1.7 Gradientti ja suunnatut derivaatat

- Funktion ensimmäiset osittaisderivaatat voidaan yhdistää yhdeksi vektorifunktioksi seuraavasti:
- Missä tahansa pisteessä (x, y), jossa funktiolla $f(x, y)$ on ensimmäiset osittaisderivaatat, voidaan määritellä *gradienttivektori*

$$\nabla f(x,y) = \mathbf{grad} f(x,y) = f_1(x,y)\mathbf{i} + f_2(x,y)\mathbf{j}, \tag{1}$$

missä ∇ (nabla) on *vektoridifferentiaalioperaattori*

$$\nabla = \mathbf{i}\frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j}\frac{\partial}{\partial y} \tag{2}$$

- Kun tämä operaattori operoi funktioon $f(x, y)$, saadaan funkion gradientti:

$$\nabla f(x,y) = \left(\mathbf{i}\frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j}\frac{\partial}{\partial y}\right) f(x,y) = f_1(x,y)\mathbf{i} + f_2(x,y)\mathbf{j} \tag{3}$$

- Jos $f(x, y)$ on derivoituva pisteessä (a, b) ja $\nabla f(a, b) \neq \mathbf{0}$, niin $\nabla f(a, b)$ on pisteen (a, b) kautta kulkevan f:n tasokäyrän normaalivektori.

- **Suunnattu derivaatta**: Olkoon $\mathbf{u} = u\mathbf{i} + v\mathbf{j}$ yksikkövektori, ts. $u^2 + v^2 = 1$. Funktion $f(x, y)$ *suunnattu derivaatta* pisteessä (a, b) vektorin $\mathbf{u}$ suuntaan on $f(x, y)$:n muutosnopeus suhteessa pisteestä (a, b) mitattuun etäisyyteen pitkin $\mathbf{u}$:n suuntaista sädettä xy–tasossa.

- Suunnattu derivaatta saadaan lausekkeesta

$$D_{\mathbf{u}} f(a, b) = \lim_{h \to 0+} \frac{f(a + hu, b + hv) - f(a, b)}{h} \tag{4}$$

tai

$$D_{\mathbf{u}} f(a, b) = \frac{d}{dt} f(a + tu, b + tv)\big|_{t=0}, \tag{5}$$

jos tämä derivaatta on olemassa.

- Jos f on derivoituva pisteessä (a,b) ja $\mathbf{u} = u\mathbf{i} + v\mathbf{j}$ yksikkövektori, niin f:n suunnattu derivaatta pisteessä (a,b) vektorin $\mathbf{u}$ suuntaan on

$$D_{\mathbf{u}} f(a,b) = \mathbf{u} \cdot \nabla f(a,b). \tag{6}$$

- Vektorin $\mathbf{v}$ suuntainen yksikkövektori saadaan jakamalla vektori sen pituudella. Näin ollen suunnattu derivaatta vektorin $\mathbf{v}$ suuntaan on

$$D_{\mathbf{v}/|\mathbf{v}|} f(a,b) = \frac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|} \cdot \nabla f(a,b). \tag{7}$$

- Mille tahansa yksikkövektorille $\mathbf{u}$ on voimassa

$$D_{\mathbf{u}} f(a,b) = \mathbf{u} \cdot \nabla f(a,b) = |\nabla f(a,b)| \cos\theta, \tag{8}$$

missä θ on vektorien $\mathbf{u}$ ja $\nabla f(a,b)$ välinen kulma.

- Gradienttivektorin ominaisuuksia:
  - Pisteessä (a, b) funktio $f(x, y)$ kasvaa nopeimmin gradienttivektorin $\nabla f(a, b)$ suuntaan. Kasvun maksiminopeus on $|\nabla f(a, b)|$.
  - Pisteessä (a, b) funktio $f(x, y)$ vähenee nopeimmin vektorin $-\nabla f(a, b)$ suuntaan. Vähenemisen maksiminopeus on $|\nabla f(a, b)|$.
  - Funktion $f(x, y)$ muutosnopeus pisteessä (a, b) on nolla pisteen (a, b) kautta kulkevan funktion f tasokäyrän suunnassa.
- Pisteen (a, b) kautta nopeudella $\mathbf{v}$ kulkevan havainnoitsijan mittaama funktion $f(x, y)$ muutosnopeus pisteessä (a, b)

$$D_{\mathbf{v}} f(a, b) = \mathbf{v} \cdot \nabla f(a, b) \tag{9}$$

- Kolmen muuttujan funktion gradientti

$$\nabla f(x,y,z) = \frac{\partial f}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial f}{\partial z}\mathbf{k} \tag{10}$$

- n:n muuttujan funktion gradientti

$$\nabla f(x_1,x_2,\ldots,x_n) = \frac{\partial f}{\partial x_1}\mathbf{e_1} + \frac{\partial f}{\partial x_2}\mathbf{e_2} + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n}\mathbf{e_n}, \tag{11}$$

  missä $\mathbf{e}_j$ on yksikkövektori origosta j:nnen koordinaattiakselin suuntaan.

- Pisteen (a,b,c) kautta kulkevalla $f(x,y,z)$:n tasopinnalla on tangenttitaso pisteessä (a,b,c), jos f on derivoituva pisteessä (a,b,c) ja $\nabla f(a,b,c) \neq \mathbf{0}$.

1.8 Implisiittifunktiot

- Oletetaan, että piste (a, b) toteuttaa yhtälön $F(x, y) = 0$ ja että funktiolla F on jatkuvat ensimmäiset osittaisderivaatat kaikissa pisteissä (a, b):n lähellä. Jos tästä yhtälöstä voidaan y ratkaista x:n funktiona, y:n derivaatta x:n suhteen pisteessä $x = a$ voidaan ratkaista derivoimalla yhtälö $F(x, y) = 0$ implisiittisesti x:n suhteen ja laskemalla tulos pisteessä (a, b):

$$F_1(x, y) + F_2(x, y)\frac{dy}{dx} = 0, \tag{12}$$

josta saadaan (ehdolla $F_2(a, b) \neq 0$)

$$\frac{dy}{dx}\Big|_{x=a} = -\frac{F_1(a, b)}{F_2(a, b)} \tag{13}$$

- Vastaavasti useamman muuttujan funktioille:

$$\frac{\partial z}{\partial x}\Big|_{(x_0,y_0)} = -\frac{F_1(x_0,y_0,z_0)}{F_3(x_0,y_0,z_0)} \quad \text{ja} \quad \frac{\partial z}{\partial y}\Big|_{(x_0,y_0)} = -\frac{F_2(x_0,y_0,z_0)}{F_3(x_0,y_0,z_0)} \tag{14}$$

- Tarkastellaan yhtälöryhmää

$$\begin{cases} F(x,y,z,w) = 0 \\ G(x,y,z,w) = 0 \end{cases} \tag{15}$$

- Jos tämän ryhmän tapauksessa halutaan laskea derivaatta $\partial x/\partial z$, täytyy pystyä erottamaan toisistaan tapaukset

$$\begin{cases} x = x(z,w) \\ y = y(z,w) \end{cases} \qquad \text{ja} \quad \begin{cases} x = x(y,z) \\ w = w(y,z) \end{cases} \tag{16}$$

- Tällöin määritellään:

$$\left(\frac{\partial x}{\partial z}\right)_w \quad \text{vastaa tulkintaa} \quad \begin{cases} x = x(z,w) \\ y = y(z,w) \end{cases} \tag{17}$$

$$\left(\frac{\partial x}{\partial z}\right)_y \quad \text{vastaa tulkintaa} \quad \begin{cases} x = x(y,z) \\ w = w(y,z) \end{cases} \tag{18}$$

- Funktioiden $u = u(x,y)$ ja $v = v(x,y)$ *Jacobin determinantti* muuttujien x ja y suhteen on determinantti

$$\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{vmatrix} \tag{19}$$

- Vastaavasti funktioiden $F(x, y, \ldots)$ ja $G(x, y, \ldots)$ Jacobin determinantti muuttujien x ja y suhteen

$$\frac{\partial(F, G)}{\partial(x, y)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial F}{\partial x} & \frac{\partial F}{\partial y} \\ \frac{\partial G}{\partial x} & \frac{\partial G}{\partial y} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} F_1 & F_2 \\ G_1 & G_2 \end{vmatrix} \tag{20}$$

- Yo. määritelmät voidaan yleistää n:n muuttujan funktioille ja niiden derivaatoille n:n muuttujan suhteen.

- Tarkastellaan kuvauksia $\mathbf{y} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$ ja $\mathbf{z} = \mathbf{g}(\mathbf{y})$ ja yhdistettyä kuvausta $\mathbf{z} = \mathbf{g}\left((\mathbf{f}(\mathbf{x})\right)$. Jos $\mathbf{f}$:llä on käänteisfunktio $\mathbf{g}$, niin $\mathbf{z} = \mathbf{g}\left((\mathbf{f}(\mathbf{x})\right)$ ja

$$\frac{\partial(x_1 \cdots x_n)}{\partial(y_1 \cdots y_n)} = \frac{1}{\frac{\partial(y_1 \cdots y_n)}{\partial(x_1 \cdots x_n)}} \tag{21}$$

1.9 Taylorin sarjat ja approksimaatiot

- Funktio $f(x, y)$, jolla on vähintään $n + 1$:n kertaluvun jatkuvat osittaisderivaatat, voidaan kehittää Taylorin sarjaksi välillä (a, b), $(a + h, b + k)$ h:n ja k:n potenssien mukaan:

$$f(a+h, b+k) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{m} \frac{1}{j!(m-j)!} D_1^j D_2^{m-j} f(a, b) h^j k^{m-j} \quad (22)$$

- n:nnen asteen Taylorin polynomista

$$P_n(x, y) = \sum_{m=0}^{n} \sum_{j=0}^{m} \frac{1}{j!(m-j)!} D_1^j D_2^{m-j} f(a, b)(x-a)^j (y-b)^{m-j} \quad (23)$$

saadaan approksimaatio funktiolle $f(x, y)$ pisteen (a, b) lähellä.