo comprimento de cada passo, que supostamente tem o mesmo tamanho.

A informação que temos é que a distância encontrada é de 5000 estádios, que como dissemos, era a unidade de medida utilizada na época. Obter o comprimento da circunferência da Terra com essas informações se torna bem simples.

3.6.4. Cálculo do comprimento da circunferência, do diâmetro e do raio da Terra

Vamos converter o ângulo encontrado por Eratóstenes de graus para radianos. Isso pode ser feito pela seguinte relação trigonométrica:

$$\theta(rad) = \frac{\theta(graus)}{360}\cdot 2\pi \Rightarrow \theta(rad) = \frac{7{,}2}{360}\cdot 2\pi \Rightarrow \theta(rad) = 0{,}02\cdot 2\pi$$

Agora substituímos na equação abaixo para calcular a circunferência:

$$C = \left(\frac{2\pi}{0{,}02\cdot 2\pi}\right)\cdot 5000 \Rightarrow C = \left(\frac{1}{0{,}02}\right)\cdot 5000 \Rightarrow C = 50\cdot 5000 \Rightarrow C = 250000 \text{ estádios}$$

Bem, agora podemos calcular o comprimento em quilômetros multiplicando o resultado por 0,157 km o que resulta: *C* = 39.250 km.

O raio da Terra pode ser obtido a partir da seguinte relação:

$$C = 2\pi R \Rightarrow R = \frac{C}{2\pi} \Rightarrow R = \frac{39.250}{6{,}28}$$

O diâmetro que é o dobro do raio é de 12.494 km.

Atualmente medidas obtidas com sistemas sofisticados de medição mostram que o raio da Terra é de 6370 km o que dá uma diferença de 123 km da medida de Eratóstenes.

Porém, essa comparação não é muito adequada. Devemos descobrir qual o erro envolvido nas medidas de Eratóstenes inerentes ao método utilizado. Afinal de contas essa medida seria boa para ser utilizada na confecção de mapas?

Através do erro que poderemos saber a confiabilidade dessa medida para época e para as épocas futuras.

3.6.5. Os erros envolvidos nas medições de Eratóstenes

Uma outra maneira idêntica a anteriormente mostrada para se determinar o raio da Terra é simplesmente utilizar a definição de ângulo (em radianos).

$$\theta = \frac{S}{R}$$

Ou ainda, isolando o *R* temos que:

$$R = \frac{S}{\theta}$$

Mas como todo problema físico, sabemos que a medidas possuem um erro envolvido. Assim a distância entre Siena e Alexandria será $S \pm \Delta S$ e o ângulo medido em radianos será $\theta \pm \Delta\theta$

Com essas considerações sabemos o intervalo no qual podemos esperar o real valor do raio terrestre. Podemos esperar um raio máximo e um raio mínimo, considerando os erros.

$$R_{\max} = \frac{S + \Delta S}{\theta - \Delta\theta} \qquad\qquad R_{\min} = \frac{S - \Delta S}{\theta + \Delta\theta}$$

O erro envolvido no raio será dado por

$$\Delta R = \frac{1}{2}(R_{\max} - R_{\min})$$

Agora basta substituir os valores de R_{max} e R_{min} na equação acima e obtemos:

$$\Delta R = \frac{1}{2}\left(\frac{S + \Delta S}{\theta - \Delta\theta} - \frac{S - \Delta S}{\theta + \Delta\theta}\right) \Rightarrow \Delta R = \frac{1}{2}\left(\frac{(S + \Delta S)(\theta + \Delta\theta) - (S - \Delta S)(\theta - \Delta\theta)}{(\theta - \Delta\theta)(\theta + \Delta\theta)}\right) \Rightarrow$$

$$\Delta R = \frac{1}{2}\left(\frac{S\cdot\theta + S\cdot\Delta\theta + \theta\cdot\Delta S + \Delta S\cdot\Delta\theta - S\cdot\theta + S\cdot\Delta\theta + \theta\cdot\Delta S - \Delta S\cdot\Delta\theta}{\theta^2 - \Delta\theta^2}\right) \Rightarrow$$

$$\Delta R = \frac{1}{2}\left(\frac{S\cdot\Delta\theta + \theta\cdot\Delta S + S\cdot\Delta\theta + \theta\cdot\Delta S}{\theta^2 - \Delta\theta^2}\right) \Rightarrow \Delta R = \frac{1}{2}\left(\frac{2\cdot S\cdot\Delta\theta + 2\cdot\theta\cdot\Delta\theta}{\theta^2 - \Delta\theta^2}\right) \Rightarrow$$

$$\Delta R = \frac{S\cdot\Delta\theta + \theta\cdot\Delta S}{\theta^2 - \Delta\theta^2}.$$

Observando a relação acima notamos que para calcular efetivamente o erro na medida do raio terrestre precisamos conhecer o erro do ângulo e o erro no comprimento, uma vez que sabemos qual é a distância e o ângulo entre as cidades.

3.6.6. O Erro no ângulo θ

Analogamente ao que fizemos anteriormente devemos observar que o ângulo é determinado pela seguinte relação:

$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{L'}{L}\right)$$

A medida do poste e da sombra envolve certo erro. Assim, o comprimento do poste será $L \pm \Delta L$ e o comprimento da sombra será $L' \pm \Delta L'$. Teremos assim um ângulo máximo e um ângulo mínimo de acordo com as seguintes relações:

$$\theta_{\max} = \tan^{-1}\left(\frac{L'+\Delta L'}{L-\Delta L}\right) \qquad \theta_{\min} = \tan^{-1}\left(\frac{L'-\Delta L'}{L+\Delta L}\right)$$

O erro no ângulo será dado da seguinte maneira:

$$\Delta\theta = \frac{1}{2}(\theta_{\max} - \theta_{\min})$$

Então o erro no ângulo será dado por:

$$\Delta\theta = \frac{1}{2}\left[\tan^{-1}\left(\frac{L'+\Delta L'}{L-\Delta L}\right) - \tan^{-1}\left(\frac{L'-\Delta L'}{L+\Delta L}\right)\right]$$

Temos então o primeiro limite para se determinar o erro na medição do ângulo. Não sabemos o comprimento do poste, o comprimento da sombra e muito menos os erros envolvidos nessas medidas.

As fontes de erros são diversas: o poste poderia não estar na vertical exata, existência de penumbra, dentre outros.

Quando Eratóstenes concebeu seu método considerou o Sol como se fosse uma fonte luminosa pontual e infinitamente distante. Se fosse esse o caso, os raios Solares projetariam somente a sombra do poste sem a existência de penumbra e não seria uma fonte de erro na medição do comprimento, como indicado na figura abaixo.

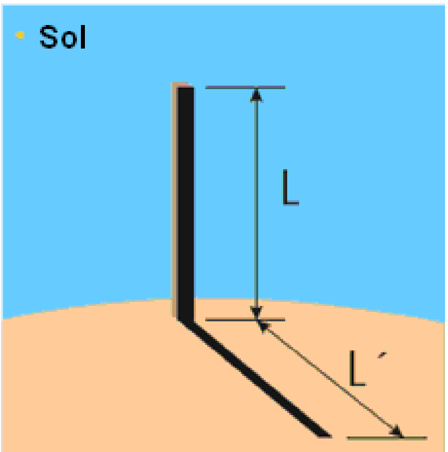


Figura 13: Sombra projetada sem penumbra. Sol como fonte pontual e infinitamente distante.

No entanto, o Sol é uma fonte extensa que está distante cerca de 1,5 . 10^8 km da Terra e apresenta um diâmetro angular de 0,5°. Isso leva fatalmente à existência da penumbra projetada, dificultando a medição do comprimento da sombra projetada do poste.

Observando a figura abaixo podemos verificar a dificuldade na medição. O valor medido da sombra estaria compreendido entre um valor máximo e um valor mínimo pela dificuldade de se definir um extremo. Analisando com mais cuidado, podemos dizer esse fato implica um o erro no ângulo descoberto de no mínimo 0,5º dividido por dois por causa do diâmetro angular do Sol.

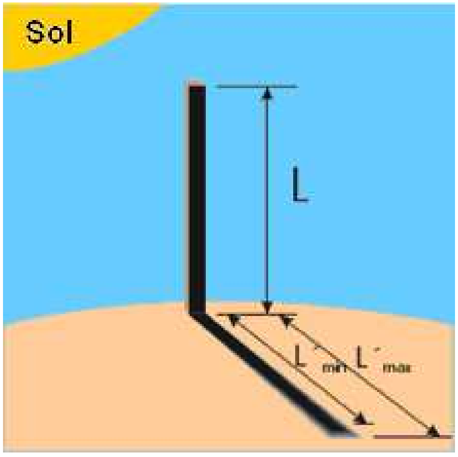


Figura 14: Situação real. Sombra e penumbra projetadas pelo Sol.

Observe o esquema da figura abaixo. Ele permite um melhor entendimento do erro existente devido à projeção da penumbra. Como foi dito o ângulo medido por Eratóstenes foi de 7,2° e o erro devido à penumbra é de no mínimo 3,5%. Para evitar o impacto desse erro, Eratóstenes deveria medir frações maiores da Terra, o que levaria a medição de um ângulo maior, reduzindo o impacto dessa fonte de erros. No entanto, isso para ele se tornaria um problema porque deveria caminhar muito mais para obter a distância entre os pontos de medição.

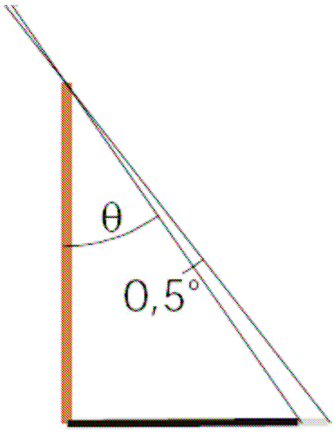


Figura 15: Erro ocasionado pela existência da penumbra

Existe ainda uma alternativa para se calcular o ângulo θ, utilizando as estrelas como referência. Esse método será esclarecido com mais detalhes um pouco mais a frente.

3.6.7. O erro na distância entre as cidades *S*

A distância entre as cidades de Siena e Alexandria depende da quantidade de passos e o comprimento de cada passo.

$$S = N_P \cdot S'$$

Onde N_P é o número de passos dados e S' é o comprimento de cada passo. O erro no comprimento será dado por $\Delta S = \frac{1}{2}(S_{\max} - S_{\min})$. Sabemos que as relações para distância máxima e mínima:

$$S_{\max} = (N_P + \Delta N_P) \cdot (S' + \Delta S') \qquad S_{\max} = (N_P - \Delta N_P) \cdot (S' - \Delta S')$$

Dessa forma, obtemos o valor para Δ S dado pela seguinte expressão:

$$\Delta S = N_P \cdot \Delta S' + S' \cdot \Delta N_P$$

Mais uma vez temos um limite, não sabemos a quantidade de passos dados de Siena até Alexandria, bem como não sabemos o tamanho de um passo e muito menos os erros envolvidos na questão.

O erro dessas medidas deveria ser calculado da seguinte maneira: o número de passos deveria ser a média de vários bematistas e o erro deveria ser o desvio padrão. O mesmo para o comprimento do passo: seria necessária uma média de vários outros comprimentos de passos de diversos bematistas e o erro deveria ser o desvio padrão.

As fontes de erros são diversas: falta de linearidade no percurso, erro na contagem dos passos, variação da distância entre os passos, dentre outros.

Com essa carência de informação não nos restam muitas opções para verificar o erro envolvido no método de Eratóstenes. Mas podemos fazer estimativas.

Cabe salientar que na maior parte das referências sobre Eratóstenes, considera que o fato de Siena e Alexandria não pertencerem ao mesmo meridiano seria uma fonte de erro. Isso é em parte um engano. Na verdade qualquer lugar que ele resolvesse realizar o cálculo o resultado seria o mesmo. Isso ocorre porque o Sol incide perpendicularmente em Siena ao meio-dia. Claro que em outros locais fora do meridiano de Siena deveria realizar a medição quando fosse meio-dia em Siena e não quando fosse meio-dia no local.

Mas como poderia Eratóstenes saber quando seria meio-dia em Siena? Não sabia. Ele mediu quando o Sol estava a pino sobre Alexandria. E por isso o fato das cidades não estarem no mesmo meridiano constituiu uma outra fonte de erro sobre a distância que deveria medir. Em outras palavras, deveria medir a distância entre Alexandria e o local que se encontra no mesmo meridiano que Alexandria, ou seja, um pouco mais a oeste de Siena.

3.6.8. Estimativa do erro

Vamos admitir um erro de 10% no ângulo θ e um erro de 20% na distância S.

Podemos escrever as seguintes relações:

$$\Delta S = \frac{1}{5} \cdot S \qquad \text{E} \qquad \Delta\theta = \frac{1}{10} \cdot \theta$$

Mostramos que o erro no raio da Terra é dado por

$$\Delta R = \frac{S \cdot \Delta\theta + \theta \cdot \Delta S}{\theta^2 - \Delta\theta^2}$$

Substituindo os valores de $\Delta\theta$ e ΔS na equação acima encontramos

$$\Delta R = \frac{S \cdot \frac{\theta}{10} + \theta \cdot \frac{S}{5}}{\theta^2 - \left(\frac{\theta}{10}\right)^2} \Rightarrow \Delta R = \frac{\frac{S \cdot \theta + 2 \cdot S \cdot \theta}{10}}{\theta^2 - \left(\frac{\theta}{10}\right)^2} \Rightarrow \Delta R = \frac{\frac{3 \cdot S \cdot \theta}{10}}{\theta^2 - \left(\frac{\theta}{10}\right)^2} \Rightarrow$$

$$\Delta R = \frac{\frac{3 \cdot S \cdot \theta}{10}}{\left(\frac{100 \cdot \theta^2 - \theta^2}{100}\right)} \Rightarrow \Delta R = \frac{\frac{3 \cdot S \cdot \theta}{10}}{\left(\frac{99 \cdot \theta^2}{100}\right)} \Rightarrow \Delta R = \frac{3 \cdot S \cdot \theta}{10} \cdot \frac{100}{99 \cdot \theta^2} \Rightarrow \Delta R = \frac{3 \cdot S}{1} \cdot \frac{10}{99 \cdot \theta} \Rightarrow$$

$$\Delta R = \frac{30 \cdot S}{99 \cdot \theta} \Rightarrow \Delta R = \frac{30}{99} \cdot R \Rightarrow \Delta R = 0{,}303 \cdot R$$

Esta estimativa nos diz que o erro do raio será de aproximadamente 30,3% do raio da Terra, ou seja, o raio da Terra estaria no intervalo 6247 ± 1893 km.

Para se ter uma idéia do impacto do erro, podemos pensar em duas Terras uma com o raio máximo possível e a outra com o raio mínimo possível. Observe a figura abaixo.

Figura 16 - Terra com raio máximo e raio mínimo

3.6.9. Método alternativo para a medição do ângulo θ

Uma outra maneira para medir o ângulo θ com uma maior precisão é utilizar uma estrela como referência nas medições. Para explicar esse método observe a figura abaixo:

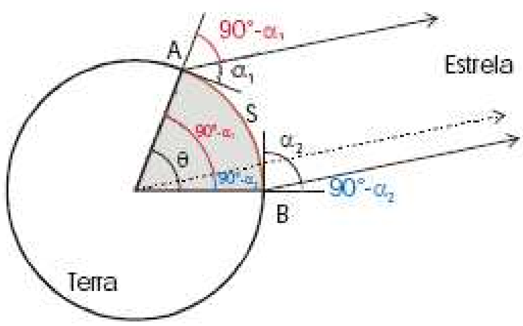


Figura 17: Medição de θ, utilizando uma estrela com referência.

Um observador se encontra em um local **A** enquanto um outro observador se encontra em outro local **B**. Os dois locais **A** e **B** se encontram no mesmo meridiano, separados pela distância *S*, formando a fração que possui o ângulo θ que desejamos descobrir. Cada observador mede o ângulo entre a linha imaginária que aponta para a estrela utilizada como referência e a horizontal. Assim, o observador **A** medirá um ângulo α_1 e o observador **B** medirá um ângulo α_2. Evidentemente, as medidas devem ser realizadas num mesmo instante, ou então, pode-se escolher uma estrela que permaneça praticamente no mesmo lugar com a rotação da Terra, como a estrela polar do norte. Observe que nos lugares de onde se observa a estrela, o ângulo formado com a vertical é (90° - α_1) para o lugar **A** e (90° - α_2) para o lugar **B**. Pela simples observação da figura acima percebemos facilmente que $\theta =$ (90° - α_1) + (90° - α_2) ou simplesmente 180º - ($\alpha_1 + \alpha_2$).

Outras pessoas utilizaram esse método, como comentaremos mais adiante. A questão que resta responder é como poderíamos medir o ângulo. Uma idéia é utilizar o *sextante*. Esse instrumento é capaz de medir ângulos com a precisão de segundos. O funcionamento do sextante é simples. O objetivo é medir um ângulo entre dois objetos. Segura-se firme o instrumento e visa-se o horizonte através da *luneta* e movendo a *haste* temos que fazer a imagem refletida do astro coincidir com a imagem do horizonte visada diretamente. Se o astro visado é grande, como o Sol ou a Lua, a coincidência com o horizonte faz-se pelo limbo (borda) superior ou inferior do astro. A *haste* indica no *limbo* do *sextante* o valor do ângulo medido.

Figura 18: Sextante

4. Medições da Terra além de Eratóstenes

Os gregos dos períodos arcaico e clássico tiveram idéias variadas quanto à forma e ao tamanho da Terra. Homero sugeriu uma forma de um disco plano. Pitágoras e Aristóteles advogavam uma forma esférica. Pitágoras era um matemático que considerava a esfera a figura geométrica mais perfeita, sendo para ele, portanto, natural que os deuses dessem esta forma ao mundo. Já Anaxímenes acreditava que a Terra tinha uma forma retangular.

A idéia de uma Terra esférica foi predominante entre os Gregos. A tarefa seguinte e que ocupou muitas mentes foi a de determinar seu tamanho. Platão estimou a circunferência da Terra como sendo 64360 km. Arquimedes estimou em 48270 km. Estes valores, contudo, não passavam muito do campo da mera especulação. Coube a Eratóstenes determinar o tamanho da Terra usando medidas objetivas.

Outro grego antigo a estimar o tamanho do globo foi Posidônio. Ele utilizou uma estrela que era circumpolar quando vista da cidade de Rodes, tangenciando o horizonte no instante da culminação inferior. Esta mesma estrela teve então sua altura medida em Alexandria e, conhecida, a distância entre as duas cidades, foi possível a Posidônio determinar um valor de 38616 km para a circunferência da Terra. Outro filósofo chamado Estrabón, revisou o método de Posidonius e encontrou um valor substancialmente menor: 28962 km. Este valor foi o adotado por Ptolomeu, cujo trabalho e modelo de cosmos foram adotados na Europa ao longo da Idade Média. Foi possivelmente graças a esta sub-estimativa da circunferência do globo que Cristóvão Colombo foi levado a crer que o Extremo Oriente estaria a apenas umas 3 ou 4 mil milhas a oeste da Europa. Somente no século 15 que o valor aceito por Ptolomeu foi revisado pelo cartógrafo finlandês Mercator.

O Califa Árabe El Ma´mun que governou Bagdá de 813 a 833 D.C. enviou uma equipe de agrimensores para medir uma linha de norte a sul e suas medidas foram equivalentes as de Eratóstenes.

5. Medindo a Terra nos dias de hoje como Eratóstenes

5.1. O Projeto Eratóstenes na América

Comentaremos agora sobre o Projeto Eratóstenes na América e como foi a participação do Projeto História da Matemática do Departamento de Matemática do Ibilce, campus da Unesp de São José do Rio Preto nele.

O Projeto Eratóstenes na América é uma proposta interdisciplinar do Departamento de Física da Faculdade de Ciências Exatas e Naturais da Universidade de Buenos Aires, Argentina, do Laboratório Pierre Auger, da Universidade Tecnológica Nacional Regional Mendoza, Argentina, e da Associação Física Argentina. Ele pretende envolver professores e alunos de diversas escolas espalhadas pelas cidades das Américas para que reproduzam o experimento de Eratóstenes com os seguintes objetivos:

- Descrever a geometria da incidência dos raios do Sol na Terra em diferentes latitudes;
- Fazer uma abordagem histórica de como a circunferência da Terra foi medida pela primeira vez há milhares de anos atrás;
- Determinar o momento real do meio dia Solar da localidade onde se encontra o aluno;
- Medir o ângulo entre os raios Solares incidentes na Terra e a vertical do local;
- Medir o raio do nosso planeta;
- Socializar resultados obtidos entre comunidades escolares distintas e distantes entre si através da internet e mobilizar professores e alunos de áreas distintas como Geografia, História, Artes, Física, Matemática e Geometria.

A metodologia do Projeto Eratóstenes é a seguinte: para cada cálculo do raio terrestre, fazem-se necessárias, ao menos, duas escolas que façam suas medições em cada uma de suas localizações geográficas, preferencialmente, ao mesmo tempo. Cada uma das escolas tem a liberdade de escolher uma ou mais escolas-sócias. A escola escolhida deve estar localizada numa linha Norte-Sul cuja distância entre ambas seja superior a aproximadamente 400 km.

As duas ou mais escolas-sócias devem combinar a data da medição conjunta, (que foi entre 18/06/10 e 24/06/10) de acordo com as condições climáticas e a gestão de cada escola, preferencialmente em 21/06/10, ao meio dia Solar correspondente à coordenada de cada localidade das escolas inscritas. Nem sempre este momento coincide com o meio dia do mostrador do relógio, mas sim, quando o Sol passa pela linha do meridiano local, que é uma linha imaginária, partindo do ponto cardeal Sul, passando pelo ponto mais alto (chamado zênite) e terminando no ponto cardeal Norte, dividindo, assim, o céu em duas partes iguais. Este fenômeno chama-se trânsito Solar e representa o exato momento em que o período claro do dia de 24 horas está pela metade. É neste instante que a sombra de qualquer objeto é a menor possível do dia.

Também é possível determinar este horário com relativa precisão medindo as sombras de uma haste vertical em relação ao plano do Solo em intervalos de tempo regulares durante alguns dias antes da data da medição.

O que se mede de forma direta é a sombra de uma haste vertical aprumada em relação ao piso ou uma base nivelada. Os dados de ambas as escolas permitem calcular a inclinação dos raios Solares ao meio dia Solar da data marcada, que por sua vez, resultam no valor do raio terrestre, já que a distância entre as duas escolas será conhecida (ou a distância entre os paralelos de latitude que passam por cada uma delas, caso não se encontrem alinhadas em um mesmo meridiano terrestre). Cada par de escolas discute suas medições e executa os cálculos juntos, reportando suas medições e resultados, de modo que, também se podem conhecer as medições e resultados de sua escola-sócia virtual, o que permitirá a ambas chegarem a um resultado comum do raio terrestre.

Todos os raios calculados pelos diferentes pares de escolas são enviados e passam a integrar uma base estatística, cujos cálculos automatizados apontam para um resultado único e representativo de todas as escolas participantes do projeto.

Como sugestão de materiais para realização das medições, as orientações do Projeto Eratóstenes indicam: prumo, nível, metro de carpinteiro, esquadro entre outros, porém pode-se adotar uma configuração experimental em função dos materiais disponíveis e das informações do Projeto.

5.1.1. Determinando o valor do raio da Terra no Projeto Eratóstenes

Eratóstenes teve sorte porque conhecia um lugar onde o Sol atingia de forma exatamente vertical ao meio dia, mas é possível realizar o experimento mesmo que isso não ocorra. O valor *d* (Fig. 19) é fornecido pela organização do Projeto Eratóstenes e uma vez estabelecida a colaboração, as duas escolas deverão medir o comprimento da sombra de uma haste ou estaca e compartilhar o resultado de sua medição. O ângulo necessário para fazer os cálculos similares aos descritos é, neste caso, a diferença entre os ângulos calculados em cada escola. É importante que as escolas façam as medições no mesmo dia.

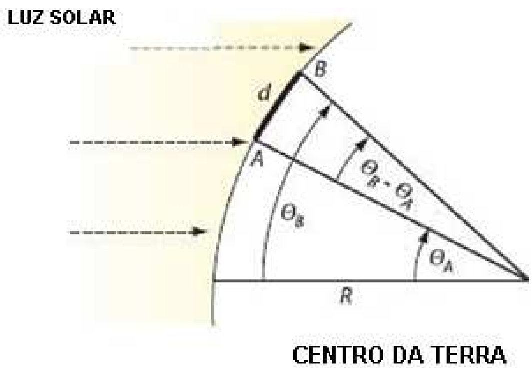


Figura 19: A geometria para medir o raio da Terra usando dados de duas escolas que colaboram entre si na realização do experimento. As escolas, indicadas pelos pontos *A* e *B*, estão separadas por uma distância, *d*, na direção norte-sul. Os alunos de cada escola medem o ângulo que formam os raios do Sol com a vertical ao meio dia no lugar onde está a escola. Denominamos estes ângulos de θ_A e θ_B.

Na Figura 19, os pontos *A* e *B* correspondem às cidades das duas escolas que colaboram entre si. O experimento funciona melhor, quanto maior for *d*. Olhando para a Figura 20, os ângulos que precisam ser determinados são θ_A e θ_B.

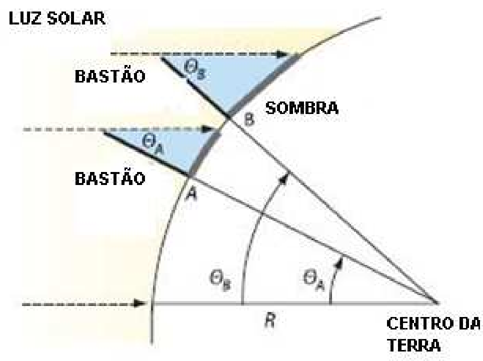


Figura 20: A relação entre a direção dos raios do Sol, as estacas e os dois ângulos, θ_A e θ_B.

Os alunos da escola localizada em *A* medem o comprimento de sua haste e o comprimento da sombra que ela projeta no mesmo dia (em 21 de junho, podendo ser dois dias antes ou depois, conforme necessidades das escolas). A partir desta medição, calculam a tangente do ângulo que formam os raios do Sol com a vertical, θ_A:

$$tg\ \theta_A = \text{comprimento da sombra / comprimento da haste} \quad (1)$$

Os alunos da escola localizada em B fazem o mesmo e calculam θ_B. As Figuras 19 e 20 mostram que o ângulo que subtende o arco que une os pontos A e B é a diferença entre θ_A e θ_B. Por outro lado, podemos usar a fórmula $P = 360\ .\ d/\theta$, substituindo o comprimento da circunferência, P, por sua expressão que permite calcular o raio, $P = 2\pi R$. Sabendo que no lugar de θ devemos usar a diferença $\theta_B-\theta_A$, temos:

$$2\pi R = 360\ d\ /\ \theta_B-\theta_A \quad (2)$$

Acomodando os termos e simplificando-os, obtemos:

$$R = 180\ d\ /\ \pi(\theta_B-\theta_A) \quad (3)$$

5.1.2. Realizar a medição ao meio-dia exato:

Qualquer que seja o dia do ano, o meio dia verdadeiro do local onde você se encontra é o momento do dia em que o Sol alcança sua altura máxima no céu, após o seu surgimento no horizonte Leste. Para determiná-lo, pode-se espetar no Solo uma haste, ou sobre uma placa de madeira ou isopor, assegurando-se de que a haste esteja perfeitamente vertical usando um prumo de carpinteiro. Mede-se o comprimento da parte da haste que se encontra para fora do piso. Quando a manhã estiver suficientemente avançada, mede-se o comprimento da sombra da haste a intervalos regulares. A sombra vai diminuindo à medida que o meio-dia se aproxima. Ao meio-dia a sombra atinge o tamanho mínimo, e após este instante, a sombra começará a aumentar. O comprimento da sombra mais curta e o comprimento da haste medida são os valores que entram na equação (1).

5.1.3. Eratóstenes também teve de fazer algumas suposições para calcular o comprimento da circunferência da Terra:

A Terra é uma esfera. Na realidade, não é uma esfera perfeita, mas achatada nos pólos cerca de 3% em relação ao Equador. Mas podemos desprezar esta pequena diferença no raio medido no Equador comparado com o valor que se pode obter em outros lugares.

O Sol está muito distante. É por isso que os raios Solares que chegam à Terra são paralelos entre si. É verdade que o Sol está muito distante, mas não é um ponto: seu diâmetro é 100 vezes menor que a distância entre o Sol e a Terra.

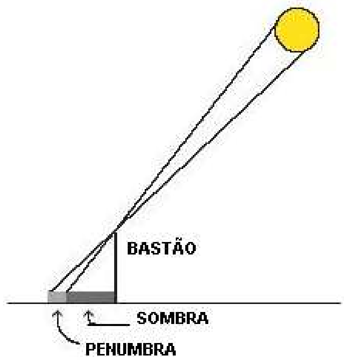


Figura 21: Note a penumbra, a região parcialmente nublada, de onde termina a sombra da haste (o desenho está fora de escala).

Como mostra a figura 21, há uma zona de penumbra onde termina a sombra de qualquer objeto, isto é, uma zona que está parcialmente iluminada pelo Sol. Se a haste usada para a medida possuir 1 metro de comprimento, a região da penumbra terá pouco mais de 1 cm, o que limita a precisão da medida da sombra, pois será difícil visualizar a extremidade da sombra bem definida (ela ficará difusa). O tamanho da penumbra aumenta com o tamanho da haste. Portanto, usar uma haste grande não ajuda em uma medida com precisão.

Alexandria está exatamente ao norte de Siena. Esta é só uma aproximação. Basta analisar um atlas ou um globo terrestre e comparar a localização de Alexandria e a de Assuã (construída no lugar onde estava Siena).

5.2. A participação do Projeto História da Matemática no Projeto Eratóstenes

A participação do Projeto História da Matemática, do Ibilce, campus da Unesp de São José do Rio Preto deu-se da seguinte maneira: após ter sido feita a inscrição via Internet do grupo como representante do campus e seguindo as instruções prescritas pela organização do Projeto Eratóstenes, foi realizada no dia 21 de Junho de 2010, ao meio-dia Solar aproximado, no pátio central do campus, a medição da sombra de um objeto para encontrar o ângulo necessário para a medição do raio da Terra.

O objeto utilizado foi um nível de pedreiro de 30 cm de comprimento colocado na vertical no chão. O próprio objeto já serviu como indicação de que o chão estava nivelado. O horário da medição, ou seja, o meio-dia Solar, foi obtido por consulta a um site de astronomia. A medição foi realizada às 12 horas e 9 minutos. A sombra do nível media, neste horário, aproximadamente 29 cm.

5.2.1. Resultados da participação do Projeto História da Matemática no Projeto Eratóstenes 2010

A seguir estão os dados e resultados referentes às medições realizadas pelo grupo do Projeto História da Matemática e pelo Clube de Astronomia da Unipampa – Universidade Federal do Pampa, campus de Alegrete, Rio Grande do Sul.

➢ **Dados UNESP (Hermes Antonio Pedroso) – 21/06**

- Tamanho da haste em centímetros (cm): **30** erro: ± 0.1
- Tamanho da sombra mínima "SM" em centímetros (cm): **29** erro: ± 0.2
- Hora do meio-dia da medição da SM (hh.mm): **12.09**
- Data da medição (dd/mm): **21/06**
- Latitude: **20º 49' 0'' S**
- Longitude: **49º 22' 0'' O**
- Distância ao Equador: **2314.64 km**
- Distância ao Meridiano de Greenwich: **5130.86 km**

➢ **Dados UNIPAMPA (Luis Urbano Tambara Junior) – 21/06**

- Tamanho da haste em centímetros (cm): **95**
- Tamanho da sombra mínima "SM" em centímetros (cm): **127**
- Hora do meio-dia da medição da SM (hh.mm): **12.10**
- Data da medição (dd/mm): **21/06**
- Distância ao Equador: **3311.66 km**

➢ **Medidas reais:**

- Raio equatorial médio da Terra = 6.378,1400 km
- Raio meridional médio da Terra = 6.367,4490 km
- Circunferência da Terra = 40075,0355 km

➢ **Resultados:**

- Ângulo UNESP: 44,0290
- Ângulo UNIPAMPA: 53,2023
- Diferença ângulos: 9,1733

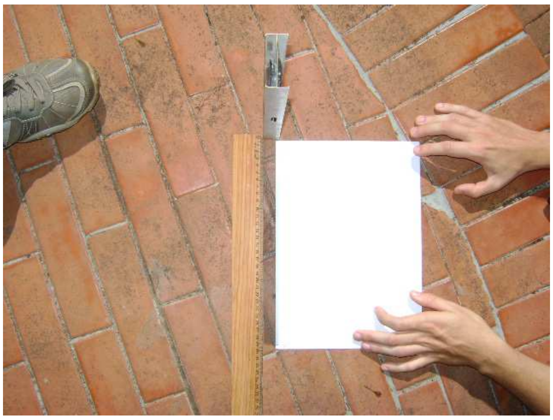
- Distância: 997,02 km
- 180*d: 179463,6
- pi*O: 28,8190
- Raio = 6227,2667 km
- C=39127,0706 km
- Erro=|6378,1400-6227,2667|=150,8733 km

➢ **Resultados de Eratóstenes:**

- Ângulo: 7,2º = 360/50
- C: 39250 km
- R: 6247 km
- d: 5000 estádios (1 estádio = 157m)
- C: 250000 estádios

5.3. Fotos da participação do Projeto História da Matemática no Projeto Eratóstenes 2010:


GAMAT




5.4. Fotos das participações de outras localidades no Projeto Eratóstenes 2010:



Fotos: Base Argentina na Antártida - Escuela Provincial Nº 38 "Presidente Julio A. Roca"

Fotos: Batatais, São Paulo

Fotos: Buenos Aires, Argentina

6. Referências:

[1] A CORTINA DA NOITE. **Eratóstenes, o matemático e geógrafo**. Disponível em http://www.astrosurf.com/nc/biografias/eratostenes.html Acesso em 25 de setembro de 2010.

[2] A DUPLICAÇÃO DO CUBO VISTA POR ERATÓSTENES. Disponível em http://www.prof2000.pt/users/miguel/histmat/af22/produto/anaines/final.htm Acesso em 25 de setembro de 2010.

[3] BOYER, C. B. *História da Matemática*. 2 ed. São Paulo: Edgard Blücher, 1996.

[4] COLÉGIO CATANDUVAS. **Matemáticos**. Disponível em http://www.colegiocatanduvas.com.br/desgeo/matematicos/index.htm Acesso em 27 de setembro de 2010.

[5] EVES, H. *Introdução à História da Matemática*. Campinas: Editora da Unicamp, 1995.

[6] GRÉCIA ANTIGA. **Eratóstenes**. 2009. Disponível em http://greciantiga.org/arquivo.asp?num=0247 Acesso em 05 de outubro de 2010.

[7] PEDROSO, H. A. *História da matemática*. São José do Rio Preto: Gráfica da Unesp, 1992. 213p.

[8] PROJETO ERATÓSTENES. 2010. Faculdade de Ciências Exatas e Naturais. Universidade de Buenos Aires. Disponível em http://difusion.df.uba.ar/Erat/eratPort.htm Acesso em 05 de outubro de 2010.

[9] VERDET, S. P. *Uma história da Astronomia*. Rio de Janeiro: Jorge Zahar, 1991.

[10] VINAGRE, A. L. M. **Eratóstenes e a Medida do Diâmetro da Terra**. Site Profissional do Professor José J. Lunazzi. Universidade Estadual de Campinas. Disponível em http://www.ifi.unicamp.br/~lunazzi/F530_F590_F690_F809_F895/F809/F809_sem2_2002/940298_AndreVinagre_Eratostenes.pdf Acesso em 05 de outubro de 2010.

[11] TAMBARA, LUIS. **O Projeto Eratóstenes na América**. Clube de Astronomia. Universidade Federal do Pampa. 2010. Disponível em http://www.cta.unipampa.edu.br/astronomia/ Acesso em 01 de outubro de 2010.

Agradecimentos especiais:

- GAMAT – Grupo de Astronomia e Matemática, IBILCE, UNESP, São José do Rio Preto.
- Professor Hermes Antonio Pedroso, Departamento de Matemática, IBILCE, UNESP, São José do Rio Preto.