



VEKTORIKENTÄT

Keijo Ruohonen

2011

Sisältö

1	I PISTE. VEKTORI. VEKTORIKENTTÄ
1	1.1 Geometriset pisteet
2	1.2 Geometriset vektorit
4	1.3 Koordinaattipisteet ja -vektorit
6	1.4 Tangenttivektori. Vektorikenttä. Skalaarikenttä
7	1.5 Kenttien derivaattaoperaatiot
11	1.6 Aikariippuvat skalaari- ja vektorikentät
12	II MONISTO
12	2.1 Funktion kuvaaja
13	2.2 Monisto
14	2.3 Monistot urina
17	2.4 Monistojen kuvaaminen. Koordinaatistoriippumattomuus
18	2.5 Moniston parametrisointi
23	2.6 Tangenttiavaruus
26	2.7 Normaaliavaruus
28	2.8 Monistot ja vektorikentät
30	III MONISTON VOLYYMI
30	3.1 Joukon volyymi
33	3.2 Parametrisoitujen monistojen volyymi
34	3.3 Laajennettu parametrisointi
37	IV MUODOT
37	4.1 k -muodot
42	4.2 Muotokentät
43	4.3 Muodot ja monistojen suunnistus
49	4.4 Fysikaalisten vektori- ja skalaarikenttien perusmuotokentät
51	V YLEISTETTY STOKESIN LAUSE
52	5.1 Reunalliset alueet ja niiden suuntaus
57	5.2 Ulkoderivaatta
61	5.3 Fysikaalisten muotokenttien ulkoderivaatat
64	5.4 Yleistetty Stokesin lause
69	VI POTENTIAALIT
69	6.1 Eksaktit muotokentät ja potentiaalit
73	6.2 Vektorikentän skalaaripotentiali
79	6.3 Vektorikentän vektoripotentiali
82	6.4 Helmholtzin hajotelma
84	6.5 Nelipotentiali
85	6.6 Dipoliapproksimaatio ja -potentiali

88	VII OSITTAISDIFFERENTIAALIYHTÄLÖT
88	7.1 Standardimuodot
88	7.2 Esimerkkejä
95	Liite 1: OSITTAISINTEGROINTI JA GREENIN KAAVAT
95	L1.1 Osittaisintegrointi
97	L1.2 Greenin kaavat
99	Liite 2: KÄYRÄVIIVAISET KOORDINAATISTOT
99	L2.1 Lokaali koordinaatisto
101	L2.2 Derivaatan muunnos
102	L2.3 Kenttien derivaattojen muunnokset
103	L2.4 Derivaatat sylinteri- ja pallokoordinaatistoissa
106	Liite 3: KULMAT
106	L3.1 Kulmamuotokenttä ja kulmapotentiaali
106	L3.2 Tasokulma
108	L3.3 Avaruuskulma
111	Kirjallisuus
113	Hakemisto

Esipuhe

Tämä moniste on tarkoitettu TTY:n kurssin ”MAT-33351 Vektorikentät” perusmateriaaliksi. Monisteessa käsitellään modernin vektorikenttäteorian peruskäsitteistöä, monistoja, (differentiaali)muotoja, Yleistettyä Stokesin lausetta sekä erilaisia potentiaaleja. Tavoitteena on luoda pohjaa vektorikenttiin ja osittaisdifferentiaaliyhtälöihin perustuvalle matemaattiselle mallintamiselle. Erityisenä tavoitteena on koordinaateista riippumaton geometris-fysikaalisesti suuntautunut esitys. Peruskursseilta tunnetuksi oletetaan yhden muuttujan analyysiin, osittaisderivaattoihin ja monen muuttujan integraaleihin liittyvät perustulokset, sekä klassisen vektorianalyysin alkeet.

Klassinen vektorianalyysi on matemaattisen analyysin vanhimpia alueita.¹ Lujuus-, virtaus- ja lämpötekniikan sekä sähkömagnetiikan tehtävien formulointi kolmiulotteisessa avaruudessa edellyttää tuttuun yhden muuttujan differentiaali- ja integraalilaskennan käsitteiden ja tulosten yleistämistä. Yleistyksiä on silloin useita, eri tarkoituksiin sopivia. Vektorianalyysi—niin klassinen kuin moderni—onkin paljolti muotoutunut nimenomaan mainittujen fysiikan ja tekniikan alojen tarpeiden vaikutuksesta. Erityisesti tekniikkaa ajatellen on keskeistä päästä formuloimaan laskennallinen tehtävä sellaiseksi, että siihen voidaan soveltaa nopeita ja tarkkoja numeerisia menetelmiä. Yleensä tämä tarkoittaa ilmiön lokaalin käyttäytymisen spesifioimista ns. osittaisdifferentiaaliyhtälön muodossa, fysiikan lakeja soveltaen, ohjelmistot siirtävät sitten käyttäytymisen laskennallisesti globaaliin ympäristöön.

Varsinaisia osittaisdifferentiaaliyhtälöitä tässä monisteessa käsitellään vain vähän, niiden johtoon liittyviä käsitteitä ja perustuloksia sen sijaan laajemmin ja tarkemmin. Osittaisdifferentiaaliyhtälöihin liittyen alan omat syventävät kurssit käsittelevät asiaa luonnollisesti laajasti ja eri näkökulmilta.

¹Historian havinaa on suomalaisissakin alan klassikoissa TALLQVIST ja VÄISÄLÄ.

Moderni vektorianalyysi pohjautuu sellaisten yleisten käsitteiden varaan, joita käyttäen voidaan yhtenäistää ja yleistää klassisen vektorianalyysin niin monet ja hajanaiset käsitteet ja tulokset. Tällaisia koneistoja on karkeasti ottaen kaksi, monisto- ja muotopohjainen analyysi sekä Cliffordin algebrat. Tässä kurssissa käsitellään näistä ensimmäistä, luonnollisesti kurssin tarkoitetun aineopintotason ja -laajuuden vuoksi suhteellisen alkeisesti. (Jälkimmäistä käsitellään syventävällä kurssilla ”Johdatusta geometrisiin algebriin ja niiden sovellutuksiin”.)

Monistetta laadittaessa ovat kirjan HUBBARD & HUBBARD esitystyyli ja -taso sekä asioiden esitysjärjestys osoittautuneet monin osin hyvin valituiksi, vaikkakaan kirjaa ei tässä muuten olekaan kovin paljon seurattu. Useiden pitkien ja teknisten todistusten ja johtojen osalta viitataan myös vain ko. kirjaan, jossa niitä on käsitelty hyvin perusteellisesti. Vuosien mittaan käydyt monet antoisat keskustelut emeritusprofessori Armo Pohjavirran kanssa ovat myös vaikuttaneet tämänkin monisteen sisältöön ja esitystapaan, josta kaikesta hänelle lämmin kiitos.

Keijo Ruohonen

Luku 1

PISTE. VEKTORI. VEKTORIKENTTÄ

1.1 Geometriset pisteet

Avaruuden *piste* on fysikaalis-geometrinen primitiivi, jota ei sen kummemmin tässä määritellä. Mainittakoon vain, että pisteiden, suorien, tasojen ja kappaleiden käsittely kuuluu matemaattisesti ns. avaruusgeometriaan. Pisteitä merkitään jatkossa isoin kursivoiduin antiikvakirjaimin: P, Q, R, \dots ja P_1, P_2, \dots jne. Pisteiden P ja Q välistä etäisyyttä merkitään $d(P, Q)$:llä. Ilmeisesti $d(P, P) = 0$, $d(P, Q) = d(Q, P)$ sekä

$$d(P, R) \leq d(P, Q) + d(Q, R) \quad (\text{kolmioepäyhtälö}).$$

Avoin R -säteinen P -keskinen pallo $\mathcal{B}(R, P)$ muodostuu kaikista niistä pisteistä Q , joille $d(P, Q) < R$. Edelleen:

- Pistejoukko \mathcal{A} on *avoin*, jos sen jokaiselle pisteelle P on sellainen luku $R_P > 0$, että $\mathcal{B}(R_P, P) \subseteq \mathcal{A}$. Erityisesti tyhjä joukko \emptyset on avoin.
- Pistejoukon \mathcal{A} *reuna* $\partial\mathcal{A}$ muodostuu tarkalleen niistä pisteistä P , joille jokainen avoin pallo $\mathcal{B}(R, P)$ ($R > 0$) sisältää sekä \mathcal{A} :n pisteen että \mathcal{A} :n komplementin pisteen. Erityisesti tyhjän joukon reuna on tyhjä. Joukko on siis avoin tarkalleen silloin, kun se ei sisällä yhtään reunansa pistettä.
- Pistejoukko \mathcal{A} on *suljettu*, jos se sisältää reunansa. Erityisesti tyhjä joukko on siis suljettu. Koska joukon ja sen komplementin reunat ovat ilmeisesti samat, joukko on suljettu tarkalleen silloin, kun sen komplementti on avoin.
- Pistejoukon \mathcal{A} *sulkeuma*¹ on joukko $\overline{\mathcal{A}} = \mathcal{A} \cup \partial\mathcal{A}$ ja *sisäosa* on $\mathcal{A}^\circ = \mathcal{A} - \partial\mathcal{A}$.

Geometrisille pisteille *ei* luonnollisesti ole määritelty yhteen- eikä vähennyslaskua eikä skalaarilla (reaalivakiolla) kertomista. Kuten peruskursseilta muistetaan, koordinaattipisteille nämä operaatiot on määritelty. Oikeastaan silloin on kuitenkin kyse koordinaattivektorien vastaavista operaatioista, asiaan palataan kohta. Pisteet ja vektorit eivät ole sama asia.

Huomautus. *Tässä ja jatkossa käsitellään vain avaruuden pisteitä, vektoreita sekä skalaari- ja vektorikenttiä. Näihin liittyvät käsitteet voidaan joitain poikkeuksia lukuunottamatta määritellä myös tason ja reaalisuoran pisteille, vektoreille ja kentille. Esimerkiksi avoin pallo on tasolla avoin ympyrä, reaalisuoralla avoin pallo on avoin äärellinen väli jne.*

¹Älä sekoita tätä komplementtiin, jota myös usein merkitään yläviivalla!

1.2 Geometriset vektorit

Kahden eri pisteen P (alkupiste) ja Q (loppupiste) välistä suunnattua janaa merkitään \overrightarrow{PQ} :lla. Kahden suunnatun janan \overrightarrow{PO} ja \overrightarrow{RS} sanotaan olevan *ekvivalentit*, jos ne ovat yhdensuuntais-siirroilla muunnettavissa toinen toisikseen, ts. jos on sellainen translaatio, että se muuttaa P :n R :ksi ja Q :n S :ksi. Suunnatut janat jakautuvat näin *ekvivalenssiluokkiin*. Kussakin ekvivalenssiluokassa olevat suunnatut janat ovat aina keskenään ekvivalentit, ja kahdessa eri luokassa olevat suunnatut janat eivät ole ekvivalentit. Ekvivalenssiluokkaa, jossa on suunnattu jana \overrightarrow{PQ} , merkitään $\langle \overrightarrow{PQ} \rangle$:lla. Suunnattu jana \overrightarrow{PQ} on luokan ns. *edustaja*. Jokaiselle luokalle voidaan valita edustaja, jonka alkupiste (vast. loppupiste) on mielivaltainen annettu piste.

Geometriset vektorit ovat ym. ekvivalenssiluokat. Geometrisella vektorilla, jonka edustaja on \overrightarrow{PQ} , on *suunta* (suunta pisteestä P pisteeseen Q) ja *pituus* $d(P, Q)$. Koska ekvivalenssiluokan edustajat ovat ekvivalenteja translaation kautta, suunta ja pituus eivät riipu edustajan valinnasta. Jatkossa geometrisia vektoreita merkitään nuolella varustetuin pienin kursivoiduin antiikvakirjaimin: $\vec{r}, \vec{s}, \vec{x} \dots$ ja $\vec{r}_0, \vec{r}_1, \dots$ jne. Mukavuussyistä mukaan otetaan vielä *nollavektori* $\vec{0}$, jolla ei ole suuntaa ja jonka pituus on $= 0$. Vektorin \vec{r} pituutta merkitään $|\vec{r}|$:llä. Vektoria, jonka pituus on $= 1$, kutsutaan *yksikkövektoriksi*.

Fysikaaliseen vektoriin liitetään usein sen fysikaalinen *yksikkö* L (eli *laatu* eli *dimensio*), esimerkiksi $\text{kg}/\text{m}^2/\text{s}$. Tällöin geometrinen vektori \vec{r} kytkee fysikaalisen vektorisuureen vaikutussuunnan geometriseen suuntaan—ellei \vec{r} ole nollavektori—ja ko. suureen suuruus $|\vec{r}|$ annetaan fysikaalisissa yksiköissä L . Huomaa, että jos valitaan yksiköksi L käytetty pituusyksikkö, vaikkapa metri, on geometrinen vektori \vec{r} tulkittavissa fysikaaliseksi vektoriksi. Fysikaalinen vektori voi olla *laaduton*, ts. siihen ei liity mitään fysikaalista yksikköä eli sen yksikkö on tyhjä. Fysikaalisia yksiköitä voi kertoa ja niillä voi jakaa, tyhjä yksikkö vastaa näissä operaatioissa lukua 1. Usein fysikaalinen vektori samaistetaan täysin geometriseen vektoriin. Jatkossa puhutaankin vain yleisesti *vektoreista*.

Vektoreille on määritelty tavalliset peruskursseilta tutut operaatiot, joiden geometriset määritelmät ovat seuraavat. Geometrisesti on melko selvää, että nämä operaatiot ovat hyvin määriteltyjä, ts. etteivät ne riipu edustajien valinnasta.

- Vektorin $\vec{r} = \langle \overrightarrow{PQ} \rangle$ *vastavektori* on vektori $-\vec{r} = \langle \overrightarrow{QP} \rangle$. Erityisesti $-\vec{0} = \vec{0}$. Fysikaalisen vektorin yksikkö ei tässä operaatioissa muutu.
- Vektorien $\vec{r} = \langle \overrightarrow{PQ} \rangle$ ja $\vec{s} = \langle \overrightarrow{QR} \rangle$ (huomaa edustajien valinta) *summa* on vektori $\vec{r} + \vec{s} = \langle \overrightarrow{PR} \rangle$. Erityisesti määritellään $\vec{r} + \vec{0} = \vec{0} + \vec{r} = \vec{r}$ ja $\vec{r} + (-\vec{r}) = (-\vec{r}) + \vec{r} = \vec{0}$.

Summa on vaihdannainen ja liitännäinen, ts.

$$\vec{r} + \vec{s} = \vec{s} + \vec{r} \quad \text{ja} \quad \vec{r} + (\vec{s} + \vec{t}) = (\vec{r} + \vec{s}) + \vec{t}.$$

Nämä ominaisuudet ovat geometrisesti melko ilmeisiä. Liitännäisyydestä seuraa, että pitkät summat voidaan suluttaa miten tahansa tai kirjoittaa kokonaan ilman sulkuja tuloksen muuttumatta. Vektorien \vec{r} ja \vec{s} *erotus* on vektori $\vec{r} - \vec{s} = \vec{r} + (-\vec{s})$. Laskettaessa yhteen tai vähennettäessä fysikaalisia vektoreita, niiden yksiköiden on oltava samat.

- Jos $\vec{r} = \langle \overrightarrow{PQ} \rangle$ on vektori ja λ positiivinen skalaari, niin $\lambda\vec{r}$ on vektori, joka saadaan seuraavasti. Muodostetaan pisteestä P lähtevä puolisuora, jolla on piste Q . Etsitään tältä piste R , jonka etäisyys P :stä on $\lambda|\vec{r}|$. Silloin $\lambda\vec{r} = \langle \overrightarrow{PR} \rangle$. Erityisesti $\lambda\vec{0} = \vec{0}$ ja $0\vec{r} = \vec{0}$. Tämä operaatio on *vektorin kertominen skalaarilla*. Määrittelemällä edelleen $(-\lambda)\vec{r} = -(\lambda\vec{r})$ saadaan mukaan myös negatiivisella skalaarilla kertominen. Ilmeisesti $1\vec{r} = \vec{r}$, $(-1)\vec{r} = -\vec{r}$, $2\vec{r} = \vec{r} + \vec{r}$ jne.

Mikäli fysikaalisella skalaarilla λ ja vektorilla \vec{r} on fysikaaliset yksikkönsä, $\lambda\vec{r}$:n yksikkö on näiden tulo.

Usein esiintyvä skalaarilla kertominen on vektorin *normeeraus*, jossa vektori $\vec{r} \neq \vec{0}$ kerrotaan pituutensa inverssillä. Tulos $\vec{r}/|\vec{r}|$ on yksikkövektori (ja laaduton).

- Vektorien $\vec{r} = \langle \overrightarrow{PQ} \rangle$ ja $\vec{s} = \langle \overrightarrow{RS} \rangle$ välinen kulma $\angle(\vec{r}, \vec{s})$ on suunnattujen janojen \overrightarrow{PQ} ja \overrightarrow{RS} välinen kulma väliltä $[0, \pi]$ rad. Tässä tietysti oletetaan, että $\vec{r}, \vec{s} \neq \vec{0}$. Huomattakoon, että kulma on aina laaduton, radiaani ei ole fysikaalinen yksikkö.
- Vektorien $\vec{r} = \langle \overrightarrow{PQ} \rangle$ ja $\vec{s} = \langle \overrightarrow{PR} \rangle$ (huomaa edustajien valinta) välinen *etäisyys* on $d(\vec{r}, \vec{s}) = d(Q, R) = |\vec{r} - \vec{s}|$. Erityisesti $d(\vec{r}, \vec{0}) = |\vec{r}|$. Myös tämä etäisyys toteuttaa kolmioepäyhtälön $d(\vec{r}, \vec{s}) \leq d(\vec{r}, \vec{t}) + d(\vec{t}, \vec{s})$ (totea!).
- Vektorien \vec{r} ja \vec{s} *skalaaritulo* eli *pistetulo* on $\vec{r} \bullet \vec{s} = |\vec{r}| |\vec{s}| \cos \angle(\vec{r}, \vec{s})$. Erityisesti $\vec{r} \bullet \vec{0} = \vec{0} \bullet \vec{r} = 0$ ja $\vec{r} \bullet \vec{r} = |\vec{r}|^2$.

Skalaaritulo on vaihdannainen ja *bilineaarinen*, ts.

$$\vec{r} \bullet \vec{s} = \vec{s} \bullet \vec{r} \quad \text{ja} \quad \vec{r} \bullet (\lambda \vec{s} + \eta \vec{t}) = \lambda(\vec{r} \bullet \vec{s}) + \eta(\vec{r} \bullet \vec{t}),$$

missä λ ja η ovat skalaareja. Geometrisesti vaihdannaisuus on selvä, bilineaarisuus sen sijaan vaatii hankalahkon johdon. Koordinaattiesityksen kautta bilineaarisuus taas on ilmeinen.

Laadullisten fysikaalisten vektoreiden skalaaritulon yksikkö on näiden yksiköiden tulo. Geometrisesti, jos \vec{s} on (laaduton) yksikkövektori, niin

$$\vec{r} \bullet \vec{s} = |\vec{r}| \cos \angle(\vec{r}, \vec{s})$$

on \vec{r} :n *projektio* \vec{s} :llä. (Nollavektorin projektio on aina tietysti nolla.)

- Vektorien \vec{r} ja \vec{s} *vektoritulo* eli *ristitulo* on vektori $\vec{r} \times \vec{s}$, joka määritellään seuraavasti. Ensinnäkin, jos $\vec{r} = \vec{0}$ tai $\vec{s} = \vec{0}$ tai $\angle(\vec{r}, \vec{s}) = 0$ tai $\angle(\vec{r}, \vec{s}) = \pi$, niin $\vec{r} \times \vec{s} = \vec{0}$. Muutoin $\vec{r} \times \vec{s}$ on se yksikäsitteinen vektori \vec{t} , jolle

- $|\vec{t}| = |\vec{r}| |\vec{s}| \sin \angle(\vec{r}, \vec{s})$,
- $\angle(\vec{r}, \vec{t}) = \angle(\vec{s}, \vec{t}) = \frac{\pi}{2}$ ja
- $\vec{r}, \vec{s}, \vec{t}$ on oikeakätinen systeemi.

Ristitulo on *antivaihdannainen* ja bilineaarinen, ts.

$$\vec{r} \times \vec{s} = -(\vec{s} \times \vec{r}) \quad \text{ja} \quad \vec{r} \times (\lambda \vec{s} + \eta \vec{t}) = \lambda(\vec{r} \times \vec{s}) + \eta(\vec{r} \times \vec{t}),$$

missä λ ja η ovat skalaareja. Geometrisesti antivaihdannaisuus on selvä, kätisyys vaihtuu, bilineaarisuus sen sijaan vaatii taas hankalahkon johdon. Koordinaattiesityksen kautta bilineaarisuus on tässäkin melko ilmeinen. Ristitulo on paljon informaatiota sisältävä operaatio, siinä ovat mukana niin vektorien pituudet ja niiden välinen kulma kuin kätisyysskin. Lisäksi se on helppo tehdä koordinaattimuodossa.

Geometrisesti $|\vec{r} \times \vec{s}| = |\vec{r}| |\vec{s}| \sin \angle(\vec{r}, \vec{s})$ on sen suunnikkaan ala, jonka sivujen pituudet ovat $|\vec{r}|$ ja $|\vec{s}|$ ja välinen kulma $\angle(\vec{r}, \vec{s})$. Jos \vec{r} ja \vec{s} ovat laadullisia fysikaalisia vektoreita, niin ristulon $\vec{r} \times \vec{s}$ yksikkö on näiden yksiköiden tulo.

- Yhdistelemällä saadaan vielä *skalaarikolmitulo* $\vec{r} \bullet (\vec{s} \times \vec{t})$ sekä *vektorikolmitulot* $(\vec{r} \times \vec{s}) \times \vec{t}$ ja $\vec{r} \times (\vec{s} \times \vec{t})$. Koska mitään sekaannuksen vaaraa ei ole, skalaarikolmitulo kirjoitetaan usein ilman sulkeita: $\vec{r} \bullet \vec{s} \times \vec{t}$. Skalaarikolmitulo on *kiertosymmetrinen*, ts.

$$\vec{r} \bullet \vec{s} \times \vec{t} = \vec{s} \bullet \vec{t} \times \vec{r} = \vec{t} \bullet \vec{r} \times \vec{s}.$$

Tämän ja skalaaritulon vaihdannaisuuden seurauksena skalaarikolmitulon operaatiot voidaan vaihtaa keskenään, ts.

$$\vec{r} \bullet (\vec{s} \times \vec{t}) = (\vec{r} \times \vec{s}) \bullet \vec{t}.$$

Geometrisesti on helppo todeta, että skalaarikolmitulo $\vec{r} \bullet \vec{s} \times \vec{t}$ on sen suuntaissärmiön tilavuus, jonka yhdestä kärjestä P lähtevät sivut ovat (edustajina) vektorit $\vec{r} = \langle \overrightarrow{PR} \rangle$, $\vec{s} = \langle \overrightarrow{PS} \rangle$ ja $\vec{t} = \langle \overrightarrow{PT} \rangle$, positiivisena, jos $\vec{r}, \vec{s}, \vec{t}$ muodostavat oikeakätisen systeemin, negatiivisena muuten. (Erikoistapauksina vielä tilanteet, joissa skalaarikolmitulo on = 0.) Kiertosymmetria seuraa tästä.

Vektorikolmituloille on ns. *kehityskaavat*

$$\begin{aligned} (\vec{r} \times \vec{s}) \times \vec{t} &= (\vec{r} \bullet \vec{t})\vec{s} - (\vec{s} \bullet \vec{t})\vec{r} \quad \text{ja} \\ \vec{r} \times (\vec{s} \times \vec{t}) &= (\vec{r} \bullet \vec{t})\vec{s} - (\vec{r} \bullet \vec{s})\vec{t}. \end{aligned}$$

Nämä ovat jossain määrin hankalia todettavia geometrisesti, johto koordinaattiesityksen kautta on helpompi.

Samalla tavalla kuin pisteille voidaan määrittellä R -säteinen \vec{r} -keskinen avoin vektorien muodostama pallo $\vec{B}(R, \vec{r})$, avoimet ja suljetut vektorijoukot sekä vektorijoukon reuna, sulkeuma ja sisäosa.

1.3 Koordinaattipisteet ja -vektorit

Peruskursseilla pisteitä käsitellään *koordinaattipisteinä*, ts. reaalityyppisistä muodostettuina kolmikoina (a, b, c) . Tällöin taustalla on kiinnitetty suorakulmainen oikeakätinen koordinaatisto akseliseen ja origoineen. Koordinaattipisteitä merkitään jatkossa lihavoiduin pienin antiikvakirjaimin: r, s, x, \dots ja r_0, r_1, \dots jne. Erityisesti koordinaatiston origoa vastaava koordinaattipiste on $\mathbf{0} = (0, 0, 0)$.

Koordinaatisto määräytyy vastaavasta *koordinaattifunktiosta*, joka kuvaa geometriset pisteet \mathbb{R}^3 :n kolmikoiksi. Koordinaattifunktioita merkitään jatkossa pienin lihavoiduin kreikkalaisin kirjaimin ja niiden komponentteja vastaavin indeksoiduin kirjaimin. Jos koordinaattifunktio on κ , niin pisteen P koordinaatit ovat

$$\kappa(P) = (\kappa_1(P), \kappa_2(P), \kappa_3(P)).$$

Koordinaattikuvaus on bijektio eli kääntäen yksikäsitteinen vastaavuus geometrisen avaruuden ja avaruuden \mathbb{R}^3 välillä. Etäisyys saadaan tutulla tavalla \mathbb{R}^3 :n normin avulla. Jos $\kappa(P) = (x_1, y_1, z_1)$ ja $\kappa(Q) = (x_2, y_2, z_2)$, niin

$$d(P, Q) = \|\kappa(P) - \kappa(Q)\| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2}.$$

Koordinaattifunktio κ antaa myös vektoreille koordinaattiesityksen. Vektorin $\vec{r} = \langle \overrightarrow{PQ} \rangle$ koordinaattiesitys on

$$\kappa(\vec{r}) = (\kappa(Q) - \kappa(P))^T = \begin{pmatrix} \kappa_1(Q) - \kappa_1(P) \\ \kappa_2(Q) - \kappa_2(P) \\ \kappa_3(Q) - \kappa_3(P) \end{pmatrix}.$$

Huomaa pystyvektorimuoto. Erityisesti nollavektorin esitys on $\kappa(\vec{0}) = (0, 0, 0)^T = \mathbf{0}^T$. Helposti voi todeta, että tämä esitys ei riipu edustajien valinnasta. Myöskin vektorien $\vec{r} = \langle \overrightarrow{PQ} \rangle$ ja $\vec{s} = \langle \overrightarrow{PR} \rangle$ etäisyys saadaan \mathbb{R}^3 :n normin avulla:

$$d(\vec{r}, \vec{s}) = \|\kappa(\vec{r}) - \kappa(\vec{s})\| = \|\kappa(Q) - \kappa(R)\| = d(Q, R).$$

Edelleen $|\vec{r}| = d(\vec{r}, \vec{0}) = \|\kappa(\vec{r})\|$.

Jatkossa merkitään myös vektorien koordinaattiesityksiä eli *koordinaattivektoreita* pienin lihavoiduin kirjaimin, mutta on muistettava että koordinaattivektori on pystyvektori. Tietyille koordinaattivektoreille on perinteiset merkintänsä:

$$\mathbf{i} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{j} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{k} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{ja} \quad \mathbf{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

Vektorit $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ ovat kantavektorit ja vektoria \mathbf{r} käytetään geneerisenä muuttujavektorina. Taus-talla on tietysti koko ajan jokin kiinnitetty koordinaatisto ja koordinaattifunktio.

Tutut koordinaattivektoreille määritellyt operaatiot vastaavat nyt tarkasti edellisen pykälän geometrisia vektorioperaatioita. Muistettakoon vain, että jos $\kappa(\vec{r}) = (a_1, b_1, c_1)^T$ ja $\kappa(\vec{s}) = (a_2, b_2, c_2)^T$, niin

$$\vec{r} \bullet \vec{s} = a_1 a_2 + b_1 b_2 + c_1 c_2 \quad \text{ja} \quad \kappa(\vec{r} \times \vec{s}) = \begin{pmatrix} b_1 c_2 - b_2 c_1 \\ c_1 a_2 - c_2 a_1 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{pmatrix}.$$

Jälkimmäinen esitetään usein helpommin muistettavana formaalina determinanttina

$$\begin{vmatrix} \mathbf{i} & a_1 & a_2 \\ \mathbf{j} & b_1 & b_2 \\ \mathbf{k} & c_1 & c_2 \end{vmatrix},$$

joka kehitetään ensimmäisen sarakkeensa suhteen.

Koordinaatiston vaihto vaihtaa koordinaattifunktiota. Mikäli κ ja κ^* ovat kaksi koordinaattifunktiota, ne ovat yhteydessä koordinaatistomuunnoksen kautta, ts. on sellainen 3×3 -ortogonaalimatriisi² \mathbf{Q} sekä koordinaattivektori \mathbf{b} , että

$$\kappa^*(P) = \kappa(P)\mathbf{Q} + \mathbf{b} \quad \text{ja} \quad \kappa(P) = \kappa^*(P)\mathbf{Q}^T - \mathbf{b}\mathbf{Q}^T.$$

Vastaavasti muuntuu vektorin $\vec{r} = \langle \overrightarrow{PQ} \rangle$ koordinaattiesitys:

$$\begin{aligned} \kappa^*(\vec{r}) &= (\kappa^*(Q) - \kappa^*(P))^T = (\kappa(Q)\mathbf{Q} + \mathbf{b} - \kappa(P)\mathbf{Q} - \mathbf{b})^T \\ &= \mathbf{Q}^T(\kappa(Q) - \kappa(P))^T = \mathbf{Q}^T\kappa(\vec{r}) \quad \text{ja} \quad \kappa(\vec{r}) = \mathbf{Q}\kappa^*(\vec{r}). \end{aligned}$$

Huomaa, että \mathbf{b} on ”vanhan” koordinaatiston origon esitys ”uudessa” koordinaatistossa ja että \mathbf{Q}^T :n sarakkeet ovat ”vanhan” koordinaatiston kantavektorien $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ esitykset ”uudessa” koordinaatistossa. Vastaavasti $-\mathbf{b}\mathbf{Q}^T$ on ”uuden” koordinaatiston origon esitys ”vanhassa” koordinaatistossa ja \mathbf{Q} :n sarakkeet ovat ”uuden” koordinaatiston kantavektorien $\mathbf{i}^*, \mathbf{j}^*, \mathbf{k}^*$ esitykset ”vanhassa” koordinaatistossa.

²Tässä ja jatkossa matriiseja merkitään lihavoiduin isoin antiikvakirjaimin. Koska kätisyyden pitää säilyä, pitää tässä olla $\det(\mathbf{Q}) = 1$.

1.4 Tangenttivektori. Vektorikenttä. Skalaarikenttä

Geometrisesti *tangenttivektori*³ on yksinkertaisesti suunnattu jana \overrightarrow{PQ} , piste P on sen *vaikutuspiste*. Tangenttivektoria on kuitenkin helpompi ajatella parina $[P, \vec{r}]$, missä P on vaikutuspiste ja \vec{r} on vektori. Tällöin tangenttivektoreille on helppo tehdä vektoraalisia operaatioita: suoriteaan operaatiot vain vektoriosalle \vec{r} . Jos tulos on vektori, se voidaan joko ajatella tangenttivektori, vaikutuspisteenä tangenttivektorien yhteinen vaikutuspiste, tai sitten vain vektoriksi ilman vaikutuspistettä. Lisäksi tangenttivektoreille saadaan parimuodossa yksinkertaisesti koordinaattiesitys käyttäen koordinaattifunktiota κ :

$$\kappa([P, \vec{r}]) = [\kappa(P), \kappa(\vec{r})]$$

Jos tangenttivektorin vaikutuspiste on asiayhteydestä selvä tai sillä ei ole väliä, jätetään se usein merkittämättä ja käytetään vain vektoriosaa, mahdollisesti koordinaattimuodossa.

Vektorikenttä on funktio, joka kuvaa pisteen P tangenttivektori $[P, \vec{F}(P)]$. Usein merkitään tällaista vektorikenttää vain \vec{F} :llä. Vektorikenttä ei aina ole määritelty kaikille geometrisen avaruuden pisteille, ts. sen *määrittelyalue* voi olla suppeampi. Koordinaattiesityksessä merkitään $\mathbf{r} = \kappa(P)$ sekä $\mathbf{F}(\mathbf{r}) = \kappa(\vec{F}(P))$, koordinaattimuotoisia vektorikenttiä merkitään siis lihavoiduilla isoilla antiikvakirjaimilla. Huomaa, että koordinaatistomuunnoksessa

$$\mathbf{r}^* = \mathbf{r}\mathbf{Q} + \mathbf{b} \quad (\text{eli } \kappa^*(P) = \kappa(P)\mathbf{Q} + \mathbf{b})$$

vektorikenttä $\mathbf{F} = \kappa(\vec{F})$ muuntuu kentäksi $\mathbf{F}^* = \kappa^*(\vec{F})$ kaavalla

$$\mathbf{F}^*(\mathbf{r}^*) = \mathbf{Q}^T \mathbf{F}((\mathbf{r}^* - \mathbf{b})\mathbf{Q}^T).$$

Vektorikenttä voidaan luonnollisesti määritellä tietyssä koordinaatistossa tavalla tai toisella, muunnoskaavalla saadaan sitten sen koordinaattiesitys muissa koordinaatistoissa. Fysikaalis-geometrisen vektorikentän määrittely ei kuitenkaan voi olla riippuvainen jostain koordinaatistosta, kenttä on olemassa ilman koordinaatistojakin ja toteuttaa automaattisesti yo. muunnoskaavan.

Koordinaattimuodossaan vektorikenttä on peruskursseilta tuttu kolmen muuttujan vektoriarvoinen kuvaus

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = \begin{pmatrix} F_1(\mathbf{r}) \\ F_2(\mathbf{r}) \\ F_3(\mathbf{r}) \end{pmatrix}$$

komponentteineen, ja sille ovat käytössä kaikki näille määritellyt operaatiot, raja-arvot, jatkuvuus ja derivoituvuus käsitteet, integraalit, nablaukset jne.

Skalaarikenttä on funktio f , joka kuvaa pisteen P skalaariksi (reaaliluvuksi) $f(P)$, skalaarikentille käytetään siis merkinnällisesti kursivoituja antiikvakirjaimia, yleensä pieniä. Koordinaattiesityksessä merkitään $\mathbf{r} = \kappa(P)$ sekä lyhyesti $f(\mathbf{r})$ (oikeastaan siis $f(\kappa^{-1}(\mathbf{r}))$). Koordinaatistomuunnoksessa $\mathbf{r}^* = \mathbf{r}\mathbf{Q} + \mathbf{b}$ (eli $\kappa^*(P) = \kappa(P)\mathbf{Q} + \mathbf{b}$) skalaarikenttä f muuntuu skalaarikentäksi f^* kaavalla

$$f^*(\mathbf{r}^*) = f((\mathbf{r}^* - \mathbf{b})\mathbf{Q}^T).$$

Myös skalaarikenttä voidaan määritellä tietyssä valitussa koordinaatistossa, josta sen esitys sitten siirretään muihin koordinaatistoihin muunnoskaavalla. Fysikaalis-geometrisen skalaarikenttä on olemassa ilman mitään koordinaatistoa ja toteuttaa automaattisesti muunnoskaavan koordinaatistoesityksissään.

Tärkeää on huomata, että kaikki edellisen pykälän operaatioilla vektorikentistä ja skalaarikentistä saatavat vektori- ja skalaarifunktiot ovat kenttiä, esimerkiksi skalaarikenttä kertaa vektorikenttä on vektorikenttä.

³Nimitys johtuu siitä, että kyseessä usein onkin nimenomaan tangentti.

1.5 Kenttien derivaattaoperaatiot

Osittaisderivaattojen määrittely geometris-fysikaalisille kentille ei luonnollisestikaan ole suoraan mahdollista, ne liittyvät koordinaatistoihin. Koordinaatistoesityksessään kenttien osittaisderivaatat ovat määriteltävissä peruskursseilta tuttuun tapaan. Erityisesti näin saadaan skalaarikentän f osittaisderivaatat, derivaatta ja gradientti

$$f' = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z} \right), \quad \text{grad}(f) = \nabla f = f'^{\top} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial f}{\partial z} \end{pmatrix}$$

sekä vektorikentän $\mathbf{F} = (F_1, F_2, F_3)^{\top}$ derivaatta eli Jacobin matriisi

$$\mathbf{F}' = \begin{pmatrix} F_1' \\ F_2' \\ F_3' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x} & \frac{\partial F_1}{\partial y} & \frac{\partial F_1}{\partial z} \\ \frac{\partial F_2}{\partial x} & \frac{\partial F_2}{\partial y} & \frac{\partial F_2}{\partial z} \\ \frac{\partial F_3}{\partial x} & \frac{\partial F_3}{\partial y} & \frac{\partial F_3}{\partial z} \end{pmatrix}.$$

Koordinaatistomuunnoksessa $\mathbf{r}^* = \mathbf{r}\mathbf{Q} + \mathbf{b}$ saadaan ketjusäännöllä derivoiden näille muunnoskaavat

$$f^{*\prime}(\mathbf{r}^*) = (f((\mathbf{r}^* - \mathbf{b})\mathbf{Q}^{\top}))' = f'((\mathbf{r}^* - \mathbf{b})\mathbf{Q}^{\top})\mathbf{Q} \quad \text{ja}$$

$$\mathbf{F}^{*\prime}(\mathbf{r}^*) = (\mathbf{Q}^{\top}\mathbf{F}((\mathbf{r}^* - \mathbf{b})\mathbf{Q}^{\top}))' = \mathbf{Q}^{\top}\mathbf{F}'((\mathbf{r}^* - \mathbf{b})\mathbf{Q}^{\top})\mathbf{Q}.$$

Huolimatta siitä, että kenttien osittaisderivaatat ovat koordinaatistoriippuvia, derivoituvuus on koordinaatistoriippumaton: Jos kentällä on yhdessä koordinaatistossa osittaisderivaatat, niin sillä on ne myös missä tahansa toisessa koordinaatistossa. Sama pätee toisiin derivaattoihin. Edelleen sama pätee jatkuvuuteen: Yhdessä koordinaatistossa jatkuva kenttä on sitä missä tahansa toisessa koordinaatistossa. Ja viimein sama pätee myös jatkuvaan derivoituvuuteen: Jos kentällä on yhdessä koordinaatistossa jatkuvat osittaisderivaatat (ensimmäiset tai toiset), niin sillä on ne myös missä tahansa toisessa koordinaatistossa. Kaikki tämä seuraa kenttien muunnoskaavoista.

Tavallisimmat kenttien derivaattaoperaattorit ovat skalaarikentän f gradientti (nabla) ja Laplaceen operaattori

$$\Delta f = \nabla \bullet (\nabla f) = \nabla^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$

sekä vektorikentän $\mathbf{F} = (F_1, F_2, F_3)^{\top}$ divergenssi

$$\text{div}(\mathbf{F}) = \nabla \bullet \mathbf{F} = \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z}$$

ja roottori

$$\text{rot}(\mathbf{F}) = \nabla \times \mathbf{F} = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z} \\ \frac{\partial F_1}{\partial z} - \frac{\partial F_3}{\partial x} \\ \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \frac{\partial}{\partial x} & F_1 \\ \mathbf{j} & \frac{\partial}{\partial y} & F_2 \\ \mathbf{k} & \frac{\partial}{\partial z} & F_3 \end{vmatrix}.$$

(Ristitulon tapaan myös roottori voidaan esittää formaalina determinanttina.) Kuten pian todetaan, gradientti, divergenssi ja roottori ovat koordinaatistoriippumattomia. Näin $\nabla \bullet \mathbf{F}$ on tulkittavissa skalaarikentäksi ja, kuten pystyvektorimerkintäkin jo osoittaa, ∇f sekä $\nabla \times \mathbf{F}$ tulkitaan vektorikentiksi. Gradientin tapauksessa koordinaatistoriippumattomuus on fysikaalisesti ilmeistä. Gradienttihan nimittäin osoittaa suuntaan, johon skalaarikenttä nopeimmin kasvaa, ja sen pituus on juuri ko. kasvunopeus (suunnattu derivaatta). Divergenssin ja roottorin tapaukset eivät sitten enää olekaan yhtä selviä. Gradientin koordinaatistoriippumattomuudesta seuraa, että skalaarikentän f suunnattu derivaatta suuntaan \mathbf{n} (yksikkövektori)

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{n}} = \mathbf{n} \bullet \nabla f$$

on myös koordinaatistoriippumaton ja siten skalaarikenttä.

Laplacen operaattori voidaan myös kohdistaa vektorikenttään. Tällöin

$$\Delta \mathbf{F} = \begin{pmatrix} \Delta F_1 \\ \Delta F_2 \\ \Delta F_3 \end{pmatrix}.$$

Myös tämä $\Delta \mathbf{F}$ on koordinaatistoriippumaton ja tulkittavissa vektorikentäksi.

Tärkeä muistettava ominaisuus on, että kaikki nämä derivaattaoperaattorit ovat *lineaarisia*, ts. jos λ_1 ja λ_2 ovat skalaarivakioita, niin esimerkiksi

$$\begin{aligned} \nabla(\lambda_1 f + \lambda_2 g) &= \lambda_1 \nabla f + \lambda_2 \nabla g \quad \text{ja} \\ \nabla \bullet (\lambda_1 \mathbf{F} + \lambda_2 \mathbf{G}) &= \lambda_1 \nabla \bullet \mathbf{F} + \lambda_2 \nabla \bullet \mathbf{G} \quad \text{jne.} \end{aligned}$$

Usein esiintyvä merkinnällinen lausekemuoto on

$$\mathbf{G} \bullet \nabla = G_1 \frac{\partial}{\partial x} + G_2 \frac{\partial}{\partial y} + G_3 \frac{\partial}{\partial z},$$

missä $\mathbf{G} = (G_1, G_2, G_3)^\top$ on vektorikenttä. Tämä tulkitaan operaattoriksi, jolla operoidaan skalaarikenttään f tai vektorikenttään \mathbf{F} :

$$(\mathbf{G} \bullet \nabla)f = \mathbf{G} \bullet (\nabla f) = G_1 \frac{\partial f}{\partial x} + G_2 \frac{\partial f}{\partial y} + G_3 \frac{\partial f}{\partial z}$$

ja

$$(\mathbf{G} \bullet \nabla)\mathbf{F} = \begin{pmatrix} (\mathbf{G} \bullet \nabla)F_1 \\ (\mathbf{G} \bullet \nabla)F_2 \\ (\mathbf{G} \bullet \nabla)F_3 \end{pmatrix} = \mathbf{F}'\mathbf{G}.$$

Molemmat ovat koordinaatistoriippumattomia ja siten kenttiä. $(\mathbf{G} \bullet \nabla)\mathbf{F}$:n koordinaatistoriippumattomuus seuraa nablauksäännöistä, ks. alla.

Taulukoidaan tähän tutut ”nablaukskaavat”:

(i) $\nabla(fg) = g\nabla f + f\nabla g$

(ii) $\nabla \frac{1}{f} = -\frac{1}{f^2}\nabla f$

(iii) $\nabla \bullet (f\mathbf{G}) = \nabla f \bullet \mathbf{G} + f\nabla \bullet \mathbf{G}$

(iv) $\nabla \times (f\mathbf{G}) = \nabla f \times \mathbf{G} + f\nabla \times \mathbf{G}$

(v) $\nabla \bullet (\mathbf{F} \times \mathbf{G}) = \nabla \times \mathbf{F} \bullet \mathbf{G} - \mathbf{F} \bullet \nabla \times \mathbf{G}$

(vi) $\nabla \times (\mathbf{F} \times \mathbf{G}) = (\mathbf{G} \bullet \nabla)\mathbf{F} - (\nabla \bullet \mathbf{F})\mathbf{G} + (\nabla \bullet \mathbf{G})\mathbf{F} - (\mathbf{F} \bullet \nabla)\mathbf{G}$

(vii) $\nabla(\mathbf{F} \bullet \mathbf{G}) = (\mathbf{G} \bullet \nabla)\mathbf{F} - (\nabla \times \mathbf{F}) \times \mathbf{G} - (\nabla \times \mathbf{G}) \times \mathbf{F} + (\mathbf{F} \bullet \nabla)\mathbf{G}$
 Matriisimuodossa $\nabla(\mathbf{F} \bullet \mathbf{G}) = \mathbf{F}'^T \mathbf{G} + \mathbf{G}'^T \mathbf{F}$.

(viii) $(\nabla \times \mathbf{F}) \times \mathbf{G} = (\mathbf{F}' - \mathbf{F}'^T)\mathbf{G}$

(ix) $\nabla \bullet (\nabla \times \mathbf{F}) = 0$ (Olettaen, että \mathbf{F} on kahdesti jatkuvasti derivoituva.)

(x) $\nabla \times \nabla f = \mathbf{0}$ (Olettaen, että f on kahdesti jatkuvasti derivoituva.)

(xi) $\nabla \times (\nabla \times \mathbf{F}) = \nabla(\nabla \bullet \mathbf{F}) - \Delta \mathbf{F}$ (Olettaen, että \mathbf{F} on kahdesti jatkuvasti derivoituva, ns. kaksoisroottorin kehityskaava.)

(xii) $\Delta(fg) = f\Delta g + g\Delta f + 2\nabla f \bullet \nabla g$

Kaikki nämä kaavat ovat itse asiassa symbolisia identiteettejä ja ne voidaan todentaa raa'alla laskulla tai esimerkiksi Maple-ohjelmistolla.

Todennetaan vielä operaattoreiden koordinaatistoriippumattomuus. Koordinaatistomuunnoksessa

$$\mathbf{r}^* = \mathbf{r}\mathbf{Q} + \mathbf{b}$$

merkitään uusissa koordinaateissa laskettua nablaa ∇^* :lla. Koordinaatistoriippumattomuus perusoperaattoreille tarkoittaa silloin seuraavia kaavoja:

1. $\nabla^*(f((\mathbf{r}^* - \mathbf{b})\mathbf{Q}^T)) = \mathbf{Q}^T \nabla f(\mathbf{r})$ (gradientti)

Siirrytään vähentämällä \mathbf{b} sekä \mathbf{Q}^T :lla kertomalla uusista koordinaateista \mathbf{r}^* vanhoihin, lasketaan f ja muodostetaan gradientti uusien koordinaattien avulla. Tuloksen pitää olla sama kuin laskettaessa gradientti vanhoissa koordinaateissa ja siirtämällä tulos \mathbf{Q}^T :lla kertomalla uusiin koordinaatteihin.

2. $\nabla^* \bullet (\mathbf{Q}^T \mathbf{F}((\mathbf{r}^* - \mathbf{b})\mathbf{Q}^T)) = \nabla \bullet \mathbf{F}(\mathbf{r})$ (divergenssi)

Siirrytään vähentämällä \mathbf{b} sekä \mathbf{Q}^T :lla kertomalla uusista koordinaateista \mathbf{r}^* vanhoihin, lasketaan \mathbf{F} , siirretään \mathbf{Q}^T :lla kertomalla tulos uusiin koordinaatteihin ja muodostetaan divergenssi uusien koordinaattien avulla. Tuloksen pitää olla sama kuin laskettaessa divergenssi vanhoissa koordinaateissa.

3. $\nabla^* \times (\mathbf{Q}^T \mathbf{F}((\mathbf{r}^* - \mathbf{b})\mathbf{Q}^T)) = \mathbf{Q}^T (\nabla \times \mathbf{F}(\mathbf{r}))$ (roottori)

Siirrytään vähentämällä \mathbf{b} sekä \mathbf{Q}^T :lla kertomalla uusista koordinaateista \mathbf{r}^* vanhoihin, lasketaan \mathbf{F} , siirretään \mathbf{Q}^T :lla kertomalla tulos uusiin koordinaatteihin ja muodostetaan roottori uusien koordinaattien avulla. Tuloksen pitää olla sama kuin laskettaessa roottori vanhoissa koordinaateissa ja siirtämällä tulos \mathbf{Q}^T :lla kertomalla uusiin koordinaatteihin.

Lause 1.1. Gradientti, divergenssi, roottori ja Laplacen operaattori ovat koordinaatistoriippumattomia. Edelleen, jos \mathbf{F} ja \mathbf{G} ovat vektorikenttiä, niin samoin on $(\mathbf{G} \bullet \nabla)\mathbf{F}$.

Todistus. Edellä todetun mukaan

$$f^{*'}(\mathbf{r}^*) = (\nabla f(\mathbf{r}))^\top \mathbf{Q} \quad \text{ja} \quad \mathbf{F}^{*'}(\mathbf{r}^*) = \mathbf{Q}^\top \mathbf{F}'(\mathbf{r})\mathbf{Q}.$$

Tästä saadaan välittömästi kaava 1.:

$$\nabla^* f^*(\mathbf{r}^*) = f^{*'}(\mathbf{r}^*)^\top = \mathbf{Q}^\top \nabla f(\mathbf{r}).$$

Kaavan 2. näyttämiseksi käytetään Jacobin matriisin jälkeä. Palautellaan mieleen, että neliömatriisin \mathbf{A} jälki (engl. trace) $\text{trace}(\mathbf{A})$ on sen lävistäjäalkioiden summa. Jäljen eräs perusominaisuus⁴ on, että jos matriisitulo \mathbf{AB} on neliömatriisi—jolloin myös \mathbf{BA} on neliömatriisi—niin

$$\text{trace}(\mathbf{AB}) = \text{trace}(\mathbf{BA}).$$

Koska

$$\text{trace}(\mathbf{F}') = \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z} = \nabla \bullet \mathbf{F},$$

kaava 2. saadaan helposti:

$$\begin{aligned} \nabla^* \bullet \mathbf{F}^*(\mathbf{r}^*) &= \text{trace}(\mathbf{F}^{*'}(\mathbf{r}^*)) = \text{trace}(\mathbf{Q}^\top \mathbf{F}'(\mathbf{r})\mathbf{Q}) = \text{trace}(\mathbf{Q}\mathbf{Q}^\top \mathbf{F}'(\mathbf{r})) \\ &= \text{trace}(\mathbf{F}'(\mathbf{r})) = \nabla \bullet \mathbf{F}(\mathbf{r}). \end{aligned}$$

Kaavan 3. toteamiseksi tarvitaan matriisin \mathbf{Q} sarakkeet $\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \mathbf{q}_3$. Lasketaan malliksi roottorin $\nabla^* \times \mathbf{F}^*(\mathbf{r}^*)$ ensimmäinen komponentti. Jacobin matriisin muuntokaavan, kaavan (viii) ja skalaarikolmitulon laskusääntöjen nojalla

$$\begin{aligned} (\nabla^* \times \mathbf{F}^*(\mathbf{r}^*))_1 &= \frac{\partial F_3^*}{\partial y^*} - \frac{\partial F_2^*}{\partial z^*} = \mathbf{q}_3^\top \mathbf{F}'(\mathbf{r})\mathbf{q}_2 - \mathbf{q}_2^\top \mathbf{F}'(\mathbf{r})\mathbf{q}_3 = \mathbf{q}_3^\top \mathbf{F}'(\mathbf{r})\mathbf{q}_2 - \mathbf{q}_3^\top \mathbf{F}'(\mathbf{r})^\top \mathbf{q}_2 \\ &= \mathbf{q}_3^\top (\mathbf{F}'(\mathbf{r}) - \mathbf{F}'(\mathbf{r})^\top)\mathbf{q}_2 = \mathbf{q}_3 \bullet (\nabla \times \mathbf{F}(\mathbf{r})) \times \mathbf{q}_2 \\ &= \mathbf{q}_2 \times \mathbf{q}_3 \bullet (\nabla \times \mathbf{F}(\mathbf{r})) = \mathbf{q}_1 \bullet (\nabla \times \mathbf{F}(\mathbf{r})) = (\mathbf{Q}^\top (\nabla \times \mathbf{F}(\mathbf{r})))_1. \end{aligned}$$

Huomaa, että koska uusikin koordinaatisto on oikeakätinen, niin $\mathbf{q}_2 \times \mathbf{q}_3 = \mathbf{q}_1$. Muut komponentit menevät samaan tapaan.

Laplacen operaattorin koordinaatistoriippumattomuus skalaarikentille seuraa suoraan gradientin ja divergenssin vastaavasta ominaisuudesta ja vektorikentille kaavasta (xi). Edelleen laskemalla puolittain yhteen kaavat (vi) ja (vii) saadaan $(\mathbf{G} \bullet \nabla)\mathbf{F}$:lle lauseke

$$\begin{aligned} (\mathbf{G} \bullet \nabla)\mathbf{F} &= \frac{1}{2}(\nabla \times (\mathbf{F} \times \mathbf{G}) + (\nabla \bullet \mathbf{F})\mathbf{G} - (\nabla \bullet \mathbf{G})\mathbf{F} \\ &\quad + \nabla(\mathbf{F} \bullet \mathbf{G}) + (\nabla \times \mathbf{F}) \times \mathbf{G} + (\nabla \times \mathbf{G}) \times \mathbf{F}). \end{aligned}$$

Kaikki oikean puolen termit ovat koordinaatistoriippumattomia ja siis vektorikenttiä. Näin ollen myös $(\mathbf{G} \bullet \nabla)\mathbf{F}$ on koordinaatistoriippumaton ja vektorikenttä. \square

⁴Jos merkitään $\mathbf{A} = (a_{ij})$ ($n \times m$ -matriisi), $\mathbf{B} = (b_{ij})$ ($m \times n$ -matriisi), $\mathbf{AB} = (c_{ij})$ ja $\mathbf{BA} = (d_{ij})$, niin

$$\text{trace}(\mathbf{AB}) = \sum_{k=1}^n c_{kk} = \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^m a_{kl}b_{lk} = \sum_{l=1}^m \sum_{k=1}^n b_{lk}a_{kl} = \sum_{l=1}^m d_{ll} = \text{trace}(\mathbf{BA}).$$

1.6 Aikariippuvat skalaari- ja vektorikentät

Fysikaaliset kentät ovat usein aikariippuvia, ts. kentän määrittelyssä on mukana aikamuuttuja t . Skalaarikenttä on silloin muotoa $f(P, t)$ ja vektorikenttä muotoa $\vec{F}(P, t)$ (vektorikentän antamasta tangenttivektorista jätetään tässäkin pois vaikutuspiste). Koordinaattiesityksessä muodot ovat vastaavasti $f(\mathbf{r}, t)$ sekä $\mathbf{F}(\mathbf{r}, t)$. Aikariippuvia kenttiä sanotaan *ei-stationäärisiksi*, aikariippumattomia taas *stationäärisiksi*.

Koordinaattiesityksestä, tulkittuna neljän muuttujan x, y, z, t funktioiksi, saadaan jälleen peruskursseilta tutut käsitteet, jatkuvuus, derivoituvuudet jne. myös aikamuuttujan t suhteen. Koordinaatistomuunnoksessa $\mathbf{r}^* = \mathbf{r}\mathbf{Q} + \mathbf{b}$ aikamuuttuja ei muutu, ts.

$$f^*(\mathbf{r}^*, t) = f((\mathbf{r}^* - \mathbf{b})\mathbf{Q}^\top, t) \quad \text{ja} \quad \mathbf{F}^*(\mathbf{r}^*, t) = \mathbf{Q}^\top \mathbf{F}((\mathbf{r}^* - \mathbf{b})\mathbf{Q}^\top, t).$$

Näin ollen aikaderivaatoille saadaan vastaavat muunnoskaavat

$$\frac{\partial^i}{\partial t^i} f^*(\mathbf{r}^*, t) = \frac{\partial^i}{\partial t^i} f((\mathbf{r}^* - \mathbf{b})\mathbf{Q}^\top, t) \quad \text{ja} \quad \frac{\partial^i}{\partial t^i} \mathbf{F}^*(\mathbf{r}^*, t) = \mathbf{Q}^\top \frac{\partial^i}{\partial t^i} \mathbf{F}((\mathbf{r}^* - \mathbf{b})\mathbf{Q}^\top, t),$$

mikä osoittaa, että ne ovat kenttiä.

Aikaderivaatalle saadaan edelleen—tuttujen osittaisderivoitukaavojen lisäksi—mm. seuraavat peruserivoitukaavat, jotka ovat todettavissa suoralla laskulla:

$$\begin{aligned} (1) \quad & \frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{F} \bullet \mathbf{G}) = \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial t} \bullet \mathbf{G} + \mathbf{F} \bullet \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial t} \\ (2) \quad & \frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{F} \times \mathbf{G}) = \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial t} \times \mathbf{G} + \mathbf{F} \times \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial t} \\ (3) \quad & \frac{\partial}{\partial t} (f\mathbf{F}) = \frac{\partial f}{\partial t} \mathbf{F} + f \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial t} \\ (4) \quad & \frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{F} \bullet \mathbf{G} \times \mathbf{H}) = \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial t} \bullet \mathbf{G} \times \mathbf{H} + \mathbf{F} \bullet \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial t} \times \mathbf{H} + \mathbf{F} \bullet \mathbf{G} \times \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} \\ (5) \quad & \frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{F} \times (\mathbf{G} \times \mathbf{H})) = \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial t} \times (\mathbf{G} \times \mathbf{H}) + \mathbf{F} \times \left(\frac{\partial \mathbf{G}}{\partial t} \times \mathbf{H} \right) + \mathbf{F} \times \left(\mathbf{G} \times \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} \right) \end{aligned}$$

Toisenlainen aikariippuvuus koordinaattiesityksessä syntyy, kun koordinaatisto liikkuu. Jos esitys alunperin on $f(\mathbf{r})$ (skalaarikenttä) tai $\mathbf{F}(\mathbf{r})$ (vektorikenttä) kiinteässä koordinaatistossa, niin hetkellä t on käytössä koordinaatistomuunnos $\mathbf{r}^*(t) = \mathbf{r}\mathbf{Q}(t) + \mathbf{b}(t)$ ja kenttien esitykset ovat

$$f^*(\mathbf{r}^*, t) = f((\mathbf{r}^*(t) - \mathbf{b}(t))\mathbf{Q}(t)^\top) \quad \text{ja} \quad \mathbf{F}^*(\mathbf{r}^*, t) = \mathbf{Q}(t)^\top \mathbf{F}((\mathbf{r}^*(t) - \mathbf{b}(t))\mathbf{Q}(t)^\top).$$

Huomaa, että tässä kentät ovat stationäärisiä, aikariippuvuus syntyy koordinaatiston liikkeestä ja se on vain koordinaattiesityksessä. Vastaavalla tavalla aikariippuville kentille $f(\mathbf{r}, t)$ sekä $\mathbf{F}(\mathbf{r}, t)$ saadaan liikkuvassa koordinaatistossa esitykset

$$f^*(\mathbf{r}^*, t) = f((\mathbf{r}^*(t) - \mathbf{b}(t))\mathbf{Q}(t)^\top, t) \quad \text{ja} \quad \mathbf{F}^*(\mathbf{r}^*, t) = \mathbf{Q}(t)^\top \mathbf{F}((\mathbf{r}^*(t) - \mathbf{b}(t))\mathbf{Q}(t)^\top, t).$$

Nyt osa koordinaattiesityksen aikariippuvuudesta tulee kentistä, osa koordinaatiston liikkeestä.

”The intuitive picture of a smooth surface becomes analytic with the concept of a manifold. On the small scale a manifold looks like Euclidean space, so that infinitesimal operations like differentiation may be defined on it.”

(W. THIRRING: *A Course in Mathematical Physics*)

Luku 2

MONISTO

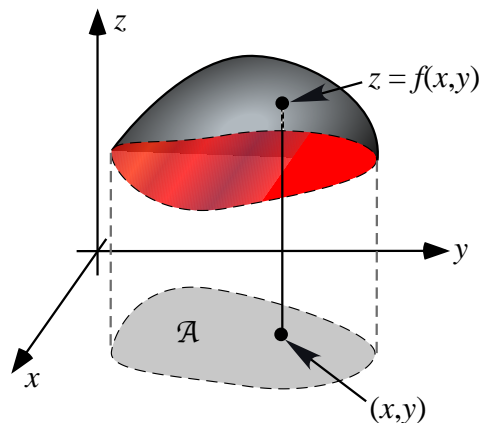
2.1 Funktion kuvaaja

Funktion $f : \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{R}^m$, missä $\mathcal{A} \subseteq \mathbb{R}^k$ on avoin joukko, *kuvaaja* (engl. graph) on \mathbb{R}^{k+m} :n osajoukko

$$\{(\mathbf{r}, \mathbf{f}(\mathbf{r})) \mid \mathbf{r} \in \mathcal{A}\}.$$

Kuvaajaa merkitään usein hieman epätarkalla tavalla: $s = \mathbf{f}(\mathbf{r})$ ($\mathbf{r} \in \mathcal{A}$). Tässä \mathbf{r} on ns. *aktiivinen muuttuja* ja s ns. *passiivinen muuttuja*. Yllä aktiiviset muuttujat edeltävät komponenttijärjestyksessä passiivisia muuttujia. Kuvaajaksi katsotaan myös sellainen osajoukko, jossa nämä muuttujat ovat sekaisin. Kuvaaja on *sileyä*¹, jos f on jatkuvasti derivoituva määrittelyalueessa \mathcal{A} . Huomaa, että kuvaaja määritellään nimenomaan tietyn koordinaatiston avulla ja on koordinaattoriippuvainen.

Tuttu kuvaaja on välillä (a, b) määritellyn yhden muuttujan reaaliarvoisen funktion f kuvaaja eli parien $(x, f(x))$ ($a < x < b$) muodostama \mathbb{R}^2 :n osajoukko eli viiva $y = f(x)$. Samoin on kahden muuttujan x ja y reaaliarvoisen funktion f kuvaajapinta $z = f(x, y)$ ($(x, y) \in \mathcal{A}$) avaruudessa \mathbb{R}^3 :



Kaikki viivat tai pinnat eivät ole kuvaajia, esimerkiksi ympyränkehä tai pallonpinta ei ole kuvaaja (miksei?).

Tavallisimmat dimensiot k ja m ovat tietysti fyysikaalisten paikkakoordinaattien ja ajan antamat 1, 2 ja 3, jolloin $k + m$ on 2, 3 tai 4. Mekaanisten ym. systeemien vapausasteiden antamat dimensiot voivat toisaalta olla hyvinkin korkeita. Rajatapauksena sallitaan myös $m = 0$. Silloin

¹Joissain teksteissä vaaditaan sileydeltä, että kaikkien kertalukujen kaikki osittaisderivaatat ovat jatkuvina ole-massa.

\mathbb{R}^m :ssä eli \mathbb{R}^0 :ssa on vain yksi alkio (ns. tyhjä vektori (\emptyset)), $\mathbb{R}^{k+m} = \mathbb{R}^k$, kaikki muuttujat ovat aktiivisia ja funktion $f : \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{R}^m$ kuvaaja on \mathcal{A} . Avaruuden avoimet joukot ovat siis aina kuvaajia. Vastaavasti sallitaan $k = 0$. Silloin f :llä ei ole muuttujia, joten se on vakio ja kuvaaja on yksi piste.² Sopimuksen mukaan nämä kuvaajat ovat myös sileitä.

Jatkossa tarvitaan myös joukkojen käänteiskuvia. Funktiolle $g : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ joukon \mathcal{C} käänteiskuva on joukko

$$g^{-1}(\mathcal{C}) = \{\mathbf{r} \mid g(\mathbf{r}) \in \mathcal{C}\}.$$

(Huomaa, ettei tällä ole mitään tekemistä käänteisfunktion kanssa, funktiolla g ei tarvitse olla käänteisfunktiota lainkaan.) Jatkuvalle avoimessa joukossa määritellylle funktiolle avoimen joukon käänteiskuva on avoin.³ Tästä saadaan tärkeä kuvaajien ominaisuus:

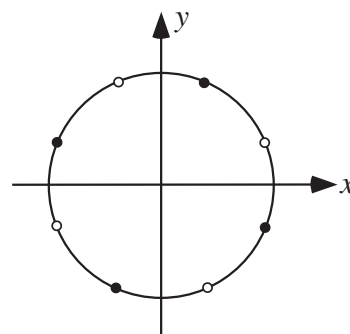
Lause 2.1. *Jos sileää funktion kuvaajaa leikataan avoimella joukolla, niin tulos on sileä kuvaaja tai tyhjä joukko.*

Todistus. Asia on selvä jos leikkaus on tyhjä joukko, ja samoin jos $k = 0$ (leikkaus on piste) tai $m = 0$ (kahden avoimen joukon leikkaus on avoin). Muussa tapauksessa kuvaajan $s = f(\mathbf{r})$ ($\mathbf{r} \in \mathcal{A}$) ja avoimen joukon \mathcal{B} leikkaus saadaan kuvaajana $s = f(\mathbf{r})$ ($\mathbf{r} \in \mathcal{C}$), missä \mathcal{C} on \mathcal{B} :n käänteiskuva jatkuvassa kuvauksessa $g(\mathbf{r}) = (\mathbf{r}, f(\mathbf{r}))$. \square

2.2 Monisto

\mathbb{R}^n :n osajoukko \mathcal{M} on k -ulotteinen *monisto* (engl. manifold), jos se on lokaalisti jonkin k :n muuttujan funktion sileä kuvaaja.⁴ ”Lokaalisti” tarkoittaa sitä, että jokaista \mathcal{M} :n pistettä \mathbf{p} kohti on sellainen \mathbb{R}^n :n avoin joukko $\mathcal{B}_{\mathbf{p}}$, jossa on piste \mathbf{p} , että $\mathcal{M} \cap \mathcal{B}_{\mathbf{p}}$ on joidenkin k :n muuttujan funktion $f_{\mathbf{p}}$ sileä kuvaaja. Eri pisteille \mathbf{p} joukko $\mathcal{B}_{\mathbf{p}}$ voi olla hyvinkin erilainen, muuttujat voidaan valita eri tavalla, mutta niiden lukumäärä on aina k , ja funktio $f_{\mathbf{p}}$ voi olla erilainen. Funktioita $f_{\mathbf{p}}$ kutsutaan *kartoiksi* (engl. chart) ja kaikkien funktioiden joukkoa *atlakseksi* eli *kartastoksi*. Usein luonnollisesti pyritään mahdollisimman suppeaan atlakseen.

Esimerkki. \mathbb{R}^2 :n ympyränkehä on 1-ulotteinen monisto, sillä (ks. kuva ohessa) sen jokainen piste on joko mustien ympyröiden tai valkoisten ympyröiden antamalla avoimella kaarella ja sellaiset ovat funktioiden $y = \pm\sqrt{R^2 - x^2}$ ja $x = \pm\sqrt{R^2 - y^2}$ (atlas) sileitä kuvaajia sopivilla avoimilla väleillä (R on ympyrän säde).



Samaan tapaan päätellen pallonpinta $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ on \mathbb{R}^3 :n 2-ulotteinen monisto. Se on lokaalisti sopivissa avoimissa joukoissa määriteltyjen funktioiden

$$x = \pm\sqrt{R^2 - y^2 - z^2} \quad , \quad y = \pm\sqrt{R^2 - x^2 - z^2} \quad \text{ja} \quad z = \pm\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$$

(atlas) sileä kuvaajapinta.

²Tässä tapauksessa \mathcal{A} on koko avaruus \mathbb{R}^0 , joka on avoin joukko.

³Tämä on itse asiassa jatkuvuuden määritelmä.

⁴Moniston määritelmiä on kirjallisuudessa useita erityyppisiä. Tässä oleva on käytössä mm. kirjoissa HUBBARD & HUBBARD ja NIKOLSKY & VOLOSOV. Monesti niitä kutsutaan tarkemmin ”sileiksi monistoiksi” tai ”differentioituviksi monistoiksi”. Samalla idealla voidaan määritellä myös ns. abstrakteja monistoja, joihin ei tässä mennä.

Luonnollisesti jokainen sileä kuvaaja on itsessään monisto, erityisesti jokainen \mathbb{R}^n :n avoin osajoukko on sen n -ulotteinen monisto ja jokainen yksittäinen piste on 0-ulotteinen monisto. Jos avaruusviiva on sileä kuvaaja, vaikkapa muotoa $(y, z) = (f_1(x), f_2(x))$ ($a < x < b$), missä f_1 ja f_2 ovat jatkuvasti derivoituvia, niin se siis on \mathbb{R}^3 :n 1-ulotteinen monisto. Samoin kuvaajapinta $z = f(x, y)$ ($(x, y) \in \mathcal{A}$) on \mathbb{R}^3 :n monisto, jos f on jatkuvasti derivoituva. Toisaalta esimerkiksi itseisarvofunktion kuvaaja $y = |x|$ ei ole sileä eikä näin ollen \mathbb{R}^2 :n monisto.

Monistoa voidaan aina rajoittaa lokaalimmaksi. Lauseen 2.1 välittömänä seurauksena nimittäin

Lause 2.2. *Jos \mathbb{R}^n :n k -ulotteista monistoa leikataan avoimella joukolla, niin tulos on k -ulotteinen monisto tai tyhjä joukko.*

Huomautus. *Miksi tarvitaan monistoja? Syy on se, että löysästi määriteltyjä viivoja ja pintoja on uskomattoman monenlaisia, eikä niihin pääse mitenkään helposti käsiksi yleisin globaalein menetelmin. On jatkuvia viivoja, jotka täyttävät yksikköneliön kokonaan tai jotka leikkaavat itseään joka pisteessään, on jatkuvia pintoja, joilla ei missään pisteessä ole normaalia, jne. Ainoa keino saada ote asiasta on lokalisoida ja rajoittaa käsitteitä pitäen huolta, ettei sovellettavuutta menetetä. Globaalisten tulosten etsiminen ja todistaminen sen jälkeen onkin sitten hyvin vaativaa topologista ja algebrallista-topologista matematiikkaa.*

2.3 Monistot urina

Eräs tapa määritellä monistoja on määritellä ne ns. *urina* (engl. locus). Ura on yksinkertaisesti tietyt ehdot toteuttavien pisteiden joukko. Esimerkiksi P -keskinen R -säteinen ympyrä on niiden pisteiden ura, joiden etäisyys P :stä on R , ja se on monisto kuten todettiin. Yleisesti ura määritellään koordinaattiesityksen kautta ja ehdot annetaan yhtälömuodossa. Tällainen ehto on muotoa

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}, \mathbf{s}) = \mathbf{0},$$

missä \mathbf{r} on k -ulotteinen, \mathbf{s} on $n - k$ -ulotteinen ja \mathbf{F} on $n - k$ -ulotteinen n :n muuttujan funktio. Ehdon toteuttavien pisteiden ura on muodostuu juuri niistä \mathbb{R}^n :n pisteistä (\mathbf{r}, \mathbf{s}) , jotka sen toteuttavat. Kuten merkinnöistäkin huomaa, ajatus on että \mathbf{r} on eräänlainen aktiivinen muuttuja ja \mathbf{s} eräänlainen passiivinen muuttuja. Vaikka järjestys tässä on ”aktiiviset ensin”, voivat muuttujat olla myös sekaisin yhtälössä ja niiden rooli olla erilainen eri osissa avaruutta, aktiivinen vaihtuu passiiviseksi jne. Ympyränkehä ja pallonpinta ovat juuri tällaisia uria, kun valitaan

$$F(x, y) = R^2 - x^2 - y^2 \quad \text{ja} \quad F(x, y, z) = R^2 - x^2 - y^2 - z^2$$

(origokeskininä ja R -säteisinä). Ympyrällä jompikumpi muuttujista on aina aktiivinen, pallolla kaksi kolmesta muuttujasta.

Kaikki urat eivät ole monistoja. Esimerkiksi ehdon $y - |x| = 0$ toteuttavat \mathbb{R}^2 :n pisteet eivät sitä ole eivätkä myöskään ehdon $y^2 - x^2 = 0$ toteuttavat pisteet. Edellinen ura ei ole sileä ja jälkimmäinen ei ole origossa lokaalisti minkään yhden funktion kuvaaja (vaan kahden: $y = \pm x$). Oikeastaan myöskään esimerkiksi ehdon $(y - x)^2 = 0$ määrittämä ura ei ole monisto, se on suora $y = x$, mutta kaksinkertaisena! Yhtälössä $\mathbf{F}(\mathbf{r}, \mathbf{s}) = \mathbf{0}$ pitäisi \mathbf{F} :n olla varmaankin jotenkin jatkuvasti derivoituva ja toisaalta jotenkin pitäisi varmistaa ratkaisun lokaali yksikäsitteisyys. Klassisessa differentiaalilaskennassa eräs tähän mainiosti sopiva tulos, ns. Implisiittifunktio-lause, on tunnettu kauan. Sen avulla voidaan siirtyä uraehdosta lokaaliin kuvaajaan.

Implisiittifunktio-lause.⁵ *Oletetaan funktiosta $\mathbf{F} : \mathcal{S} \rightarrow \mathbb{R}^{n-k}$, missä $0 \leq k < n$, että*

⁵Implisiittifunktio-lauseita tunnetaan kirjallisuudessa monenlaisina versioina, hieman eri oletuksien ja johtopäätösten.

1. määrittelyjoukko \mathcal{S} on avoin \mathbb{R}^n :n osajoukko,
2. \mathbf{F} on jatkuvasti derivoituva \mathcal{S} :ssä,
3. \mathbf{F}' on täysiranginen \mathcal{S} :n pisteessä \mathbf{p}_0 , ts. sen $n - k$ riviä ovat ko. pisteessä lineaarisesti riippumattomat, jolloin myös jotkut $n - k$ saraketta ovat lineaarisesti riippumattomat, ja että
4. pisteessä \mathbf{p}_0 on $\mathbf{F}(\mathbf{p}_0) = \mathbf{0}$ ja $n - k$ muuttujaa \mathbf{s} vastaavat $\mathbf{F}'(\mathbf{p}_0)$:n sarakkeet ovat lineaarisesti riippumattomat.

Merkitään \mathbf{r} :llä muita muuttujia kuin \mathbf{s} . Silloin on sellainen avoin \mathbb{R}^k :n osajoukko \mathcal{B} , jossa on piste \mathbf{r}_0 , ja sellainen yksikäsitteinen funktio $\mathbf{f} : \mathcal{B} \rightarrow \mathbb{R}^{n-k}$, että

- (i) \mathbf{f} :n kuvaaja sisältyy \mathcal{S} :ään,
- (ii) $\mathbf{p}_0 = (\mathbf{r}_0, \mathbf{f}(\mathbf{r}_0))$ vaihtamalla tarvittaessa muuttujien järjestystä niin, että \mathbf{r} tulee ensin,
- (iii) $\mathbf{F}(\mathbf{r}, \mathbf{f}(\mathbf{r})) = \mathbf{0}$ joukossa \mathcal{B} ,
- (iv) \mathbf{f} on jatkuvasti derivoituva joukossa \mathcal{B} ja

$$\mathbf{f}'(\mathbf{r}) = -\mathbf{F}'_{\mathbf{s}}(\mathbf{r}, \mathbf{f}(\mathbf{r}))^{-1}\mathbf{F}'_{\mathbf{r}}(\mathbf{r}, \mathbf{f}(\mathbf{r})),$$

missä on merkitty \mathbf{F} :n derivaattamatriisia vain muuttujien \mathbf{r} suhteen $\mathbf{F}'_{\mathbf{r}}$:llä ja vain muuttujien \mathbf{s} suhteen $\mathbf{F}'_{\mathbf{s}}$:llä. (Jolloin ilmeisesti $\mathbf{F}' = (\mathbf{F}'_{\mathbf{r}} \mid \mathbf{F}'_{\mathbf{s}})$ lohkomuodossa. Tämä kohta on voimassa vain jos $k > 0$.)

Todistus. Todistus on pitkä ja hankala induktiotodistus, ks. esimerkiksi APOSTOL tai HUBBARD & HUBBARD tai NIKOLSKY & VOLOSOV. Induktion lähtökohta, tapaus $k = 0$, on kuitenkin ilmeinen. Silloin \mathbf{r}_0 on tyhjä vektori ja \mathbf{f} on vakiofunktio \mathbf{p}_0 . Kohdan (iv) derivaattalauseke saadaan implisiittisellä derivoinnilla eli derivoimalla ketjusäännöllä puolittain identiteetti $\mathbf{F}(\mathbf{r}, \mathbf{f}(\mathbf{r})) = \mathbf{0}$ joukossa \mathcal{B} ja ratkaisemalla $\mathbf{f}'(\mathbf{r})$ saadusta yhtälöstä

$$\mathbf{F}'_{\mathbf{r}}(\mathbf{r}, \mathbf{f}(\mathbf{r})) + \mathbf{F}'_{\mathbf{s}}(\mathbf{r}, \mathbf{f}(\mathbf{r}))\mathbf{f}'(\mathbf{r}) = \mathbf{0}. \quad \square$$

Implisiittifunktiolauseesta (ja Lauseesta 2.1) saadaan seurauksena välittömästi monistomäärittely uran avulla:

Seuraus 2.3. Jos \mathbb{R}^n :n osajoukon \mathcal{M} jokaista pistettä \mathbf{p}_0 kohti on sellainen joukko \mathcal{S} ja sellainen funktio $\mathbf{F} : \mathcal{S} \rightarrow \mathbb{R}^{n-k}$, että Implisiittifunktiolauseen ehdot 1.–4. toteutuvat ja uraehto $\mathbf{F}(\mathbf{p}) = \mathbf{0}$ määrittää joukon $\mathcal{M} \cap \mathcal{S}$, niin \mathcal{M} on \mathbb{R}^n :n k -ulotteinen monisto.

Käänteinenkin tulos pätee:

Lause 2.4. Jos \mathcal{M} on \mathbb{R}^n :n k -ulotteinen monisto ja $k < n$, niin \mathcal{M} :n jokaista pistettä \mathbf{p}_0 kohti on sellainen joukko \mathcal{S} ja sellainen funktio $\mathbf{F} : \mathcal{S} \rightarrow \mathbb{R}^{n-k}$, että Implisiittifunktiolauseen ehdot 1.–4. toteutuvat ja uraehto $\mathbf{F}(\mathbf{p}) = \mathbf{0}$ määrittää joukon $\mathcal{M} \cap \mathcal{S}$.

Todistus. Katsotaan vain tapaus $k > 0$. (Tapaus $k = 0$ menee samaan tapaan—oikeastaan erikoistapauksena.) Jos \mathcal{M} on \mathbb{R}^n :n k -ulotteinen monisto, niin lokaalisti jossain avoimessa joukossa, jossa on piste \mathbf{p}_0 , se on jonkin jatkuvasti derivoituvan funktion \mathbf{f} kuvaaja $\mathbf{s} = \mathbf{f}(\mathbf{r})$ ($\mathbf{r} \in \mathcal{A}$)

joillekin k :lle muuttujalle \mathbf{r} (aktiiviset muuttujat). Uudelleenjärjestämällä voidaan olettaa, että aktiiviset muuttujat tulevat ensin. Valitaan nyt joukoksi \mathcal{S} karteeminen tulo $\mathcal{A} \times \mathbb{R}^{n-k}$, ts.

$$\mathcal{S} = \{(\mathbf{r}, \mathbf{s}) \mid \mathbf{r} \in \mathcal{A} \text{ ja } \mathbf{s} \in \mathbb{R}^{n-k}\},$$

ja \mathbf{F} :ksi funktio

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}, \mathbf{s}) = \mathbf{s} - \mathbf{f}(\mathbf{r}).$$

Silloin \mathcal{S} on avoin \mathbb{R}^n :n osajoukko (totea!) ja \mathbf{F} on jatkuvasti derivoituva \mathcal{S} :ssä. Edelleen silloin $\mathbf{F}' = (-\mathbf{f}' \mid \mathbf{I}_{n-k})$ on täysiranginen (\mathbf{I}_{n-k} on identiteettimatriisi). \square

Lukuunottamatta n -ulotteisia monistoja, \mathbb{R}^n :n monistot ovat näin tarkalleen ne joukot, jotka ovat lokaalisti uria. Uraesitystä kutsutaan usein *implisiittiseksi esitykseksi* ja määritelmän mukaista esitystä lokaaleina kuvaajina taas *eksplisiittiseksi esitykseksi*.⁶ Erityisesti muotoa

$$\mathbf{G}(\mathbf{p}) = \mathbf{c} \quad \text{eli} \quad \mathbf{G}(\mathbf{p}) - \mathbf{c} = \mathbf{0}$$

olevat ehdot määrittelevät moniston (yo. oletuksin), ns. \mathbf{G} :n *tasa-arvomoniston* (engl. level manifold).

Esimerkki. \mathbb{R}^3 :n 2-ulotteiset monistot ovat sileitä pintoja. Lokaalisti tällainen pinta saadaan jonkin ehdon

$$F(x, y, z) = 0$$

määräämänä urana, missä tarkastelujoukossa

$$\mathbf{F}' = \left(\frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y}, \frac{\partial F}{\partial z} \right) \neq \mathbf{0}.$$

Erityisesti muotoa $G(x, y, z) = c$, missä c on vakio, olevien ehtojen antamat pinnat ovat tasa-arvopintoja.

Näin annetuille pinnoille on muuten usein helppoa tarkistaa onko piste $\mathbf{p}_0 = (x_0, y_0, z_0)$ pinnalla vai ei. Lasketaan vain (lokaalisti) $F(x_0, y_0, z_0)$ ja tarkistetaan onko se $= 0$, toki tässäkin voi olla vaikeuksia.

Esimerkki. \mathbb{R}^3 :n 1-ulotteiset monistot ovat avaruusviivoja. Lokaalisti viiva saadaan jonkin ehdon

$$\mathbf{F}(x, y, z) = \mathbf{0} \quad \text{eli} \quad \begin{cases} F_1(x, y, z) = 0 \\ F_2(x, y, z) = 0 \end{cases}$$

antamien pisteiden urana, missä viivalla derivaatta

$$\mathbf{F}' = \begin{pmatrix} F'_1 \\ F'_2 \end{pmatrix}$$

on täysiranginen eli sen kaksi riviä ovat lineaarisesti riippumattomat. Kyseessä on silloin lokaalisti kahden sileän pinnan $F_1(x, y, z) = 0$ ja $F_2(x, y, z) = 0$ (uraehdot, ks. edellinen esimerkki) leikkausviiva. Huomattakoon, että kahden sileän pinnan leikkausviiva ei toisaalta välttämättä ole sileä monisto (viiva), tähän tarvitaan yo. täysirangisuus.

⁶On kolmaskin klassinen esitystapa, ns. parametrinen esitys, vrt. Pykälä 2.5.

2.4 Monistojen kuvaaminen. Koordinaatistoriippumattomuus

Monistoja ”käsitellään” usein kuvaamalla niitä sopivilla funktioilla tavalla tai toisella. Eo. tavalla määritellyille monistoille ei ole kovinkaan helppoa näyttää, että saatu joukko todella on monisto. Parametrisoiduille monistoille se on usein helpompaa, ks. seuraava pykälä. Käänteiskuvat ovat toisaalta usein yhtä käyttökelpoisia.

Lause 2.5. *Jos \mathcal{M} on \mathbb{R}^n :n k -ulotteinen monisto, joka sisältyy avoimeen joukkoon \mathcal{B} , \mathcal{A} on \mathbb{R}^m :n avoin osajoukko, $m \geq n$ ja $\mathbf{g} : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ on sellainen jatkuvasti derivoituva funktio, että sen derivaatta \mathbf{g}' on täysiranginen eli sen rivit ovat lineaarisesti riippumattomat, niin käänteiskuva $\mathbf{g}^{-1}(\mathcal{M})$ on $m - n + k$ -ulotteinen \mathbb{R}^m :n monisto.*

Todistus. Tapaus $k = n$ on selvä. Silloin \mathcal{M} on \mathbb{R}^n :n avoin joukko ja sen käänteiskuva $\mathbf{g}^{-1}(\mathcal{M})$ on \mathbb{R}^m :n avoin joukko eli \mathbb{R}^m :n m -ulotteinen monisto.

Siirrytään sitten tapaukseen $k < n$. Otetaan tarkasteltavaksi $\mathbf{g}^{-1}(\mathcal{M})$:n mielivaltainen piste \mathbf{r}_0 , jolloin siis $\mathbf{g}(\mathbf{r}_0) \in \mathcal{M}$. Lokaalisti pisteen $\mathbf{p}_0 = \mathbf{g}(\mathbf{r}_0)$ lähellä monisto \mathcal{M} on määriteltävissä urana, Lauseen 2.4 nojalla. Tarkemmin sanoen on sellainen \mathbb{R}^n :n avoin osajoukko \mathcal{S} ja funktio $\mathbf{F} : \mathcal{S} \rightarrow \mathbb{R}^{n-k}$, että Implisiittilauseen ehdot 1.–4. toteutuvat. Jatkuvalle avoimessa joukossa määritellylle funktiolle avoimen joukon käänteiskuva on avoin, joten $\mathbf{g}^{-1}(\mathcal{S})$ on avoin. Ehto

$$\mathbf{F}(\mathbf{g}(\mathbf{r})) = \mathbf{0}$$

määrittää lokaalina urana ilmeisestikin joukkoa $\mathbf{g}^{-1}(\mathcal{M})$. Avoimessa joukossa $\mathbf{g}^{-1}(\mathcal{S})$ yhdistetty funktio $\mathbf{F} \circ \mathbf{g}$ toteuttaa nyt Implisiittifunktiolauseen ehdot 1.–4., sillä sen derivaatta on ketjusäännön nojalla

$$(\mathbf{F} \circ \mathbf{g})'(\mathbf{r}_0) = \mathbf{F}'(\mathbf{g}(\mathbf{r}_0))\mathbf{g}'(\mathbf{r}_0) = \mathbf{F}'(\mathbf{p}_0)\mathbf{g}'(\mathbf{r}_0)$$

ja se on täysiranginen. Näin ollen Seurauksen 2.3 mukaan $\mathbf{g}^{-1}(\mathcal{M})$ on \mathbb{R}^m :n monisto ja sen ulotteisuus on $m - (n - k)$ (\mathbf{r} :n ulotteisuus miinus \mathbf{F} :n ulotteisuus). \square

Tähän mennessä ei ole otettu kantaa monistojen koordinaatistoriippuvuuteen. Monisto on määritelty aina tietyn koordinaatiston avulla ja koordinaatistosta toiseen päästään luonnollisesti koordinaattimuunnoksilla. Mutta onko yhdessä koordinaatistossa määritelty monisto enää määritelmän mukainen monisto, jos se esitetään jossain toisessa koordinaatistossa, ja säilyykö ulotteisuus? Lauseen 2.5 seurauksena vastaus on myönteinen. Jos nimittäin koordinaattimuunnos on

$$\mathbf{r}^* = \mathbf{r}\mathbf{Q} + \mathbf{b},$$

niin valitaan vain lauseessa $m = n$ ja

$$\mathbf{g}(\mathbf{r}^*) = (\mathbf{r}^* - \mathbf{b})\mathbf{Q}^T.$$

Silloin koordinaateissa \mathbf{r}^* esitettynä monisto \mathcal{M} on koordinaateissa \mathbf{r} esitetyn version käänteiskuva ja siten monisto myös uusissa koordinaateissa. Ulotteisuuskin säilyy. *Se, että joukko on k -ulotteinen monisto yksissä koordinaateissa takaa, että se on sitä myös muissa koordinaateissa.* ”Monistoisuus” on koordinaatistoriippumaton ominaisuus.

2.5 Moniston parametrisointi

Mikäli monisto onnistutaan parametrisoimaan, sen käsittely on monissa suhteissa helpompaa.⁷ Esimerkiksi moniston yli otettujen integraalien määrittely ja käsittely on tällöin huomattavasti yksinkertaisempaa.

\mathbb{R}^n :n k -ulotteisen moniston \mathcal{M} parametrisointi⁸ muodostuu \mathbb{R}^k :n avoimesta osajoukosta \mathcal{U} (ns. *parametrialue*) sekä jatkuvasti derivoituvasta bijektiivisestä funktiosta $\gamma : \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{M}$, jonka derivaatta γ' on täysiranginen. Derivaatta γ' on siis $n \times k$ -matriisi, jonka sarakkeet ovat lineaarisesti riippumattomat. Ko. sarakkeet tulkitaan yleensä vektoreiksi. (Tässä luonnollisesti oletetaan, että $k > 0$.)

Ilmeisesti, jos monisto on jonkin funktion kuvaaja, ts. $\mathbf{s} = \mathbf{f}(\mathbf{r})$ ($\mathbf{r} \in \mathcal{A}$), se on parametrisoitu, valitaan vain $\mathcal{U} = \mathcal{A}$ ja $\gamma(\mathbf{r}) = (\mathbf{r}, \mathbf{f}(\mathbf{r}))$. Myöskin \mathbb{R}^n :n n -ulotteinen monisto eli avoin osajoukko \mathcal{A} on luonnollisella tavalla parametrisoitu, valitaan parametrialueeksi itse \mathcal{A} ja γ :ksi identiteettikuvaus. Toisaalta se voidaan parametrisoida muullakin tavoin.

Esimerkki. Ympyrä $\mathcal{Y} : x^2 + y^2 = R^2$ on \mathbb{R}^2 :n 1-ulotteinen monisto, joka ei ole parametrisoitavissa. Tämän näyttämiseksi tehdään vastaoletus, jonka mukaisesti \mathcal{Y} on parametrisoitavissa. Parametrialue \mathcal{U} on silloin reaaliakselin avoin joukko, ts. se muodostuu erillisistä avoimista väleistä. Otetaan tarkasteltavaksi jokin näistä väleistä, sanotaan (a, b) (missä voi olla $a = -\infty$ ja/tai $b = \infty$). Kun välin (a, b) piste u liikkuu kohden a :ta, ympyrällä vastaava piste $\gamma(u)$ liikkuu kehällä jompaan kumpaan suuntaan. Se ei voi pysähtyä paikalleen eikä kääntyä takaisin, koska γ on bijektio. Näin ollen \mathcal{Y} :ssä on myös raja-arvopiste

$$\mathbf{p} = \lim_{u \rightarrow a^+} \gamma(u).$$

Mutta nyt \mathcal{U} :ssa ei voi olla sellaista pistettä v , että $\mathbf{p} = \gamma(v)$. Tällainen piste olisi jollain \mathcal{U} :n muodostavista avoimista väleistä ja—samalla tavoin kuin edellä—voidaan päätellä, että kyllin lyhyt avoin väli $(v - \epsilon, v + \epsilon)$ kuvautuu avoimeksi ympyrän \mathcal{Y} kaareksi, jolla on piste \mathbf{p} , eikä γ näin olisi bijektiivinen.

Jos sen sijaan jätetään ympyrästä pois yksi piste, sanotaan piste $(R, 0)$, se on edelleen monisto (miksi?) ja parametrisoitavissa tutulla napakulmalla ϕ :

$$(x, y) = \gamma(\phi) = (R \cos \phi, R \sin \phi) \quad (0 < \phi < 2\pi).$$

Nyt $\gamma(\phi) = (R \cos \phi, R \sin \phi)$ on jatkuvasti derivoituva bijektio ja $\gamma'(\phi) = (-R \sin \phi, R \cos \phi)^T$ on aina $\neq \mathbf{0}$. Käänteiskuvaus saadaan helposti:

$$\phi = \text{atan}(x, y),$$

missä atan on kahden muuttujan arkustangentti eli arkustangentti, jossa kvadrantti ja arvot akseleilla tulevat oikein, ts.

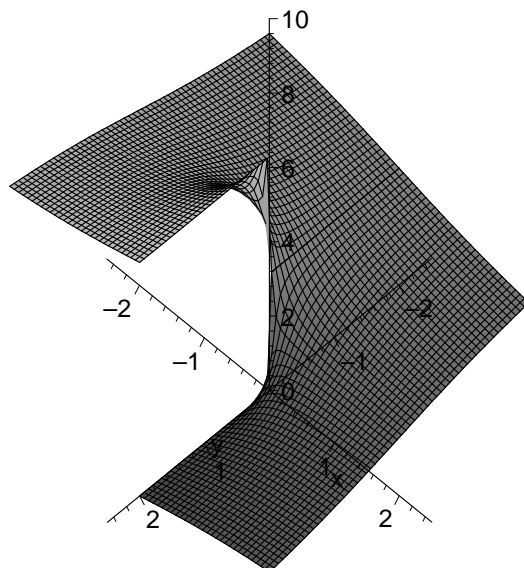
$$\text{atan}(x, y) = \begin{cases} \arctan \frac{y}{x}, & \text{kun } x > 0 \text{ ja } y \geq 0 \\ 2\pi + \arctan \frac{y}{x}, & \text{kun } x > 0 \text{ ja } y < 0 \\ \pi + \arctan \frac{y}{x}, & \text{kun } x < 0 \\ \frac{\pi}{2}, & \text{kun } x = 0 \text{ ja } y > 0 \\ \frac{3\pi}{2}, & \text{kun } x = 0 \text{ ja } y < 0. \end{cases}$$

⁷Monissa teksteissä monisto suorastaan määritellään yleistä lokaalia bijektiivistä parametrisointia käyttäen, ks. esimerkiksi SPIVAK tai O'NEILL. Tällöin tarvitaan ns. transitioehdot takaamaan, että karttafunktiot sopivat yhteen. Myöskin tässä käytetty moniston määrittely on lokaali parametrisointi, mutta se ei ole yleinen sellainen.

⁸Usein puhutaan sileästä parametrisoinnista.

Se löytyy muodossa tai toisessa kutakuinkin kaikista ohjelmistoista. atan muuten on jatkuva ja jatkuvasti derivoituvakin—ei-negatiivista x -akselia tietysti lukuunottamatta, ks. kuva alla (Maple)—sillä (totea!)

$$\frac{\partial \operatorname{atan}(x, y)}{\partial x} = -\frac{y}{x^2 + y^2} \quad \text{sekä} \quad \frac{\partial \operatorname{atan}(x, y)}{\partial y} = \frac{x}{x^2 + y^2}.$$



Myöskään pallo $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ ei ole parametrisoitavissa. Jos jätetään pois puoliympyrän kaari $x^2 + z^2 = R^2, y = 0, x \geq 0$, saadaan monisto, jonka parametrisointi on mahdollista tutuilla pallokoordinaateilla:

$$(x, y, z) = \gamma(\theta, \phi) = (R \sin \theta \cos \phi, R \sin \theta \sin \phi, R \cos \theta)$$

ja parametrialue on avoin suorakulmio $\mathcal{U} : 0 < \theta < \pi, 0 < \phi < 2\pi$. Derivaattamatriisi

$$\gamma'(\theta, \phi) = \begin{pmatrix} R \cos \theta \cos \phi & -R \sin \theta \sin \phi \\ R \cos \theta \sin \phi & R \sin \theta \cos \phi \\ -R \sin \theta & 0 \end{pmatrix}$$

on täysiranginen ja käänteiskuvauskin on jälleen helppo löytää:

$$\begin{cases} \theta = \arccos \frac{z}{R} \\ \phi = \operatorname{atan}(x, y). \end{cases}$$

Esimerkki. Yleinen sileän avaruusviivan parametrisointi on muotoa $\mathbf{r} = \gamma(u)$ ($u \in \mathcal{U}$), missä \mathcal{U} on avoin väli. (Periaatteessa parametrialue voisi muodostua useastakin avoimesta välistä, mutta tällöin viiva voitaisiin vastaavasti jakaa osiin.) Tällöin γ on jatkuvasti derivoituva ja $\gamma' \neq \mathbf{0}$, mikä takaa, että viivalla on joka pisteessään tangentti.

Esimerkki. Yleinen sileän pinnan parametrisointi on muotoa $\mathbf{r} = \gamma(\mathbf{u})$ ($\mathbf{u} \in \mathcal{U}$), missä \mathcal{U} on avoin \mathbb{R}^2 :n osajoukko. Edelleen γ on jatkuvasti derivoituva ja γ' on täysiranginen, ts. sen kaksi saraketta ovat lineaarisesti riippumattomat. Tämä takaa, että pinnalla on joka pisteessään normaalivektori (mainittujen sarakkeiden ristitulon antama vektori).

Parametrisointi on siis rajoitetumpi kuin eo. moniston määrittely. Toisaalta sen avulla on helpompi käsitellä monistoja. Integroinnissa parametrisoinnin rajoitukset voidaan paljolti jättää huomiotta, sillä ne kohdistuvat joukkoihin, joilla ei ole vaikutusta integraalien arvoihin, kuten tullaan näkemään. Todetaan vielä, että jos joukko on onnistuttu parametrisoimaan, niin se on monisto tietyssä lokaalissa mielessä.

Lause 2.6. Jos $\mathcal{M} \subseteq \mathbb{R}^n$, \mathcal{U} on \mathbb{R}^k :n avoin joukko, $\mathbf{u}_0 \in \mathcal{U}$ ja on jatkuvasti derivoituva bijektiivinen funktio $\gamma : \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{M}$, jonka derivaatta γ' on täysiranginen, niin on sellainen \mathcal{U} :n avoin osajoukko \mathcal{V} , että $\mathbf{u}_0 \in \mathcal{V}$ ja $\gamma(\mathcal{V})$ on \mathbb{R}^n :n k -ulotteinen monisto.

Todistus. Otetaan tarkasteltavaksi \mathcal{M} :n piste

$$\mathbf{p}_0 = \gamma(\mathbf{u}_0).$$

Silloin $\gamma'(\mathbf{u}_0)$:n sarakkeet ovat lineaarisesti riippumattomat ja sen jotkut k riviä ovat myös lineaarisesti riippumattomat. Tarvittaessa uudelleenjärjestämällä voidaan olettaa, että nämä rivit ovat $\gamma'(\mathbf{u}_0)$:n k ensimmäistä riviä.

Katsotaan ensin tapaus, missä $k < n$. Merkitään nyt \mathcal{M} :n yleiselle pisteelle $\mathbf{p} = (\mathbf{r}, \mathbf{s})$, missä \mathbf{r} :ssä ovat k ensimmäistä komponenttia. Merkitään edelleen γ_1 :llä funktiota, joka saadaan ottamalla γ :sta k ensimmäistä komponenttia, ja $\mathbf{r}_0 = \gamma_1(\mathbf{u}_0)$. Merkitään vielä γ_2 :lla funktiota, joka saadaan ottamalla γ :sta $n - k$ viimeistä komponenttia. Avoimessa joukossa $\mathcal{S} = \mathcal{U} \times \mathbb{R}^k$ (vrt. Lauseen 2.4 todistus) määritelty funktio

$$\mathbf{F}(\mathbf{u}, \mathbf{r}) = \mathbf{r} - \gamma_1(\mathbf{u})$$

toteuttaa silloin Implisiittifunktiolauseen ehdot 1.–4. Näin ollen on jossain avoimessa joukossa \mathcal{B} määritelty jatkuvasti derivoituva funktio $\mathbf{g} : \mathcal{B} \rightarrow \mathbb{R}^k$, jonka kuvaaja $\mathbf{u} = \mathbf{g}(\mathbf{r})$ sisältyy \mathcal{S} :ään ja jolle

$$\mathbf{r} = \gamma_1(\mathbf{g}(\mathbf{r})).$$

Karttafunktio \mathbf{f} pisteessä \mathbf{p}_0 saadaan silloin valitsemalla

$$\mathbf{f}(\mathbf{r}) = \gamma_2(\mathbf{g}(\mathbf{r})).$$

Edelleen valitaan $\mathcal{V} = \gamma_1^{-1}(\mathcal{B})$, joka on avoin joukko. (Ja missä tarvitaankaan γ :n bijektiivisyys?)

Tapaus $k = n$ menee samaan tapaan. Avoimessa joukossa $\mathcal{S} = \mathcal{U} \times \mathbb{R}^n$ määritelty funktio

$$\mathbf{F}(\mathbf{u}, \mathbf{p}) = \mathbf{p} - \gamma(\mathbf{u})$$

toteuttaa silloin Implisiittifunktiolauseen ehdot 1.–4. Näin ollen on jokin avoin joukko \mathcal{B} , jossa on piste \mathbf{p}_0 , ja jatkuvasti derivoituva funktio $\mathbf{g} : \mathcal{B} \rightarrow \mathbb{R}^n$, jonka kuvaaja $\mathbf{u} = \mathbf{g}(\mathbf{p})$ sisältyy \mathcal{S} :ään ja jolle

$$\mathbf{p} = \gamma(\mathbf{g}(\mathbf{p})).$$

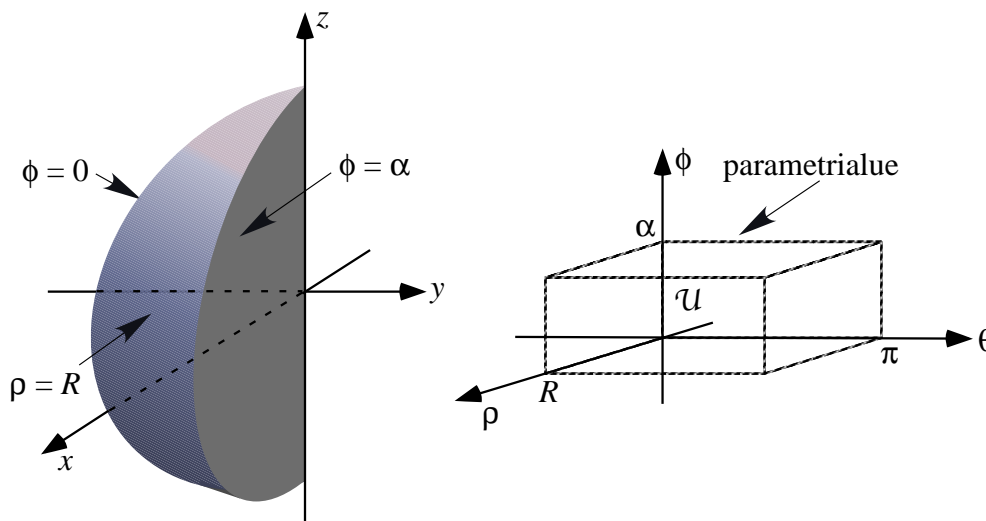
Näin ollen $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{M}$. Jälleen valitaan $\mathcal{V} = \gamma^{-1}(\mathcal{B})$, joka on avoin joukko. □

Moniston \mathcal{M} parametrisointi funktiolla $\gamma : \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{M}$ voidaan vaihtaa haluttaessa toiseksi seuraavalla tavalla, ns. *uudelleenparametrisointi*. Etsitään uusi parametrialue $\mathcal{V} \subseteq \mathbb{R}^k$ ja sellainen jatkuvasti derivoituva bijektiivinen funktio $\eta : \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{U}$, että sen derivaatta η' on ei-singulaarinen. Uusi parametrisointi tapahtuu silloin yhdistetyllä funktiolla $\gamma \circ \eta$, ts. muodossa $\mathbf{r} = \gamma(\eta(\mathbf{v}))$ ($\mathbf{v} \in \mathcal{V}$). Kyseessä on todellakin parametrisointi, sillä ketjusäännön nojalla $\gamma \circ \eta$ on jatkuvasti derivoituva ja sen derivaatta $\gamma'(\eta(\mathbf{v}))\eta'(\mathbf{v})$ on täysiranginen. Myöskin \mathbb{R}^n :n n -ulotteiset monistot eli avoimet joukot kannattaa toisinaan uudelleenparametrisoida.

Esimerkki. \mathbb{R}^3 :n 3-ulotteisia monistoja eli avoimia joukkoja (eli ”kappaleita”) esitetään usein parametrisoituina muutenkin kuin vain triviaalilla tavalla identiteettifunktiolla. Tuttuja tällaisia parametrisointeja ovat esitykset sylinteri- tai pallokoordinaattien avulla. Esimerkiksi alla olevan kuvan pallonviipale (avoimena joukkona) voidaan parametrisoida pallokoordinaateilla:

$$(x, y, z) = \gamma(\rho, \theta, \phi) = (\rho \sin \theta \cos \phi, \rho \sin \theta \sin \phi, \rho \cos \theta)$$

ja parametrialue on avoin suorakulmio $\mathcal{V} : 0 < \rho < R, 0 < \theta < \pi, 0 < \phi < \alpha$.



Moniston eri parametrisoinnit voivat tulla ”omia teitään”, ilman että niitä mitenkään uudelleenparametrisoitaisiin toinen toisikseen. Silloinkin tilanne palautuu periaatteessa uudelleenparametrisointiin.

Lause 2.7. Moniston eri parametrisoinnit voidaan aina saada toinen toisistaan uudelleenparametrisoinnilla.

Todistus. Otetaan tarkasteltavaksi tilanne, missä \mathbb{R}^n :n k -ulotteisella monistolla \mathcal{M} on parametrisoinnit

$$\mathbf{r} = \gamma_1(\mathbf{u}) \quad (\mathbf{u} \in \mathcal{U}) \quad \text{ja} \quad \mathbf{r} = \gamma_2(\mathbf{v}) \quad (\mathbf{v} \in \mathcal{V}).$$

Sopiva ehdokas uudelleenparametrisoivaksi kuvaukseksi on ilmeisestikin $\eta = \gamma_1^{-1} \circ \gamma_2$, jolloin saadaan parametrin vaihto $\mathbf{u} = \gamma_1^{-1}(\gamma_2(\mathbf{v}))$.

Tämä η on bijektiivinen, pitää vain näyttää, että se on jatkuvasti derivoituva. Tätä varten määritellään ensin funktio

$$\mathbf{G}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \gamma_1(\mathbf{u}) - \gamma_2(\mathbf{v}).$$

Silloin sen derivaatan \mathbf{G}' muuttujia \mathbf{u} vastaavat sarakkeet eli γ_1' ovat lineaarisesti riippumattomat. Otetaan tarkasteltavaksi \mathcal{M} :n piste $\mathbf{r}_0 = \gamma_1(\mathbf{u}_0) = \gamma_2(\mathbf{v}_0)$. Koska $\gamma_1'(\mathbf{u}_0)$:n k saraketta ovat lineaarisesti riippumattomat, myöskin $\gamma_1'(\mathbf{u}_0)$:n jotkut k riviä ovat lineaarisesti riippumattomat. Poimitaan \mathbf{G} :stä vastaavat k komponenttia ja muodostetaan niistä funktio \mathbf{F} . Avoimessa joukossa $\mathcal{S} = \mathcal{U} \times \mathcal{V}$ funktio \mathbf{F} toteuttaa Implisiittifunktiolauseen ehdot 1.–4. ja lauseen lokaalisti antama funktio \mathbf{f} on ilmeisestikin juuri η .

Koska pisteeksi \mathbf{v}_0 käy tässä mikä tahansa \mathcal{V} :n piste, η on näin ollen jatkuvasti derivoituva. Toisaalta η' on myös ei-singulaarinen, sillä $\gamma_2 = \gamma_1 \circ \eta$ ja ketjusäännön nojalla

$$\gamma_2'(\mathbf{v}) = \gamma_1'(\eta(\mathbf{v}))\eta'(\mathbf{v}),$$

ja jos η' olisi jossain \mathcal{V} :n pisteessä vajaananginen, niin samoin olisi γ_2' . □

Parametrisesti esitetty monisto voidaan lokalisoida myös parametrialueen puolella: Otetaan parametrialueen \mathcal{U} avoin osajoukko \mathcal{U}' ja tulkitaan se uudeksi parametrialueeksi. Näin saatu parametrisoitu joukko on jälleen monisto ja sillä on parametriesitys (vrt. Lause 2.6). Itse asiassa tällä tavoin saadaan myös eräänlainen moniston yleistys. Parametrisoidaan joukko \mathcal{N} kuten edellä parametrialueella \mathcal{U} ja funktiolla $\gamma : \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{N}$, joka on jatkuvasti derivoituva ja jonka derivaatta γ' on täysiranginen, mutta ei vaadita, että γ olisi bijektiivinen. Jos nyt jokaista \mathcal{N} :n pistettä \mathbf{p} kohti on sellainen \mathcal{U} :n avoin osajoukko $\mathcal{U}_{\mathbf{p}}$, että

- $\mathbf{p} = \gamma(\mathbf{u})$ jollekin $\mathcal{U}_{\mathbf{p}}$:n pisteelle \mathbf{u} ja
- $\mathcal{U}_{\mathbf{p}}$:lle rajoitettuna γ on bijektiivinen,

niin Lauseen 2.6 mukaisesti $\mathcal{U}_{\mathbf{p}}$:lle rajoitettuna parametrisointi määrittää moniston. Joukko \mathcal{N} ei itsessään kuitenkaan välttämättä ole monisto. Tällaisia yleistettyjä parametrisiä monistoja kutsutaan *ratamonistoiksi* (engl. trajectory manifold). Ratamonisto voidaan uudelleenparametrisoida täsmälleen samalla tavalla kuin monistokin.

Esimerkki. Napakulmalla parametrisoitu \mathbb{R}^2 :n osajoukko

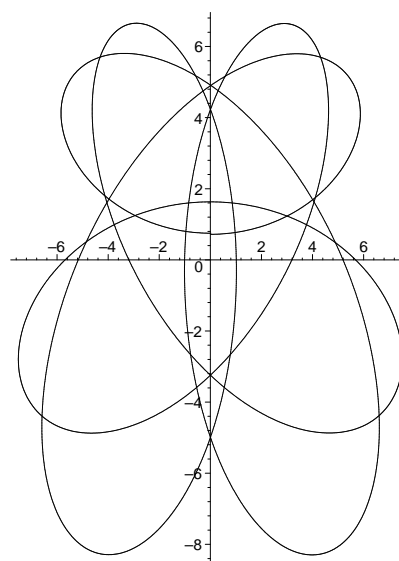
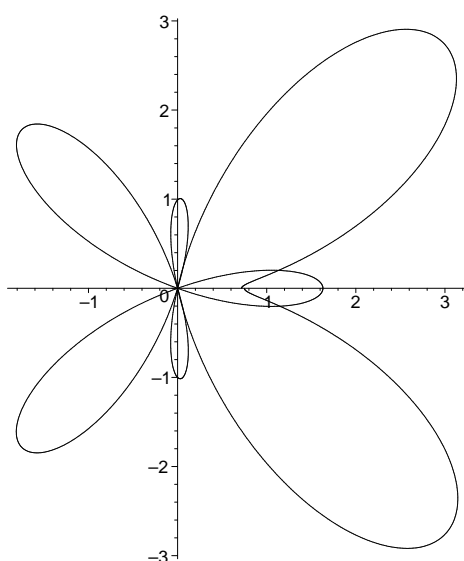
$$(x, y) = \gamma(\phi) = (r(\phi) \cos \phi, r(\phi) \sin \phi) \quad (0 < \phi < 2\pi),$$

missä

$$r(\phi) = e^{\cos \phi} - 2 \cos 4\phi + \sin^5 \frac{\phi}{12},$$

on mutkikas tasoviiva, joka ei ole monisto, koska se kulkee origon kautta kuusi kertaa, ks. kuva alla vasemmalla (Maple). Se on kuitenkin 1-ulotteinen ratamonisto.

Oikeanpuoleinen kuva on puolestaan hodograafiviiva $(x, y) = \gamma'(\phi)^T$ ($0 < \phi < 2\pi$). Se osoittaa, että γ' on täysiranginen (kuvaaja ei kulje origon kautta). Samalla näkyy, että itse asiassa myöskin parametrin arvoa $\phi = 0$ (tai $\phi = 2\pi$) vastaava piste olisi voitu ottaa lokaalisti mukaan. Myös siinä viiva nimittäin olisi sileä. Ilmiö on yleinen napakoordinaattityyppisissä parametrisoinneissa, sillä vaikka atan on epäjatkuva, niin $\sin(\text{atan}(x, y))$ ja $\cos(\text{atan}(x, y))$ ovat jatkuvasti derivoituvia. Samoin, jos parametriväliksi olisi otettu vaikkapa $0 < \phi < 4\pi$ ja mukana olisi myös tuo parametrin arvo $\phi = 2\pi$.



2.6 Tangenttiavaruus

Lokaalisti pisteen \mathbf{p}_0 lähellä \mathbb{R}^n :n k -ulotteinen monisto \mathcal{M} on k muuttujan funktion \mathbf{f} kuvaaja $\mathbf{s} = \mathbf{f}(\mathbf{r})$ \mathbb{R}^n :ssä ja $\mathbf{p}_0 = (\mathbf{r}_0, \mathbf{f}(\mathbf{r}_0))$. Geometrisesti \mathcal{M} :n tangenttiavaruus pisteessä \mathbf{p}_0 muodostuu kaikista niistä tangenttivektoreista \mathbf{p}_0 :ssa, jotka sivuavat siinä \mathcal{M} :ää. Tapaukset $k = n$ ja $k = 0$ käsitellään erikseen. Edellisessä tangenttiavaruus muodostuu kaikista vektoreista, jälkimmäisessä vain nollavektorista. Jatkossa oletetaan, että $0 < k < n$.

Lokaalisti \mathbf{f} on pisteen \mathbf{r}_0 lähellä likimain sama kuin affiini approksimaationsa, ts.

$$\mathbf{f}(\mathbf{r}) \cong \mathbf{f}(\mathbf{r}_0) + (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)\mathbf{f}'(\mathbf{r}_0)^\top.$$

Funktion affiini approksimaatio jossain pisteessä on ko. pisteessä tarkka niin funktion arvon kuin sen derivaatankin osalta. Merkitään $\mathbf{g}(\mathbf{r}) = \mathbf{f}(\mathbf{r}_0) + (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)\mathbf{f}'(\mathbf{r}_0)^\top$ (jolloin $\mathbf{g}'(\mathbf{r}_0) = \mathbf{f}'(\mathbf{r}_0)$). Silloin $\mathbf{s} = \mathbf{g}(\mathbf{r})$ on kuvaaja, joka lokaalisti sivuaa monistoa \mathcal{M} pisteessä \mathbf{p}_0 . Geometrisesti ko. kuvaaja on osa k -ulotteista hypertasoa, alemmissa ulottuvuuksissa osa tasoa tai suoraa.

\mathcal{M} :n tangenttiavaruus pisteessä \mathbf{p}_0 , merkitään $\mathcal{T}_{\mathbf{p}_0}(\mathcal{M})$, muodostuu niistä (tangentti)vektoreista, joiden edustajajanan alkupiste on \mathbf{p}_0 ja loppupiste on kuvaajalla $\mathbf{s} = \mathbf{g}(\mathbf{r})$, ts. se muodostuu tarkalleen kaikista vektoreista

$$\begin{aligned} ((\mathbf{r}, \mathbf{g}(\mathbf{r})) - (\mathbf{r}_0, \mathbf{f}(\mathbf{r}_0)))^\top &= (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0, (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)\mathbf{f}'(\mathbf{r}_0)^\top)^\top \\ &= \begin{pmatrix} (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)^\top \\ \mathbf{f}'(\mathbf{r}_0)(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)^\top \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{I}_k \\ \mathbf{f}'(\mathbf{r}_0) \end{pmatrix} (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)^\top, \end{aligned}$$

missä $\mathbf{r} \in \mathbb{R}^k$ ja \mathbf{I}_k on identiteettimatriisi. Mukana on erityisesti $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0$, joten nollavektori on tangenttiavaruudessa. Ko. tangenttiavaruus on siis vektoriarvoisen vektorimuuttujan \mathbf{h} funktion $\mathbf{T}(\mathbf{h}) = \mathbf{f}'(\mathbf{r}_0)\mathbf{h}$ kuvaaja. Ilmeisesti \mathbf{T} on lineaarinen funktio ja $\mathbf{f}'(\mathbf{r}_0)$ on sen määrittävä matriisi käytetyssä kannassa. Huomaa, että kuvaajan $\mathbf{s} = \mathbf{f}(\mathbf{r})$ vaihtaminen toiseen kuvaajaan $\mathbf{t} = \mathbf{h}(\mathbf{u})$ vastaa lokaalista uudelleenparametrisointia $\mathbf{u} = \boldsymbol{\eta}(\mathbf{r})$ ja tangenttiavaruuden kannan vaihtoa matriisilla $\boldsymbol{\eta}'(\mathbf{r}_0)$ (vrt. Lause 2.7 ja sen todistus). Itse avaruus pysyy samana.

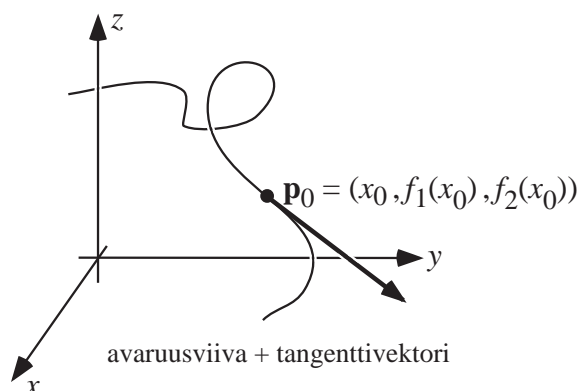
Esimerkki. Sileä avaruusviiva eli \mathbb{R}^3 :n 1-ulotteinen monisto \mathcal{M} on lokaalisti kuvaaja

$$(y, z) = \mathbf{f}(x) = (f_1(x), f_2(x))$$

(tai toinen niistä kahdesta muusta vaihtoehdosta). \mathcal{M} :n tangenttiavaruus sen pisteessä $\mathbf{p}_0 = (x_0, y_0, z_0)$, missä $(y_0, z_0) = \mathbf{f}(x_0)$, muodostuu silloin tarkalleen kaikista vektoreista

$$\begin{pmatrix} h \\ f_1'(x_0)h \\ f_2'(x_0)h \end{pmatrix} \quad (h \in \mathbb{R}).$$

Geometrisesti vektorit ovat siis suoralla $\mathbf{r} = t\mathbf{v}$ ($t \in \mathbb{R}$), missä $\mathbf{v} = (1, f_1'(x_0), f_2'(x_0))$.

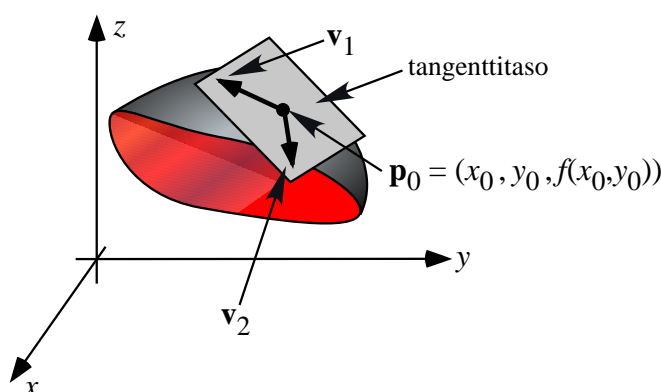


Esimerkki. Sileä pinta \mathbb{R}^3 :ssa on 2-ulotteinen monisto \mathcal{M} . Lokaalisti \mathcal{M} on kuvaaja $z = f(x, y)$ (tai sitten toinen kahdesta muusta vaihtoehdosta). \mathcal{M} :n tangentiavaruus pisteessä $\mathbf{p}_0 = (x_0, y_0, z_0)$, missä $z_0 = f(x_0, y_0)$, muodostuu silloin tarkalleen kaikista vektoreista

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x} & \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} \quad ((h_1, h_2) \in \mathbb{R}^2).$$

Geometrisesti vektorit ovat siis tasolla $\mathbf{r} = t_1 \mathbf{v}_1 + t_2 \mathbf{v}_2$ ($t_1, t_2 \in \mathbb{R}$), missä

$$\mathbf{v}_1 = \left(1, 0, \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x} \right) \quad \text{ja} \quad \mathbf{v}_2 = \left(0, 1, \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y} \right).$$



Entäs jos monisto \mathcal{M} onkin esitetty lokaaleina urina, tarkemmin sanoen lokaalisti ehdon $\mathbf{F}(\mathbf{r}, \mathbf{s}) = \mathbf{0}$ määräämänä urana (olettaen sopiva muuttujajärjestys)? Silloin Seurauksen 2.3 mukaisesti \mathcal{M} saadaan lokaalisti pisteen $\mathbf{p}_0 = (\mathbf{r}_0, \mathbf{s}_0)$ lähellä myös kuvaajana $\mathbf{s} = \mathbf{f}(\mathbf{r})$ ja (katso Implisiittifunktiolause)

$$\mathbf{f}'(\mathbf{r}_0) = -\mathbf{F}'_{\mathbf{s}}(\mathbf{r}_0, \mathbf{f}(\mathbf{r}_0))^{-1} \mathbf{F}'_{\mathbf{r}}(\mathbf{r}_0, \mathbf{f}(\mathbf{r}_0)) \quad , \quad \text{missä } \mathbf{F}' = (\mathbf{F}'_{\mathbf{r}} \mid \mathbf{F}'_{\mathbf{s}}).$$

Tangentiavaruuden $\mathcal{T}_{\mathbf{p}_0}(\mathcal{M})$ muodostavat vektorit

$$\begin{pmatrix} \mathbf{I}_k \\ \mathbf{f}'(\mathbf{r}_0) \end{pmatrix} \mathbf{h}.$$

Mutta nämähän ovat tarkalleen kaikki vektorit $\mathbf{m} = \begin{pmatrix} \mathbf{h} \\ \mathbf{k} \end{pmatrix}$, jotka toteuttavat ehdon

$$\mathbf{F}'_{\mathbf{s}}(\mathbf{r}_0, \mathbf{f}(\mathbf{r}_0))\mathbf{k} + \mathbf{F}'_{\mathbf{r}}(\mathbf{r}_0, \mathbf{f}(\mathbf{r}_0))\mathbf{h} = \mathbf{0} \quad \text{eli} \quad \mathbf{F}'(\mathbf{p}_0)\mathbf{m} = \mathbf{0}.$$

Siispä saadaan

Lause 2.8. Jos monisto \mathcal{M} määräytyy lokaalisti ehdon $\mathbf{F}(\mathbf{p}) = \mathbf{0}$ määräämänä urana pisteen \mathbf{p}_0 lähellä (Seurauksen 2.3 oletuksin), niin tangentiavaruus $\mathcal{T}_{\mathbf{p}_0}(\mathcal{M})$ on matriisin $\mathbf{F}'(\mathbf{p}_0)$ nolla-avaruus.

Käytännössä riittää tietenkin etsiä tangentiavaruudelle (eli nolla-avaruudelle) jokin kanta. Tangentiavaruuden koordinaatistoriippumattomuutta ei ole vielä todettu, mutta lauseen seurauksena

Seuraus 2.9. *Moniston tangentiavaruus on koordinaatistoriippumaton.*

Todistus. Tämä seuraa siitä, että nolla-avaruus on koordinaatistoriippumaton ja että jokainen monisto voidaan esittää lokaalina urana (Lause 2.4). Jos nimittäin merkitään koordinaatistomuunnoksessa $\mathbf{p}^* = \mathbf{p}\mathbf{Q} + \mathbf{b}$

$$\mathbf{F}^*(\mathbf{p}^*) = \mathbf{F}((\mathbf{p}^* - \mathbf{b})\mathbf{Q}^\top) \quad \text{ja} \quad \mathbf{m}^* = \mathbf{Q}^\top \mathbf{m},$$

niin (vrt. Pykälä 1.5)

$$\mathbf{F}^{*\prime}(\mathbf{p}_0^*)\mathbf{m}^* = \mathbf{F}'((\mathbf{p}_0^* - \mathbf{b})\mathbf{Q}^\top)\mathbf{Q}\mathbf{Q}^\top\mathbf{m} = \mathbf{F}'(\mathbf{p}_0)\mathbf{m}.$$

Lisäksi \mathbb{R}^n :n 0-ulotteiset monistot (pisteet) ja n -ulotteiset monistot (avoimet joukot) tietysti ovat koordinaatistoriippumattomia. \square

Esimerkki. Ympyrän $F(x, y) = x^2 + y^2 - R^2 = 0$ tangentiavaruus pisteessä (x_0, y_0) saadaan siis 1×2 -matriisin $F'(x_0, y_0) = (2x_0 \ 2y_0)$ nolla-avaruutena. Se muodostuu sellaisista vektoreista $(h, k)^\top$, että $2x_0h + 2y_0k = 0$ (vrt. suoran yhtälö).

Vastaavasti pallonpinnan $F(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - R^2 = 0$ tangentiavaruus pisteessä (x_0, y_0, z_0) saadaan 1×3 -matriisin $F'(x_0, y_0, z_0) = (2x_0 \ 2y_0 \ 2z_0)$ nolla-avaruutena. Se muodostuu sellaisista vektoreista $(h, k, l)^\top$, että $2x_0h + 2y_0k + 2z_0l = 0$ (vrt. tason yhtälö).

Toisen asteen viivojen ja pintojen tangentiavaruuksia kutsutaan myös polaariavaruuksiksi.

Esimerkki. Yleisestikin implisiittisesti yhtälöllä $F(x, y, z) = 0$ määritellyn \mathbb{R}^3 :n sileän pinnan (moniston) \mathcal{M} tangentiavaruus pisteessä $\mathbf{p}_0 = (x_0, y_0, z_0)$ on 1×3 -matriisin $F'(\mathbf{p}_0)$ nolla-avaruus eli niiden vektorien $\mathbf{m} = (h, k, l)^\top$ joukko, joille

$$F'(\mathbf{p}_0) \bullet \mathbf{m} = \frac{\partial F(\mathbf{p}_0)}{\partial x}h + \frac{\partial F(\mathbf{p}_0)}{\partial y}k + \frac{\partial F(\mathbf{p}_0)}{\partial z}l = 0.$$

Toisena Lauseen 2.7 seurauksena todetaan, että jos monistolla on parametriesitys, voidaan sen tangentiavaruuskin samalla parametrisoida.

Seuraus 2.10. *Jos \mathbb{R}^n :n k -ulotteinen monisto \mathcal{M} on parametrisoitu funktiolla $\gamma : \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{M}$ ja $\mathbf{p}_0 = \gamma(\mathbf{u}_0)$, niin tangentiavaruus $\mathcal{T}_{\mathbf{p}_0}(\mathcal{M})$ muodostuu tarkalleen kaikista vektoreista, jotka ovat muotoa*

$$\gamma'(\mathbf{u}_0)\mathbf{v} \quad (\mathbf{v} \in \mathbb{R}^k),$$

ts. $\mathcal{T}_{\mathbf{p}_0}(\mathcal{M})$ on $\gamma'(\mathbf{u}_0)$:n kuva-avaruus.

Todistus. Lokaalisti pisteen \mathbf{p}_0 ympäristössä monisto \mathcal{M} voidaan esittää jonkin sopivan ehdon $\mathbf{F}(\mathbf{p}) = \mathbf{0}$ määräämänä urana. Siispä yhtälö

$$\mathbf{F}(\gamma(\mathbf{u})) = \mathbf{0}$$

pätee identiteettinä jossain parametripisteen \mathbf{u}_0 ympäristössä. Puolittain ketjusäännöllä derivoiden tästä saadaan toinen identiteetti

$$\mathbf{F}'(\gamma(\mathbf{u}))\gamma'(\mathbf{u}) = \mathbf{0},$$

missä $\mathbf{0}$ on sopivan kokoinen nollamatriisi. Sijoittamalla tähän arvo $\mathbf{u} = \mathbf{u}_0$ saadaan yhtälö

$$\mathbf{F}'(\mathbf{p}_0)\gamma'(\mathbf{u}_0) = \mathbf{0},$$

mikä osoittaa, että $\gamma'(\mathbf{u}_0)$:n sarakkeet kuuluvat $\mathbf{F}'(\mathbf{p}_0)$:n nolla-avaruuteen. Koska toisaalta ko. nolla-avaruuden dimensio on k ja $\gamma'(\mathbf{u}_0)$:n k saraketta ovat lineaarisesti riippumattomat, generoivat $\gamma'(\mathbf{u}_0)$:n sarakkeet tangentiavaruuden $\mathcal{T}_{\mathbf{p}_0}(\mathcal{M})$. \square

Esimerkki. Jos sileän avaruusviivan (1-ulotteinen \mathbb{R}^3 :n monisto) \mathcal{C} parametrisointi on

$$\mathbf{r} = \gamma(u) \quad (u \in \mathcal{U}),$$

niin sen tangentiavaruus $\mathcal{T}_{\mathbf{r}_0}(\mathcal{C})$ pisteessä $\mathbf{r}_0 = \gamma(u_0)$ muodostuu kaikista vektoreista

$$h\gamma'(u_0) \quad (h \in \mathbb{R}).$$

Esimerkki. Jos sileän pinnan (2-ulotteinen \mathbb{R}^3 :n monisto) parametrisointi on

$$\mathbf{r} = \gamma(\mathbf{u}) \quad (\mathbf{u} \in \mathcal{U}),$$

niin sen tangentiavaruus pisteessä $\mathbf{r}_0 = \gamma(\mathbf{u}_0)$ muodostuu kaikista vektoreista

$$\gamma'(\mathbf{u}_0)\mathbf{h} = \begin{pmatrix} \frac{\partial\gamma_1(\mathbf{u}_0)}{\partial u_1} & \frac{\partial\gamma_1(\mathbf{u}_0)}{\partial u_2} \\ \frac{\partial\gamma_2(\mathbf{u}_0)}{\partial u_1} & \frac{\partial\gamma_2(\mathbf{u}_0)}{\partial u_2} \\ \frac{\partial\gamma_3(\mathbf{u}_0)}{\partial u_1} & \frac{\partial\gamma_3(\mathbf{u}_0)}{\partial u_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} = \left(\frac{\partial\gamma(\mathbf{u}_0)}{\partial u_1} \mid \frac{\partial\gamma(\mathbf{u}_0)}{\partial u_2} \right) \mathbf{h} \quad (\mathbf{h} \in \mathbb{R}^2).$$

2.7 Normaaliavaruus

Geometrisesti \mathbb{R}^n :n k -ulotteisen moniston \mathcal{M} normaaliavaruus sen pisteessä \mathbf{p}_0 muodostuu tarkalleen kaikista (tangenti)vektoreista, jotka ovat kohtisuorassa kaikkia tangentiavaruuden vektoreita vastaan, merkitään $\mathcal{N}_{\mathbf{p}_0}(\mathcal{M})$. Ts. normaaliavaruus on tangentiavaruuden ortogonaalinen komplementti. Jälleen tapaukset $k = n$ ja $k = 0$ ovat erikoisia ja jätetään jatkossa huomiotta. Edellisessä normaaliavaruus muodostuu pelkästä nollavektorista, jälkimmäisessä taas kaikista vektoreista. Normaaliavaruuden vektoreita kutsutaan *normaalivektoreiksi*.

Normaaliavaruuden $\mathcal{N}_{\mathbf{p}_0}(\mathcal{M})$ perusominaisuudet seuraavat melko suoraan tangentiavaruuden vastaavista. Luetteloidaan ne vain tässä. Peruskursseilta muistettaneen, että matriisin nollaavaruus on sen transpoosin kuva-avaruuden ortogonaalinen komplementti, ja että kuva-avaruus on transpoosin nolla-avaruuden ortogonaalinen komplementti.

- Jos monisto \mathcal{M} on pisteen \mathbf{p}_0 lähellä lokaalisti funktion kuvaaja $\mathbf{s} = \mathbf{f}(\mathbf{r})$, niin normaaliavaruus $\mathcal{N}_{\mathbf{p}_0}(\mathcal{M})$ muodostuu tarkalleen kaikista vektoreista

$$\begin{pmatrix} -\mathbf{f}'(\mathbf{r}_0)^\top \\ \mathbf{I}_{n-k} \end{pmatrix} \mathbf{k} \quad (\mathbf{k} \in \mathbb{R}^{n-k}).$$

- Jos monisto \mathcal{M} määräytyy lokaalisti ehdon $\mathbf{F}(\mathbf{p}) = \mathbf{0}$ määräämänä urana pisteen \mathbf{p}_0 lähellä (Seurauksen 2.3 oletuksin), niin normaaliavaruus $\mathcal{N}_{\mathbf{p}_0}(\mathcal{M})$ on matriisin $\mathbf{F}'(\mathbf{p}_0)^\top$ kuva-avaruus, ts. se muodostuu tarkalleen kaikista vektoreista

$$\mathbf{F}'(\mathbf{p}_0)^\top \mathbf{k} \quad (\mathbf{k} \in \mathbb{R}^{n-k}).$$

- Jos monisto \mathcal{M} on parametrisoitu funktiolla $\gamma : \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{M}$ ja $\mathbf{p}_0 = \gamma(\mathbf{u}_0)$, niin normaaliavaruus $\mathcal{N}_{\mathbf{p}_0}(\mathcal{M})$ on $\gamma'(\mathbf{u}_0)^\top$:n nolla-avaruus, ts. se muodostuu tarkalleen kaikista vektoreista \mathbf{n} , jotka toteuttavat ehdon

$$\gamma'(\mathbf{u}_0)^\top \mathbf{n} = \mathbf{0}.$$

- Normaaliavaruus on koordinaatistoriippumaton.
- Normaaliavaruuden dimensio on $n - k$.

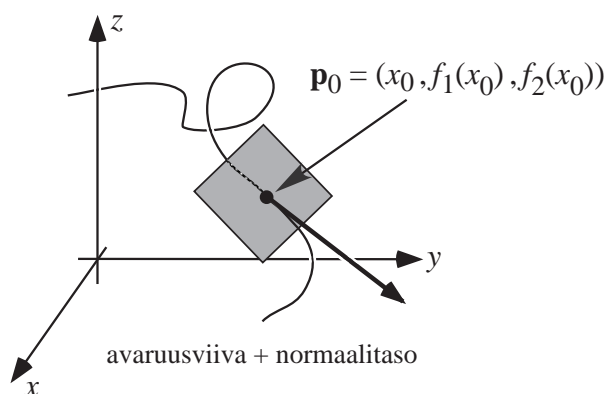
Esimerkki. Sileä avaruusviiva eli \mathbb{R}^3 :n 1-ulotteinen monisto \mathcal{M} on lokaalisti kuvaaja

$$(y, z) = \mathbf{f}(x) = (f_1(x), f_2(x))$$

(tai toinen niistä kahdesta muusta vaihtoehdosta). \mathcal{M} :n normaaliavaruus sen pisteessä $\mathbf{p}_0 = (x_0, y_0, z_0)$, missä $(y_0, z_0) = \mathbf{f}(x_0)$, muodostuu silloin tarkalleen kaikista vektoreista

$$\begin{pmatrix} -f'_1(x_0) & -f'_2(x_0) \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \end{pmatrix} \quad (k_1, k_2 \in \mathbb{R}).$$

Geometrisesti vektorit ovat siis tasolla $x + f'_1(x_0)y + f'_2(x_0)z = 0$.



Osa näistä normaalivektoreista on muita kiinnostavampia. Ne liittyvät viivan kaarevuuteen ja siihen tasoon, jossa viiva pisteessä \mathbf{p}_0 tarkimmin on.

Esimerkki. Sileä pinta \mathbb{R}^3 :ssa on 2-ulotteinen monisto \mathcal{M} . Lokaalisti \mathcal{M} on kuvaaja $z = f(x, y)$ (tai sitten toinen kahdesta muusta vaihtoehdosta). \mathcal{M} :n normaaliavaruus pisteessä $\mathbf{p}_0 = (x_0, y_0, z_0)$, missä $z_0 = f(x_0, y_0)$, muodostuu silloin tarkalleen kaikista vektoreista

$$\begin{pmatrix} -\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x} k \\ -\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y} k \\ k \end{pmatrix} \quad (k \in \mathbb{R}).$$

Geometrisesti vektorit ovat siis suoralla $\mathbf{r} = t\mathbf{v}$ ($t \in \mathbb{R}$), missä

$$\mathbf{v} = \left(-\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x}, -\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y}, 1 \right).$$

Esimerkki. Implisiittisesti (lokaalisti) yhtälöllä $F(x, y, z) = 0$ määritellyn \mathbb{R}^3 :n sileän pinnan (moniston) \mathcal{M} normaaliavaruus pisteessä $\mathbf{p}_0 = (x_0, y_0, z_0)$ muodostuu vektoreista

$$tF'(\mathbf{p}_0)^\top \quad (t \in \mathbb{R}).$$

Esimerkki. Jos sileän avaruusviivan (1-ulotteinen \mathbb{R}^3 :n monisto) \mathcal{C} parametrisointi on

$$\mathbf{r} = \gamma(u) \quad (u \in \mathcal{U}),$$

niin sen normaaliavaruus $\mathcal{N}_{\mathbf{r}_0}(\mathcal{C})$ pisteessä $\mathbf{r}_0 = \gamma(u_0)$ muodostuu kaikista vektoreista $\mathbf{n} = (h, k, l)$, jotka toteuttavat ehdon

$$\gamma'(u_0)^\top \mathbf{n} = 0.$$

Esimerkki. Jos sileän pinnan (2-ulotteinen \mathbb{R}^3 :n monisto) parametrisointi on

$$\mathbf{r} = \gamma(\mathbf{u}) \quad (\mathbf{u} \in \mathcal{U}),$$

niin sen normaaliavaruus pisteessä $\mathbf{r}_0 = \gamma(\mathbf{u}_0)$ muodostuu kaikista vektoreista $\mathbf{n} = (h, k, l)^\top$, jotka toteuttavat ehdon

$$\gamma'(\mathbf{u}_0)^\top \mathbf{n} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \gamma_1(\mathbf{u}_0)}{\partial u_1} & \frac{\partial \gamma_2(\mathbf{u}_0)}{\partial u_1} & \frac{\partial \gamma_3(\mathbf{u}_0)}{\partial u_1} \\ \frac{\partial \gamma_1(\mathbf{u}_0)}{\partial u_2} & \frac{\partial \gamma_2(\mathbf{u}_0)}{\partial u_2} & \frac{\partial \gamma_3(\mathbf{u}_0)}{\partial u_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h \\ k \\ l \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Nolla-avaruuden kantavektori saadaan nyt tuttuun tapaan ristitulolla ja kyseessä ovat siis vektorit

$$t \left(\frac{\partial \gamma(\mathbf{u}_0)}{\partial u_1} \times \frac{\partial \gamma(\mathbf{u}_0)}{\partial u_2} \right) \quad (t \in \mathbb{R}).$$

(Ristitulo ei ole nollavektori, sillä $\gamma'(\mathbf{u}_0)$:n sarakkeet ovat lineaarisesti riippumattomat.)

Esimerkiksi pallokoordinaateilla

$$(x, y, z) = \gamma(\theta, \phi) = (R \sin \theta \cos \phi, R \sin \theta \sin \phi, R \cos \theta) \quad (0 < \theta < \pi, 0 < \phi < 2\pi)$$

parametrisoidun pallonpinnan normaaliavaruus pisteessä $\gamma(\theta_0, \phi_0)$ koostuu vektoreista

$$t \begin{pmatrix} R \cos \theta_0 \cos \phi_0 \\ R \cos \theta_0 \sin \phi_0 \\ -R \sin \theta_0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -R \sin \theta_0 \sin \phi_0 \\ R \sin \theta_0 \cos \phi_0 \\ 0 \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} R^2 \sin^2 \theta_0 \cos \phi_0 \\ R^2 \sin^2 \theta_0 \sin \phi_0 \\ R^2 \sin \theta_0 \cos \theta_0 \end{pmatrix} \quad (t \in \mathbb{R})$$

eli siis vektoreista $t\gamma(\theta_0, \phi_0)^\top$ ($t \in \mathbb{R}$).

2.8 Monistot ja vektorikentät

Valitaan \mathbb{R}^n :n k -ulotteisen moniston \mathcal{M} tangenttiavaruudelle $\mathcal{T}_{\mathbf{p}_0}(\mathcal{M})$ ja normaaliavaruudelle $\mathcal{N}_{\mathbf{p}_0}(\mathcal{M})$ jotkut kannat

$$\mathbf{t}_1, \dots, \mathbf{t}_k \quad \text{ja} \quad \mathbf{n}_1, \dots, \mathbf{n}_{n-k},$$

vastaavasti. (Näiden ei tarvitse olla normeerattuja eikä ortogonaalisia.) Huomaa, että aina jommallekummalle avaruudelle saatiin edellä helposti kanta. Koska avaruudet ovat toistensa ortogonaalisia komplementteja, yhdistämällä nämä kannat saadaan \mathbb{R}^n :n kanta. Edelleen vektorikenttä \mathbf{F} voidaan jakaa näille avaruuksille pisteessä \mathbf{p}_0

$$\mathbf{F}(\mathbf{p}_0) = \mathbf{F}_{\text{tan}}(\mathbf{p}_0) + \mathbf{F}_{\text{norm}}(\mathbf{p}_0).$$

Näistä $\mathbf{F}_{\text{tan}}(\mathbf{p}_0)$ on kentän vuo monistolla \mathcal{M} ja $\mathbf{F}_{\text{norm}}(\mathbf{p}_0)$ vuo moniston \mathcal{M} läpi pisteessä \mathbf{p}_0 . Riittää luonnollisesti saada yksi näistä, toinen saadaan vähentämällä se kentästä.

Kannoista saadaan matriisit

$$\mathbf{T} = (\mathbf{t}_1, \dots, \mathbf{t}_k) \quad \text{ja} \quad \mathbf{N} = (\mathbf{n}_1, \dots, \mathbf{n}_{n-k})$$

ja näistä edelleen ei-singulaariset matriisit (ns. *Gramin matriisit*)

$$\mathbf{G} = \mathbf{T}^T \mathbf{T} = (G_{ij}) \quad , \quad \text{missä } G_{ij} = \mathbf{t}_i \bullet \mathbf{t}_j \text{ , ja}$$

$$\mathbf{H} = \mathbf{N}^T \mathbf{N} = (H_{ij}) \quad , \quad \text{missä } H_{ij} = \mathbf{n}_i \bullet \mathbf{n}_j \text{ .}$$

Merkitään vielä

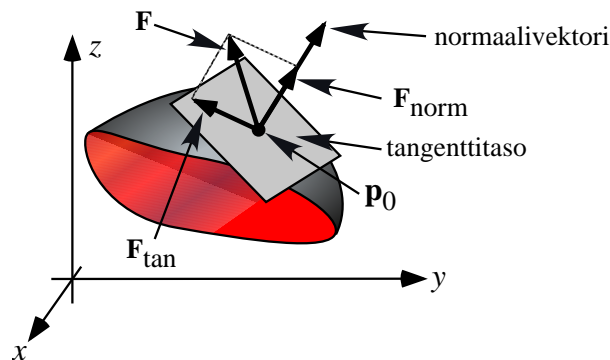
$$\mathbf{a} = \mathbf{T}^T \mathbf{F}(\mathbf{p}_0) = (a_1, \dots, a_k)^T \quad , \quad \text{missä } a_i = \mathbf{F}(\mathbf{p}_0) \bullet \mathbf{t}_i = \mathbf{F}_{\text{tan}}(\mathbf{p}_0) \bullet \mathbf{t}_i \text{ , ja}$$

$$\mathbf{b} = \mathbf{N}^T \mathbf{F}(\mathbf{p}_0) = (b_1, \dots, b_{n-k})^T \quad , \quad \text{missä } b_i = \mathbf{F}(\mathbf{p}_0) \bullet \mathbf{n}_i = \mathbf{F}_{\text{norm}}(\mathbf{p}_0) \bullet \mathbf{n}_i \text{ .}$$

Pistetulon koordinaatistoriippumattomuudesta johtuen näiden matriisien ja vektorien alkiot eivät riipu koordinaatistosta. Kentän komponentit saadaan silloin muodossa

$$\mathbf{F}_{\text{tan}}(\mathbf{p}_0) = \mathbf{T} \mathbf{G}^{-1} \mathbf{a} \quad \text{ja} \quad \mathbf{F}_{\text{norm}}(\mathbf{p}_0) = \mathbf{N} \mathbf{H}^{-1} \mathbf{b} \text{ .}$$

Esimerkki. Vektorikentän vuo sileällä pinnalla (\mathbb{R}^3 :n 2-ulotteisella monistolla) ja sen läpi saadaan projisoimalla kenttä jollekin pinnan normaalivektorille \mathbf{n} .



Silloin

$$\mathbf{N} = \mathbf{n} \quad , \quad \mathbf{H} = \mathbf{n} \bullet \mathbf{n} = \|\mathbf{n}\|^2 \quad , \quad \mathbf{b} = \mathbf{F}(\mathbf{p}_0) \bullet \mathbf{n}$$

ja

$$\mathbf{F}_{\text{norm}}(\mathbf{p}_0) = \left(\mathbf{F}(\mathbf{p}_0) \bullet \frac{\mathbf{n}}{\|\mathbf{n}\|} \right) \frac{\mathbf{n}}{\|\mathbf{n}\|} \text{ .}$$

”Calculating surface area is a foolhardy enterprise; fortunately one seldom needs to know the area of a surface. Moreover, there is a simple expression for dA which suffices for theoretical considerations.”

(M. SPIVAK: *Calculus on Manifolds*)

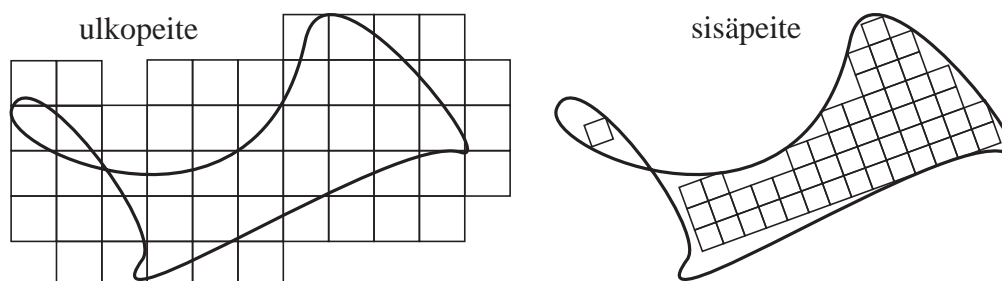
Luku 3

MONISTON VOLYYMI

3.1 Joukon volyymi

Geometrisesti sellaiset käsitteet kuin neliön ala tai kuution tilavuus ovat määriteltävissä sivujen pituuden avulla. Jos nämä ovat avoimia, ala ja tilavuus ovat jo esimerkkejä moniston volyyymista, samoin on avoimen äärellisen välin pituus. Neliö voi tässä sijaita avaruudessa, samansivuiset neliöt ovat yhteneviä ja niillä on sama ala. n -ulotteisessa avaruudessa voidaan samoin määrittellä n -ulotteisen kuution (ns. n -kuution) n -ulotteinen volyyymi: Jos särmän pituus on h , volyyymi on h^n . Tällainen kuutio voi olla korkeampiulotteisessa avaruudessa ja sen tilavuus on sama. Nämä tällaiset volyyymit ovat tulkittavissa geometrisiksi primitiiveiksi.

Tapa, jolla päästään käsiksi rajoitetun joukon $A \subset \mathbb{R}^n$ volyyymiin, on ns. *Jordanin mitta*. Sitä varten tarvitaan pari käsitettä. A :n *ulkopeite* P muodostuu äärellisestä määrästä vierekkäin asetettuja samanlaisia n -kuutioita, joiden yhdisteeseen A sisältyy. Vierekkäisillä n -kuutioilla on yhteisenä vain niiden reuna (tahko). Kaikkien ulkopeitteiden luokkaa merkitään \mathcal{P}_{out} :llä. *Sisäpeite* P taas muodostuu vastaavasti äärellisestä määrästä vierekkäin asetettuja samanlaisia n -kuutioita, joiden yhdiste sisältyy A :han, vastaavaa luokkaa merkitään \mathcal{P}_{in} :llä. (Tämä \mathcal{P}_{in} voi hyvinkin olla tyhjä.) Huomaa, että mitenkään ei puututa n -kuutioiden särmän pituuteen tai asentoon. Mitään koordinaatistoakaan ei tässä kiinnitetä. Peitteen P *volyyymi* $|P|$ on siinä olevien n -kuutioiden volyyymien summa. (Ja tämä on geometrinen primitiivi.) Tyhjän peitteen volyyymi on $= 0$. Lienee selvää, että jokaisen sisäpeitteen volyyymi on pienempi tai yhtäsuuri kuin jokaisen ulkopeitteen volyyymi, kukin ulkopeitehän aina peittää kaikki sisäpeitteet.



Joukon A *Jordanin ulko-* ja *sisämitat* ovat

$$|\mathcal{A}|_{\text{out}} = \inf_{P \in \mathcal{P}_{\text{out}}} |P| \quad \text{ja} \quad |\mathcal{A}|_{\text{in}} = \sup_{P \in \mathcal{P}_{\text{in}}} |P|.$$

Joukko A on *Jordan-mitallinen*, jos $|\mathcal{A}|_{\text{out}} = |\mathcal{A}|_{\text{in}}$, ja mittojen yhteinen arvo $|\mathcal{A}|$ on sen *Jordanin mitta*. Tämä mitta katsotaan nyt joukon A *volyyymiksi*. Ilmeisesti tällainen volyyymi ei ole

mitenkään koordinaatistoriippuva.

Samaa konstruktiota voidaan käyttää k -ulotteisessa avaruudessa, joka on upotettu n -ulotteiseen avaruuteen (missä $n > k$). Tällainen k -ulotteinen avaruus on silloin \mathbb{R}^n :n *affini aliavaruus*, ts. monisto \mathcal{R} , jonka parametrisointi on muotoa

$$\gamma(\mathbf{u}) = \mathbf{b} + \sum_{i=1}^k u_i \mathbf{v}_i \quad (\mathbf{u} \in \mathbb{R}^k),$$

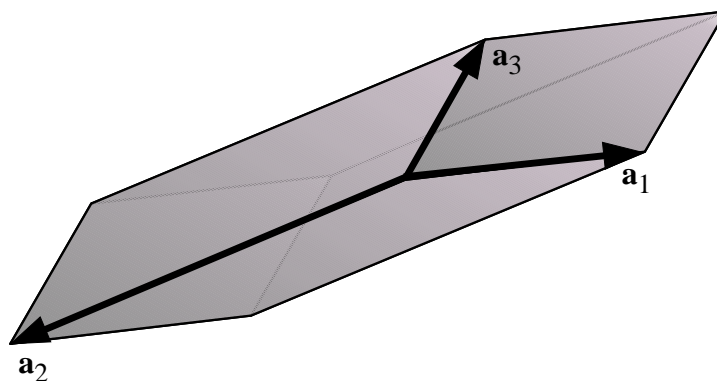
missä $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k$ ovat lineaarisesti riippumattomat. Valitsemalla \mathbf{b} origoksi ja ortogonalisoidulla tarvittaessa $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k$ voidaan \mathbb{R}^k ilmeisellä tavalla upottaa \mathbb{R}^n :ään ja määritellä \mathcal{R} :n rajoitetuille osajoukoille k -ulotteinen volyyymi. (Näiden osajoukkojen n -ulotteinen volyyymi \mathbb{R}^n :ssä on toisaalta $= 0$, kuten on helppo todeta.) Tällaisia affineja aliavaruuksia ovat esimerkiksi avaruuden \mathbb{R}^3 suorat ja tasot.

Huomautus. *Kaikilla \mathbb{R}^n :n osajoukoilla ei ole volyyymia! Osa niistä on ns. Jordan-mitattomia joukkoja.*

Jordanin mitan sisä- ja ulkopeitteet tuovat mieleen peruskursseilta tutun n -ulotteisen Riemannin integraalin määritelmän ala- ja yläsummineen. Onkin melko helppo todeta, että silloin kun volyyymi on olemassa, se saadaan integroimalla vakiofunktio 1, tarvittaessa käyttämällä epäoleellisia integraaleja:

$$|\mathcal{A}| = \int_{\mathcal{A}} 1 \, d\mathbf{r}.$$

Tärkeä erikoistapaus on \mathbb{R}^n :n suuntaissärmiön volyyymi.



Lause 3.1. *Avaruudessa \mathbb{R}^n vektorit $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n$ (janoiksi tulkittuina) särminään muodostetun suuntaissärmiön \mathcal{P} volyyymi on*

$$|\mathcal{P}| = |\det(\mathbf{A})|,$$

missä $\mathbf{A} = (\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n)$ on matriisi, jonka sarakkeet ovat mainitut vektorit.

Todistus. Asia on selvä, jos $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n$ ovat lineaarisesti riippuvat, volyyymi on silloin $= 0$. Siirrytään tapaukseen, jossa $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n$ ovat lineaarisesti riippumattomat. Volyyymi saadaan yo. integraalilla, jossa tehdään muuttujan vaihto $\mathbf{r} = \mathbf{u}\mathbf{A}^T + \mathbf{b}$. Tunnetun kaavan mukaan silloin

$$|\mathcal{P}| = \int_{\mathcal{P}} 1 \, d\mathbf{r} = \int_{\mathcal{C}} |\det(\mathbf{A})| \, d\mathbf{u} = |\det(\mathbf{A})| |\mathcal{C}|,$$

missä \mathcal{C} on \mathbb{R}^n :n yksikkökuutio, ts. sen määrittelevät ehdot $0 \leq u_i \leq 1$ ($i = 1, \dots, n$). Kokuution volyyymi on toisaalta $= 1$. □

Volyymi tiedetään jo koordinaatistoriippumattomaksi. Suuntaissärmiölle sen näkee siitähän, että volyyymi voidaan kirjoittaa muotoon

$$|\mathcal{P}| = \sqrt{\det(\mathbf{G})},$$

missä \mathbf{G} on Gramin matriisi (vrt. Pykälä 2.8)

$$\mathbf{G} = \mathbf{A}^\top \mathbf{A} = (G_{ij}) \quad \text{ja} \quad G_{ij} = \mathbf{a}_i \bullet \mathbf{a}_j.$$

Koska Gramin matriisin alkiot ovat pistetuloja, ne ovat koordinaatistoriippumattomia. Sama kaava pätee edelleen, kun kyseessä on \mathbb{R}^n :ään affiinina aliavaruutena upotetun \mathbb{R}^k :n suuntaissärmiön \mathcal{P} k -ulotteinen volyyymi, ja \mathcal{P} on määritelty \mathbb{R}^n :n k :lla vektorilla $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_k$. Gramin matriisi on tässä $k \times k$ -matriisi. Mitään kannan vaihtoa, ortogonalisointia tms. ei siis tarvitse tehdä, volyyymi saadaan \mathbb{R}^n :n vektoreita käyttäen.

\mathbb{R}^n :n rajoitettua osajoukkoa \mathcal{A} , jonka volyyymi (eli Jordanin mitta) on $= 0$, kutsutaan \mathbb{R}^n :n *nollajoukoksi*. Nollajoukolle \mathcal{A} on siis

$$|\mathcal{A}|_{\text{out}} = \inf_{P \in \mathcal{P}_{\text{out}}} |P| = 0$$

(tyhjä sisäpeitehän on aina käytettävissä). Rajoittamaton osajoukko \mathcal{A} taas on nollajoukko, jos sen kaikki (rajoitetut) osajoukot $\{\mathbf{r} \mid \mathbf{r} \in \mathcal{A} \text{ ja } \|\mathbf{r}\| \leq N\}$ ($N = 1, 2, \dots$) ovat nollajoukkoja. Tätä määritelmää käyttäen on yleensä aika vaikea näyttää, että joukko on nollajoukko. Eräänlainen yleistulos on

Lause 3.2. *Jos \mathcal{M} on \mathbb{R}^n :n k -ulotteinen monisto ja $k < n$, niin \mathcal{M} :n rajoitetut osajoukot ovat \mathbb{R}^n :n nollajoukkoja.*

Todistus. Todistus on hankala ja pitkä arviointi, ks. esimerkiksi HUBBARD & HUBBARD. Ainoa asia, mikä on helppo todeta, on se, että jos \mathcal{M} :n rajoitetun osajoukon \mathcal{A} volyyymi on olemassa, niin se on $= 0$. Muussa tapauksessa nimittäin $|\mathcal{A}|_{\text{in}} > 0$ ja \mathcal{A} :n jossakin sisäpeiteessä on ainakin yksi n -ulotteinen kuutio, jonka keskipiste on \mathbf{p}_0 ja joka sisältyy kokonaan \mathcal{M} :ään. Toisaalta \mathbf{p}_0 :n lähistöllä \mathcal{M} on lokaalisti jonkin funktion kuvaaja, mikä ei ole mahdollista. \square

Esimerkki. \mathbb{R}^3 :n sileiden viivojen ja pintojen (1- ja 2-ulotteisten monistojen) rajoitetut osajoukot ovat nollajoukkoja.

Nollajoukot—samoin kuin alla esiteltävät k -nollajoukot—ovat tärkeitä integroinnin kannalta, sillä niitä tai niiden osia voidaan vapaasti ottaa mukaan tai jättää pois integroinnissa tulosten muuttumatta.

On mahdollista määritellä \mathbb{R}^n osajoukon alempiulotteinenkin volyyymi kuin täysi n -ulotteinen, mutta tämä on yleisessä tapauksessa aika mutkikasta.¹ Toisaalta on helppo määritellä n -kuution k -ulotteinen volyyymi: Se on h^k , jos kuution särmän pituus on h . Edelleen tästä saadaan \mathbb{R}^n :n osajoukon \mathcal{A} ulkopeitteen P k -ulotteinen volyyymi $|P|_k$ ja sen infimumina k -ulotteinen Jordanin ulkomitta. Vastaava sisämitta on tietysti aina $= 0$. Näin ollen on sentään helppo määritellä \mathbb{R}^n :n osajoukolle \mathcal{A} k -ulotteinen volyyymi 0 eli \mathbb{R}^n :n *k -nollajoukko*: Se on joukko, jonka k -ulotteinen Jordanin ulkomitta on $= 0$. Jälleen tästä määritelmästä lähtien on yleensä vaikeaa näyttää joukko k -nollajoukoksi, mutta Lauseella 3.2 on yleistyksensä—todistus vain on vieläkin hankalampi, ks. HUBBARD & HUBBARD:

Lause 3.3. *Jos \mathcal{M} on \mathbb{R}^n :n k -ulotteinen monisto ja $k < m \leq n$, niin \mathcal{M} :n rajoitetut osajoukot ovat \mathbb{R}^n :n m -nollajoukkoja.*

Esimerkiksi \mathbb{R}^3 :n sileiden viivojen (1-ulotteisten monistojen) rajoitetut osat ovat \mathbb{R}^3 :n 2-nollajoukkoja.

¹Asia liittyy mm. fraktaaleihin.

3.2 Parametrisoitujen monistojen volyymi

Yleisesti ottaen \mathbb{R}^n :n k -ulotteisen moniston \mathcal{M} k -ulotteinen volyymi on vaikea määriteltävä. Parametrisoidun moniston tapauksessa se on huomattavasti helpompaa. Jos \mathcal{M} :n parametrisointi on $\mathbf{r} = \boldsymbol{\gamma}(\mathbf{u})$ ($\mathbf{u} \in \mathcal{U}$), niin

$$|\mathcal{M}|_k = \int_{\mathcal{U}} \sqrt{\det(\boldsymbol{\gamma}'(\mathbf{u})^\top \boldsymbol{\gamma}'(\mathbf{u}))} \, d\mathbf{u} \quad , \quad \text{lyhyesti} \quad = \int_{\mathcal{M}} dr.$$

Tällainen volyymi voi olla ääretönkin. Huomaa, että neliöjuuren sisällä oleva determinantti otetaan matriisista, joka on Gramin matriisi ja näin ollen riippumaton koordinaatistosta. Koko integraali on siis koordinaatistoriippumaton.

Vertaamalla edellisen pykälän suuntaissärmiön k -ulotteiseen volyymiin

$$|\mathcal{P}|_k = \sqrt{\det(\mathbf{A}^\top \mathbf{A})}$$

havaitaan, että havainnollisesti ajatellen $|\mathcal{M}|_k$ muodostuu ”summaamalla” moniston pisteissä $\mathbf{r} = \boldsymbol{\gamma}(\mathbf{u})$ saatujen sellaisten suuntaissärmiöiden k -ulotteisia volyymeja, joiden särmit saadaan vektoreista

$$du_i \frac{\partial \boldsymbol{\gamma}(\mathbf{u})}{\partial u_i} \quad (i = 1, \dots, k).$$

Lisäksi vektori $du_i \partial \boldsymbol{\gamma}(\mathbf{u}) / \partial u_i$ kuvaa (suunnattuna janana) approksimatiivisesti pisteen liikettä monistolla, kun parametri u_i liikkuu lyhyen matkan du_i muiden parametrien pysyessä muuttumattomina.

Huomautus. *Tietyissä mielessä parametrisoidun volyymin $|\mathcal{M}|_k$ määrittely siis on luonteva, mutta on muistettava, että se on nimenomaan määritelmä. Vaikka k -ulotteisen volyymin pulma ratkeakin pitkälle parametrisoiduille monistoille—ajatellen määrittelyä ja laskemista—se ei ratkea täydellisesti. On olemassa parametrisointeja, joita käyttäen monistolle saadaan volyymi, vaikka sellaista ei ole muulla tavoin määriteltynä (esimerkiksi Jordanin mittana). Toisaalta monisto, jolla on volyymi, voidaan joskus parametrisoida siten, ettei yo. integraali ole olemassa. Lisäksi asia on parametrisointikohtainen.*

Jatkossa hiljaisesti oletetaan, että kyseessä eivät ole tällaiset ”patologiset” tapaukset.

Tärkeää on toisaalta huomata, että yo. määrittely antaa avoimelle k -ulotteiselle suuntaissärmiölle \mathcal{P} saman volyymin kuin edellä saatu. Tällainen särmiö nimittäin on monisto ja parametrisoitavissa muodossa

$$\mathbf{r} = \boldsymbol{\gamma}(\mathbf{u}) = \mathbf{b} + \sum_{i=1}^k u_i \mathbf{a}_i^\top \quad (0 < u_1, \dots, u_k < 1) \quad \text{ja} \quad \boldsymbol{\gamma}'(\mathbf{u}) = \mathbf{A}.$$

Toinen tärkeä asia on volyymin riippumattomuus parametrisoinnista:

Lause 3.4. *Parametrisoidun moniston volyymi ei muutu uudelleenparametrisoinnissa.*

Todistus. Vaihdettaessa moniston \mathcal{M} parametrisointi funktiolla $\boldsymbol{\gamma} : \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{M}$ toiseksi uudelleenparametrisoinnilla otetaan uusi parametrialue $\mathcal{V} \subseteq \mathbb{R}^k$ ja sellainen jatkuvasti derivoituva bijektiivinen funktio $\boldsymbol{\eta} : \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{U}$, että sen derivaatta $\boldsymbol{\eta}'$ on ei-singulaarinen. Uusi parametrisointi tapahtuu yhdistetyllä funktiolla $\boldsymbol{\delta} = \boldsymbol{\gamma} \circ \boldsymbol{\eta}$ muodossa $\mathbf{r} = \boldsymbol{\gamma}(\boldsymbol{\eta}(\mathbf{v})) = \boldsymbol{\delta}(\mathbf{v})$ ($\mathbf{v} \in \mathcal{V}$). Ketjusäännön nojalla $\boldsymbol{\delta}'(\mathbf{v}) = \boldsymbol{\gamma}'(\boldsymbol{\eta}(\mathbf{v}))\boldsymbol{\eta}'(\mathbf{v})$. Tämä vastaa $|\mathcal{M}|_k$:n antavassa integraalissa muuttujan vaihtoa $\mathbf{u} = \boldsymbol{\eta}(\mathbf{v})$ ja integrointialueen vaihtoa \mathcal{V} :ksi. Pitää vain tarkistaa integrandin muoto:

$$\begin{aligned}
 |\mathcal{M}|_k &= \int_{\mathcal{U}} \sqrt{\det(\boldsymbol{\gamma}'(\mathbf{u})^\top \boldsymbol{\gamma}'(\mathbf{u}))} \, d\mathbf{u} = \int_{\mathcal{V}} \sqrt{\det(\boldsymbol{\gamma}'(\boldsymbol{\eta}(\mathbf{v}))^\top \boldsymbol{\gamma}'(\boldsymbol{\eta}(\mathbf{v})))} |\det(\boldsymbol{\eta}'(\mathbf{v}))| \, d\mathbf{v} \\
 &= \int_{\mathcal{V}} \sqrt{\det(\boldsymbol{\gamma}'(\boldsymbol{\eta}(\mathbf{v}))^\top \boldsymbol{\gamma}'(\boldsymbol{\eta}(\mathbf{v}))) (\det(\boldsymbol{\eta}'(\mathbf{v})))^2} \, d\mathbf{v} \\
 &= \int_{\mathcal{V}} \sqrt{\det(\boldsymbol{\eta}'(\mathbf{v})^\top) \det(\boldsymbol{\gamma}'(\boldsymbol{\eta}(\mathbf{v}))^\top \boldsymbol{\gamma}'(\boldsymbol{\eta}(\mathbf{v}))) \det(\boldsymbol{\eta}'(\mathbf{v}))} \, d\mathbf{v} \\
 &= \int_{\mathcal{V}} \sqrt{\det(\boldsymbol{\delta}'(\mathbf{v})^\top \boldsymbol{\delta}'(\mathbf{v}))} \, d\mathbf{v}. \quad \square
 \end{aligned}$$

Esimerkki. Sileän parametrisoidun avaruusviivan $\mathcal{C} : \mathbf{r} = \boldsymbol{\gamma}(u)$ ($u \in \mathcal{U}$) 1-ulotteinen volyyymi on sen pituus, sillä

$$|\mathcal{C}|_1 = \int_{\mathcal{U}} \sqrt{\det(\boldsymbol{\gamma}'(u)^\top \boldsymbol{\gamma}'(u))} \, du = \int_{\mathcal{U}} \sqrt{\boldsymbol{\gamma}'(u) \bullet \boldsymbol{\gamma}'(u)} \, du = \int_{\mathcal{U}} \|\boldsymbol{\gamma}'(u)\| \, du.$$

Esimerkki. Vastaavasti sileän parametrisoidun pinnan $\mathcal{S} : \mathbf{r} = \boldsymbol{\gamma}(\mathbf{u})$ ($\mathbf{u} \in \mathbb{R}^2$) 2-ulotteinen volyyymi on

$$|\mathcal{S}|_2 = \int_{\mathcal{U}} \sqrt{\det(\boldsymbol{\gamma}'(\mathbf{u})^\top \boldsymbol{\gamma}'(\mathbf{u}))} \, d\mathbf{u}.$$

Tämä on sama kuin tuttu pinnan ala

$$\int_{\mathcal{U}} \left\| \frac{\partial \boldsymbol{\gamma}(\mathbf{u})}{\partial u_1} \times \frac{\partial \boldsymbol{\gamma}(\mathbf{u})}{\partial u_2} \right\| \, d\mathbf{u},$$

sillä integrandissa esiintyvä suunnikkaan (2-ulotteisen suuntaissärmiön) ala (2-ulotteinen volyyymi) on lausuttavissa myös ristitulon pituutena.

Huomautus. \mathbb{R}^n :n k -ulotteisen ratamoniston k -ulotteinen volyyymi määritellään aivan samalla tavoin ja sekin on parametrisoinnista riippumaton. Luonnollisesti eo. huomautuksessa mainitut vaikeudet koskevat myös ratamonistoja.

3.3 Laajennettu parametrisointi

Koska \mathbb{R}^n :n k -nollajoukkojen k -ulotteinen volyyymi on $= 0$, sellaisten lisääminen k -ulotteiseen monistoon (yhdisteenä) ei muuta moniston k -ulotteista volyyymiä. Määriteltäessä monisto parametrisoituna Pykälässä 2.5 esitetyllä tavalla jouduttiin usein jättämään monistosta pois osia. Esimerkiksi pallonpinnan parametrisointi pallokoordinaatein ei sellaisenaan onnistu, vaan pinnasta on jätettävä osa pois (esimerkiksi puoliympyrän kaari). Sopivasti parametrisoinnin käsitettä yleistäen voidaan nämä poisjätetyt osat ottaa mukaan, ainakin volyymilaskuissa ja muissa integroinneissa.

\mathbb{R}^n :n k -ulotteisen moniston \mathcal{M} laajennettu parametrisointi² saadaan antamalla sellainen laajennettu parametrialue $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^k$, poikkeusjoukko $\mathcal{X} \subset \mathcal{U}$ ja jatkuva funktio $\boldsymbol{\gamma} : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}^n$, että

²Tämä käsite ei ole mitenkään standardi, erilaisia laajennettuja parametrisointeja löytyy kirjallisuudessa useita. Tässä se on niin yleinen, että jokaisella monistolla on laajennettu parametrisointi, ks. HUBBARD & HUBBARD.

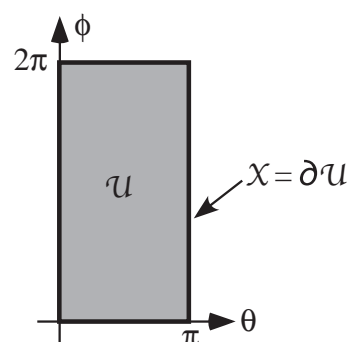
1. $\mathcal{M} \subseteq \gamma(\mathcal{U})$ ja $\gamma(\mathcal{U} - \mathcal{X}) \subseteq \mathcal{M}$ (usein $\mathcal{M} = \gamma(\mathcal{U})$).
2. \mathcal{U} :n reuna $\partial\mathcal{U}$ on \mathbb{R}^k :n nollajoukko.³ Usein $\partial\mathcal{U}$ tai sen osia sisältyy poikkeusjoukkoon \mathcal{X} .
3. \mathcal{X} on \mathbb{R}^k :n nollajoukko.
4. $\gamma(\mathcal{X})$ on \mathbb{R}^n :n k -nollajoukko.
5. joukko $\mathcal{M}' = \gamma(\mathcal{U} - \mathcal{X})$ on \mathbb{R}^n :n k -ulotteinen monisto, jonka parametrisointi on $\mathbf{r} = \gamma(\mathbf{u})$ ($\mathbf{u} \in \mathcal{U} - \mathcal{X}$) (Pykälän 2.5 mielessä).

Huomaa, että kohdasta 5. seuraa, että γ on $\mathcal{U} - \mathcal{X}$:ssä jatkuvasti derivoituva ja bijektiivinen. Toisaalta \mathcal{U} :ssa se on vain jatkuva eikä välttämättä bijektiivinen. Edelleen $\mathcal{U} - \mathcal{X}$ on avoin joukko, mutta \mathcal{U} ei sitä välttämättä ole. Näin ollen, jos \mathcal{U} :ssa on mukana sen reunan $\partial\mathcal{U}$ pisteitä, niiden on oltava mukana myös \mathcal{X} :ssä.

Esimerkki. Pallonpinnan parametrisointi pallokoordinaateilla muodossa, jossa koko pallo on parametrisoitu, on laajennettu parametrisointi:

$$\mathbf{r} = \gamma(\theta, \phi) = (R \sin \theta \cos \phi, R \sin \theta \sin \phi, R \cos \theta)$$

$$(\mathcal{U} : 0 \leq \theta \leq \pi, 0 \leq \phi \leq 2\pi).$$



Poikkeusjoukko \mathcal{X} on tässä \mathcal{U} :n reuna $\partial\mathcal{U}$.

Koko pallo (\mathbb{R}^3 :n 3-ulotteinen monisto) puolestaan saadaan laajennetulla parametrisoinnilla

$$\mathbf{r} = \gamma(\rho, \theta, \phi) = (\rho \sin \theta \cos \phi, \rho \sin \theta \sin \phi, \rho \cos \theta)$$

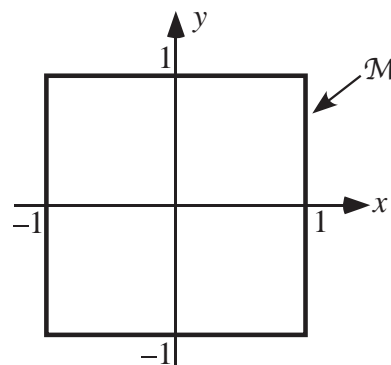
$$(\mathcal{U} : 0 \leq \rho \leq R, 0 \leq \theta \leq \pi, 0 \leq \phi \leq 2\pi).$$

\mathcal{U} on suorakulmainen särmiö, jonka reuna muodostaa poikkeusjoukon.

Esimerkki. Neliönpiiri, josta on poistettu kärjet, on \mathbb{R}^2 :n neliosainen 1-ulotteinen monisto, jolla on laajennettu parametrisointi:

$$\gamma(u) = \begin{cases} (u + 3, -1), & \text{kun } -4 \leq u \leq -2 \\ (1, u + 1), & \text{kun } -2 \leq u \leq 0 \\ (1 - u, 1), & \text{kun } 0 \leq u \leq 2 \\ (-1, 3 - u), & \text{kun } 2 \leq u \leq 4 \end{cases}$$

$$(\mathcal{U} : -4 \leq u \leq 4).$$



Poikkeusjoukko on tässä $\mathcal{X} = \{-4, -2, 0, 2, 4\}$.

Samaan tyyliin voidaan antaa laajennettu parametrisointi esimerkiksi kuutionpinnalle tai yleisemmin monitahokkaiden pinnoille.

Volyymia laskettaessa poikkeusjoukolla \mathcal{X} ei ole kontribuutiota, sillä sen kuva $\gamma(\mathcal{X})$ on \mathbb{R}^n :n k -nollajoukko:

³Tämä outo ehto tarvitaan sulkemaan pois joitain "patologisia" tapauksia. \mathbb{R}^k :n avoimillakin joukoilla voi nimittäin olla reuna, joka ei ole nollajoukko.

$$|\mathcal{M}|_k = |\mathcal{M}'|_k = \int_{\mathcal{U}-\mathcal{X}} \sqrt{\det(\boldsymbol{\gamma}'(\mathbf{u})^T \boldsymbol{\gamma}'(\mathbf{u}))} \, d\mathbf{u}.$$

Mikäli integrandi $\sqrt{\det(\boldsymbol{\gamma}'(\mathbf{u})^T \boldsymbol{\gamma}'(\mathbf{u}))}$ on jatkuvana jatkettavissa koko \mathcal{U} :hun—kuten usein on—voidaan vielä kirjoittaa

$$|\mathcal{M}|_k = \int_{\mathcal{U}} \sqrt{\det(\boldsymbol{\gamma}'(\mathbf{u})^T \boldsymbol{\gamma}'(\mathbf{u}))} \, d\mathbf{u},$$

sillä \mathcal{X} on \mathbb{R}^k :n nollajoukko.

Laajennettuja parametrisointeja voidaan siis volyymeja laskettaessa ja integroitaessa muutenkin käyttää paljolti samaan tapaan kuin tavallisiakin Pykälän 2.5 mukaisia parametrisointeja. *Uudelleenparametrisointikin laajennetussa mielessä*⁴ on mahdollista ja se säilyttää volyymin. Silloin etsitään uusi laajennettu parametrialue $\mathcal{V} \subseteq \mathbb{R}^k$, sille poikkeusjoukko $\mathcal{Y} \subset \mathcal{V}$ ja sellainen jatkuva funktio $\boldsymbol{\eta} : \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{U}$, että

1. joukkoon \mathcal{V} rajoitettuna $\boldsymbol{\eta}$ on bijektiivinen funktio $\mathcal{V} \rightarrow \mathcal{X}$.
2. joukkoon $\mathcal{V} - \mathcal{Y}$ rajoitettuna $\boldsymbol{\eta}$ on jatkuvasti derivoituva bijektiivinen funktio $\mathcal{V} - \mathcal{Y} \rightarrow \mathcal{U} - \mathcal{X}$ ja sen derivaatta $\boldsymbol{\eta}'$ on ei-singulaarinen (eli $\boldsymbol{\eta}$ antaa silloin ”tavallisen” uudelleenparametrisoinnin).

Tällaisessa laajennetussa uudelleenparametrisoinnissa siis poikkeusjoukko kuvautuu poikkeusjoukoksi, mikä takaa että volyymi säilyy uudelleenparametrisoinnissa (Lauseen 3.4 seurauksena). Poikkeusjoukkoja joudutaan usein sovittamaan, jotta uudelleenparametrisointi olisi mahdollista.

Esimerkki. *Ympyränkehä $x^2 + y^2 = 1$ on \mathbb{R}^2 :n 1-ulotteinen monisto, jolle voidaan antaa esimerkiksi laajennetut parametrisoinnit*

$$\mathbf{r} = \boldsymbol{\gamma}_1(\phi) = (\cos \phi, \sin \phi) \quad (0 \leq \phi < 2\pi)$$

(*tavallinen napakoordinaatistoparametrisointi, poikkeusjoukko on $\{0\}$*) ja

$$\mathbf{r} = \boldsymbol{\gamma}_2(u) = \begin{cases} (-u - 2, \sqrt{1 - (u + 2)^2}), & \text{kun } -3 \leq u \leq -1 \\ (u, -\sqrt{1 - u^2}), & \text{kun } -1 \leq u < 1, \end{cases}$$

(*poikkeusjoukkona $\{-3, -1\}$). Näitä laajennettuja parametrisointeja ei voi uudelleenparametrisoida suoraan toinen toisikseen. Jos ensimmäiseen parametrisointiin lisätään poikkeusjoukkoon ”turha” luku π , uudelleenparametrisointi voidaan tehdä funktiolla*

$$u = \boldsymbol{\eta}(\phi) = \begin{cases} -2 - \cos \phi, & \text{kun } 0 \leq \phi \leq \pi \\ \cos \phi, & \text{kun } \pi \leq \phi < 2\pi. \end{cases}$$

Huomautus. *Laajennetun parametrisoinnin käsite voidaan ottaa käyttöön myös ratamonistolle. Silloinkin volyymi säilyy uudelleenparametrisoinnissa.*

⁴Jälleen kirjallisuudessa tämäkin on määritelty monin eri tavoin.

”Gradient a 1-form? How so? Hasn’t one always known the gradient as a vector? Yes, indeed, but only because one was not familiar with the more appropriate 1-form concept. The more familiar gradient is the vector corresponding to the 1-form gradient.”

(C.W. MISNER & K.S. THORNE & J.A. WHEELER: *Gravitation*)

Luku 4

MUODOT

4.1 k -muodot

Tilanteissa, joissa vektorikenttiä integroidaan ja tulos on reaalityluku, kentät pitää ensin ”muokata” tavalla tai toisella, jotta niistä saadaan reaalivertainen integrandi. Koska vektorikentän oleellinen ominaisuus on sen suunta, nämä muokkaustavat ottavat huomioon suunnan. Integrointi-alueet ovat tässä monistoja, jotka on esitetty parametrisoituina, mahdollisesti käyttäen sopivaa laajennettua parametrisointia. Ko. monistoon liittyvät suunnat taas saadaan mukaan tangentti- ja normaaliavaruuksien edustajien kautta. Lisäksi pitää sopia monistoillekin suunnistus. Esimerkkejä tällaisesta ovat tutut vektoraaliset viiva- ja pintaintegraalit

$$\int_C \mathbf{F}(\mathbf{r}) \bullet d\mathbf{s} \quad \text{ja} \quad \int_S \mathbf{F}(\mathbf{r}) \bullet d\mathbf{S}.$$

Yleinen koneisto, jolla mainittu muokkaus voidaan tehdä, on käyttää ns. *muotoja* (engl. form). Integroinnin yhteydessä ne esiintyvät muodollisesti eräänlaisina differentiaaleina, josta syystä niitä kutsutaan usein *differentiaalimuodoiksi*. Samasta syystä merkinnöissä esiintyy differentiaaleja. Varsinaista muuta yhteyttä differentiaaleihin muodoilla ei ole.

n -ulotteinen k -muoto on kuvaus ϕ , joka kuvaa k kpl n -ulotteisia vektoreita¹ $\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_k$ (järjestys on tärkeä!) reaalityluvaksi $\phi(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_k)$ ja joka toteuttaa ehdot

1. ϕ on *antisymmetrinen*, ts. jos minkä tahansa kahden vektorin \mathbf{r}_i ja \mathbf{r}_j paikkoja vaihdetaan, niin muodon arvo $\phi(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_k)$ vaihtaa merkkiään. Jos esimerkiksi $k = 4$, niin $\phi(\mathbf{r}_3, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_4) = -\phi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3, \mathbf{r}_4)$.
2. ϕ on *multilineaarinen*, ts. se on lineaarinen minkä tahansa muuttujapaikan (vektorin \mathbf{r}_i) suhteen:

$$\begin{aligned} & \phi(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_{i-1}, c_1\mathbf{r}_{i1} + c_2\mathbf{r}_{i2}, \mathbf{r}_{i+1}, \dots, \mathbf{r}_k) \\ &= c_1\phi(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_{i-1}, \mathbf{r}_{i1}, \mathbf{r}_{i+1}, \dots, \mathbf{r}_k) + c_2\phi(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_{i-1}, \mathbf{r}_{i2}, \mathbf{r}_{i+1}, \dots, \mathbf{r}_k) \end{aligned}$$

(vastaavasti tapaukset $i = 1$ ja $i = n$).

Erikoistapauksena otetaan mukaan 0-muotokin: se on vakiofunktio, jolla ei ole muuttujavektoreita lainkaan.

¹Usein tangenttivektoreita, joista käytetään vain vektoriosa. Huomaa, että 1-, 2- ja 3-ulotteisissa avaruuksissa voitaisiin määrittelyssä käyttää geometrisia vektoreita.

Ajatellen k -muotojen käyttötarkoitusta—vektorikenttien ja k -ulotteisten volyymien yhdistämisestä integrointia varten—määrittely on joteensakin minimaalinen. Antisymmetria antaa mahdollisuuden vaihtaa suuntaa ”peilaamalla” eli vaihtamalla kahden vektorin paikkaa. Multilineaarisuus taas takaa, että kahden erillisen joukon yhteinen volyymi saadaan laskemalla eri osien volyymit yhteen (additiivisuus) ja että tulos skaalautuu oikein, ts. jos vektorit skaalataan kertoimella λ , niin tulos skaalautuu kertoimella λ^k .

Esimerkki. *Tuttu esimerkki n -ulotteisesta n -muodosta on determinantti \det . Muodostetaan n -ulotteisista vektoreista $\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_n$ sarakkeina matriisi $(\mathbf{r}_1 | \dots | \mathbf{r}_n)$ ja lasketaan sen determinantti $\det(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_n)$. Determinantin perusominaisuuksista seuraa suoraan, että kyseessä on n -muoto.*

Esimerkki. *Yhtä tuttu esimerkki n -ulotteisesta 1 -muodosta on pistetulo vakiovektorin kanssa. Jos \mathbf{a} on vakiovektori, niin kuvaus $\phi(\mathbf{r}) = \mathbf{a} \bullet \mathbf{r}$ on 1 -muoto. Antisymmetria ei tässä tule käyttöön, koska muuttujavektoreita on vain yksi.*

Esimerkki. *Edelleen tuttu esimerkki 3 -ulotteisesta 2 -muodosta on ristitulon $\mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_2$ ensimmäinen komponentti (tai muu komponentti). Ristitulon ominaisuuksien perusteella nimittäin*

$$(\mathbf{r}_2 \times \mathbf{r}_1)_1 = (-\mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_2)_1 = -(\mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_2)_1$$

(antisymmetria) ja

$$(\mathbf{r}_1 \times (c_1 \mathbf{r}_{21} + c_2 \mathbf{r}_{22}))_1 = (c_1 \mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_{21} + c_2 \mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_{22})_1 = c_1 (\mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_{21})_1 + c_2 (\mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_{22})_1$$

(multilineaarisuus).

Listataan muutama muotojen perusominaisuus:

Lause 4.1. (i) *Jos $\phi(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_k)$ on n -ulotteinen k -muoto ja c on vakio, niin $c\phi(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_k)$ on myös k -muoto.*

(ii) *Jos $\phi_1(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_k)$ ja $\phi_2(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_k)$ ovat n -ulotteisia k -muotoja, niin samoin on niiden summa $\phi_1(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_k) + \phi_2(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_k)$.*

(iii) *Jos $\phi(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_k)$ on n -ulotteinen k -muoto ja \mathbf{c} on vakiovektori, niin $\phi_1(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_{k-1}) = \phi(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_{k-1}, \mathbf{c})$ on n -ulotteinen $k-1$ -muoto. (Samoin tietysti, jos \mathbf{c} sijoitetaan johonkin muuhun muuttujapaikkaan.)*

(iv) *Jos vektorit $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_k$ ovat lineaarisesti riippuvia, niin k -muodon $\phi(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_k)$ arvo on $= 0$. Erityisesti, jos jokin vektoreista $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_k$ on nollavektori, $\phi(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_k) = 0$.*

Todistus. Kohdat (i), (ii) ja (iii) ovat selviä, todistetaan kohta (iv). Ensinnäkin, jos kaksi vektoreista $\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_k$ ovat samoja, niin arvo on $= 0$. Vaihtamalla mainitut vektorit keskenään arvo nimittäin vaihtaa merkkiään, mutta toisaalta se ei muutu. Jos sitten $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_k$ ovat lineaarisesti riippuvia, niin yksi niistä voidaan kirjoittaa muiden lineaariyhdelmänä, sanotaan vaikka, että

$$\mathbf{a}_k = \sum_{i=1}^{k-1} c_i \mathbf{a}_i.$$

Mutta silloin multilineaarisuuden nojalla

$$\phi(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_k) = \sum_{i=1}^{k-1} c_i \phi(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_{k-1}, \mathbf{a}_i)$$

ja se on $= 0$. Erikoisesti, jos esimerkiksi $\mathbf{a}_1 = \mathbf{0}$,

$$\phi(\mathbf{0}, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_k) = \phi(\mathbf{0} \bullet \mathbf{0}, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_k) = 0\phi(\mathbf{0}, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_k) = 0.$$

□

Kohdan (iv) seurauksena jokainen n -ulotteinen k -muoto, missä $k > n$ on kovin mielenkiinnon: se saa aina arvon 0.

Muodot ovat itse asiassa eräänlaisia determinantin yleistyksiä. Tämän näkemiseksi katsotaan miten n -ulotteinen k -muoto $\phi(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_k)$ voidaan esittää, kun vektorit $\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_k$ esitetään ortonormaalissa kannassa $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n$:

$$\mathbf{r}_i = \sum_{j=1}^n x_{j,i} \mathbf{e}_j \quad (i = 1, \dots, k).$$

Soveltamalla multilinearisuutta viimeiseen muuttujavektoriin \mathbf{r}_k saadaan

$$\phi(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_k) = \sum_{j=1}^n x_{j,k} \phi(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_{k-1}, \mathbf{e}_j).$$

Jatkamalla samalla tavoin ottaen käyttöön muuttujavektorin \mathbf{r}_{k-1} kantaesitys saadaan

$$\phi(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_k) = \sum_{j=1}^n \sum_{l=1}^n x_{l,k-1} x_{j,k} \phi(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_{k-2}, \mathbf{e}_l, \mathbf{e}_j).$$

Huomaa, että summasta itse asiassa jäävät pois kaikki ne termit, joissa $l = j$. Jne. Lopulta saadaan $\phi(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_k)$ muotoa

$$x_{j_1,1} x_{j_2,2} \cdots x_{j_k,k} \phi(\mathbf{e}_{j_1}, \mathbf{e}_{j_2}, \dots, \mathbf{e}_{j_k})$$

olevien termien summana, missä j_1, j_2, \dots, j_k ovat eri indeksejä.

Kerätään yhteen ne termit, joissa indeksit j_1, j_2, \dots, j_k muodostuvat samoista luvuista, vain eri järjestyksissä. Otetaan esimerkkitapauksena esille se, missä indeksit ovat luvut $1, 2, \dots, k$ eri järjestyksissä. Muut tapaukset menevät samaan tapaan. Kyseessä ovat siis termit ($k!$ kpl)

$$x_{j_1,1} x_{j_2,2} \cdots x_{j_k,k} \phi(\mathbf{e}_{j_1}, \mathbf{e}_{j_2}, \dots, \mathbf{e}_{j_k}),$$

missä j_1, j_2, \dots, j_k ovat luvut $1, 2, \dots, k$ jossain järjestyksessä. Vaihtamalla vektorit ”oikeaan järjestykseen” $\phi(\mathbf{e}_{j_1}, \mathbf{e}_{j_2}, \dots, \mathbf{e}_{j_k})$:ssä antisymmetriaa käyttäen saadaan mainittu termi muotoon

$$\pm a x_{j_1,1} x_{j_2,2} \cdots x_{j_k,k},$$

missä $a = \phi(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_k)$ ja merkki \pm määräytyy siitä montako kertaa antisymmetriaa käytettiin. Mutta täsmälleen samoinhan menetellään, kun determinantti

$$\begin{vmatrix} x_{1,1} & x_{1,2} & \cdots & x_{1,k} \\ x_{2,1} & x_{2,2} & \cdots & x_{2,k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{k,1} & x_{k,2} & \cdots & x_{k,k} \end{vmatrix}$$

avataan, silloin vain a on $= 1$.

Määritelläänkin nyt erikoiset k -muodot, ns. *alkeiset k -muodot*, seuraavasti. Valitaan indekseistä $1, 2, \dots, n$ järjestyksessä k kpl: $j_1 < j_2 < \cdots < j_k$. Silloin alkeinen k -muoto²

²Tämä erikoinen merkintätapa on perinteinen. Sillä ei varsinaisesti ole mitään tekemistä differentiaalisen kanssa. Merkki ”^” luetaan ”kiila” (engl. wedge). Vastaava operaatio, ns. *kiilatulo*, on määriteltävissä yleisestikin muodoille, kuten nähdään.

$dx_{j_1} \wedge dx_{j_2} \wedge \cdots \wedge dx_{j_k}$ määritellään yhtälöllä

$$(dx_{j_1} \wedge dx_{j_2} \wedge \cdots \wedge dx_{j_k})(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_k) = \begin{vmatrix} x_{j_1,1} & x_{j_1,2} & \cdots & x_{j_1,k} \\ x_{j_2,1} & x_{j_2,2} & \cdots & x_{j_2,k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{j_k,1} & x_{j_k,2} & \cdots & x_{j_k,k} \end{vmatrix}.$$

Ts. sen arvo saadaan, kun poimitaan vektoreista $\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_k$ kustakin alkio numero j_1, j_2, \dots, j_k , muodostetaan niistä k -rivinen determinantti ja lasketaan sen arvo. Erikoistapauksena otetaan vielä mukaan alkeinen 0-muoto, vakio muoto, jonka arvo on aina = 1. Ilmeisesti n -ulotteisia alkeisia k -muotoja on

$$\binom{n}{k} \text{ kpl.}$$

Erityisesti alkeisia 0-muotoja ja n -muotoja on kumpiakin yksi ja alkeisia 1-muotoja ja $n - 1$ -muotoja kumpiakin n kpl. Vm. lukumäärät mahdollistavat vektorien ”upottamisen” muotoihin kerrointen kautta.

Huomautus. *Yo. k -muodon $dx_{j_1} \wedge dx_{j_2} \wedge \cdots \wedge dx_{j_k}$ määrittely determinantin avulla toimii silloinkin, kun indeksit j_1, j_2, \dots, j_k eivät ole suuruusjärjestyksessä. Tämäkin vaihtoehto on mukava olla käytössä. Tällöin esimerkiksi $dx_{j_1} : n$ ja $dx_{j_h} : n$ vaihtaminen keskenään vaihtaa determinantissa l :nnen ja h :nnen rivin keskenään ja sen merkki vaihtuu. Edelleen se toimii, jos kaksi (tai useampia) indekseistä j_1, j_2, \dots, j_k on samoja, kunhan k -muodon $dx_{j_1} \wedge dx_{j_2} \wedge \cdots \wedge dx_{j_k}$ silloin sovitaan aina saavan arvon 0.*

Esimerkki. *n -ulotteiset alkeiset 1-muodot ovat yksinkertaisesti komponenttikuvaukset. Jos $\mathbf{r} = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$, niin $(dx_j)(\mathbf{r}) = x_j$ ($j = 1, \dots, n$). Determinanttimuodossa kyseessä ovat 1-riviset determinantit.*

Esimerkki. *Ristitulon $\mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_2$ ensimmäinen komponentti on 3-ulotteinen alkeinen 2-muoto. Jos $\mathbf{r}_1 = (x_1, y_1, z_1)^T$ ja $\mathbf{r}_2 = (x_2, y_2, z_2)$, niin mainittu ensimmäinen komponentti on*

$$(\mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_2)_1 = y_1 z_2 - z_1 y_2 = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ z_1 & z_2 \end{vmatrix} = (dy \wedge dz)(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2).$$

Muutkin komponentit ovat alkeisia 2-muotoja, kaikkineen

$$\mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_2 = \begin{pmatrix} (dy \wedge dz)(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) \\ (dz \wedge dx)(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) \\ (dx \wedge dy)(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) \end{pmatrix}.$$

Tässä 2-muodossa $dz \wedge dx$ muuttujat eivät ole oikeassa järjestyksessä, vrt. yo. huomautus.

Esimerkki. n -ulotteiset alkeiset n -muodot ovat yksinkertaisesti n -rivisiä determinantteja:

$$(dx_1 \wedge dx_2 \wedge \cdots \wedge dx_n)(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_n) = \det(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_n).$$

Jos muuttujat eivät ole järjestyksessä tai/ja ne toistuvat, niin

$$(dx_{j_1} \wedge dx_{j_2} \wedge \cdots \wedge dx_{j_n})(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_n) = \det(\mathbf{r}_{j_1}, \mathbf{r}_{j_2}, \dots, \mathbf{r}_{j_n}),$$

sillä lopputuloksen kannalta on aivan sama tehdäänkö determinanttiin rivien vaiko sarakkeiden vaihtoja.

Edellä oleva konstruktio antaa muotojen esityksen alkeisten muotojen avulla:

Lause 4.2. Jos ϕ on n -ulotteinen k -muoto, niin

$$\phi(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_k) = \sum_{1 \leq j_1 < j_2 < \cdots < j_k \leq n} a_{j_1, j_2, \dots, j_k} (dx_{j_1} \wedge dx_{j_2} \wedge \cdots \wedge dx_{j_k})(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_k),$$

missä

$$a_{j_1, j_2, \dots, j_k} = \phi(\mathbf{e}_{j_1}, \mathbf{e}_{j_2}, \dots, \mathbf{e}_{j_k}).$$

Esitys on yksikäsitteinen, ts. kertoimia a_{j_1, j_2, \dots, j_k} ei voi valita kuin yhdellä tavalla (miksi?).

Esimerkki. n -ulotteiset 1-muodot ovat tarkalleen kaikki muodot

$$\phi(\mathbf{r}) = \sum_{j=1}^n a_j x_j = \mathbf{a} \bullet \mathbf{r}$$

eli tarkalleen kaikki muodot, mitkä saadaan ottamalla pistetulo vakiovektorin $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_n)^\top$ kanssa. Ehkä hiukan hämäävästi, tämä muoto voidaan kirjoittaa myös alkeisia 1-muotoja käyttäen: $a_1 dx_1 + a_2 dx_2 + \cdots + a_n dx_n$.

Esimerkki. 3-ulotteiset 2-muodot ovat tarkalleen kaikki muodot

$$\phi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = \mathbf{a} \bullet \mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_2,$$

missä \mathbf{a} on vakiovektori. Tämä selittää osaltaan skalaarikolmitulon (ja ristitulon) tärkeän roolin vektorianalyysissä. Tulos voidaan myös kirjoittaa determinanttimuodossa

$$\phi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = \det(\mathbf{a}, \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2).$$

Yleisesti, ajatellen determinantin kehittämistä ensimmäisen sarakkeensa suhteen, n -ulotteiset $n - 1$ -muodot ovat tarkalleen kaikki muodot

$$\phi(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_{n-1}) = \det(\mathbf{a}, \mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_{n-1}),$$

missä \mathbf{a} on vakiovektori.

Esimerkki. n -ulotteiset n -muodot ovat tarkalleen kaikki muodot

$$\phi(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_n) = a \det(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_n),$$

missä a on skalaarivakio, eli alkeisen n -muodon avulla esitettynä $a dx_1 \wedge dx_2 \wedge \cdots \wedge dx_n$.

Edelleen Lauseen 4.2 avulla saadaan määriteltyksi *kiilatulo* yleisesti. Jos muotojen esitykset alkeismuotojen avulla ovat

$$\phi(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_k) = \sum_{1 \leq j_1 < j_2 < \dots < j_k \leq n} a_{j_1, j_2, \dots, j_k} (dx_{j_1} \wedge dx_{j_2} \wedge \dots \wedge dx_{j_k})(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_k) \quad (k\text{-muoto})$$

ja

$$\psi(\mathbf{s}_1, \dots, \mathbf{s}_l) = \sum_{1 \leq h_1 < h_2 < \dots < h_l \leq n} b_{h_1, h_2, \dots, h_l} (dx_{h_1} \wedge dx_{h_2} \wedge \dots \wedge dx_{h_l})(\mathbf{s}_1, \dots, \mathbf{s}_l) \quad (l\text{-muoto}),$$

niin niiden kiilatulo on $k + l$ -muoto $(\phi \wedge \psi)(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_k, \mathbf{s}_1, \dots, \mathbf{s}_l)$, jonka esitys alkeismuotojen avulla on

$$\phi \wedge \psi = \sum_{\substack{1 \leq j_1 < j_2 < \dots < j_k \leq n \\ 1 \leq h_1 < h_2 < \dots < h_l \leq n}} a_{j_1, j_2, \dots, j_k} b_{h_1, h_2, \dots, h_l} dx_{j_1} \wedge dx_{j_2} \wedge \dots \wedge dx_{j_k} \wedge dx_{h_1} \wedge dx_{h_2} \wedge \dots \wedge dx_{h_l}$$

eo. huomautuksen mukaisin sopimuksin koskien järjestystä ja toistoja. Jos $k = 0$ eli ϕ on 0-muoto (vakio), kyseessä on yksinkertaisesti vakiolla kertominen. Huomaa, että tällainen kiilatulo on osittuva, ts.

$$\phi \wedge (\psi + \xi) = \phi \wedge \psi + \phi \wedge \xi.$$

Huomautus. *Kiilatulo voidaan määritellä myös käyttämättä esityksiä alkeisten muotojen avulla ja siis kokonaan ilman koordinaattiesitystä. Ks. esimerkiksi HUBBARD & HUBBARD.*

4.2 Muotokentät

\mathbb{R}^n :n k -muotokenttä³ (engl. k -form field) on kuvaus, joka liittää kuhunkin pisteeseen \mathbf{p} oman k -muotonsa:

$$\Phi(\mathbf{p}; \mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_k).$$

Tässä $\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_k$ ovat muotokentän pisteessä \mathbf{p} antaman k -muodon vektorimuuttujat—jotka usein ajatellaan tangenttivektoreiksi pisteessä \mathbf{p} . Lauseen 4.2 nojalla muotokentän Φ määrittämiseksi riittää antaa pisteestä \mathbf{p} riippuvat kertoimet esityksessä alkeisten k -muotojen avulla:

$$\Phi(\mathbf{p}; \mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_k) = \sum_{1 \leq j_1 < j_2 < \dots < j_k \leq n} a_{j_1, j_2, \dots, j_k}(\mathbf{p}) (dx_{j_1} \wedge dx_{j_2} \wedge \dots \wedge dx_{j_k})(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_k),$$

missä tarvittavat $\binom{n}{k}$ kerrointa ovat

$$a_{j_1, j_2, \dots, j_k}(\mathbf{p}) = \Phi(\mathbf{p}; \mathbf{e}_{j_1}, \mathbf{e}_{j_2}, \dots, \mathbf{e}_{j_k}).$$

Muotokenttä ei yleensä ole määritelty koko avaruudessa \mathbb{R}^n vaan vain jossain sen osajoukossa, esimerkiksi monistossa.

Esimerkki. n -ulotteiset 1-muotokentät ovat kentät

$$\Phi(\mathbf{p}; \mathbf{r}) = \mathbf{F}(\mathbf{p}) \bullet \mathbf{r},$$

missä \mathbf{F} on sopivassa \mathbb{R}^n :n osajoukossa (monistossa) määritelty vektoriarvoinen funktio (vektorikenttä).

³Jostain syystä myöskin muotokenttiä kutsutaan joissain teksteissä differentiaalimuodoiksi, vaikka niilläkään ei oikeastaan ole mitään tekemistä differentiaalien kanssa.

Esimerkki. \mathbb{R}^3 :n 2-muotokenttä on yleisesti

$$\Phi(\mathbf{p}; \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = \mathbf{F}(\mathbf{p}) \bullet \mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_2,$$

missä \mathbf{F} on sopivassa \mathbb{R}^3 :n osajoukossa (monistossa) määritelty vektorikenttä.

Esimerkki. \mathbb{R}^n :n n -muotokenttä on yleisesti

$$\Phi(\mathbf{p}; \mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_n) = a(\mathbf{p}) \det(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_n),$$

missä a on sopivassa \mathbb{R}^n :n osajoukossa (monistossa) määritelty reaaliarvoinen funktio (skalaarikenttä).

Näistä esimerkeistä jo alkaa näkyä, miten monistot, vektori- ja skalaarikentät sekä muodot liittyvät toisiinsa: Muotojen avulla vektori- ja skalaarikentistä muodostetaan muotokenttiä, jotka sitten integroidaan jonkin osajoukon yli—usein moniston tai sopivan laajennetun parametrisoinnin antaman osajoukon. Tällainen integrointi on yleisessä tapauksessa hankala esittää, mutta parametrisoinnin kautta se on yksinkertaista, ainakin periaatteessa.

Jos \mathbb{R}^n :n k -ulotteisella monistolla \mathcal{M} on (laajennettu) parametrisointi $\mathbf{r} = \gamma(\mathbf{u})$ ($\mathbf{u} \in \mathcal{U}$) ja $\Phi(\mathbf{p}; \mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_k)$ on \mathcal{M} :ssä määritelty n -ulotteinen k -muotokenttä, niin sen integraali yli \mathcal{M} :n on

$$\int_{\mathcal{M}} \Phi = \int_{\mathcal{U}} \Phi(\gamma(\mathbf{u}); \gamma'(\mathbf{u})) \, d\mathbf{u}.$$

Tässä $\gamma'(\mathbf{u})$:n k saraketta tulkitaan muotokentän muuttujavektoreiksi. Monet peruskursseilta tutut integraalit ovat juuri tällaisia integraaleja, ja niille on nyt saatu yhtenäinen muoto.

Esimerkki. Vektorikentän \mathbf{F} viivaintegraali yli sileän viivan $\mathcal{C} : \mathbf{r} = \gamma(u)$ ($u \in \mathcal{U}$)

$$\int_{\mathcal{C}} \mathbf{F}(\mathbf{r}) \bullet d\mathbf{s} = \int_{\mathcal{U}} \mathbf{F}(\gamma(u)) \bullet \gamma'(u) \, du$$

on 1-muotokentän $\Phi(\mathbf{p}; \mathbf{r}) = \mathbf{F}(\mathbf{p}) \bullet \mathbf{r}$ integraali yli \mathcal{C} :n. Viiva \mathcal{C} voisi olla paloittainkin sileä laajennetun parametrisoinnin kautta. Ilmeisistä syistä tämä integraali kirjoitetaan usein (\mathbb{R}^3 :ssa) muotoon

$$\int_{\mathcal{C}} F_1(\mathbf{r}) \, dx + F_2(\mathbf{r}) \, dy + F_3(\mathbf{r}) \, dz.$$

Vastaavasti vektorikentän \mathbf{F} pintaintegraali yli sileän pinnan $\mathcal{S} : \mathbf{r} = \gamma(\mathbf{u})$ ($\mathbf{u} \in \mathcal{U}$)

$$\int_{\mathcal{S}} \mathbf{F}(\mathbf{r}) \bullet d\mathbf{S} = \int_{\mathcal{U}} \mathbf{F}(\gamma(\mathbf{u})) \bullet \frac{\partial \gamma(\mathbf{u})}{\partial u_1} \times \frac{\partial \gamma(\mathbf{u})}{\partial u_2} \, d\mathbf{u}$$

on 2-muotokentän $\Phi(\mathbf{p}; \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = \mathbf{F}(\mathbf{p}) \bullet \mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_2$ integraali yli \mathcal{S} :n. Tässäkin pinta \mathcal{S} voisi olla laajennetun parametrisoinnin kautta paloittain sileä. Ajatellen ristitulon ja alkeisten 2-muotojen yhteyttä ei liene ihmeellistä, että ko. pintaintegraali kirjoitetaan usein muotoon

$$\int_{\mathcal{S}} F_1(\mathbf{r}) \, dy \wedge dz + F_2(\mathbf{r}) \, dz \wedge dx + F_3(\mathbf{r}) \, dx \wedge dy.$$

Esimerkki. Skalaarikentän f integraali yli \mathbb{R}^n :n (laajennetusti) parametrisoidun n -ulotteisen moniston $\mathcal{M} : \mathbf{r} = \gamma(\mathbf{u})$ ($\mathbf{u} \in \mathcal{U}$)

$$\int_{\mathcal{M}} f(\mathbf{r}) \, d\mathbf{r} = \int_{\mathcal{U}} f(\gamma(\mathbf{u})) |\det(\gamma'(\mathbf{u}))| \, d\mathbf{u}$$

(ajattele integraalin muuttujan vaihtoa) ei ole muotokentän integraali yli \mathcal{M} :n johtuen itseisarvosta. Sen sijaan integraali

$$\int_{\mathcal{U}} f(\gamma(\mathbf{u})) \det(\gamma'(\mathbf{u})) \, d\mathbf{u}$$

on n -muotokentän $\Phi(\mathbf{p}; \mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_n) = f(\mathbf{p}) \det(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_n)$ integraali yli \mathcal{M} :n.

4.3 Muodot ja monistojen suunnistus

Geometrisesti \mathbb{R}^3 :n pinta voidaan suunnistaa antamalla jotenkin (usein parametrisoinnin kautta) kussakin pinnan pisteessä normaalivektori, joka muuntuu jatkuvasti siirryttäessä pitkin pintaa eikä ole missään pinnalla nollavektori. Vastaavasti viiva voidaan suunnistaa antamalla kussakin sen pisteessä jatkuvasti muuntuva tangenttivektori, joka ei missään viivalla ole nollavektori.

Yleisesti \mathbb{R}^n :n k -ulotteinen monisto \mathcal{M} voidaan *suunnistaa* (engl. orientate) samalla idealla, se vain on usein vaikea toteuttaa. Suunnistus saadaan valitsemalla, mikäli mahdollista, sellainen monistossa \mathcal{M} määritelty n -ulotteinen k -muotokenttä $\Phi(\mathbf{p}; \mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_k)$, että

1. moniston pisteessä \mathbf{p}_0 saatava k -muoto $\Phi(\mathbf{p}_0; \mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_k)$ on määritelty ko. pisteessä muodostetussa tangenttiavaruudessa $\mathcal{T}_{\mathbf{p}_0}(\mathcal{M})$.

Ts. $\Phi(\mathbf{p}_0; \mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_k)$ on määritelty, kun $\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_k$ ovat tangenttiavaruudessa $\mathcal{T}_{\mathbf{p}_0}(\mathcal{M})$, ks. Pykälä 2.6. Toki k -muoto voi olla määritelty muillekin vektoreille, mutta niitä ei tässä tarvita.

2. Φ on jatkuva pistemuuttujan \mathbf{p} suhteen \mathcal{M} :ssä eikä vaihda merkkiään.

Tarkemmin sanoen, jokaista \mathcal{M} :n pistettä \mathbf{p} kohti on valittavissa sellaiset tangenttiavaruuden $\mathcal{T}_{\mathbf{p}}(\mathcal{M})$ vektorit $\mathbf{t}_1(\mathbf{p}), \dots, \mathbf{t}_k(\mathbf{p})$, että $\Phi(\mathbf{p}; \mathbf{t}_1(\mathbf{p}), \dots, \mathbf{t}_k(\mathbf{p}))$ on jatkuva \mathbf{p} :n suhteen \mathcal{M} :ssä ja on joko koko \mathcal{M} :ssä positiivinen tai koko \mathcal{M} :ssä negatiivinen. Etumerkkiä voidaan näin käyttää suunnistukseen. Huomaa, että silloin vektorit $\mathbf{t}_1(\mathbf{p}), \dots, \mathbf{t}_k(\mathbf{p})$ aina muodostavat tangenttiavaruuden $\mathcal{T}_{\mathbf{p}}(\mathcal{M})$ kannan, muutoinhan muodon arvo on $= 0$. Kysymys on siis siitä, että tangenttiavaruudelle valitaan aina samalla tavalla suunnistettu ("samankätinen") kanta.

Jos monistolla \mathcal{M} on parametrisointi $\mathbf{p} = \gamma(\mathbf{u})$ ($\mathbf{u} \in \mathcal{U}$), saadaan sille suunnistus sitä käyttäen. Kohta 1. on sama, kohta 2. korvautuu kohdalla

2. $\Phi(\gamma(\mathbf{u}); \gamma'(\mathbf{u}))$ on jatkuva parametrin \mathbf{u} suhteen eikä vaihda merkkiään.

Tämä ei ole mitenkään erityyppinen suunnistus kuin yleinen, parametrisointia vain käytetään tangenttiavaruuden kannan valinnan apuna. Kuten Lauseen 2.6 todistuksessa todettiin, lokaalisti parametri \mathbf{u} on esitettävissä joidenkin \mathbf{p} :n komponenttien \mathbf{r} jatkuvana—jopa jatkuvasti derivoituvana—funktiona $\mathbf{u} = \mathbf{g}(\mathbf{r})$. Näin ollen γ^{-1} on \mathcal{M} :ssä jatkuva ja kohdan 2. mukainen suunnistus saadaan arvosta $\Phi(\mathbf{p}; \gamma'(\gamma^{-1}(\mathbf{p})))$.

Tietystä miehestä nollaulotteinenkin monisto voidaan suunnistaa. Sehän muodostuu erillisistä pisteistä. Kukin piste vain sovitaan esimerkiksi tietyn merkkiseksi—mitä se sitten geometrisesti tarkoittaneekaan.

Esimerkki. \mathbb{R}^n :n n -ulotteiselle monistolle (eli avoimelle osajoukolle) tangentiavaruus on aina koko vektoriavaruus \mathbb{R}^n ja kysymys on siitä valitaanko sille kanta $\mathbf{t}_1(\mathbf{p}), \dots, \mathbf{t}_n(\mathbf{p})$, jolle $\det(\mathbf{t}_1(\mathbf{p}), \dots, \mathbf{t}_n(\mathbf{p}))$ on positiivinen, vaiko ei. (\mathbb{R}^3 :ssa siis siitä onko kanta oikeakätinen vaiko vasenkätinen.) Tarvittava n -muotokenttä on muotoa

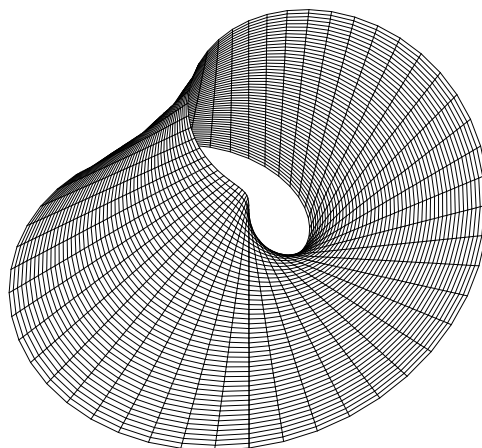
$$\Phi(\mathbf{p}; \mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_n) = f(\mathbf{p}) \det(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_n).$$

Vektorit $\mathbf{t}_1(\mathbf{p}), \dots, \mathbf{t}_k(\mathbf{p})$ voidaan vaikkapa valita kiinteiksi ja funktio f vakioksi, moniston eri osissa mahdollisesti erimerkkiseksi (mutta ei nolllaksi!).

Kaikkia monistoja ei voi suunnistaa. Tunnettu esimerkki on Möbiuksen nauha. Erään sellaisen laajennettu parametrisointi on

$$\begin{cases} \gamma_1(\mathbf{u}) = \left(1 + u_1 \cos \frac{u_2}{2}\right) \cos u_2 \\ \gamma_2(\mathbf{u}) = \left(1 + u_1 \cos \frac{u_2}{2}\right) \sin u_2 \\ \gamma_3(\mathbf{u}) = u_1 \sin \frac{u_2}{2} \end{cases} \quad (\mathcal{U} : -1 < u_1 < 1, 0 \leq u_2 < 2\pi).$$

Jos jätetään parametriarvo $u_2 = 0$ pois, nauha ”katkeaa” ja se on parametrisoitu \mathbb{R}^3 :n 2-ulotteinen monisto. (Tämän osoittaminen vaatii jonkin verran laskua.) Katkaistuna nauha voidaan myös suunnistaa. Jos toisaalta laajennetussa parametrisoinnissa valittaisiin u_2 :lle toinen väli $\pi \leq u_2 < 3\pi$, siirtyisi katkaisukohta toisaalle. Koska ”monistoisuus” on lokaali ominaisuus, tämä tietää sitä, että ”katkeamaton” Möbiuksen nauhakin on monisto—ei kylläkään parametrisoitu. Kuvasta (Maple) katsoen lienee kuitenkin geometrisesti selvää, ettei sitä voida suunnistaa (asian tarkka todistus on hankala):



Monistoja, jotka voidaan suunnistaa, kutsutaan *suunnistuviksi* (engl. orientable). Mikäli suunnistuvan moniston \mathcal{M} suunnistus on kiinnitetty (sopivalla muotokentällä), tuodaan tämä esille merkinnällä $\overrightarrow{\mathcal{M}}$. Vastakkaiseen suuntaan suunnistettua monistoa merkitään usein $-\overrightarrow{\mathcal{M}}$:llä.

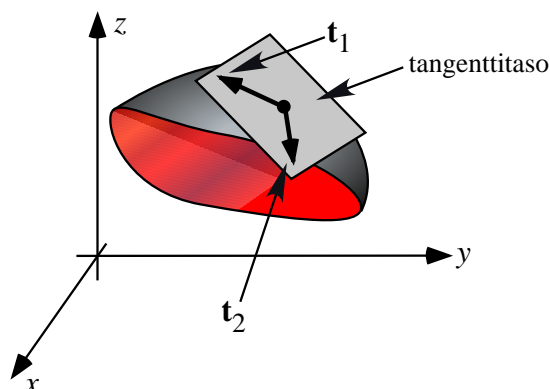
Myöskin ym. pinnan ja avaruusviivan suunnistukset ovat esimerkkejä esitetystä suunnistuksen menetelmästä:

Esimerkki. Sileä parametrisoitu pinta $\mathcal{S} : \mathbf{r} = \gamma(\mathbf{u})$ ($\mathbf{u} \in \mathcal{U}$) voidaan suunnistaa muistamalla, että sen tangentiavaruus pisteessä $\gamma(\mathbf{u})$ on $\gamma'(\mathbf{u})$:n kuva-avaruus (Seuraus 2.10), ts. $\gamma'(\mathbf{u})$:n kaksi saraketta muodostavat ko. avaruuden kannan. Jos sovitaan, että ensimmäinen sarake on

ensimmäinen kantavektori \mathbf{t}_1 ja toinen sarake toinen kantavektori \mathbf{t}_2 , niin pinta on suunnistettu. Koska pinta on sileä (eli \mathbb{R}^3 :n 2-ulotteinen parametrisoitu monisto), mainitut vektorit ovat aina lineaarisesti riippumattomat eivätkä näin voi ”vaihtaa paikkaa”. Geometrisesti ajatellen, normaalivektori

$$\frac{\partial \gamma(\mathbf{u})}{\partial u_1} \times \frac{\partial \gamma(\mathbf{u})}{\partial u_2}$$

on aina samalla puolen pintaa.



Mutta mikä on tähän suunnistukseen tarvittava 2-muotokenttä? Ko. kentän tiedetään olevan muotoa $\Phi(\mathbf{p}; \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = \mathbf{F}(\mathbf{p}) \bullet \mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_2$, missä \mathbf{F} on pinnalla määritelty vektorikenttä. Valitaan yksinkertaisesti

$$\mathbf{F}(\mathbf{p}) = \mathbf{F}(\gamma(\mathbf{u})) = \frac{\partial \gamma(\mathbf{u})}{\partial u_1} \times \frac{\partial \gamma(\mathbf{u})}{\partial u_2}.$$

Silloin 2-muodon arvo on

$$\left\| \frac{\partial \gamma(\mathbf{u})}{\partial u_1} \times \frac{\partial \gamma(\mathbf{u})}{\partial u_2} \right\|^2$$

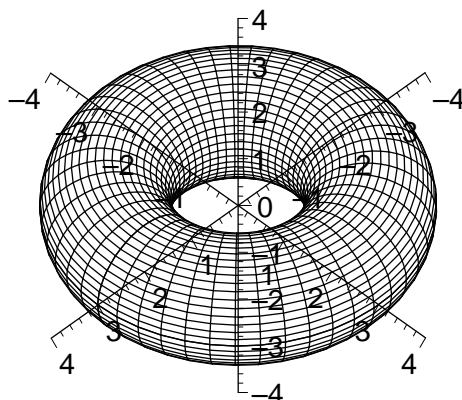
ja se on aina positiivinen. Muutkin valinnat ovat mahdollisia, eivät ehkä yhtä luontevia.

Kokeillaan suunnistusta rinkiläpintaan eli toorukseen. Erään rinkiläpinnan laajennettu parametriesitys on

$$\begin{cases} \gamma_1(\mathbf{u}) = (2 + \cos u_2) \cos u_1 \\ \gamma_2(\mathbf{u}) = (2 + \cos u_2) \sin u_1 \\ \gamma_3(\mathbf{u}) = \sin u_2 \end{cases} \quad (\mathcal{U} : 0 \leq u_1, u_2 < 2\pi).$$

Samaan tapaan kuin Möbiuksen nauhalle voidaan todeta, että rinkiläpinta on monisto—vaih-

tamalla vaikkapa parametrialueeksi $-\pi \leq u_1, u_2 < \pi$, ei tosin parametrisoitu. Kuva (Maple):



Tangenttiavaruuden kantavektorit ovat (järjestyksessä)

$$\frac{\partial \gamma(\mathbf{u})}{\partial u_1} = \begin{pmatrix} -(2 + \cos u_2) \sin u_1 \\ (2 + \cos u_2) \cos u_1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{ja} \quad \frac{\partial \gamma(\mathbf{u})}{\partial u_2} = \begin{pmatrix} -\sin u_2 \cos u_1 \\ -\sin u_2 \sin u_1 \\ \cos u_2 \end{pmatrix}.$$

Kumpi puoli rinkiläpinnasta sitten on se, jolla kantavektorit ovat positiivisessa järjestyksessä (eli samalla tavoin kuin xy -koordinaatistossa)? Lasketaan kantavektorit parametriarvoilla $u_1 = u_2 = 0$ eli x -akselin pisteessä $(3, 0, 0)$:

$$\frac{\partial \gamma(\mathbf{0})}{\partial u_1} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{ja} \quad \frac{\partial \gamma(\mathbf{0})}{\partial u_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Kantavektorit ovat samassa järjestyksessä kuin y - ja z -akselit ja kyseessä on ”ulkopuoli”. (”Sisäpuolelta” katsottaessa akselit vaihtavat paikkaa).

Esimerkki. Parametrisoitu sileä avaruusviiva $\mathcal{C} : \mathbf{p} = \gamma(u)$ ($u \in \mathcal{U}$) suunnistetaan vastaavasti. Pisteessä $\gamma(u)$ tangenttiavaruuden kantavektoriksi valitaan $\gamma'(u)$ ja viiva on suunnistettu. Tarvittava 1-muotokenttä on muotoa $\Phi(\mathbf{p}; \mathbf{r}) = \mathbf{F}(\mathbf{p}) \bullet \mathbf{r}$ ja valitaan $\mathbf{F}(\gamma(u)) = \gamma'(u)$. Saadun 1-muodon arvo on $\|\gamma'(u)\|^2 > 0$. Yhtä hyvin olisi voitu valita vaikkapa $\mathbf{F}(\gamma(u)) = 2\gamma'(u)$ (mikä ei muuta suunnistusta) tai $\mathbf{F}(\gamma(u)) = -\gamma'(u)$ (mikä vaihtaa suunnistuksen päinvastaiseksi).

Jos monisto muodostuu useasta erillisestä osasta, suunnistus eri osissa voidaan valita mielivaltaisesti, jatkuvuusehto ei yhdistä eri osia toisiinsa mitenkään. Jos esimerkiksi \mathbb{R}^3 :n kaksiosaisessa 3-ulotteisessa monistossa yhden osan koordinaattisysteemi valitaan oikeakätiseksi, mikään ei estä valitsemasta toisen osan koordinaattisysteemiä vasenkätiseksi. Yhtenäiselle monistolle suunnistus eri puolilla monistoa sen sijaan on yhtenevä. \mathbb{R}^n :n moniston \mathcal{M} sanotaan olevan yhtenäinen (engl. connected), jos jokaista moniston kahta eri pistettä \mathbf{p}_0 ja \mathbf{p}_1 kohti on sellainen jatkuva funktio $\mathbf{f} : [0, 1] \rightarrow \mathcal{M}$, että $\mathbf{f}(0) = \mathbf{p}_0$ ja $\mathbf{f}(1) = \mathbf{p}_1$. Ts. moniston kaksi eri pistettä voidaan aina yhdistää monistossa olevalla jatkuvalla viivalla.

Lause 4.3. Jos monisto \mathcal{M} on yhtenäinen, niin sen suunnistus yhdessä pisteessä määrittää suunnistuksen koko monistossa.

Todistus. Suunnistetaan \mathcal{M} edellä esitetyllä tavalla. Kohdassa 2. saatava moniston pisteen \mathbf{p} funktio $\Phi(\mathbf{p}; \mathbf{t}_1(\mathbf{p}), \dots, \mathbf{t}_k(\mathbf{p}))$ on silloin valitussa pisteessä \mathbf{p}_0 joko positiivinen tai negatiivinen. Moniston toinen piste \mathbf{p}_1 voidaan yhdistää \mathbf{p}_0 :aan joltain funktiota $\mathbf{f} : [0, 1] \rightarrow \mathcal{M}$ käyttäen, jolloin $\mathbf{p}_0 = \mathbf{f}(0)$ ja $\mathbf{p}_1 = \mathbf{f}(1)$. Mutta silloin funktio $\Phi(\mathbf{f}(s); \mathbf{t}_1(\mathbf{f}(s)), \dots, \mathbf{t}_k(\mathbf{f}(s)))$ on

välillä $[0, 1]$ jatkuva s :n funktio, joka ei saa arvoa 0. Näin ollen $\Phi(\mathbf{p}_0; \mathbf{t}_1(\mathbf{p}_0), \dots, \mathbf{t}_k(\mathbf{p}_0))$ ja $\Phi(\mathbf{p}_1; \mathbf{t}_1(\mathbf{p}_1), \dots, \mathbf{t}_k(\mathbf{p}_1))$ ovat samanmerkkiset. \square

Uudelleenparametrisoinnissa parametrisoidun moniston suunnistus voi vaihtua päinvastaiseksi. Tämä voidaan kuitenkin estää lisäehdolla:

Lause 4.4. Jos \mathbb{R}^n :n parametrisoidun k -ulotteisen moniston $\mathcal{M} : \mathbf{r} = \boldsymbol{\gamma}(\mathbf{u})$ ($\mathbf{u} \in \mathcal{U}$) parametrisointi vaihdetaan toiseksi sellaisella uudelleenparametrisoinnilla $\mathbf{u} = \boldsymbol{\eta}(\mathbf{v})$ ($\mathbf{v} \in \mathcal{V}$), että $\det(\boldsymbol{\eta}'(\mathbf{v})) > 0$, niin suunnistus ei vaihdu. Jos taas $\det(\boldsymbol{\eta}'(\mathbf{v})) < 0$, suunnistus vaihtuu päinvastaiseksi. (Tässä tietysti oletetaan suunnistus tehdyksi yhdellä ja samalla k -muotokentällä.)

Todistus. Edellä esitetyllä tavalla moniston \mathcal{M} suunnistuksessa käytetään jotain k -muotokenttää $\Phi(\mathbf{p}; \mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_k)$. Otetaan tarkasteltavaksi suunnistus jossain \mathcal{M} :n pisteessä $\mathbf{p}_0 = \boldsymbol{\gamma}(\mathbf{u}_0)$. Se määräytyy arvosta $\Phi(\mathbf{p}_0; \boldsymbol{\gamma}'(\mathbf{u}_0))$. Lauseen 4.2 mukaisesti k -muoto $\Phi(\mathbf{p}_0; \mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_k)$ voidaan esittää alkeisten k -muotojen lineaariyhdelmänä. Näytetään, että nämä alkeiset muodot vain tulevat kerrotuksi samalla positiivisella luvulla uudelleenparametrisoinnissa. Mainitut alkeiset k -muodot ovat muotoa

$$(dx_{j_1} \wedge dx_{j_2} \wedge \dots \wedge dx_{j_k})(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_k) = \begin{vmatrix} x_{j_1,1} & x_{j_1,2} & \dots & x_{j_1,k} \\ x_{j_2,1} & x_{j_2,2} & \dots & x_{j_2,k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{j_k,1} & x_{j_k,2} & \dots & x_{j_k,k} \end{vmatrix}.$$

Toisaalta uudessa parametrisoinnissa tangenttiavaruuden kanta saadaan ketjusäännön nojalla matriisin $\boldsymbol{\gamma}'(\mathbf{u}_0)\boldsymbol{\eta}'(\mathbf{v}_0)$ sarakkeista, missä $\mathbf{u}_0 = \boldsymbol{\eta}(\mathbf{v}_0)$, ja vastaava uuden alkeisen k -muodon arvo on

$$(dx_{j_1} \wedge dx_{j_2} \wedge \dots \wedge dx_{j_k})(\boldsymbol{\gamma}'(\mathbf{u}_0)\boldsymbol{\eta}'(\mathbf{v}_0)) = (dx_{j_1} \wedge dx_{j_2} \wedge \dots \wedge dx_{j_k})(\boldsymbol{\gamma}'(\mathbf{u}_0)) \det(\boldsymbol{\eta}'(\mathbf{v}_0)).$$

(Ajattele matriisien kertolaskua ja muista, että neliömatriiseille $\det(\mathbf{AB}) = \det(\mathbf{A}) \det(\mathbf{B})$.) Kaikki esiintyvät alkeiset k -muodot tulevat siis kerrotuksi positiivisella luvulla $\det(\boldsymbol{\eta}'(\mathbf{v}_0))$. Siispä

$$\Phi(\mathbf{p}_0; \boldsymbol{\gamma}'(\boldsymbol{\eta}(\mathbf{v}_0))\boldsymbol{\eta}'(\mathbf{v}_0)) = \Phi(\mathbf{p}_0; \boldsymbol{\gamma}'(\mathbf{u}_0)) \det(\boldsymbol{\eta}'(\mathbf{v}_0))$$

ja suunnistus säilyy.

Suunnistuksen vaihtuminen tapauksessa $\det(\boldsymbol{\eta}'(\mathbf{v})) < 0$ todetaan samaan tapaan. \square

Suunnistus on tärkeä, paitsi geometrisen tilanteen hahmottamiseksi, myöskin integraalin kannalta uudelleenparametrisoinnissa.

Lause 4.5. Parametrisoidun suunnistetun moniston uudelleenparametrisointi ei muuta sen yli laskettujen muotokenttien integraaleja. Jos uudelleenparametrisointi vaihtaa suunnistuksen, integraalin merkki vaihtuu.

Todistus. Jos suunnistetun parametrisoidun moniston $\vec{\mathcal{M}} : \mathbf{r} = \boldsymbol{\gamma}(\mathbf{u})$ ($\mathbf{u} \in \mathcal{U}$) yli lasketussa integraalissa tehdään suunnistuksen säilyttävän uudelleenparametrisoinnin $\mathbf{u} = \boldsymbol{\eta}(\mathbf{v})$ ($\mathbf{v} \in \mathcal{V}$) antama muuttujan vaihto, saadaan integraali

$$\int_{\vec{\mathcal{M}}} \Phi = \int_{\mathcal{U}} \Phi(\boldsymbol{\gamma}(\mathbf{u}); \boldsymbol{\gamma}'(\mathbf{u})) d\mathbf{u} = \int_{\mathcal{V}} \Phi(\boldsymbol{\gamma}(\boldsymbol{\eta}(\mathbf{v})); \boldsymbol{\gamma}'(\boldsymbol{\eta}(\mathbf{v}))) |\det(\boldsymbol{\eta}'(\mathbf{v}))| d\mathbf{v}.$$

Koska uudelleenparametrisointi oli suunnistuksen säilyttävä, edellisen lauseen nojalla $\det(\boldsymbol{\eta}'(\mathbf{v}))$ on positiivinen. Siispä integraali voidaan edelleen kirjoittaa muotoon

$$\int_{\vec{\mathcal{M}}} \Phi = \int_{\mathcal{V}} \Phi(\boldsymbol{\gamma}(\boldsymbol{\eta}(\mathbf{v})); \boldsymbol{\gamma}'(\boldsymbol{\eta}(\mathbf{v}))) \det(\boldsymbol{\eta}'(\mathbf{v})) \, d\mathbf{v} = \int_{\mathcal{V}} \Phi(\boldsymbol{\gamma}(\boldsymbol{\eta}(\mathbf{v})); \boldsymbol{\gamma}'(\boldsymbol{\eta}(\mathbf{v}))\boldsymbol{\eta}'(\mathbf{v})) \, d\mathbf{v}$$

(vrt. edellisen lauseen todistus), joka on muotokentän Φ integraali \mathcal{M} :n yli laskettuna uudessa parametrisoinnissa.

Toisaalta, jos uudelleenparametrisointi vaihtaa suunnistuksen, $\det(\boldsymbol{\eta}'(\mathbf{v}))$ on negatiivinen ja integraalin merkki vaihtuu. \square

Suunnistuksen vaihtumisen aiheuttama integraalin merkin vaihtuminen esitetään usein muodossa

$$\int_{-\vec{\mathcal{M}}} \Phi = - \int_{\vec{\mathcal{M}}} \Phi.$$

4.4 Fysikaalisten vektori- ja skalaarikenttien perusmuotokentät

\mathbb{R}^n :n vektorikentän $\mathbf{F}(\mathbf{p})$ perusmuotokentät ovat *työmuotokenttä*

$$\Phi_{\mathbf{F}\text{-work}}(\mathbf{p}; \mathbf{r}) = \mathbf{F}(\mathbf{p}) \bullet \mathbf{r} \quad (1\text{-muotokenttä}),$$

ja *vuomuotokenttä*

$$\Phi_{\mathbf{F}\text{-flux}}(\mathbf{p}; \mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_{n-1}) = \det(\mathbf{F}(\mathbf{p}), \mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_{n-1}) \quad (n-1\text{-muotokenttä}).$$

Skalaarikentän $f(\mathbf{p})$ perusmuotokentät ovat se itse (0-muotokenttänä) sekä *tiheysmuotokenttä*

$$\Phi_{f\text{-density}}(\mathbf{p}; \mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_n) = f(\mathbf{p}) \det(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_n) \quad (n\text{-muotokenttä}).$$

Fysikaalisesti työmuotokentässä \mathbf{F} on yleensä voimakenttä—esimerkiksi painovoimakenttä—ja vuomuotokentässä virtaustiheyskenttä—esimerkiksi nestevuon tiheys. Tiheysmuotokentän skalaarikenttä taas on tiheys suure—esimerkiksi massatiheys. Integroimalla näitä monistojen yli saadaan vastaavat nettosuureet—tehty työ kuljettaessa painovoimakentässä, nesteen nettovirta pinnan läpi, kappaleen massa.

Kiilatuloa käyttäen kenttien tutut operaatiot \mathbb{R}^3 :ssa saadaan koskemaan muotokenttiä:

1. Skalaarikentille f ja g ja vektorikentälle \mathbf{F} tietysti $f \wedge g = fg$ sekä

$$f \wedge \Phi_{\mathbf{F}\text{-work}} = \Phi_{f\mathbf{F}\text{-work}} \quad , \quad f \wedge \Phi_{\mathbf{F}\text{-flux}} = \Phi_{f\mathbf{F}\text{-flux}} \quad \text{ja} \quad f \wedge \Phi_{g\text{-density}} = \Phi_{fg\text{-density}}.$$

2. Vektorikentille \mathbf{F} ja \mathbf{G}

$$\Phi_{\mathbf{F}\text{-work}} \wedge \Phi_{\mathbf{G}\text{-work}} = \Phi_{\mathbf{F} \times \mathbf{G}\text{-flux}} \quad \text{ja} \quad \Phi_{\mathbf{F}\text{-work}} \wedge \Phi_{\mathbf{G}\text{-flux}} = \Phi_{\mathbf{F} \bullet \mathbf{G}\text{-density}}.$$

Todetaan malliksi kaava $\Phi_{\mathbf{F}\text{-work}} \wedge \Phi_{\mathbf{G}\text{-flux}} = \Phi_{\mathbf{F} \bullet \mathbf{G}\text{-density}}$ ja jätetään muut lukijalle harjoitustehäväiksi:

$$\begin{aligned} & (F_1 dx + F_2 dy + F_3 dz) \wedge (G_1 dy \wedge dz + G_2 dz \wedge dx + G_3 dx \wedge dy) \\ &= F_1 G_1 dx \wedge dy \wedge dz + F_2 G_2 dy \wedge dz \wedge dx + F_3 G_3 dz \wedge dx \wedge dy \\ &= (\mathbf{F} \bullet \mathbf{G}) dx \wedge dy \wedge dz. \end{aligned}$$

On fysikaalisia kenttiä, jotka eivät ole sen kummemmin skalaari- kuin vektorikenttiäkään. Esimerkiksi sähkökentän voimakkuus \mathbf{E} ei ole vektorikenttä (eikä tietenkään skalaarikenttä). Lorentzin voimalaki sanoo, että pisteessä \mathbf{r} olevaan varaukseen q kohdistuva voima on

$$q(\mathbf{E}(\mathbf{r}) + \mathbf{v} \times \mathbf{B}(\mathbf{r})),$$

missä \mathbf{v} on varauksen liikenopeus ja \mathbf{B} on magneettivuon tiheys. Jos sähkökenttää ei ole, varaus ei liiku ja koordinaatisto pysyy paikallaan, voima on nollavektori. Vakionopeudella liikkuvasta koordinaatistosta seurattuna voima on edelleenkin nollavektori (varauksen liike ei ole kiihtyvää), mutta nyt \mathbf{v} ei ole nollavektori ja liikkuva varaus aiheuttaa magneettikentän ja sen kompensoivan sähkökentän. Liikkuvasta koordinaatistosta katsottuna siis \mathbf{E} ei ole nollakenttä. Tätä ominaisuutta ei ole millään vektorikentällä, ja sähkö- ja magneettikentät onkin käsiteltävä yhdessä, aika-avaruudessa (\mathbb{R}^4 :ssä, $xyzt$ -avaruudessa).

Vaikkakaan sähkömagneettisiä kenttiä ei saada hallituksi vektorikenttinä, ne saadaan mallinnetuksi \mathbb{R}^4 :n 2-muotokenttinä, ns. *Faradayn muotokenttänä* ja *Maxwellin muotokenttänä*⁴

$$E_1 dx \wedge dt + E_2 dy \wedge dt + E_3 dz \wedge dt + B_1 dy \wedge dz + B_2 dz \wedge dx + B_3 dx \wedge dy$$

ja

$$-c^2 B_1 dx \wedge dt - c^2 B_2 dy \wedge dt - c^2 B_3 dz \wedge dt + E_1 dy \wedge dz + E_2 dz \wedge dx + E_3 dx \wedge dy,$$

jotka usein kirjoitetaan muotoon

$$\Phi_{\text{Faraday}} = \Phi_{\mathbf{E}\text{-work}} \wedge dt + \Phi_{\mathbf{B}\text{-flux}}$$

ja

$$\Phi_{\text{Maxwell}} = \Phi_{\mathbf{E}\text{-flux}} - c^2 \Phi_{\mathbf{B}\text{-work}} \wedge dt.$$

⁴Michael Faraday ja James Clerk Maxwell eivät tällaisia muotokenttiä käsitelleet. Nimitykset lienevät läh- töisin kuuluisasta kirjasta MISNER & THORNE & WHEELER.

”Stokes theorem was stated by Sir George Stokes as a Cambridge examination question, having been raised by Lord Kelvin in a letter to Stokes in 1850.”

(A Dictionary of Science, Oxford University Press, 1999)

Luku 5

YLEISTETTY STOKESIN LAUSE

Monet peruskurssien integrointitulokset ovat hyvin samanmuotoisia:

$$\int_a^b \frac{df(x)}{dx} dx = f(b) - f(a) \quad (\text{Integraalilaskennan päälause})$$

$$\int_{\mathbf{r}_1}^{\mathbf{r}_2} \nabla f \bullet \mathbf{ds} = f(\mathbf{r}_2) - f(\mathbf{r}_1) \quad (\text{Gradienttilause})$$

$$\int_{\mathcal{A}} \left(\frac{\partial F_2(\mathbf{r})}{\partial x} - \frac{\partial F_1(\mathbf{r})}{\partial y} \right) d\mathbf{r} = \oint_{\vec{\partial\mathcal{A}}} \mathbf{F}(\mathbf{r}) \bullet \mathbf{ds} \quad (\text{Greenin lause})$$

$$\int_{\mathcal{A}} \nabla \bullet \mathbf{F}(\mathbf{r}) d\mathbf{r} = \oint_{\vec{\partial\mathcal{A}}} \mathbf{F}(\mathbf{r}) \bullet \mathbf{dS} \quad (\text{Gaußin lause})$$

$$\int_{\vec{\mathcal{S}}} \nabla \times \mathbf{F}(\mathbf{r}) \bullet \mathbf{dS} = \oint_{\vec{\partial\mathcal{S}}} \mathbf{F}(\mathbf{r}) \bullet \mathbf{ds} \quad (\text{Stokesin lause})$$

Näille on yhteistä seuraavat asiat:

- Vasemmalla puolella integrointialue on monisto, mahdollisesti laajennetussa parametrisoinnissa ja suunnattuna.
- Vasemmalla puolella integrandi on jonkinlainen derivaatta, kytkettynä monistoon tangenttiavaruuden ja sopivan muodon kautta (muotokenttänä).
- Oikealla puolella integrointialue (summausalue) on vasemman puolen moniston suunnattu ”reuna”, mahdollisesti laajennetussa parametrisoinnissa. Huomaa, että myös kahdessa ensimmäisessä kyseessä on suunnattu reuna, toinen pisteistä on plusmerkkinen ja toinen miinusmerkkinen.
- Oikealla puolella integrandi (summandi) on kenttä, joka vasemmalla puolella on jollakin lailla derivoituna.

Jotta saataisiin yhtenevä muoto kaikille näille tuloksille—ja muillekin—pitää määritellä derivaatta yleisenä ja muotokentille sekä suunnatun reunan käsite sellaisena, että sen yli voidaan integroida muotokenttiä. Lopullinen tulos on ns. Yleistetty Stokesin lause.

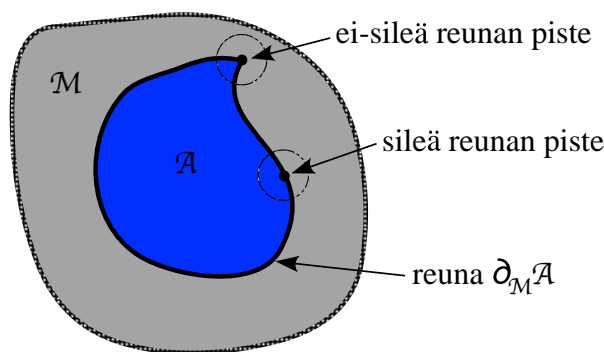
5.1 Reunalliset alueet ja niiden suuntaus

Yleensä ottaen \mathbb{R}^n :n k -ulotteisen moniston \mathcal{M} reuna¹ on helppo määritellä. Se koostuu niistä pisteistä \mathbf{p} , jotka toteuttavat seuraavat kaksi ehtoa:

- (i) \mathbf{p} ei ole \mathcal{M} :ssä.
- (ii) Missä tahansa avoimessa osajoukossa, jossa on \mathbf{p} , on myös \mathcal{M} :n piste(itä). Erityisesti tämä pätee \mathbf{p} -keskisille avoimille palloille.

Moniston reuna voi olla tyhjä. Esimerkiksi \mathbb{R}^3 :n pallonpinnan reuna on tyhjä. Toisaalta moniston reunan ei tarvitse olla (alempiulotteinen) monisto. Esimerkiksi \mathbb{R}^2 :n neliön $0 < x, y < 1$ reuna on mainitun neliön piiri ja se ei ole monisto. Itse asiassa rajoitetunkin moniston reuna voi olla hyvin mutkikas joukko, se voi esimerkiksi olla Jordan-mitaton. Pahempi pulma on tangenttiavuus, joka reunan pisteissä pitäisi olla suunnistusta varten.

Paremmiin päästään liikkeelle, kun määritelläänkin moniston sisällä alueen reuna. Koska se on moniston sisällä, voidaan moniston sileyttä käyttää apuna suunnistuksessa. Moniston osajoukon $\mathcal{A} \subset \mathcal{M}$ reuna monistossa, merkitään $\partial_{\mathcal{M}}\mathcal{A}$, muodostuu kaikista sellaisista \mathcal{A} :n pisteistä, että jokaisessa avoimessa joukossa, jossa on ko. piste, on sekä \mathcal{A} :n piste(itä) että $\mathcal{M} - \mathcal{A}$:n piste(itä). (Vrt. ehto (ii) yllä.) Huomaa, että reunan $\partial_{\mathcal{M}}\mathcal{A}$ piste voi tällöin olla itse \mathcal{A} :ssa.



Valitaan nyt tarkasteltavaksi jokin reunan $\partial_{\mathcal{M}}\mathcal{A}$ piste \mathbf{p}_0 . Koska piste \mathbf{p}_0 on monistossa \mathcal{M} , jossain sen sisältävässä avoimessa joukossa \mathcal{B} leikkaus $\mathcal{M} \cap \mathcal{B}$ on määriteltävissä lokaalina urana, ks. Lause 2.4. Ts. on sellainen jatkuvasti derivoituva funktio $\mathbf{F}_{\mathbf{p}_0} : \mathcal{B} \rightarrow \mathbb{R}^{n-k}$, että $\mathbf{F}'_{\mathbf{p}_0}$ on täysiranginen ja \mathbf{p} on $\mathcal{M} \cap \mathcal{B}$:ssä tarkalleen silloin, kun $\mathbf{F}_{\mathbf{p}_0}(\mathbf{p}) = \mathbf{0}$. Tällaisia funktioita $\mathbf{F}_{\mathbf{p}_0}$ voi olla valittavissa useitakin. Piste \mathbf{p}_0 sanotaan olevan reunan $\partial_{\mathcal{M}}\mathcal{A}$ sileä piste, mikäli ym. funktion $\mathbf{F}_{\mathbf{p}_0}$ lisäksi on valittavissa sellainen jatkuvasti derivoituva funktio $g_{\mathbf{p}_0} : \mathcal{B} \rightarrow \mathbb{R}$, että

1. $g'_{\mathbf{p}_0}$ ei riipu lineaarisesti $\mathbf{F}'_{\mathbf{p}_0}$:n riveistä.
2. piste \mathbf{p} on leikkauksessa $\mathcal{A} \cap \mathcal{B}$ tarkalleen silloin, kun

$$\mathbf{F}_{\mathbf{p}_0}(\mathbf{p}) = \mathbf{0} \quad \text{ja} \quad g_{\mathbf{p}_0}(\mathbf{p}) \geq 0.$$

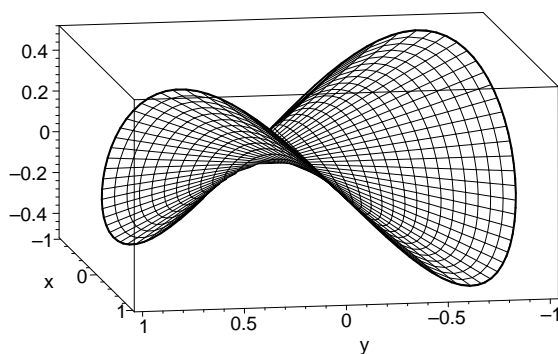
Reunan $\partial_{\mathcal{M}}\mathcal{A}$ kaikkien sileiden pisteiden muodostamaa joukkoa kutsutaan \mathcal{A} :n sileäksi reunaksi monistossa \mathcal{M} ja merkitään $\partial_{\mathcal{M}}^s\mathcal{A}$:lla. Määrittelyt ovat helposti tulkittavissa myös jos $k = n$. Silloin kohtaa 1. ei tarvita ja kohdassa 2. on vain ehto $g_{\mathbf{p}_0}(\mathbf{p}) \geq 0$.

¹Huomaa, että tämä ei (yleensä) ole moniston reuna \mathbb{R}^n :n joukon reunana!

Esimerkki. Uraehto $F(x, y, z) = z - xy = 0$ määrittää \mathbb{R}^3 :ssa sileän pinnan (2-ulotteisen moniston) \mathcal{S} , erään ns. satulapinnan. Leikataan tästä osajoukko \mathcal{A} ehdolla $\|\mathbf{p}\| \leq 1$. Reuna $\partial_{\mathcal{S}}\mathcal{A}$ on silloin ehdon

$$\begin{cases} z - xy = 0 \\ 1 - x^2 - y^2 - z^2 = 0 \end{cases}$$

antama urajoukko—itse asiassa 1-ulotteinen monisto. Kuva (Maple):



Kaikki reunan $\partial_{\mathcal{S}}\mathcal{A}$ pisteet ovat sileitä, sillä g:ksi voidaan valita $g(x, y, z) = 1 - x^2 - y^2 - z^2$, jolloin

$$F'(x, y, z) = (-y, -x, 1) \quad \text{sekä} \quad g'(x, y, z) = (-2x, -2y, -2z)$$

ovat lokaalisti lineaarisesti riippumattomat (totea!). Näin ollen $\partial_{\mathcal{S}}^s\mathcal{A} = \partial_{\mathcal{S}}\mathcal{A}$.

Esimerkki. \mathbb{R}^3 :ssa oleva neliö $\mathcal{N} : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1, z = 1$ on tason $z = 1$ (2-ulotteinen monisto) osajoukko. Sen reuna on piiri eli neljän janan

$$\begin{aligned} &0 \leq x \leq 1, y = 0, z = 1 \quad , \quad 0 \leq x \leq 1, y = 1, z = 1, \\ &x = 0, 0 \leq y \leq 1, z = 1 \quad , \quad x = 1, 0 \leq y \leq 1, z = 1 \end{aligned}$$

yhdiste. Muut pisteet kuin kärkipisteet $(0, 0, 1)$, $(0, 1, 1)$, $(1, 0, 1)$ ja $(1, 1, 1)$ ovat sileitä, funktioiksi g voidaan yo. janoja vastaten valita y , $1 - y$, x ja $1 - x$, ja $F(x, y, z) = z - 1$.

Edellisistä esimerkeistä voi jo aavistaakin, että

Lause 5.1. \mathbb{R}^n :n k -ulotteisen moniston \mathcal{M} osajoukon \mathcal{A} sileä reuna $\partial_{\mathcal{M}}^s\mathcal{A}$ on $k - 1$ -ulotteinen monisto (tai tyhjä joukko).

Todistus. Käytetään edellä olevia (lokaaleja) merkintöjä ja otetaan tarkasteltavaksi sileän reunan piste \mathbf{p}_0 . Ehto

$$\begin{cases} \mathbf{F}_{\mathbf{p}_0}(\mathbf{p}) = \mathbf{0} \\ g_{\mathbf{p}_0}(\mathbf{p}) = 0 \end{cases}$$

määrittää silloin jossain \mathbf{p}_0 :n sisältävässä avoimessa joukossa $\mathcal{B}_1 \subseteq \mathcal{B}$ moniston \mathcal{K} , jonka ulotteisuus on $k - 1$, Seurauksen 2.3 perusteella. Nyt pitää näyttää, että leikkaus $\mathcal{K} \cap \mathcal{B}_1$ on sama kuin $\partial_{\mathcal{M}}^s\mathcal{A} \cap \mathcal{B}_1$. Koska \mathbf{p}_0 :ksi voidaan ottaa mikä tahansa sileän reunan piste, tämä osoittaa, että $\partial_{\mathcal{M}}^s\mathcal{A}$ on lokaali ura ja siis monisto.

Otetaan ensin piste $\mathbf{p}_1 \in \partial_{\mathcal{M}}^s\mathcal{A} \cap \mathcal{B}_1$ ja näytetään, että se on $\mathcal{K} \cap \mathcal{B}_1$:ssä. Tehdään vastaoletus: $\mathbf{p}_1 \notin \mathcal{K} \cap \mathcal{B}_1$. Silloin

$$g_{\mathbf{p}_0}(\mathbf{p}_1) \neq 0.$$

(Koska \mathbf{p}_1 on \mathcal{M} :ssä, on $\mathbf{F}_{\mathbf{p}_0}(\mathbf{p}_1) = \mathbf{0}$.) Jatkuvuussyistä $g_{\mathbf{p}_0}(\mathbf{p}) \neq 0$ myös jossain (pienes- sä) avoimessa joukossa \mathcal{B}_2 , jossa \mathbf{p}_1 on. Näin ollen $g_{\mathbf{p}_0}$ on joukossa \mathcal{B}_2 joko arvoiltaan positiivinen tai arvoiltaan negatiivinen. Mutta silloin \mathcal{B}_2 :ssa ei voi olla sekä \mathcal{M} :n pisteitä että $\mathcal{M} - \mathcal{A}$:n pisteitä eikä \mathbf{p}_1 voi olla \mathcal{A} :n reunan piste \mathcal{M} :ssä. Tämä ristiriita osoittaa, että $\mathbf{p}_1 \in \mathcal{K} \cap \mathcal{B}_1$.

Toiseen suuntaan todistettaessa otetaan piste $\mathbf{p}_2 \in \mathcal{K} \cap \mathcal{B}_1$ ja näytetään, että se on myös $\partial_{\mathcal{M}}^s \mathcal{A} \cap \mathcal{B}_1$:ssä. Tehdään taas vasta oletus: $\mathbf{p}_2 \notin \partial_{\mathcal{M}}^s \mathcal{A} \cap \mathcal{B}_1$. Nyt $g_{\mathbf{p}_0}(\mathbf{p}_2) = 0$ ja jossain (pienes- sä) avoimessa joukossa \mathcal{B}_3 , jossa \mathbf{p}_2 on, funktio $g_{\mathbf{p}_0}$ saa vain yhdenmerkkisiä arvoja, joko ei-negatiivisia tai ei-positiivisia. Muutenhan \mathbf{p}_2 olisi sileän reunan piste (kun valitaan $\mathbf{F}_{\mathbf{p}_2} = \mathbf{F}_{\mathbf{p}_0}$ ja $g_{\mathbf{p}_2} = g_{\mathbf{p}_0}$). Näin ollen \mathbf{p}_2 on sidotun ääriarvoprobleman

$$\begin{cases} g_{\mathbf{p}_0}(\mathbf{p}) = \text{extremum!} \\ \mathbf{F}_{\mathbf{p}_0}(\mathbf{p}) = \mathbf{0} \end{cases}$$

lokaali ratkaisu (maksimi- tai minimipiste, ääriarvo on = 0). Sovellettaessa Lagrangen kerroin- ten menetelmää otetaan käyttöön vastaava Lagrangen funktio

$$L(\mathbf{p}, \boldsymbol{\lambda}) = g_{\mathbf{p}_0}(\mathbf{p}) + \boldsymbol{\lambda} \mathbf{F}_{\mathbf{p}_0}(\mathbf{p})^\top,$$

missä $\boldsymbol{\lambda}$ on Lagrangen kerroinvektori (vaakavektori). Ääriarvopisteessä $(\mathbf{p}_2, \boldsymbol{\lambda}_2)$ sen derivaatta on nolla:

$$\begin{cases} \frac{\partial L(\mathbf{p}_2, \boldsymbol{\lambda}_2)}{\partial \mathbf{p}} = g'_{\mathbf{p}_0}(\mathbf{p}_2) + \boldsymbol{\lambda}_2 \mathbf{F}'_{\mathbf{p}_0}(\mathbf{p}_2) = \mathbf{0} \\ \frac{\partial L(\mathbf{p}_2, \boldsymbol{\lambda}_2)}{\partial \boldsymbol{\lambda}} = \mathbf{F}_{\mathbf{p}_0}(\mathbf{p}_2) = \mathbf{0}. \end{cases}$$

Tämä ei voi pitää paikkansa, koska ensimmäinen yhtälö sanoo, että $g'_{\mathbf{p}_0}(\mathbf{p}_2)$ on lineaarisesti riippuva $\mathbf{F}'_{\mathbf{p}_0}(\mathbf{p}_2)$:n riveistä. Saatu ristiriita osoittaa, että $\mathbf{p}_2 \in \partial_{\mathcal{M}}^s \mathcal{A} \cap \mathcal{B}_1$. \square

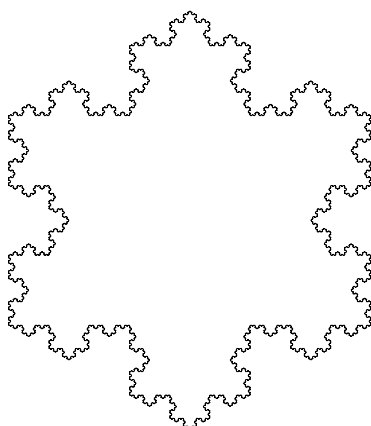
Lopulta päästään määrittelemään integrointialueeksi sopiva käsite. \mathbb{R}^n :n k -ulotteisen moniston \mathcal{M} osajoukko \mathcal{A} on sen *reunallinen alue*, jos

- (1) \mathcal{A} on \mathbb{R}^n :n suljettu osajoukko.

Kaikki reunan $\partial_{\mathcal{M}} \mathcal{A}$ pisteet ovat mukana \mathcal{A} :ssa.

- (2) Joukko $\partial_{\mathcal{M}} \mathcal{A} - \partial_{\mathcal{M}}^s \mathcal{A}$ (reunan ei-sileät pisteet) on \mathbb{R}^n :n $k - 1$ -nollajoukko, ks. Pykälä 3.1.

Ei-sileillä pisteillä ei ole vaikutusta \mathcal{A} :n reunan yli integroitaessa. Tämä ehto tarvitaan, sillä on jopa mahdollista, että kaikki reunan $\partial_{\mathcal{M}} \mathcal{A}$ pisteet ovat ei-sileitä. Esimerkiksi alla olevassa kuvassa hahmotellun ns. *Kochin lumihiutaleen* reuna ei ole missään sileä ja sen pituus on ääretön.

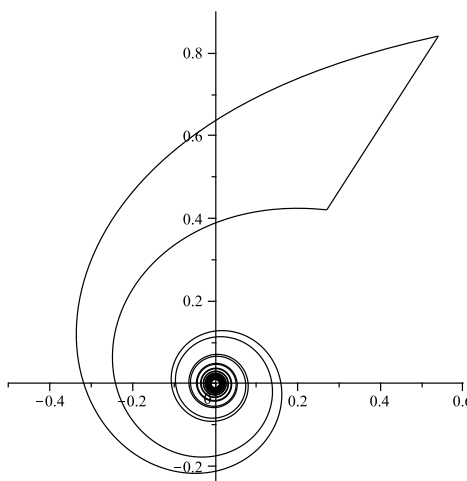


- (3) Jokaista positiivilukua ϵ kohti on olemassa sellainen avoin joukko \mathcal{B}_ϵ , että \mathcal{B}_ϵ sisältää kaikki reunan $\partial_{\mathcal{M}}\mathcal{A}$ ei-sileät pisteet ja että $\partial_{\mathcal{M}}^s\mathcal{A} \cap \mathcal{B}_\epsilon$:n $k - 1$ -ulotteinen volyyymi on $< \epsilon$.

Huomaa, että $\partial_{\mathcal{M}}^s\mathcal{A} \cap \mathcal{B}_\epsilon$ on Lauseen 2.2 nojalla $k - 1$ -ulotteinen monisto. Tämä merkittävä ehto tarvitaan, sillä on mahdollista, että sileän reunan $k - 1$ -ulotteinen volyyymi jonkin ei-sileän pisteen miten tahansa pienessä ympäristössä on $= \infty$. Ehto siis estää tiettyssä mielessä integraalien epäoleellisuuden. Esimerkiksi alla olevan kuvan (Maple) alueen (\mathbb{R}^2 :n osana) ilmeiset ei-sileät reunapisteet ovat kaksi kärkeä ja origo, johon reunaspiraalit²

$$r = \frac{1}{\phi} \quad \text{ja} \quad r = \frac{1}{1 + \phi} \quad (1 \leq \phi < \infty, \text{ napakoordinaattiesitys})$$

suppenevat. Nyt ehdot 1. ja 2. toteutuvat, mutta yo. ehto ei, sillä spiraalien pituus on ääretön missä tahansa origon sisältävässä avoimessa joukossa.



Tärkeää osaa integroinnissa näyttelee reunan $\partial_{\mathcal{M}}^s\mathcal{A}$ suunnistus ja miten se liittyy moniston \mathcal{M} suunnistukseen. Luonnollisesti reunan suunnistus voidaan tehdä vain sen sileissä pisteissä. Sileässä pisteessä \mathbf{p}_0 moniston \mathcal{M} tangenttiavaruuden $\mathcal{T}_{\mathbf{p}_0}(\mathcal{M})$ vektoria \mathbf{t} sanotaan \mathcal{A} :n *ulko-vektoriksi*, jos

$$g'_{\mathbf{p}_0}(\mathbf{p}_0) \bullet \mathbf{t} < 0$$

ja \mathcal{A} :n *sisävektoriksi*, jos

$$g'_{\mathbf{p}_0}(\mathbf{p}_0) \bullet \mathbf{t} > 0.$$

Nämä nimitykset ovat sattuvat. Funktio g nimittäin kasvaa siirryttäessä lokaalisti pisteen \mathbf{p}_0 lähellä reunan yli alueen \mathcal{A} ulkopuolelta sen sisälle, ulkopuolella $g_{\mathbf{p}_0}$ on negatiivinen, sisäpuolella positiivinen ja reunalla $= 0$. Näin ollen, jos $g'_{\mathbf{p}_0}(\mathbf{p}_0) \bullet \mathbf{t} < 0$, vektori \mathbf{t} osoittaa $g_{\mathbf{p}_0}$:n kasvusuunnalle vastakkaiseen suuntaan eli pois päin alueesta \mathcal{A} . Vastaavasti, jos $g'_{\mathbf{p}_0}(\mathbf{p}_0) \bullet \mathbf{t} > 0$, vektori \mathbf{t} osoittaa $g_{\mathbf{p}_0}$:n kasvusuuntaan.

Ulkovektoreita käyttäen saadaan nyt sileän reunan $\partial_{\mathcal{M}}^s\mathcal{A}$ suunnistus ja \mathcal{M} :n suunnistus kytkeväksi yhteen. Ks. Pykälä 4.3. Oletetaan nyt, että monisto \mathcal{M} on suunnistettu k -muotokentällä Φ , ts. sen pisteissä \mathbf{p} on valittavissa sellaiset tangenttiavaruuden $\mathcal{T}_{\mathbf{p}}(\mathcal{M})$ vektorit $\mathbf{t}_1(\mathbf{p}), \dots, \mathbf{t}_k(\mathbf{p})$, että $\Phi(\mathbf{p}; \mathbf{t}_1(\mathbf{p}), \dots, \mathbf{t}_k(\mathbf{p}))$ on jatkuva \mathbf{p} :n suhteen ja $\neq 0$ \mathcal{M} :ssä. Suunnistettaessa reunaa $\partial_{\mathcal{M}}^s\mathcal{A}$ sen sileissä pisteissä \mathbf{p} pitää valita jokin sopiva $k - 1$ -muotokenttä Φ_{reuna} ,

²Nämä ovat ns. *hyperbolisia spiraaleja*.

sileä reunahan on $k - 1$ -ulotteinen monisto, ja tangentiavaruuden $\mathcal{T}_{\mathbf{p}}(\partial_{\mathcal{M}}^s \mathcal{A})$ sellaiset (\mathbf{p} :stä riippuvat) vektorit $\mathbf{s}_1(\mathbf{p}), \dots, \mathbf{s}_{k-1}(\mathbf{p})$, että $\Phi_{\text{reuna}}(\mathbf{p}; \mathbf{s}_1(\mathbf{p}), \dots, \mathbf{s}_{k-1}(\mathbf{p}))$ on sileällä reunalla \mathbf{p} :n suhteen jatkuva eikä saa arvoa 0. Valitaankin nyt

$$\Phi_{\text{reuna}}(\mathbf{p}; \mathbf{s}_1, \dots, \mathbf{s}_{k-1}) = \Phi(\mathbf{p}; \mathbf{t}_{\text{ulko}}(\mathbf{p}), \mathbf{s}_1, \dots, \mathbf{s}_{k-1}),$$

missä $\mathbf{t}_{\text{ulko}}(\mathbf{p})$ on sopiva \mathbf{p} :stä riippuva ulkovektori. Tämä määrittely kytkee suunnistukset reunalla $\partial_{\mathcal{M}}^s \mathcal{A}$ ja monistossa \mathcal{M} yhteen. Suunnistetun moniston \mathcal{M} reunallisen alueen vastaavasti suunnistettua sileää reuna merkitään $\partial_{\mathcal{M}}^s \mathcal{A}$:lla. Huomaa, että vektorit $\mathbf{s}_1(\mathbf{p}), \dots, \mathbf{s}_{k-1}(\mathbf{p})$ ovat myös moniston \mathcal{M} tangentiavaruudessa pisteessä \mathbf{p} , joten muotokenttää Φ voi käyttää. Sileän reunan $\partial_{\mathcal{M}}^s \mathcal{A}$ tangentiavaruus pisteessä \mathbf{p} nimittäin on matriisin

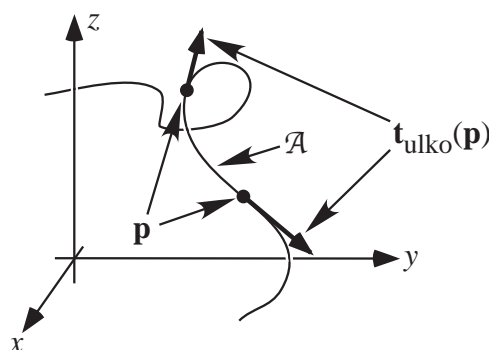
$$\begin{pmatrix} \mathbf{F}'_{\mathbf{p}_0}(\mathbf{p}) \\ g'_{\mathbf{p}_0}(\mathbf{p}) \end{pmatrix}$$

nolla-avaruus, ks. Lause 2.8 ja Lauseen 5.1 todistus. Näin ollen se sisältyy matriisiin $\mathbf{F}'_{\mathbf{p}_0}(\mathbf{p})$:n nolla-avaruuteen, joka taas on moniston \mathcal{M} tangentiavaruus. On siis valittava \mathcal{M} :n tangentiavaruuden kanta $\mathbf{t}_{\text{ulko}}(\mathbf{p}), \mathbf{s}_1(\mathbf{p}), \dots, \mathbf{s}_{k-1}(\mathbf{p})$ sileän reunan pisteessä \mathbf{p} siten, että se on ”saman-kätinen” kuin kanta $\mathbf{t}_1(\mathbf{p}), \dots, \mathbf{t}_k(\mathbf{p})$.

Esimerkki. Parametrisoitu sileä avaruusviiva $\mathcal{C} : \mathbf{p} = \gamma(u)$ ($u \in U$) suunnistetaan 1-muotokenttää $\Phi(\mathbf{p}; \mathbf{r}) = \mathbf{F}(\mathbf{p}) \bullet \mathbf{r}$ käyttäen valitun $\mathbf{F}(\gamma(u)) = \gamma'(u)$. Saadun 1-muodon arvo on $\|\gamma'(u)\|^2 > 0$. \mathcal{C} :n reunallisen alueen (osaviivan) \mathcal{A} sileä reuna muodostuu erillisistä pisteistä. ”Positiivinen” suunnistus reunan sileässä pisteessä $\mathbf{p} = \gamma(u)$ tapahtuu muotokenttätehdon

$$\Phi_{\text{reuna}}(\mathbf{p}) = \gamma'(u) \bullet \mathbf{t}_{\text{ulko}}(\mathbf{p}) > 0$$

kautta. Erityisesti, jos \mathcal{A} :n sileä reuna muodostuu kahdesta pisteestä, alkupisteestä ja loppupisteestä, alkupiste on ”negatiivinen” ja loppupiste ”positiivinen”.



Esimerkki. Sileä parametrisoitu pinta $\mathcal{S} : \mathbf{r} = \gamma(\mathbf{u})$ ($\mathbf{u} \in \mathcal{U}$) suunnistetaan käyttäen 2-muotokenttää $\Phi(\mathbf{p}; \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = \mathbf{n}(\mathbf{p}) \bullet \mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_2$, missä

$$\mathbf{n}(\mathbf{p}) = \mathbf{n}(\gamma(\mathbf{u})) = \frac{\partial \gamma(\mathbf{u})}{\partial u_1} \times \frac{\partial \gamma(\mathbf{u})}{\partial u_2}$$

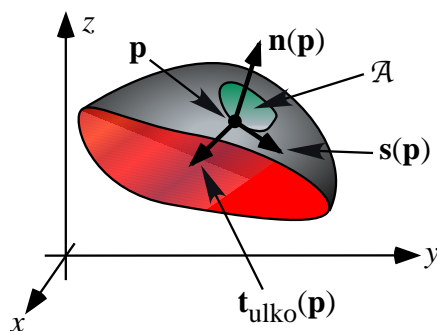
on normaalivektori pisteessä \mathbf{p} . Silloin 2-muodon arvo on

$$\left\| \frac{\partial \gamma(\mathbf{u})}{\partial u_1} \times \frac{\partial \gamma(\mathbf{u})}{\partial u_2} \right\|^2$$

ja se on aina positiivinen. S :n reunallisen alueen \mathcal{A} sileä reuna muodostuu sileistä avaruusviivoista ja suunnistetaan se sileässä pisteessä $\mathbf{p} = \gamma(\mathbf{u})$ muotokenttätehdon

$$\Phi_{\text{reuna}}(\mathbf{p}; \mathbf{s}(\mathbf{p})) = \mathbf{n}(\mathbf{p}) \bullet \mathbf{t}_{\text{ulko}}(\mathbf{p}) \times \mathbf{s}(\mathbf{p}) > 0$$

kautta, missä $\mathbf{s}(\mathbf{p})$ on reunan (viivan) tangenttivektori pisteessä \mathbf{p} . Silloin vektorit $\mathbf{n}(\mathbf{p})$, $\mathbf{t}_{\text{ulko}}(\mathbf{p})$ ja $\mathbf{s}(\mathbf{p})$ muodostavat oikeakätisen systeemin ja suunnistus on tuttu ”oikean käden säännön” antama suunnistus, ks. kuva alla.



Esimerkki. \mathbb{R}^3 :n 3-ulotteiselle monistolle \mathcal{M} (eli avoimelle osajoukolle) tangenttiavaruus on aina koko vektoriavaruus \mathbb{R}^3 . \mathcal{M} :n reunallisen alueen (kappaleen) \mathcal{A} suunnistus tapahtuu vaikkapa 3-muotokenttätehdon

$$\Phi(\mathbf{p}; \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3) = \det(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3) > 0$$

kautta. Reuna $\partial_{\mathcal{M}}^s \mathcal{A}$ muodostuu sileistä pinnoista. Ulkovektoriksi pisteessä \mathbf{p} voidaan valita vaikkapa ko. pinnan ulkonormaali $\mathbf{n}(\mathbf{p})$ ja tangenttivektoreiksi $\mathbf{s}_1(\mathbf{p})$ ja $\mathbf{s}_2(\mathbf{p})$ sen tangenttitason kantavektorit. Jos suunnistus tapahtuu ehdolla

$$\det(\mathbf{n}(\mathbf{p}), \mathbf{s}_1(\mathbf{p}), \mathbf{s}_2(\mathbf{p})) = \mathbf{n}(\mathbf{p}) \bullet \mathbf{s}_1(\mathbf{p}) \times \mathbf{s}_2(\mathbf{p}) > 0,$$

niin kysymys on reunan (pinnan) suunnistuksesta siten, että siinä esiintyvä normaalivektori $\mathbf{n}(\mathbf{p})$ on ulkonormaali ja että $\mathbf{n}(\mathbf{p})$, $\mathbf{s}_1(\mathbf{p})$ ja $\mathbf{s}_2(\mathbf{p})$ muodostavat oikeakätisen systeemin.

Vastaavasti \mathbb{R}^n :n n -ulotteisen moniston \mathcal{M} reunallisen alueen \mathcal{A} sileän reunan suunnistus tapahtuu ehdolla

$$\det(\mathbf{n}(\mathbf{p}), \mathbf{s}_1(\mathbf{p}), \dots, \mathbf{s}_{n-1}(\mathbf{p})) > 0,$$

missä $\mathbf{n}(\mathbf{p})$ on sileän reunan $\partial_{\mathcal{M}}^s \mathcal{A}$ pisteessä \mathbf{p} valittu $\partial_{\mathcal{M}}^s \mathcal{A}$:n normaaliavaruuden vektori ulospäin (ulkonormaali).

5.2 Ulkoderivaatta

Vielä tarvitaan sopiva yleinen derivaatan käsite, ns. *ulkoderivaatta* (engl. exterior derivative). Tavallinen yhden muuttujan funktion derivaatta määritellään erotusosamäärän raja-arvona:

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}.$$

Peruskursseilla on esillä myös asiaan liittyvä 1-muotokenttä, ns. *differentiaali*,

$$(df)(x; r) = f'(x)r,$$

joka sekin voidaan määritellä erotusosamäärän avulla:

$$f'(x)r = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x + hr) - f(x)}{h}.$$

Ulkoderivaatta on tämän yleistys k -muotokentille. Huomaa, että funktio f on 0-muotokenttä ja differentiaali df on 1-muotokenttä. Ulkoderivointi lisää muodon astetta yhdellä.

Erotusosamäärässä esiintyvän välin $[x, x + h]$ (tai $[x + h, x]$) tilalle tulee $k + 1$ -ulotteinen (suljettu) suuntaissärmiö

$$\mathcal{P}(\mathbf{p}; \mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_{k+1}) = \left\{ \mathbf{p} + \sum_{i=1}^{k+1} u_i \mathbf{r}_i^\top \mid 0 \leq u_1, \dots, u_{k+1} \leq 1 \right\}.$$

Reaaliakselilla tämä on suljettu äärellinen väli, tasolla \mathbb{R}^2 se voisi olla suunnikas ja \mathbb{R}^3 :ssa suuntaissärmiö. Tässä $k + 1 \leq n$ eli kyseessä voi olla korkeampiulotteiseen avaruuteen upotettu alempiulotteinen suuntaissärmiö. Upotettuna \mathbb{R}^n :n affiniin aliavaruuteen

$$\mathcal{A}(\mathbf{p}; \mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_{k+1}) = \left\{ \mathbf{p} + \sum_{i=1}^{k+1} u_i \mathbf{r}_i^\top \mid u_1, \dots, u_{k+1} \in \mathbb{R} \right\}$$

(\mathbb{R}^n :n $k + 1$ -ulotteinen monisto) suuntaissärmiö $\mathcal{P}(\mathbf{p}; \mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_{k+1})$ on reunallinen alue, jonka reuna muodostuu *tahkoista*. Tahkoja on $2(k + 1)$ kpl ja ne esiintyvät pareittain. i :nnet tahkot ovat

$$\mathcal{T}_i^- = \left\{ \mathbf{p} + \sum_{i=1}^{k+1} u_i \mathbf{r}_i^\top \mid 0 \leq u_1, \dots, u_{k+1} \leq 1 \text{ ja } u_i = 0 \right\}$$

ja

$$\mathcal{T}_i^+ = \left\{ \mathbf{p} + \sum_{i=1}^{k+1} u_i \mathbf{r}_i^\top \mid 0 \leq u_1, \dots, u_{k+1} \leq 1 \text{ ja } u_i = 1 \right\}.$$

Edellisessä tahkossa \mathbf{r}_i on sisävektori ja jälkimmäisessä ulkovektori. Näillä tahkoilla suunnistukset ovat siis vastakkaiset, ja sovitaan että $\mathcal{A}(\mathbf{p}; \mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_{k+1})$ suunnistetaan vastaten tahkojen \mathcal{T}_i^+ suunnistusta ulkovektorien \mathbf{r}_i avulla. Sileä reuna muodostuu tahkoista, joista on poistettu niiden reunat eli särmit. Lauseen 3.3 mukaan särmit ovat k -nollajoukkoja. Sileä reuna on Lauseen 5.1 mukaan k -ulotteinen monisto.

Erotusosamäärässä esiintyvää suunnattua summaa, $f(x + hr)$ plusmerkkisenä, $f(x)$ miinusmerkkisenä, vastaa nyt integraali suuntaissärmiön suunnatun reunan yli. Merkkivaihtelu tulee mukaan, koska tahkot \mathcal{T}_i^- ja \mathcal{T}_i^+ ovat vastakkaisesti suunnistetut. Näin saadaan k -muotokentän Φ *ulkoderivaatta* muodossa

$$(d\Phi)(\mathbf{p}; \mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_{k+1}) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h^{k+1}} \int_{\vec{\partial} \mathcal{P}_h} \Phi,$$

missä lyhyiden vuoksi on merkitty $\mathcal{A} = \mathcal{A}(\mathbf{p}; \mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_{k+1})$ sekä $\mathcal{P}_h = \mathcal{P}(\mathbf{p}; h\mathbf{r}_1, \dots, h\mathbf{r}_{k+1})$. Huomaa, että integrointialue on annettavissa laajennetun parametrisoinnin avulla, ts. integraali on Pykälässä 4.2 käsiteltyä muotoa. (Tapauksessa $k = 0$ siis suunnattuna summana.) Lisäksi sovitaan, että jos $k + 1 > n$, ulkoderivaatta saa aina arvon 0.

Suoraan määritelmästä ulkoderivaatta on varsin hankala laskea, kuten tavallinen yhden muuttujan derivaattakin usein on. Asian helpottamiseksi käytetään derivointisääntöjä. Yhdessä ne muodostavat tarvittavan kokoelman laskulakeja, joilla derivaatan lasku on helppoa. Derivointisääntöjen todistaminen on taas sitten osin työlästä.

Kootaan yhteen perusderivointisäännöt. Jätetään muuttujat $\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_k$ pitkälti merkittömättä lyhyiden vuoksi.

(I) Jos Φ sekä Ψ ovat k -muotokenttiä ja c_1 sekä c_2 ovat vakioita, niin

$$d(c_1\Phi + c_2\Psi) = c_1(d\Phi) + c_2(d\Psi).$$

Ulkoderivointi on siis lineaarinen operaatio. Tämä seuraa suoraan integraalimääritelmästä.

(II) Jos k -muotokenttä Φ on vakio (siis saa vain yhden arvon), niin $d\Phi$ on $k + 1$ -muotokenttä, joka saa vain arvon 0.

Kuten yleensä, vakion derivaatta on nolla. Tämäkin seuraa suoraan integraalimääritelmästä, sillä johtuen tahkoparien vastakkaisesta suuntauksesta esiintyvä integraali on aina = 0. (Integrandi on tahkojen vastinpisteissä sama.)

(III) Funktion f eli 0-muotokentän ulkoderivaatta on

$$(df)(\mathbf{p}; \mathbf{r}) = f'(\mathbf{p})\mathbf{r} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f(\mathbf{p})}{\partial x_i} dx_i.$$

Määritelmän mukaan ko. ulkoderivaatta saadaan raja-arvona

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(\mathbf{p} + h\mathbf{r}^\top) - f(\mathbf{p})}{h} = \left(\frac{d}{dt} f(\mathbf{p} + t\mathbf{r}^\top) \right)_{t=0} = f'(\mathbf{p})\mathbf{r}$$

(ketjusääntö). Jos $\|\mathbf{r}\| = 1$, kyseessä on siis tavallinen suunnattu derivaatta suuntaan \mathbf{r} .

(IV) Jos f on funktio, niin

$$\begin{aligned} d(f(\mathbf{p})dx_{j_1} \wedge \cdots \wedge dx_{j_k}) &= (df)(\mathbf{p}; \cdot) \wedge dx_{j_1} \wedge \cdots \wedge dx_{j_k} \\ &= \sum_{i=1}^n \frac{\partial f(\mathbf{p})}{\partial x_i} dx_i \wedge dx_{j_1} \wedge \cdots \wedge dx_{j_k}. \end{aligned}$$

Tämä on avainsääntö, sillä yhdessä edellisten sääntöjen kanssa se mahdollistaa ulkoderivaatan laskemisen kentän hajotelmasta ja itse asiassa näyttää, että ulkoderivaatta on $k + 1$ -muoto. Todistus vain on varsin työläs lasku, ks. esimerkiksi HUBBARD & HUBBARD.

(V) k -muotokentälle Φ kahdesti ulkoderivoimalla saatu $k + 2$ -muotokenttä $d^2\Phi = d(d\Phi)$ on vakiokenttä, joka saa arvon 0.

Muotokentät ovat siis aina ”ensimmäistä astetta”. Kahdesti derivointi tuottaa nollan. Tämä seuraa edellisistä säännöistä. Jos nimittäin f on funktio, niin

$$(d^2f)(\mathbf{p}; \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = \sum_{i=1}^n d\left(\frac{\partial f(\mathbf{p})}{\partial x_i} dx_i\right) = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 f(\mathbf{p})}{\partial x_j \partial x_i} dx_j \wedge dx_i = 0.$$

(Muista, että $dx_i \wedge dx_j = -dx_j \wedge dx_i$ ja $dx_i \wedge dx_i = 0$.)

Sääntöjen avulla k -muotokentän

$$\Phi(\mathbf{p}; \mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_k) = \sum_{1 \leq j_1 < j_2 < \cdots < j_k \leq n} a_{j_1, j_2, \dots, j_k}(\mathbf{p})(dx_{j_1} \wedge dx_{j_2} \wedge \cdots \wedge dx_{j_k})(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_k)$$

ulkoderivaatan lasku on periaatteessa suoraviivaista ja palautuu osittaisderivaattoihin.

Huomautus. *Itse asiassa koko ulkoderivaatta voitaisiin määrittellä näiden sääntöjen avulla. Lienee kuitenkin mukava todeta, että se on tavallisen yhden muuttujan funktion derivaatan yleistyminen. Lisäksi määrittely integraalin avulla antaa ”geometrisen” tavan ajatella ulkoderivaattaa, eikä pelkkää symbolista koneistoa.*

Esimerkki. *Lasketaan \mathbb{R}^4 :n 2-muodon*

$$\Phi = x_1x_2dx_2 \wedge dx_4 - x_2^2dx_3 \wedge dx_4$$

ulkoderivaatta. (Lyhyden vuoksi jätetään merkitsemättä $\mathbf{p} = (x_1, x_2, x_3, x_4)$ ja \mathbf{r}_1 sekä \mathbf{r}_2 .) Laskusääntöjä käyttäen

$$\begin{aligned} d\Phi &=_{(I)} d(x_1x_2dx_2 \wedge dx_4) - d(x_2^2dx_3 \wedge dx_4) \\ &=_{(IV)} \left(\frac{\partial(x_1x_2)}{\partial x_1}dx_1 + \frac{\partial(x_1x_2)}{\partial x_2}dx_2 + \frac{\partial(x_1x_2)}{\partial x_3}dx_3 + \frac{\partial(x_1x_2)}{\partial x_4}dx_4 \right) \wedge dx_2 \wedge dx_4 \\ &\quad - \left(\frac{\partial(x_2^2)}{\partial x_1}dx_1 + \frac{\partial(x_2^2)}{\partial x_2}dx_2 + \frac{\partial(x_2^2)}{\partial x_3}dx_3 + \frac{\partial(x_2^2)}{\partial x_4}dx_4 \right) \wedge dx_3 \wedge dx_4 \\ &= (x_2dx_1 + x_1dx_2) \wedge dx_2 \wedge dx_4 - (2x_2dx_2) \wedge dx_3 \wedge dx_4 \\ &= x_2dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_4 + x_1dx_2 \wedge dx_2 \wedge dx_4 - 2x_2dx_2 \wedge dx_3 \wedge dx_4 \\ &= x_2dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_4 - 2x_2dx_2 \wedge dx_3 \wedge dx_4. \end{aligned}$$

Koskien muotokenttien kiilatuloja saadaan

Cartanin taikakaava.³ *k -muotokentälle Φ sekä l -muotokentälle Ψ saadaan kiilatulon derivointikaava*

$$d(\Phi \wedge \Psi) = (d\Phi) \wedge \Psi + (-1)^k \Phi \wedge (d\Psi).$$

Todistus. Kiilatulon määritelmän nojalla riittää todistaa asia alkeisille muotokentille

$$\Phi = a(\mathbf{p})dx_{j_1} \wedge \cdots \wedge dx_{j_k} \quad \text{ja} \quad \Psi = b(\mathbf{p})dx_{h_1} \wedge \cdots \wedge dx_{h_l}$$

ja näiden kiilatulolle

$$\Phi \wedge \Psi = a(\mathbf{p})b(\mathbf{p})dx_{j_1} \wedge \cdots \wedge dx_{j_k} \wedge dx_{h_1} \wedge \cdots \wedge dx_{h_l}.$$

Derivointisäännön (IV) nojalla

$$\begin{aligned} d(\Phi \wedge \Psi) &= \sum_{i=1}^n \frac{\partial(a(\mathbf{p})b(\mathbf{p}))}{\partial x_i} dx_i \wedge dx_{j_1} \wedge \cdots \wedge dx_{j_k} \wedge dx_{h_1} \wedge \cdots \wedge dx_{h_l} \\ &= \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial a(\mathbf{p})}{\partial x_i} b(\mathbf{p}) + \frac{\partial b(\mathbf{p})}{\partial x_i} a(\mathbf{p}) \right) dx_i \wedge dx_{j_1} \wedge \cdots \wedge dx_{j_k} \wedge dx_{h_1} \wedge \cdots \wedge dx_{h_l} \\ &= \left(\sum_{i=1}^n \frac{\partial a(\mathbf{p})}{\partial x_i} dx_i \wedge dx_{j_1} \wedge \cdots \wedge dx_{j_k} \right) \wedge (b(\mathbf{p})dx_{h_1} \wedge \cdots \wedge dx_{h_l}) \\ &\quad + (a(\mathbf{p})dx_{j_1} \wedge \cdots \wedge dx_{j_k}) \wedge (-1)^k \left(\sum_{i=1}^n \frac{\partial b(\mathbf{p})}{\partial x_i} dx_i \wedge dx_{h_1} \wedge \cdots \wedge dx_{h_l} \right) \\ &= (d\Phi) \wedge \Psi + (-1)^k \Phi \wedge (d\Psi). \end{aligned}$$

□

³La ”formule magique de Cartan”. Élie Cartan oli muototeorian isä.

5.3 Fysikaalisten muotokenttien ulkoderivaatat

Kuten Pykälässä 4.4 todettiin, \mathbb{R}^3 :n vektorikentän $\mathbf{F}(\mathbf{p})$ perusmuotokentät ovat työmuotokenttä

$$\Phi_{\mathbf{F}\text{-work}}(\mathbf{p}; \mathbf{r}) = \mathbf{F}(\mathbf{p}) \bullet \mathbf{r} \quad (1\text{-muotokenttä})$$

ja vuomuotokenttä

$$\Phi_{\mathbf{F}\text{-flux}}(\mathbf{p}; \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = \det(\mathbf{F}(\mathbf{p}), \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = \mathbf{F}(\mathbf{p}) \bullet \mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_2 \quad (2\text{-muotokenttä}),$$

ja skalaarikentän $f(\mathbf{p})$ perusmuotokenttä on sen itsensä lisäksi tiheysmuotokenttä

$$\Phi_{f\text{-density}}(\mathbf{p}; \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3) = f(\mathbf{p}) \det(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3) \quad (3\text{-muotokenttä}).$$

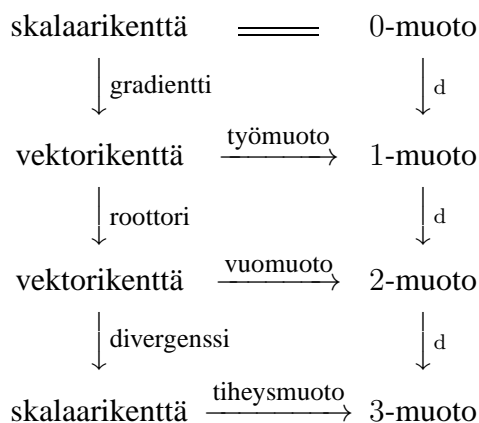
Näiden perusmuotokenttien ja ulkoderivaattojen yhteydet ovat seuraavat:

- (A) $df = \Phi_{\nabla f\text{-work}}$ (df on gradientin ∇f työmuotokenttä.)
- (B) $d\Phi_{\mathbf{F}\text{-work}} = \Phi_{\nabla \times \mathbf{F}\text{-flux}}$ ($d\Phi_{\mathbf{F}\text{-work}}$ on roottorin $\nabla \times \mathbf{F}$ vuomuotokenttä.)
- (C) $d\Phi_{\mathbf{F}\text{-flux}} = \Phi_{\nabla \bullet \mathbf{F}\text{-density}}$ ($d\Phi_{\mathbf{F}\text{-flux}}$ on divergenssin $\nabla \bullet \mathbf{F}$ tiheysmuotokenttä.)

Nämä kaikki ovat todistettavissa suoralla laskulla. (A) seuraa suoraan derivointisäännöstä (III). (B) saadaan seuraavasti:

$$\begin{aligned} d\Phi_{\mathbf{F}\text{-work}} &= d(F_1 dx + F_2 dy + F_3 dz) = (dF_1) \wedge dx + (dF_2) \wedge dy + (dF_3) \wedge dz \\ &= \left(\frac{\partial F_1}{\partial x} dx + \frac{\partial F_1}{\partial y} dy + \frac{\partial F_1}{\partial z} dz \right) \wedge dx + \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} dx + \frac{\partial F_2}{\partial y} dy + \frac{\partial F_2}{\partial z} dz \right) \wedge dy \\ &\quad + \left(\frac{\partial F_3}{\partial x} dx + \frac{\partial F_3}{\partial y} dy + \frac{\partial F_3}{\partial z} dz \right) \wedge dz \\ &= \left(\frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z} \right) dy \wedge dz + \left(\frac{\partial F_1}{\partial z} - \frac{\partial F_3}{\partial x} \right) dz \wedge dx + \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right) dx \wedge dy \\ &= \Phi_{\nabla \times \mathbf{F}\text{-flux}}. \end{aligned}$$

Hyvin samaan tapaan nähdään kohta (C) (jätetään lukijalle harjoitukseksi). Koko juttu voidaan esittää seuraavana kaaviona havainnollisessa muodossa:



Kaavion mukaan gradientin roottori vastaa kahta ulkoderivointia, samoin roottorin divergenssi. Laskusäännön (V) mukaan nämä ovat nollija ja muistettaneen, että todella $\nabla \times \nabla f = \mathbf{0}$ sekä $\nabla \bullet (\nabla \times \mathbf{F}) = 0$. Sen sijaan muut toisen kertaluvun derivaatat $\nabla \bullet (\nabla f) = \nabla^2 f = \Delta f$ (Laplacen operaattori), $\nabla(\nabla \bullet \mathbf{F})$ ja $\nabla \times (\nabla \times \mathbf{F})$ (kaksoisroottori) eivät vastaa kahta ulkoderivointia eivätkä yleensä ole nollija (nollavektoreita).

Edelleen Cartanin taikakaavasta saadaan suoraan Pykälän 1.5 nabluskaavat (i), (iii), (iv) ja (v), sillä kuten Pykälässä 4.4 todettiin, skalaarikentille f ja g ja vektorikentille \mathbf{F} ja \mathbf{G}

$$f \wedge g = fg, \quad f \wedge \Phi_{\mathbf{F}\text{-work}} = \Phi_{f\mathbf{F}\text{-work}}, \quad f \wedge \Phi_{\mathbf{F}\text{-flux}} = \Phi_{f\mathbf{F}\text{-flux}}, \quad \Phi_{\mathbf{F}\text{-work}} \wedge \Phi_{\mathbf{G}\text{-work}} = \Phi_{\mathbf{F} \times \mathbf{G}\text{-flux}}$$

$$\text{ja } \Phi_{\mathbf{F}\text{-work}} \wedge \Phi_{\mathbf{G}\text{-flux}} = \Phi_{\mathbf{F} \bullet \mathbf{G}\text{-density}}.$$

Esimerkiksi kaava

$$(v) \quad \nabla \bullet \mathbf{F} \times \mathbf{G} = \nabla \times \mathbf{F} \bullet \mathbf{G} - \mathbf{F} \bullet \nabla \times \mathbf{G}$$

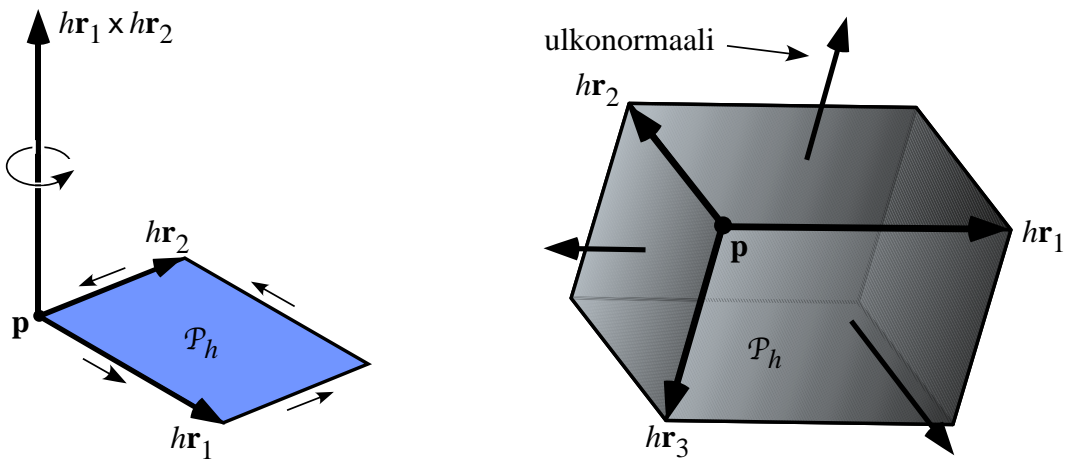
saadaan seuraavasti:

$$\begin{aligned} \Phi_{\nabla \bullet \mathbf{F} \times \mathbf{G}\text{-density}} &= d\Phi_{\mathbf{F} \times \mathbf{G}\text{-flux}} = d\Phi_{\mathbf{F}\text{-work}} \wedge \Phi_{\mathbf{G}\text{-work}} + (-1)^1 \Phi_{\mathbf{F}\text{-work}} \wedge d\Phi_{\mathbf{G}\text{-work}} \\ &= \Phi_{\nabla \times \mathbf{F}\text{-flux}} \wedge \Phi_{\mathbf{G}\text{-work}} - \Phi_{\mathbf{F}\text{-work}} \wedge \Phi_{\nabla \times \mathbf{G}\text{-flux}} \\ &= \Phi_{\nabla \times \mathbf{F} \bullet \mathbf{G}\text{-density}} - \Phi_{\mathbf{F} \bullet \nabla \times \mathbf{G}\text{-density}} \\ &= \Phi_{(\nabla \times \mathbf{F} \bullet \mathbf{G} - \mathbf{F} \bullet \nabla \times \mathbf{G})\text{-density}}. \end{aligned}$$

Ajatellen ulkoderivaatan määrittelyä integraalin raja-arvona, todetaan, että hyvin pienessä \mathbb{R}^3 :ssa olevassa suunnikkaassa $\mathcal{P}_h(\mathbf{p}; \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)$ (h on pieni) roottorin skaalattu projektiio suunnikkaan normaalille (ks. kuva alla vasemmalla) on

$$(\nabla \times \mathbf{F}(\mathbf{p})) \bullet (h\mathbf{r}_1) \times (h\mathbf{r}_2) \cong \int_{\vec{\partial}_{\mathcal{A}} \mathcal{P}_h} \Phi_{\mathbf{F}\text{-work}} = \int_U \mathbf{F}(\gamma(u)) \bullet \gamma'(u) du = \oint_{\vec{\partial}_{\mathcal{A}} \mathcal{P}_h} \mathbf{F}(\mathbf{r}) \bullet d\mathbf{s},$$

missä $\vec{\partial}_{\mathcal{A}} \mathcal{P}_h$:n (laajennettu) parametrisointi on $\mathbf{r} = \gamma(u)$ ($u \in U$). Mainittu projektiio on siis approksimatiivisesti vektorikentän kierto oikean käden säännön antamaan suuntaan pienen suunnikkaan piirin ympäri. Tästä syystä roottoria kutsutaan myös *pyörteisyydeksi* tai *pyörteen tiheydeksi*.



Vastaavasti hyvin pienessä \mathbb{R}^3 :n suuntaissärmiössä $\mathcal{P}_h(\mathbf{p}; \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3)$ skaalattu divergenssi on

$$(\nabla \bullet \mathbf{F}(\mathbf{p})) \det(h\mathbf{r}_1, h\mathbf{r}_2, h\mathbf{r}_3) \cong \int_{\vec{\partial}_{\mathcal{A}} \mathcal{P}_h} \Phi_{\mathbf{F}\text{-flux}} = \oint_{\vec{\partial}_{\mathcal{A}} \mathcal{P}_h} \mathbf{F}(\mathbf{r}) \bullet d\mathbf{S}.$$

Lokaalisesti divergenssi on siis vuo hyvin pienen suuntaissärmiön reunan läpi ulospäin, ks. kuva yllä oikealla. Se kuvaa nesteen tms. määrän muutosta ko. suuntaissärmiössä. Tästä syystä divergenssiä kutsutaan myös *lähteisyydeksi* tai *lähteen tiheydeksi*. Kyseessä on tiheyssuure, $\det(h\mathbf{r}_1, h\mathbf{r}_2, h\mathbf{r}_3)$ on ko. suuntaissärmiön tilavuus.

Sähkömagneettisia kenttiä hallitsevat ns. *Maxwellin yhtälöt*:

$$(M1) \quad \nabla \cdot \mathbf{D} = \rho \quad (\text{Gaußin sähköstaattinen laki eli Coulombin laki})$$

$$(M2) \quad \nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (\text{Gaußin magnetostaattinen laki})$$

$$(M3) \quad \nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (\text{Faradayn laki})$$

$$(M4) \quad \nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \quad (\text{Ampèren laki})$$

Suureita yhdistävät ns. materiaalilait⁴

$$\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E} \quad \text{ja} \quad \mathbf{B} = \mu \mathbf{H}$$

sekä

$$\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E} \quad (\text{Ohmin laki}) \quad \text{ja} \quad \nabla \cdot \mathbf{J} = -\frac{\partial \rho}{\partial t} \quad (\text{jatkuvuuslaki}).$$

Pykälässä 4.4 todettiin, että kyseessä eivät oikeastaan ole vektorikentät ja paremmin tilanteeseen sopivat tietyt 2-muodot. Lasketaan näiden ulkoderivaatat. Aloitetaan Faradayn 2-muodosta:

$$\begin{aligned} d\Phi_{\text{Faraday}} &= d(\Phi_{\mathbf{E}\text{-work}} \wedge dt) + d\Phi_{\mathbf{B}\text{-flux}} \\ &= d(E_1 dx \wedge dt) + d(E_2 dy \wedge dt) + d(E_3 dz \wedge dt) \\ &\quad + d(B_1 dy \wedge dz) + d(B_2 dz \wedge dx) + d(B_3 dx \wedge dy) \\ &= \Phi_{\nabla \times \mathbf{E}\text{-flux}} \wedge dt + \Phi_{\nabla \cdot \mathbf{B}\text{-density}} \\ &\quad + \frac{\partial B_1}{\partial t} dt \wedge dy \wedge dz + \frac{\partial B_2}{\partial t} dt \wedge dz \wedge dx + \frac{\partial B_3}{\partial t} dt \wedge dx \wedge dy \\ &\stackrel{(M2)}{=} \Phi_{\nabla \times \mathbf{E}\text{-flux}} \wedge dt + \Phi_{\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}\text{-flux}} \wedge dt \\ &\stackrel{(M3)}{=} 0. \end{aligned}$$

Maxwellin 2-muodon derivaatta saadaan samaan tapaan:

$$\begin{aligned} d\Phi_{\text{Maxwell}} &= d(-c^2 \Phi_{\mathbf{B}\text{-work}} \wedge dt) + d\Phi_{\mathbf{E}\text{-flux}} \\ &= -c^2 \Phi_{\nabla \times \mathbf{B}\text{-flux}} \wedge dt + \Phi_{\nabla \cdot \mathbf{E}\text{-density}} + \Phi_{\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}\text{-flux}} \wedge dt. \end{aligned}$$

Olettaen ε ja μ vakioiksi (homogeeninen tapaus) ja muistaen, että $c = 1/\sqrt{\varepsilon\mu}$, saadaan materiaalilakeja ja yhtälöä (M4) soveltaen ulkoderivaatta kauniimpaan muotoon (totea!)

$$d\Phi_{\text{Maxwell}} = \frac{1}{\varepsilon} (\Phi_{\rho\text{-density}} - \Phi_{\mathbf{J}\text{-flux}} \wedge dt).$$

⁴Kyseessä on isotrooppinen tapaus. Tässä \mathbf{E} on sähkökentän voimakkuus [V/m], \mathbf{D} on sähkövuon tiheys [As/m²], \mathbf{H} on magneettikentän voimakkuus [A/m], \mathbf{B} on magneettivuon tiheys [Vs/m²] (tesla), ε on permittiviteetti [As/V/m], μ on permeabiliteetti [Vs/A/m], ρ on varaustiheys [As/m³], \mathbf{J} on virran tiheys [A/m²] ja σ on johtavuus [A/V/m].

Tätä ulkoderivaattaa, ns. *virrantiheysmuotoa*, merkitään usein $*\mathbf{J}$:llä. Koska toiset ulkoderivaatat ovat nolliä, on $d*\mathbf{J} = 0$ (ns. varauksen säilymislaki).

Kaikkiaan todetaan siis, että (homogeenisessa tapauksessa) Maxwellin yhtälöt voidaan kirjoittaa Faradayn ja Maxwellin muodoille hyvin yksinkertaisina:

$$\begin{cases} d\Phi_{\text{Faraday}} = 0 \\ d\Phi_{\text{Maxwell}} = *\mathbf{J}. \end{cases}$$

5.4 Yleistetty Stokesin lause

Kaikki palaset ovat nyt valmiina ja voidaan esittää

Yleistetty Stokesin lause. Jos $\vec{\mathcal{M}}$ on \mathbb{R}^n :n $k + 1$ -ulotteinen suunnattu monisto, \mathcal{A} sen rajoitettu reunallinen alue, jonka sileä reuna $\vec{\partial}_{\vec{\mathcal{M}}}^s \mathcal{A}$ on suunnattu vastaavasti, ja Φ (jossain \mathcal{A} :n sisältävässä avoimessa joukossa) jatkuvasti derivoituva k -muotokenttä, niin

$$\int_{\mathcal{A}} d\Phi = \int_{\vec{\partial}_{\vec{\mathcal{M}}}^s \mathcal{A}} \Phi.$$

Mikäli sileä reuna $\vec{\partial}_{\vec{\mathcal{M}}}^s \mathcal{A}$ on tyhjä, oikean puolen integraali on $= 0$.

Todistus. Täsmällinen todistus on pitkä ja hankala arviointi, ks. esimerkiksi HUBBARD & HUBBARD. Karkeasti esitettynä perusidea on seuraava. Approksimoidaan \mathcal{A} :ta joukolla hyvin pieniä $k + 1$ -ulotteisia suuntaissärmiöitä:

$$\mathcal{P}_j = \mathcal{P}_j(\mathbf{p}_j; \mathbf{r}_{j,1}, \dots, \mathbf{r}_{j,k+1}) \quad (j = 1, \dots, N).$$

Parametrisoituna

$$\mathcal{P}_j : \gamma_j(\mathbf{u}) = \mathbf{p}_j + \sum_{i=1}^{k+1} u_i \mathbf{r}_{j,i}^T \quad (0 \leq u_1, \dots, u_{k+1} \leq 1),$$

jolloin

$$\gamma_j'(\mathbf{u}) = (\mathbf{r}_{j,1} \mid \dots \mid \mathbf{r}_{j,k+1}).$$

Näin ollen, vrt. parametrisoidun integraalin määritelmä,

$$\int_{\mathcal{A}} d\Phi \cong \sum_{j=1}^N (d\Phi)(\mathbf{p}_j; \mathbf{r}_{j,1}, \dots, \mathbf{r}_{j,k+1}).$$

Toisaalta ulkoderivaatan määritelmän nojalla (valitaan $h = 1$)

$$(d\Phi)(\mathbf{p}_j; \mathbf{r}_{j,1}, \dots, \mathbf{r}_{j,k+1}) \cong \int_{\vec{\partial}_{\vec{\mathcal{M}}}^s \mathcal{P}_j} \Phi.$$

Vierekkäisten suuntaissärmiöiden yhteisten tahkojen ulkonormaalit osoittavat vastakkaisiin suuntiin, ts. ne ovat vierekkäisissä suuntaissärmiöissä vastakkaisesti suunnatut. Näin ollen integraalit tällaisten tahkojen yli kumoavat toisensa ja jäljelle jää vain \mathcal{A} :n sileää reunaa approksimoiva tahkojoukko. Siispä

$$\sum_{j=1}^N \int_{\vec{\partial}_{\vec{\mathcal{M}}}^s \mathcal{P}_j} \Phi \cong \int_{\vec{\partial}_{\vec{\mathcal{M}}}^s \mathcal{A}} \Phi.$$

Tässä esitettyjen approksimaatioiden tarkkaneuvuuden todistukset ovatkin sitten jo varsin työläitä. \square

Klassiset integraalilauseet ovat kaikki tämän lauseen erikoistapauksia. Lähinnä tulevat kyseeseen tapaukset, joissa integrointialueilla on laajennetut parametrisoinnit. Muillehan ei integrointeja ole tässä määriteltykään.

Esimerkki. (Gradienttilause) Valitaan monistoksi \mathbb{R}^3 :n suunnattu viiva \vec{C} ja alueeksi sen osa \mathcal{A} , jonka alkupiste on \mathbf{r}_1 ja loppupiste \mathbf{r}_2 . Koska $df = \Phi_{\nabla f\text{-work}}$, Yleistetyn Stokesin lauseen mukaan

$$\int_{\vec{A}} \Phi_{\nabla f\text{-work}} = \int_{\vec{A}} \nabla f \bullet \mathbf{ds} = f(\mathbf{r}_2) - f(\mathbf{r}_1).$$

Lauseen oikean puolen integraali on tässä suunnattu summa. Jos $\mathcal{A} = \mathcal{C}$ on sulkeutuva viiva ja sillä ei ole sileää reunaa, oikea puoli on $= 0$.

Esimerkki. (Gaußin lause eli Divergenssilause) Valitaan monistoksi \mathbb{R}^3 :n avoin (suunnattu, oikeakätinen koordinaatisto) joukko \mathcal{M} ja alueeksi sen samoin suunnattu osajoukko, kappale $\vec{\mathcal{K}}$, jonka sileä reuna $\vec{\partial}_{\vec{\mathcal{M}}}^s \mathcal{K}$ on suunnattu ulkonormaalilla. Nyt $d\Phi_{\mathbf{F}\text{-flux}} = \Phi_{\nabla \bullet \mathbf{F}\text{-density}}$, joten Yleistetyn Stokesin lauseen mukaan

$$\int_{\vec{\mathcal{K}}} \Phi_{\nabla \bullet \mathbf{F}\text{-density}} = \int_{\vec{\mathcal{K}}} \nabla \bullet \mathbf{F}(\mathbf{r}) \, d\mathbf{r} = \oint_{\vec{\partial}_{\vec{\mathcal{M}}}^s \mathcal{K}} \mathbf{F}(\mathbf{r}) \bullet \mathbf{dS}.$$

Tässä on tärkeää, että ulkonormaali vastaa lokaalin koordinaatiston oikeakätisyyttä.

Divergenssilause on voimassa missä tahansa dimensiossa. 1-ulotteisena se on tavallinen Integraalilaskennan päälause. Koska kahdessa ulottuvuudessa

$$d(-F_2(\mathbf{p})dx + F_1(\mathbf{p})dy) = \nabla \bullet \mathbf{F}(\mathbf{p}) \, dx \wedge dy$$

($-F_2(\mathbf{p})dx + F_1(\mathbf{p})dy$ on kentän \mathbf{F} vuomuoto), on Yleistetyn Stokesin lauseen mukaan

$$\int_{\vec{A}} \Phi_{\nabla \bullet \mathbf{F}\text{-density}} = \int_{\vec{A}} \nabla \bullet \mathbf{F}(\mathbf{r}) \, d\mathbf{r} = \oint_{\vec{\partial}_{\vec{\mathcal{M}}}^s \mathcal{A}} \begin{pmatrix} -F_2(\mathbf{r}) \\ F_1(\mathbf{r}) \end{pmatrix} \bullet \mathbf{ds}.$$

Tässä monisto on \mathbb{R}^2 :n avoin joukko ja alue \mathcal{A} sen osajoukko, jonka sileä reuna on suunnattu ulkonormaalien mukaan. Oikea puoli muuten kirjoitetaan toisinaan muotoon

$$\oint_{\vec{\partial}_{\vec{\mathcal{M}}}^s \mathcal{A}} -F_2(\mathbf{r}) \, dx + F_1(\mathbf{r}) \, dy = \oint_{\vec{\partial}_{\vec{\mathcal{M}}}^s \mathcal{A}} \begin{vmatrix} F_1(\mathbf{r}) & dx \\ F_2(\mathbf{r}) & dy \end{vmatrix}.$$

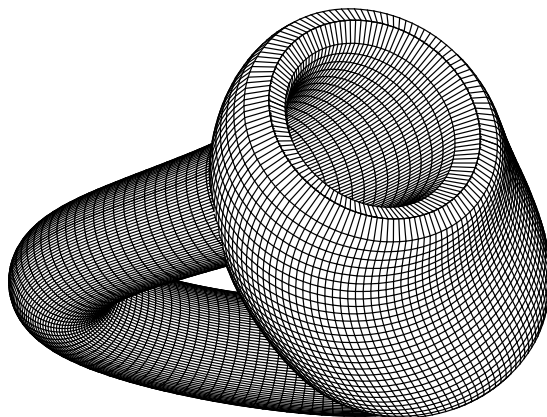
Tästä seuraa myös Greenin lause (miten?).

Esimerkki. (Stokesin lause) Valitaan monistoksi \mathbb{R}^3 :n suunnattu pinta \vec{S} ja alueeksi sen samoin suunnattu osa $\vec{\mathcal{A}}$, jonka sileä reuna $\vec{\partial}_{\vec{S}}^s \mathcal{A}$ on suunnattu oikean käden säännöllä. Koska $d\Phi_{\mathbf{F}\text{-work}} = \Phi_{\nabla \times \mathbf{F}\text{-flux}}$, Yleistetyn Stokesin lauseen mukaan

$$\int_{\vec{S}} \Phi_{\nabla \times \mathbf{F}\text{-flux}} = \int_{\vec{S}} \nabla \times \mathbf{F}(\mathbf{r}) \bullet \mathbf{dS} = \oint_{\vec{\partial}_{\vec{S}}^s \mathcal{A}} \mathbf{F}(\mathbf{r}) \bullet \mathbf{ds}.$$

Jos $\mathcal{A} = \mathcal{S}$ on sulkeutuva pinta ja sillä ei ole sileää reunaa, oikea puoli on $= 0$.

Nämä klassisten integraalilauseiden versiot ovat aika yleisiä, lähinnä tarvitaan laajennetut parametrisoinnit ja integrandeilta tarpeeksi jatkuvuutta. Monistot ja niiden reunalliset alueet voivat koostua monista erillisistä osista, samoin niiden sileät reunat. Huomaa kuitenkin, että Stokesin lauseessa pinnan \mathcal{S} on oltava suunnistuva, esimerkiksi Möbiuksen nauha ei siis käy. On myös olemassa sulkeutuvia pintoja, joita ei voi suunnistaa. Tällainen on esimerkiksi ns. *Kleinin pullo*, jonka eräs realisaatio on alla olevassa kuvassa (Maple).



Tämä pinta leikkaa itseään, mutta \mathbb{R}^4 :ssä Kleinin pullosta on versio, joka ei leikkaa itseään. Kleinin pulloon ei voi soveltaa Gaußin lausetta.

Soveltamalla Yleistettyä Stokesin lausetta erityyppisiin muotokenttiin saadaan muitakin edellisten klassisten integraalilauseiden tapaisia tuloksia.

Esimerkki. (Vektoraalinen Gaußin lause) Jos 3-muotokentässä $f(\mathbf{p})\mathbf{r}_1 \bullet \mathbf{r}_2 \times \mathbf{r}_3$ kiinnitetään vektorimuuttuja \mathbf{r}_1 vakiovektoriksi \mathbf{a} , saadaan 2-muoto $\Phi(\mathbf{p}; \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3) = (f(\mathbf{p})\mathbf{a}) \bullet \mathbf{r}_2 \times \mathbf{r}_3$ (vuomuoto). Soveltamalla tähän Yleistettyä Stokesin lausetta saadaan Gaußin lauseen tapaan

$$\int_{\vec{\mathcal{K}}} \Phi_{\nabla \cdot (f\mathbf{a})\text{-density}} = \int_{\vec{\mathcal{K}}} \nabla \bullet (f(\mathbf{r})\mathbf{a}) \, d\mathbf{r} = \oint_{\vec{\partial_{\vec{\mathcal{M}}}}\mathcal{K}} (f(\mathbf{r})\mathbf{a}) \bullet d\mathbf{S}.$$

Koska $\nabla \bullet (f(\mathbf{r})\mathbf{a}) = \nabla f(\mathbf{r}) \bullet \mathbf{a}$ ja \mathbf{a} on mielivaltainen vakiovektori, tulos kirjoitetaan usein vektoraaliseen muotoon

$$\int_{\vec{\mathcal{K}}} \nabla f(\mathbf{r}) \, d\mathbf{r} = \oint_{\vec{\partial_{\vec{\mathcal{M}}}}\mathcal{K}} f(\mathbf{r}) \, d\mathbf{S}.$$

Klassiset integraalilauseet (ja muutkin) tulevat käyttöön fysikaalisten lausekkeiden käsitteilyssä.

Esimerkki. Maxwellin yhtälön (M4) nojalla stationäärisessä tapauksessa

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J}.$$

Mikäli viiva $\vec{\mathcal{C}}$ on riittävän säännöllinen suunnistettu ja sulkeutuva, sen kautta voidaan asettaa Stokesin lauseen vaatimukset täyttävä suunnistettu pinta $\vec{\mathcal{S}}$ sovitulla oikeakätisellä suunnistuksella ja

$$\oint_{\vec{\mathcal{C}}} \mathbf{H}(\mathbf{r}) \bullet d\mathbf{s} = \int_{\vec{\mathcal{S}}} \nabla \times \mathbf{H}(\mathbf{r}) \bullet d\mathbf{S} = \int_{\vec{\mathcal{S}}} \mathbf{J}(\mathbf{r}) \bullet d\mathbf{S}.$$

Ensimmäinen integraali määrittelee magneettikentän voimakkuuden viivaintegraalin sulkeutuvan viivan ympäri, viimeinen ilmoittaa sen suuruudeksi silmukan läpi kulkevan sähkövirran määrän. Tämä on ns. lävistyslaki.

Esimerkki. Edelleen Maxwellin yhtälön (M3) nojalla

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}.$$

Kuten edellä, vaaditut ehdot täyttävän sulkeutuvan silmukan ympäri

$$\oint_{\vec{c}} \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \cdot d\mathbf{s} = \int_{\vec{S}} \nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \cdot d\mathbf{S} = - \int_{\vec{S}} \frac{\partial \mathbf{B}(\mathbf{r}, t)}{\partial t} \cdot d\mathbf{S} = -\frac{d}{dt} \int_{\vec{S}} \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) \cdot d\mathbf{S}.$$

Sähkömotorinen voima sulkeutuvan silmukan ympäri on silmukan lävitse kulkevan magneettivuon aikaderivaatta.

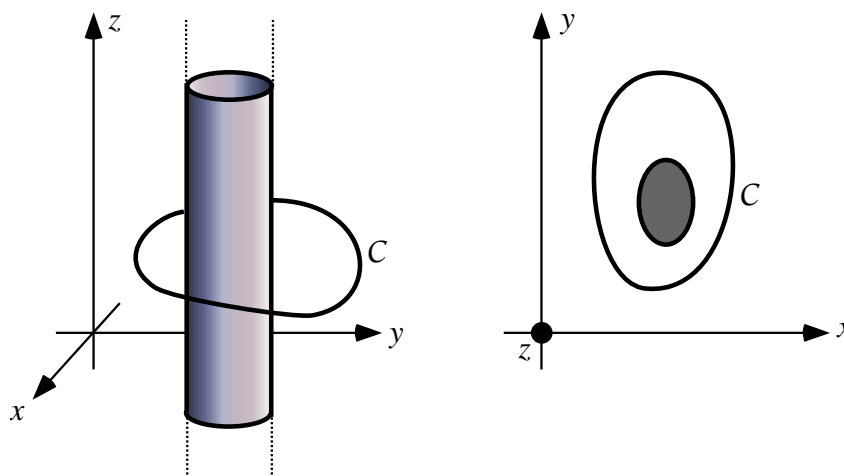
Esimerkki. Ensimmäisenä approksimaationa—usein myös viimeisenä—monissa virtausprobleemoissa oletetaan virtaavan aineen olevan ideaalineslettä, kitkatonta ja kokoon puristumattonta. Tarkastellaan stationääristä virtausta. Ns. Thomsonin kiertolause ilmoittaa, että tietyin varsin yleisin ehdoin virtaus, jolla nopeuden roottori on nolla virtausalueen alkupäässä, säilyttää tämän ominaisuuden koko alueessa. Tällöin siis koko ajan

$$\nabla \times \mathbf{v} = \mathbf{0}.$$

Mikäli C on sulkeutuva Stokesin lauseen mukainen pinnan reunaviiva ja \mathbf{v} on sopivasti määritelty sekä jatkuvasti derivoituva, viivan ympäri laskettu integraali on nolla:

$$\oint_{\vec{c}} \mathbf{v}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{s} = 0.$$

Mielenkiintoista kyllä, erityisesti virtaustehtävissä ei joskus ole mahdollista asettaa vaaditunlaista (kuvitteellista) pintaa tarkasteltavan silmukan yli. Näin on useimmiten siitä syystä, että virtauskentässä on este: Nesteessä on vieras esine, esimerkiksi siipi, jonka alueella ei ole nestettä eikä sen kummempin virtaustakaan. (Vastaavaa tavataan sähkövirtauskentässä, kun johteessa on reikä tai eristeenkappale.) Virtauksessa olevat siivet yms. ovat usein käytännössä äärettömän pitkiä—vaikkapa z -akselin suunnassa—jolloin siiven ympäri kulkevan sulkeutuvan viivan kautta ei voida asettaa pintaa, jolla virtaus olisi määritelty.



Jos kuitenkin tiedetään, että virtaukselle $\nabla \times \mathbf{v} = \mathbf{0}$, voidaan osoittaa, että mielivaltaisella, reiän kiertävän viivan ympäri lasketulla viivaintegraalilla on aina viivasta riippumatta sama arvo

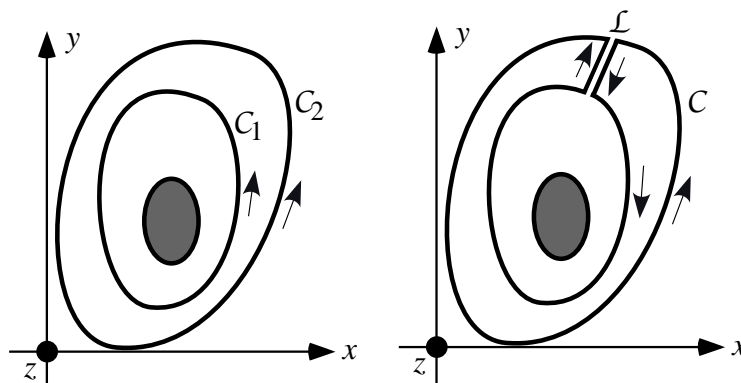
$$\Gamma = \oint \mathbf{v}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{s},$$

joka näin voidaan laskea mukavinta mahdollista integrointitietä pitkin. Tällä on merkitystä vaikkapa Žukovskijn⁵ nostovoimalauseen soveltamisessa. Lause ilmoittaa siiven nostovoimaksi pituusyksikköä kohden äärettömyydestä nopeudella v_∞ lähestyvälle nesteelle (ilmalle, tiheydeltään ρ) voiman $F = \rho\Gamma v_\infty$. Voima on kohtisuorassa nopeutta vastaan lentokoneesta tutulla tavalla.

→ Mainittu riippumattomuus integrointitiestä nähdään havainnollisesti seuraavasti. Jos \vec{C}_1 ja \vec{C}_2 ovat kaksi siiven samaan suuntaan kiertävää viivaa, ne voidaan leikata kuvitteellisesti poikki ja yhdistää kaksinkertaisella yhdystiellä \mathcal{L} yhdeksi isoksi sulkeutuvaksi suunnatuksi viivaksi \vec{C} alla olevan kuvan mukaisesti. (Yhdysviiva on piirretty havainnollisuuden vuoksi kaksinkertaisena.) Sulkeutuvan viivan \vec{C} kautta voidaan sitten asettaa pinta, jolla \mathbf{v} on määritelty, jolloin roottorin oletetusta häviämisestä johtuen

$$\oint_{\vec{C}} \mathbf{v}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{s} = 0.$$

Toisaalta integraalia laskettaessa yhdysviivan \mathcal{L} yli integraali lasketaan kahteen kertaan, päinvastaisiin suuntiin.



Viivan \vec{C} yli laskettavassa kokonaisintegraalissa nämä osat kumoavat toisensa vastakkaismerkisinä. Siten (ajattele kiertoa)

$$\oint_{\vec{C}} \mathbf{v}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{s} = \oint_{\vec{C}_1} \mathbf{v}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{s} - \oint_{\vec{C}_2} \mathbf{v}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{s} = 0,$$

mistä seuraakin väitetty kiertojen yhtäsuuruus.

Päällimmäinen pulma edellä on se, että periaatteessa integrointialueiden on oltava upotettuja laajempaan monistoon ja kenttien on oltava (jatkovina/derivoituvina) olemassa integrointialueita laajemmissa avoimissa joukossa. Kaikissa käyttötilanteissa tällaisia ei ainakaan konkreettisesti ole, eikä niitä aina saada mitenkään keinotekoisesti jatkamallakaan.

⁵Usein Joukowski tai Joukowski tai Schukowski!

”Sähkö-, magneetti- ja virtauskenttiin liittyvät probleemrat
 formuloidaan käytännössä useimmiten osittaisdifferentiaali-
 yhtälöiksi, joiden ratkaisemista varten on olemassa tehokkaita
 numeerisia työkaluja. Siirtyminen luonnonlakeihin perustuvasta
 kenttämallista osittaisdifferentiaaliyhtälöihin suoritetaan
 ottamalla käyttöön sopiva potentiaali.”

(A. POHJAVIRTA: *Vektorikentät*. Tampere (1991))

Luku 6

POTENTIAALIT

6.1 Eksaktit muotokentät ja potentiaalit

Määrättyjen integraalien osalta Yleistetty Stokesin lause antaa samanlaisen karakterisaation kuin tuttu Integraalilaskennan peruslause. Entäs sitten määräämättömät integraalit? Peruskurs-
 sien tulos

$$\frac{d}{dx} \int f(x) dx = \int \frac{df(x)}{dx} dx = f(x)$$

toteaa määräämättömän integroinnin olevan derivoinnin käänteisoperaatio, antiderivointi. Muoto-
 kentille kyseessä olisi siis ulkoderivoinnin käänteisoperaatio. Tällainen operaatio on usein
 kätevä, koska ulkoderivointi lisää muotokentän astetta yhdellä ja näin ollen sen mutkikkuutta.

Muotokentän Φ sanotaan olevan *eksakti*, jos se on toisen muotokentän Ψ ulkoderivaatta, ts.
 $\Phi = d\Psi$. Muotokenttää Ψ kutsutaan tällöin Φ :n *potentiaaliksi*. Koska aina $d\Gamma = 0$, kun Γ on
 vakio muotokenttä (derivointisääntö (II) Pykälässä 5.2), tällöin $\Psi + \Gamma$ on myös Φ :n potentiaali.
 Potentiaali ei siis ole yksikäsitteinen, niin kuin ei ole määräämätön integraalikaan. Joissain
 tapauksissa Φ :n potentiaaleja voi vielä olla muitakin.

Selvästi, jos Φ on eksakti, niin $d\Phi = 0$, sillä $d\Phi = d^2\Psi = 0$. Kaikki muotokentät eivät siis
 ole eksakteja. Toisaalta, kuten kohta nähdään, jos $d\Phi = 0$, niin ainakin lokaalisti Φ on eksakti.¹

Tässä luvussa ei selkeyssyistä eroteta pisteitä ja vektoreita merkinnällisesti toisistaan. Huo-
 maa kuitenkin, että ”piste miinus piste” on yleisesti aina vektori ja ”piste plus vektori” vastaa-
 vasti piste.

Esimerkki. *Ns.* Newtonin muotokenttä (1-muotokenttä)

$$\Phi(\mathbf{p}; \mathbf{r}) = -C \frac{(\mathbf{p} - \mathbf{p}_1) \bullet \mathbf{r}}{\|\mathbf{p} - \mathbf{p}_1\|^3},$$

missä C on vakio ja \mathbf{p}_1 on kiinteä piste, on eksakti muotokenttä alueessa, missä ei ole pistettä
 \mathbf{p}_1 . (Erotus $\mathbf{p} - \mathbf{p}_1$ tulkitaan tässä vektoriksi.) Se on nimittäin skalaarikentän (0-muotokentän)

$$f(\mathbf{p}) = \frac{C}{\|\mathbf{p} - \mathbf{p}_1\|} \quad (\text{ns. Newtonin potentiaali})$$

ulkoderivaatta eli työmuotokenttä $\nabla f(\mathbf{p}) \bullet \mathbf{r}$. Toisaalta myös $d\Phi = 0$, sillä se on roottorin

$$\nabla \times \frac{-C(\mathbf{p} - \mathbf{p}_1)}{\|\mathbf{p} - \mathbf{p}_1\|^3} = \mathbf{0} \quad (\text{totea!})$$

vuomuotokenttä.

¹Muotokenttää, jonka ulkoderivaatta on $= 0$, taas kutsutaan usein *suljetuksi* (engl. closed).

Muistettaneen, että Newtonin painovoimalain mukaan pisteessä \mathbf{p} olevaan pistemäiseen massaan m vaikuttava Maan vetovoima on

$$-GmM \frac{\mathbf{p} - \mathbf{p}_1}{\|\mathbf{p} - \mathbf{p}_1\|^3},$$

missä \mathbf{p}_1 on maapallon keskipiste, M on maapallon massa ja G on gravitaatiovakio.

Esimerkki. Newtonin vektorikenttä voidaan muotoilla myös 2-muotokentäksi

$$\Phi(\mathbf{p}; \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = -C \frac{(\mathbf{p} - \mathbf{p}_1) \bullet \mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_2}{\|\mathbf{p} - \mathbf{p}_1\|^3}.$$

Myös tämä muotokenttä on eksakti, sillä se on vuomuotokenttä ja sen derivaatta on divergenssin

$$\nabla \bullet \frac{-C(\mathbf{p} - \mathbf{p}_1)}{\|\mathbf{p} - \mathbf{p}_1\|^3} = 0 \quad (\text{totea!})$$

tiheysmuotokenttä. Tilanne on kuitenkin jo riippuvainen alueestakin, kuten tullaan näkemään.

Yleisen tilanteen hallitsemiseksi otetaan käyttöön vielä yksi muotokenttien derivointisääntö, joka muuten Cartanin taikakaavan ohella hoitelee varsin monen nabraussäännön.

Lause 6.1. k -muotokentän Φ ulkoderivaatta voidaan kirjoittaa muotoon

$$(d\Phi)(\mathbf{p}; \mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_{k+1}) = \sum_{i=1}^{k+1} (-1)^{i-1} \Phi'(\mathbf{p}; \mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_{i-1}, \widehat{\mathbf{r}}_i, \mathbf{r}_{i+1}, \dots, \mathbf{r}_{k+1}) \mathbf{r}_i,$$

missä Φ' on Φ :n derivaatta paikkamuuttujan \mathbf{p} suhteen ja hatu vektorimuuttujan päällä merkitsee sitä, että se jätetään listasta pois.

Todistus. Lauseen 4.2 mukaan Φ :llä on hajotelma

$$\Phi(\mathbf{p}; \mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_k) = \sum_{1 \leq j_1 < j_2 < \dots < j_k \leq n} a_{j_1, j_2, \dots, j_k}(\mathbf{p}) (dx_{j_1} \wedge dx_{j_2} \wedge \dots \wedge dx_{j_k})(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_k)$$

ja riittää todeta asia yleiselle yhteenlaskettavalle $a_{j_1, j_2, \dots, j_k}(\mathbf{p}) dx_{j_1} \wedge dx_{j_2} \wedge \dots \wedge dx_{j_k}$. Pykälän 5.2 derivointisäännön (IV) mukaan

$$d(a_{j_1, j_2, \dots, j_k}(\mathbf{p}) dx_{j_1} \wedge \dots \wedge dx_{j_k}) = \sum_{l=1}^n \frac{\partial a_{j_1, j_2, \dots, j_k}(\mathbf{p})}{\partial x_l} dx_l \wedge dx_{j_1} \wedge \dots \wedge dx_{j_k}.$$

Toisaalta, alkeisen muodon määritelmän mukaan,

$$(dx_l \wedge dx_{j_1} \wedge \dots \wedge dx_{j_k})(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_{k+1}) = \begin{vmatrix} x_{l,1} & x_{l,2} & \dots & x_{l,k+1} \\ x_{j_1,1} & x_{j_1,2} & \dots & x_{j_1,k+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{j_k,1} & x_{j_k,2} & \dots & x_{j_k,k+1} \end{vmatrix}.$$

Kun kehitetään tämä determinantti ensimmäisen rivinsä mukaan, saadaan summa

$$\sum_{i=1}^{k+1} (-1)^{i-1} x_{l,i} (dx_{j_1} \wedge \dots \wedge dx_{j_k})(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_{i-1}, \widehat{\mathbf{r}}_i, \mathbf{r}_{i+1}, \dots, \mathbf{r}_{k+1}).$$

Vaihtamalla nyt summaukset $\sum_{l=1}^n$ ja $\sum_{i=1}^{k+1}$ keskenään saadaan väitetty tulos. □

Yleinen tulos voidaan saada paljon vahvempanakin kuin vain lokaalisti: se saadaan ns. tähtimäisille joukoille. \mathbb{R}^n :n osajoukon \mathcal{A} sanotaan olevan *tähtimäinen* (engl. star-shaped) pisteen \mathbf{p}_0 suhteen, jos aina kun piste \mathbf{p} on \mathcal{A} :ssa, myös koko sen ja \mathbf{p}_0 :n välinen jana eli joukko

$$\{\mathbf{p}_0 + t(\mathbf{p} - \mathbf{p}_0) \mid 0 \leq t \leq 1\}$$

sisältyy \mathcal{A} :han. Eräitä tuttuja tähtimäisiä tasoalueita ovat



(minkä pisteen suhteen?) ja eräitä ei-tähtimäisiä alueita



$k + 1$ -muotokentän Φ määräämätöntä integrointia vastaava operaatio tähtimäisessä alueessa pisteen \mathbf{p}_0 suhteen on

$$(\mathbb{I}\Phi)(\mathbf{p}; \mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_k) = \int_0^1 t^k \Phi(\mathbf{p}_0 + t(\mathbf{p} - \mathbf{p}_0); \mathbf{p} - \mathbf{p}_0, \mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_k) dt.$$

Poincarén lemma. Jos pisteen \mathbf{p}_0 suhteen tähtimäisessä alueessa \mathcal{A} on $d\Phi = 0$, niin Φ on siinä eksakti ja $\Phi = d(\mathbb{I}\Phi)$.

Todistus. Todistus on hiukan konstikas. Todetaan tulos vain tapauksessa $\mathbf{p}_0 = \mathbf{0}$, yleinen tapaus menee vastaavasti. Kirjoitetaan \mathbf{p} koordinaattiesitykseensä

$$\mathbf{p} = \sum_{l=1}^n p_l \mathbf{e}_l,$$

jolloin multilineaarisuuden johdosta

$$\Phi(t\mathbf{p}; \mathbf{p}, \mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_k) = \sum_{l=1}^n p_l \Phi(t\mathbf{p}; \mathbf{e}_l, \mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_k)$$

ja tulon derivointisäännöllä

$$\begin{aligned} (\Phi(t\mathbf{p}; \mathbf{p}, \mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_k))' &= \mathbf{q} + \sum_{l=1}^n t p_l \Phi'(t\mathbf{p}; \mathbf{e}_l, \mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_k) \\ &= \mathbf{q} + t \Phi'(t\mathbf{p}; \mathbf{p}, \mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_k), \end{aligned}$$

missä

$$\mathbf{q} = (\Phi(t\mathbf{p}; \mathbf{e}_1, \mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_k), \dots, \Phi(t\mathbf{p}; \mathbf{e}_n, \mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_k)).$$

Lasketaan ensin $d(\mathbb{I}\Phi)$ Lauseen 6.1 mukaisessa muodossa käyttäen yllä saatua derivaattaa ja vieden ulkoderivointi integraalin sisään²:

²Tämä on melko yleisin oletuksien sallittua!

$$\begin{aligned}
 (d(I\Phi))(\mathbf{p}; \mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_{k+1}) &= \sum_{i=1}^{k+1} (-1)^{i-1} (I\Phi)'(\mathbf{p}; \mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_{i-1}, \widehat{\mathbf{r}}_i, \mathbf{r}_{i+1}, \dots, \mathbf{r}_{k+1}) \mathbf{r}_i \\
 &= \sum_{i=1}^{k+1} (-1)^{i-1} \int_0^1 t^k \Phi(t\mathbf{p}; \mathbf{r}_i, \mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_{i-1}, \widehat{\mathbf{r}}_i, \mathbf{r}_{i+1}, \dots, \mathbf{r}_{k+1}) dt \\
 &\quad + \sum_{i=1}^{k+1} (-1)^{i-1} \int_0^1 t^{k+1} \Phi'(t\mathbf{p}; \mathbf{p}, \mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_{i-1}, \widehat{\mathbf{r}}_i, \mathbf{r}_{i+1}, \dots, \mathbf{r}_{k+1}) \mathbf{r}_i dt.
 \end{aligned}$$

(Huomaa, että $qr_i = \Phi(t\mathbf{p}; \mathbf{r}_i, \mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_{i-1}, \widehat{\mathbf{r}}_i, \mathbf{r}_{i+1}, \dots, \mathbf{r}_{k+1})$.) Antisymmetrian nojalla ensimmäinen summalauseke sievenee kovasti, kun siirretään \mathbf{r}_i :t oikeille paikoilleen:

$$\begin{aligned}
 &\sum_{i=1}^{k+1} (-1)^{i-1} \int_0^1 t^k \Phi(t\mathbf{p}; \mathbf{r}_i, \mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_{i-1}, \widehat{\mathbf{r}}_i, \mathbf{r}_{i+1}, \dots, \mathbf{r}_{k+1}) dt \\
 &= (k+1) \int_0^1 t^k \Phi(t\mathbf{p}; \mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_{k+1}) dt.
 \end{aligned}$$

Samalla tavoin Lausetta 6.1 soveltaen voidaan laskea $I(d\Phi)$:

$$\begin{aligned}
 (I(d\Phi))(\mathbf{p}; \mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_{k+1}) &= \int_0^1 t^{k+1} (d\Phi)(t\mathbf{p}; \mathbf{p}, \mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_{k+1}) dt \\
 &= \int_0^1 t^{k+1} \Phi'(t\mathbf{p}; \mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_{k+1}) \mathbf{p} dt \\
 &\quad + \sum_{i=1}^{k+1} (-1)^i \int_0^1 t^{k+1} \Phi'(t\mathbf{p}; \mathbf{p}, \mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_{i-1}, \widehat{\mathbf{r}}_i, \mathbf{r}_{i+1}, \dots, \mathbf{r}_{k+1}) \mathbf{r}_i dt.
 \end{aligned}$$

(Huomaa potenssit t^{k+1} sekä $(-1)^i$. Miksi nämä?) Yhdistämällä saadut tulokset nähdään, että

$$\begin{aligned}
 &(d(I\Phi))(\mathbf{p}; \mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_{k+1}) + (I(d\Phi))(\mathbf{p}; \mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_{k+1}) \\
 &= \int_0^1 (k+1)t^k \Phi(t\mathbf{p}; \mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_{k+1}) dt + \int_0^1 t^{k+1} \Phi'(t\mathbf{p}; \mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_{k+1}) \mathbf{p} dt \\
 &= \int_0^1 \frac{d}{dt} (t^{k+1} \Phi(t\mathbf{p}; \mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_{k+1})) dt = \Phi(\mathbf{p}; \mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_{k+1}).
 \end{aligned}$$

Toisaalta oletettiin, että $d\Phi = 0$, mistä haluttu tulos seuraa. □

Esimerkki. Jos n -muotokenttä Φ on skalaarikentän f tiheysmuotokenttä, ts. muotoa

$$\Phi(\mathbf{p}; \mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_n) = \Phi_{f\text{-density}}(\mathbf{p}; \mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_n) = f(\mathbf{p}) \det(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_n),$$

niin $d\Phi = 0$ eli Φ on eksakti. Poincarén lemman mukaan jonkin pisteen \mathbf{p}_0 suhteen tähtimäisessä alueessa Φ :llä on silloin potentiaali

$$(\mathbf{I}\Phi)(\mathbf{p}; \mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_{n-1}) = \int_0^1 t^{n-1} f(\mathbf{p}_0 + t(\mathbf{p} - \mathbf{p}_0)) dt \det(\mathbf{p} - \mathbf{p}_0, \mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_{n-1}),$$

joka on vektorikentän

$$\mathbf{F}(\mathbf{p}) = \int_0^1 t^{n-1} f(\mathbf{p}_0 + t(\mathbf{p} - \mathbf{p}_0)) dt (\mathbf{p} - \mathbf{p}_0)$$

vuomuotokenttä eli $\Phi_{\mathbf{F}\text{-flux}}(\mathbf{p}; \mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_{n-1})$. Tietyssä mielessä tämä vektorikenttä vastaa yhden muuttujan funktioiden integraalifunktiota. Esimerkiksi \mathbb{R}^3 :ssa Gaußin lauseen mukaan

$$\int_{\vec{\mathcal{K}}} f(\mathbf{r}) d\mathbf{r} = \int_{\vec{\mathcal{K}}} \nabla \bullet \mathbf{F}(\mathbf{r}) d\mathbf{r} = \oint_{\vec{\partial\mathcal{K}}} \mathbf{F}(\mathbf{r}) \bullet d\mathbf{S}$$

mille tahansa (kyllin säännölliselle) alueelle \mathcal{K} .

Lasketaan malliksi potentiaali \mathbb{R}^3 :ssa, kun $f(x, y, z) = x + y + z$ ja $\mathbf{p}_0 = \mathbf{0}$. Silloin

$$\mathbf{F}(x, y, z) = \int_0^1 t^2 (tx + ty + tz) dt \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \frac{x + y + z}{4} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

6.2 Vektorikentän skalaaripotentiali

Poincarén lemman nojalla 1-muotokentällä $\Phi(\mathbf{p}; \mathbf{r}) = \mathbf{F}(\mathbf{p}) \bullet \mathbf{r}$ (vektorikentän \mathbf{F} työmuotokenttä) on potentiaali pisteen \mathbf{p}_0 suhteen tähtimäisissä joukoissa, mikäli $d\Phi = \Phi_{\nabla \times \mathbf{F}\text{-flux}} = 0$, ts. mikäli $\nabla \times \mathbf{F} = \mathbf{0}$ eli kenttä on pyörteetön, ja eräs tällainen potentiaali on lausuttavissa muodossa

$$f(\mathbf{p}) = \int_0^1 \mathbf{F}(\mathbf{p}_0 + t(\mathbf{p} - \mathbf{p}_0)) \bullet (\mathbf{p} - \mathbf{p}_0) dt.$$

Potentiaalia (0-muotokenttää eli skalaarikenttää) f kutsutaan tällöin vektorikentän \mathbf{F} *skalaaripotentialiksi*.

Teknisissä sovellutuksissa vektorikenttä \mathbf{F} on yleensä tuntematon. Tehtävä on etsiä se annettujen tietojen perusteella. Tämä tietää kolmen skalaarifunktion etsimistä (kentän kolme komponenttia). Pyörteettömissä kentissä tuntematon kenttä voidaan yleensä esittää toistaiseksi tuntemattoman skalaaripotentialin gradienttina: $\mathbf{F} = \nabla f$. Näin riittää kentän saamiseksi etsiä vain yksi skalaarikenttä, potentiaali f . Pyörteettömyys seuraa yleensä tehtävän asettelusta (Thomsonin kiertolause, Maxwellin yhtälöt ym.).

Kuten todettiin, jos f on skalaaripotentiali ja c on vakio, niin $f + c$ on myös saman kentän skalaaripotentiali, sillä $\nabla(f + c) = \nabla f$. Toisaalta, jos f ja g ovat molemmat kentän skalaaripotentialeja, niin $\nabla(f - g) = \mathbf{0}$ ja $f - g$ on vakio. Skalaaripotentiali on siis yksikäsitteinen vakioyhteenlaskettavaa vaille.

Skalaaripotentialin olemassaolo liittyy viivaintegraaleihin seuraavalla tavalla.

Lause 6.2. Seuraavat kolme ehtoa ovat ekvivalentit \mathbb{R}^3 :n avoimessa joukossa \mathcal{K} (monistossa) määritellylle jatkuvalla vektorikentälle \mathbf{F} .

- (i) \mathbf{F} :llä on \mathcal{K} :ssa skalaaripotentiali f .
- (ii) Mille tahansa \mathcal{K} :ssa olevalle sulkeutuvalla viivalla \mathcal{C} (2-ulotteinen monisto laajennetussa parametrissa) on

$$\oint_{\mathcal{C}} \mathbf{F}(\mathbf{r}) \bullet d\mathbf{s} = 0.$$

- (iii) Jos \mathbf{r}_0 ja \mathbf{r}_1 ovat \mathcal{K} :n pisteitä ja $\vec{\mathcal{C}}$ niitä \mathcal{K} :ssa yhdistävä viiva (1-ulotteinen suunnistettu monisto laajennetussa parametrissa), ts. suunnistuksessa \mathbf{r}_0 on kiinteä alkupiste ja \mathbf{r}_1 vaihtuva loppupiste, niin integraali

$$\int_{\vec{\mathcal{C}}} \mathbf{F}(\mathbf{r}) \bullet d\mathbf{s} = h(\mathbf{r}_1)$$

ei riipu viivan $\vec{\mathcal{C}}$ valinnasta muuten kuin loppupisteen \mathbf{r}_1 kautta ja määrittää näin \mathbf{r}_1 :n funktion $h(\mathbf{r}_1)$.

Kohdan (iii) funktio h on \mathbf{F} :n potentiali \mathcal{K} :ssa.

Todistus. Näytetään ensin implikaatio (i) \Rightarrow (iii). Oletetaan siis oikeaksi kohta (i). Otetaan käyttöön $\vec{\mathcal{C}}$:n laajennettu parametrissa $\mathbf{r} = \gamma(u)$ ($a \leq u \leq b$). Käyttäen hyväksi oletettua potentialia f saadaan

$$\begin{aligned} \int_{\vec{\mathcal{C}}} \mathbf{F}(\mathbf{r}) \bullet d\mathbf{s} &= \int_{\vec{\mathcal{C}}} \nabla f(\mathbf{r}) \bullet d\mathbf{s} = \int_a^b f'(\gamma(u)) \gamma'(u) du = \int_a^b \frac{d}{du} f(\gamma(u)) du \\ &= \int_a^b f(\gamma(u)) = f(\mathbf{r}_1) - f(\mathbf{r}_0), \end{aligned}$$

mistä tulos seuraa valitsemalla $h(\mathbf{r}_1) = f(\mathbf{r}_1) - f(\mathbf{r}_0)$. (Huomaa, että h on nyt potentiali.)

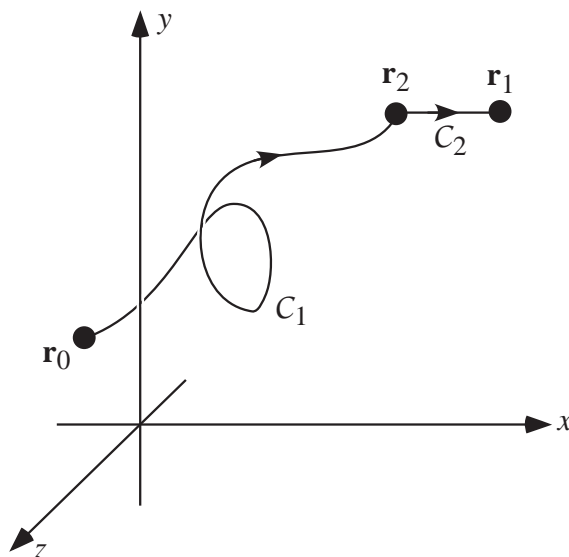
Seuraavaksi todetaan implikaatio (iii) \Rightarrow (i). Pitää vain näyttää, että (iii):n antama funktio h todella on potentiali. Näytetään malliksi, että

$$\frac{\partial h(\mathbf{r}_1)}{\partial x_1} = F_1(\mathbf{r}_1),$$

muut osittaisderivaatat käsitellään samaan tapaan. Sitä varten otetaan piste \mathbf{r}_1 monistosta \mathcal{K} ja valitaan viivaksi $\vec{\mathcal{C}}$ sellainen, jossa viimeinen ”pala” on x -akselin suuntainen lyhyt jana

$$\vec{\mathcal{C}}_2 : \mathbf{r} = \mathbf{r}_2 \pm u(1, 0, 0) \quad (0 < u \leq \pm(x_1 - x_2)),$$

etumerkki tulosuunnasta riippuen (eli plus, jos $x_1 > x_2$, muuten miinus). Ilmeisesti $\vec{\mathcal{C}}_2$:n tangenttivektori on $\pm \mathbf{i}$. Integraali ei riipu reitin valinnasta, joten näin voidaan valita. Toisaalta \mathcal{K} on avoin joukko, joten tilaakin on. $\vec{\mathcal{C}}$:n alkupäätä merkitään $\vec{\mathcal{C}}_1$:llä, ts. $\vec{\mathcal{C}} = \vec{\mathcal{C}}_1 + \vec{\mathcal{C}}_2$.

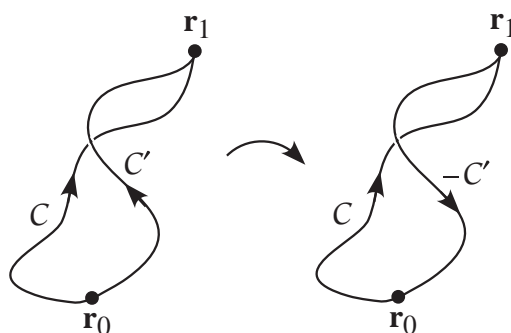


Jos tulosuunta on vasemmalta (eli merkki on plus, miinus vastaavasti), niin

$$\begin{aligned} h(\mathbf{r}_1) &= \int_{\vec{c}} \mathbf{F}(\mathbf{r}) \bullet \mathbf{ds} = \int_{\vec{c}_1} \mathbf{F}(\mathbf{r}) \bullet \mathbf{ds} + \int_{\vec{c}_2} \mathbf{F}(\mathbf{r}) \bullet \mathbf{ds} \\ &= \int_{\vec{c}_1} \mathbf{F}(\mathbf{r}) \bullet \mathbf{ds} + \int_0^{x_1-x_2} \mathbf{F}(\mathbf{r}_2 + u(1, 0, 0)) \bullet \mathbf{i} du \\ &= \int_{\vec{c}_1} \mathbf{F}(\mathbf{r}) \bullet \mathbf{ds} + \int_0^{x_1-x_2} F_1(\mathbf{r}_2 + u(1, 0, 0)) du. \end{aligned}$$

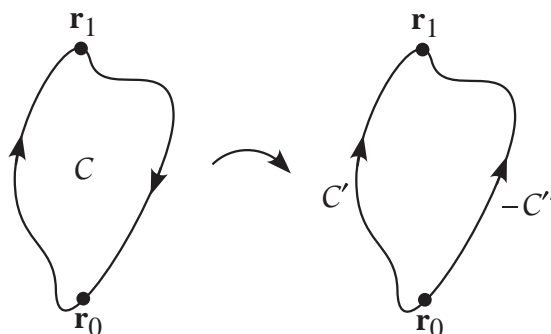
Näin ollen (derivoidaan integraalin ylärajan suhteen)

$$\frac{\partial h(\mathbf{r}_1)}{\partial x_1} = F_1(\mathbf{r}_1).$$



Implikaatio (ii) \Rightarrow (iii) on aika selvä. Oletetaan (ii) ja otetaan (iii):ssa kaksi kuvatuunlaista viivaa, \vec{c} ja \vec{c}' . Käännetään \vec{c}' :n suunta päinvastaiseksi, jolloin saadaan viiva $-\vec{c}'$, ja yhdistetään se \vec{c} :hen. Tuloksena on viiva $\vec{c} - \vec{c}'$ ja (ii):n mukaan

$$0 = \oint_{\vec{c} - \vec{c}'} \mathbf{F}(\mathbf{r}) \bullet \mathbf{ds} = \int_{\vec{c}} \mathbf{F}(\mathbf{r}) \bullet \mathbf{ds} - \int_{\vec{c}'} \mathbf{F}(\mathbf{r}) \bullet \mathbf{ds}.$$



Myös implikaatio (iii) \Rightarrow (ii) on melko ilmeinen. Jos oletetaan (iii) ja otetaan sulkeutuva viiva \vec{C} , voidaan valita C :ltä kaksi pistettä r_0 ja r_1 . C jakaantuu nyt kahteen osaan, r_0 :n ja r_1 :n yhdistävään suunnattuun viivaan \vec{C}' sekä r_1 :n ja r_0 :n yhdistävään suunnattuun viivaan \vec{C}'' . Jälkimmäisen suunta vaihdetaan, jolloin saadaan kaksi (iii):ssa esiintyvää viivaa, \vec{C}' ja $-\vec{C}''$. (iii):n mukaisesti

$$\oint_{\vec{C}} \mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{s} = \int_{\vec{C}'} \mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{s} - \int_{-\vec{C}''} \mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{s} = 0. \quad \square$$

Vektorikenttää, joka toteuttaa lauseen kohdan (iii), kutsutaan *konservatiiviseksi*. Konservatiiviselle kentälle \mathbf{F} kirjoitetaan usein

$$\int_{\vec{C}} \mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{s} = \int_{r_0}^{r_1} \mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{s},$$

integraalin tuloshan riippuu vain päätepisteistä.

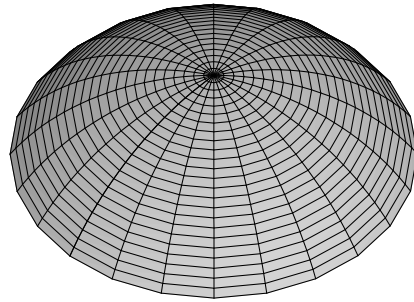
Skalaaripotentialin olemassaolo ei riipu pelkästään kentästä \mathbf{F} , vaan myös tarkastelumonistosta \mathcal{K} . Poincarén lemman mukaisesti se on olemassa tähtimäisissä monistoissa. Se jo riittääkin aika pitkälle. Entäs sitten yleisemmät monistot? Juttu riippuu kappaleen topologiasta, ts. siitä mitä siinä jatkuvilla muunnoksilla voidaan viivoille (ja pinnoille) tehdä. Monisto \mathcal{K} on *yhdesti yhtenäinen*, jos sen jokainen sulkeutuva viiva C (1-ulotteinen monisto laajennetussa parametrisoinnissa) voidaan jatkuvilla muunnoksilla viedä pisteeksi jättämättä monistoa \mathcal{K} . Tarkemmin sanoen \mathcal{K} :ssa on sellainen laajennetusti parametrisoitu pinta $\mathcal{S} : \mathbf{r} = \gamma(t, u)$ ($\mathcal{U} : a(u) \leq t \leq b(u), 0 < u < 1$), että

- $a(u)$ ja $b(u)$ ovat jatkuvia välillä $[0, 1]$,
- viiva $C_u : \mathbf{r} = \gamma(t, u)$ ($a(u) \leq t \leq b(u)$) on sulkeutuva jokaiselle arvolle $0 < u < 1$,
- C on jokin viivoista C_u ($0 < u < 1$) ja
- ”viiva” $C_0 : \mathbf{r} = \gamma(t, 0)$ ($a(0) \leq t \leq b(0)$) on piste (degeneroitunut viiva).

Tällaisen pinnan ”prototyyppi” on R -säteisen pallon kalotti parametrisoituna pallokoordinaatistossa:

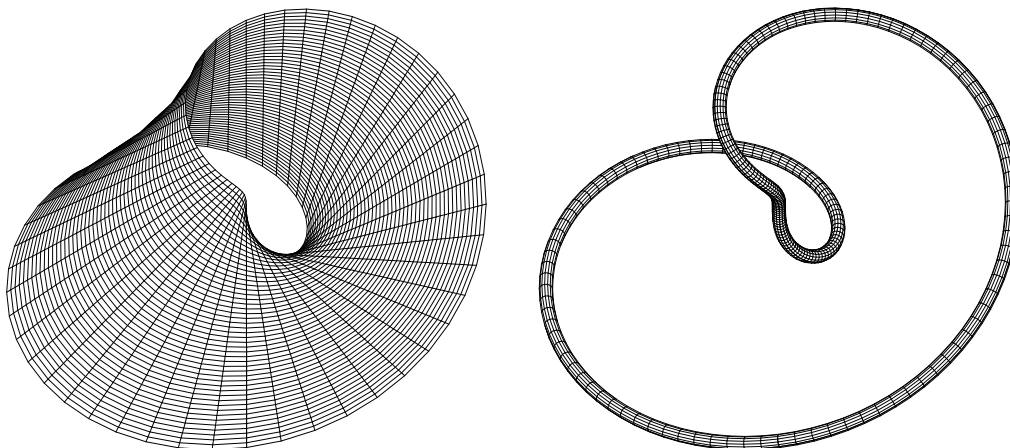
$$\mathcal{S} : \mathbf{r} = \gamma(t, u) = (R \sin u \cos t, R \sin u \sin t, R \cos u) \quad (0 < t < 2\pi, 0 < u < 1).$$

Sen reunaympyrä kutistuu jatkuvasti muuntuen kalotin päällä olevaksi pisteeksi (kuva: Maple):

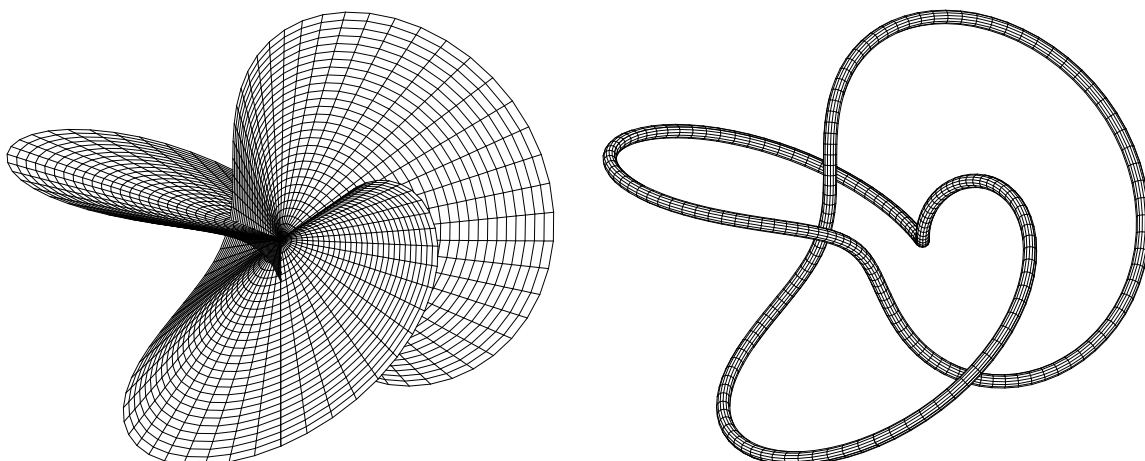


Lause 6.3. Jos F on pyörteetön jatkuvasti derivoituva vektorikenttä yhdesti yhtenäisessä monistossa, niin siinä on skalaripotentiali.

Todistus. Todistus on pitkäkö ja tekninen, ks. esimerkiksi NIKOLSKY & VOLOSOV. Perusidea on tietysti se, että sovelletaan ym. viivaan C ja sen reunana rajoittamaan pinnan S osapintaan (Yleistettyä) Stokesin lausetta. Koska roottori on nollavektori, kierto reunan ympäri on $= 0$ ja päästään käyttämään Lausetta 6.2. Pulma on lähinnä suunnistus. Esimerkiksi Möbiuksen nauhaa ei voi suunnistaa, mutta sen reuna muodostuu yhdestä sulkeutuvasta viivasta (kuva: Maple):

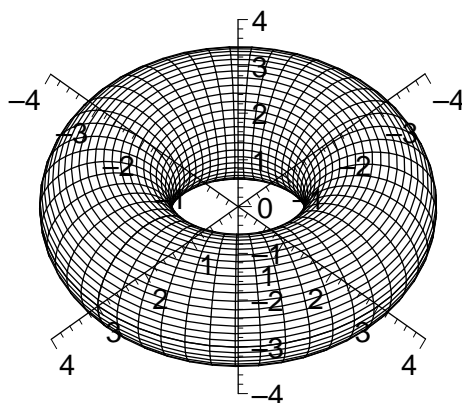


Todettakoon vielä, että pinta S voi olla globaalisti hyvinkin mutkikas, ajattele vain esimerkiksi tapausta, jossa C on solmussa (kuva: Maple):



□

Esimerkki. Esimerkkinä monistosta, joka ei ole yhdesti yhtenäinen, on tooruksen eli rinkilän sisäosa (kuva: Maple).



Rinkilän reunapinnan laajennettu parametrisointi on

$$\begin{cases} x = (R_1 + R_2 \cos u_2) \cos u_1 \\ y = (R_1 + R_2 \cos u_2) \sin u_1 \\ z = R_2 \sin u_2 \end{cases} \quad (0 \leq u_1, u_2 \leq 2\pi).$$

Rinkilässä esimerkiksi kentällä

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = \frac{1}{x^2 + y^2} \begin{pmatrix} -y \\ x \\ 0 \end{pmatrix}$$

ei ole potentiaalia, vaikka helposti on todettavissa, että se on pyörteetön (totea!). Potentiaalia ei Lauseen 6.2 nojalla ole, sillä rinkilän keskusympyrälle $\vec{C} : \gamma(u_1) = (R_1 \cos u_1, R_1 \sin u_1, 0)$ ($0 \leq u_1 \leq 2\pi$) on

$$\oint_{\vec{C}} \mathbf{F}(\mathbf{r}) \bullet d\mathbf{s} = \int_0^{2\pi} \frac{1}{R_1^2} \begin{pmatrix} -R_1 \sin u_1 \\ R_1 \cos u_1 \\ 0 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} -R_1 \sin u_1 \\ R_1 \cos u_1 \\ 0 \end{pmatrix} du_1 = \int_0^{2\pi} du_1 = 2\pi \neq 0.$$

Jos sen sijaan leikataan rinkilästä pala pois positiivisen x -akselin kohdalta, potentiaalikin on olemassa, nimittäin atan (ks. Pykälän 2.5 esimerkki).

Mikäli monisto ei ole yhdesti yhtenäinen, pyörteettömällä vektorikentällä on edelleenkin lokaaali skalaaripotentiali, mutta sen ei tarvitse olla globaalisti yksikäsitteinen vakioyhteenlaskettavaa vaille. Koska numeerisesti voidaan ratkaista vain yksikäsitteisiä tehtäviä, monisto on tehtävä keinotekoisesti yhdesti yhtenäiseksi ”leikkaamalla se auki” sopivaa pintaa pitkin yo. esimerkissä todettuun tapaan.

Huomautus. Eräissä tapauksissa tiedetään pyörteettömällä kentällä olevan yksikäsitteinen skalaaripotentiali, vaikka monisto ei olisikaan yhdesti yhtenäinen. Näin on laita esimerkiksi sähkökentän voimakkuuteen \mathbf{E} liittyvissä tehtävissä, jos lähistöllä ei ole muuttuvia magneettikenttiä tai ylimääräisiä sähkömotorisia voimia. Energeettisistä syistä mielivaltaisen sulkeutuvan viivan C ympäri integroiden näissä tapauksissa on

$$\oint_C \mathbf{E}(\mathbf{r}) \bullet d\mathbf{s} = 0.$$

Tällöin integraali $\int_{\mathbf{r}_0}^{\mathbf{r}} \mathbf{E}(\mathbf{r}) \bullet d\mathbf{s}$ on integrointitiestä riippumaton ja kelpaa yksikäsitteiseksi potentiaaliksi.

Skalaaripotentiali voidaan myös saada aikaan approksimatiivisesti, ks. Pykälä 6.6.

6.3 Vektorikentän vektoripotentiaali

Poincarén lemman mukaisesti 2-muotokentällä $\Phi(\mathbf{p}; \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = \mathbf{F}(\mathbf{p}) \bullet \mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_2$ (\mathbf{F} :n vuomuotokenttä) on pisteen \mathbf{p}_0 suhteen tähtimäisissä joukoissa potentiaali, jos $d\Phi = \Phi_{\nabla \bullet \mathbf{F}\text{-density}} = 0$, ts. $\nabla \bullet \mathbf{F} = 0$ eli kenttä on lähteetön, ja eräs tällainen potentiaali on

$$\mathbf{U}(\mathbf{p}) \bullet \mathbf{r} = \int_0^1 t \mathbf{F}(\mathbf{p}_0 + t(\mathbf{p} - \mathbf{p}_0)) \times (\mathbf{p} - \mathbf{p}_0) \bullet \mathbf{r} dt.$$

(vektorikentän \mathbf{U} työmuoto). Esiintyviä vektorikenttiä \mathbf{U} kutsutaan kentän \mathbf{F} vektoripotentiaaleiksi.

Esimerkki. Etsitään vektorikentän $\mathbf{F}(x, y, z) = (x, y, -2z)^T$ vektoripotentiaali koko \mathbb{R}^3 :ssa. Ilmeisesti kyseessä on lähteetön kenttä. Valitaan $\mathbf{p}_0 = \mathbf{0}$ ja integroidaan (jättäen muodon vektorimuuttuja \mathbf{r} pois):

$$\mathbf{U}(x, y, z) = \int_0^1 t \begin{pmatrix} tx \\ ty \\ -2tz \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} dt = \int_0^1 t^2 \begin{pmatrix} 3yz \\ -3xz \\ 0 \end{pmatrix} dt = \begin{pmatrix} yz \\ -xz \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Esimerkki. Otetaan toisena esimerkkinä vähän hankalampi, mutta sangen käyttökelpoinen tulos. (Ks. Liite 3.) Etsitään Newtonin vektorikentän

$$\mathbf{F}(\mathbf{p}) = -C \frac{\mathbf{p} - \mathbf{p}_1}{\|\mathbf{p} - \mathbf{p}_1\|^3},$$

vektoripotentiaali tähtimäisessä alueessa, joka saadaan poistamalla avaruudesta \mathbb{R}^3 puolisuora

$$\mathbf{p}_1 + u(\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_0) \quad (u \geq 0).$$

Tämä alue on tähtimäinen pisteen \mathbf{p}_0 suhteen olettaen—kuten tehdään—että $\mathbf{p}_0 \neq \mathbf{p}_1$. Huomaa, että avaruudesta poistetaan silloin \mathbf{p}_1 , mutta ei pistettä \mathbf{p}_0 . Merkitään jatkoa ajatellen lyhyesti

$$\begin{aligned} a &= \|\mathbf{p}_0 - \mathbf{p}_1\|^2 = (\mathbf{p}_0 - \mathbf{p}_1) \bullet (\mathbf{p}_0 - \mathbf{p}_1) \quad , \\ b &= 2(\mathbf{p}_0 - \mathbf{p}_1) \bullet (\mathbf{p} - \mathbf{p}_0) = 2(\mathbf{p}_0 - \mathbf{p}_1) \bullet (\mathbf{p} - \mathbf{p}_1) - 2a \quad , \\ c &= \|\mathbf{p} - \mathbf{p}_0\|^2 = \|\mathbf{p} - \mathbf{p}_1\|^2 - 2(\mathbf{p}_0 - \mathbf{p}_1) \bullet (\mathbf{p} - \mathbf{p}_1) + a \quad \text{ja} \\ d &= 4ac - b^2 = 4\|\mathbf{p}_0 - \mathbf{p}_1\|^2\|\mathbf{p} - \mathbf{p}_0\|^2 - 4((\mathbf{p}_0 - \mathbf{p}_1) \bullet (\mathbf{p} - \mathbf{p}_0))^2. \end{aligned}$$

Silloin (totea!)

$$\begin{aligned} 4a + 2b &= 4(\mathbf{p}_0 - \mathbf{p}_1) \bullet (\mathbf{p} - \mathbf{p}_1) \quad , \\ a + b + c &= \|\mathbf{p} - \mathbf{p}_1\|^2 \quad \text{ja} \\ d &= 4\|\mathbf{p}_0 - \mathbf{p}_1\|^2\|\mathbf{p} - \mathbf{p}_1\|^2 - 4((\mathbf{p}_0 - \mathbf{p}_1) \bullet (\mathbf{p} - \mathbf{p}_1))^2. \end{aligned}$$

Lasketaan vektoripotentiaali (jättäen pois vektorimuuttuja \mathbf{r} sekä vakio $-C$):

$$\begin{aligned}
 \mathbf{U}(\mathbf{p}) &= \int_0^1 t \frac{\mathbf{p}_0 + t(\mathbf{p} - \mathbf{p}_0) - \mathbf{p}_1}{\|\mathbf{p}_0 + t(\mathbf{p} - \mathbf{p}_0) - \mathbf{p}_1\|^3} \times (\mathbf{p} - \mathbf{p}_0) dt \\
 &= (\mathbf{p}_0 - \mathbf{p}_1) \times (\mathbf{p} - \mathbf{p}_1) \int_0^1 \frac{t dt}{(a + bt + ct^2)^{3/2}} \\
 &= (\mathbf{p}_0 - \mathbf{p}_1) \times (\mathbf{p} - \mathbf{p}_1) \int_0^1 \frac{-2(2a + bt)}{d\sqrt{a + bt + ct^2}} \\
 &= (\mathbf{p}_0 - \mathbf{p}_1) \times (\mathbf{p} - \mathbf{p}_1) \frac{4\sqrt{a}\sqrt{a + b + c} - (4a + 2b)}{d\sqrt{a + b + c}} \\
 &= (\mathbf{p}_0 - \mathbf{p}_1) \times (\mathbf{p} - \mathbf{p}_1) \frac{\|\mathbf{p}_0 - \mathbf{p}_1\| \|\mathbf{p} - \mathbf{p}_1\| - (\mathbf{p}_0 - \mathbf{p}_1) \bullet (\mathbf{p} - \mathbf{p}_1)}{\|\mathbf{p} - \mathbf{p}_1\| (\|\mathbf{p}_0 - \mathbf{p}_1\|^2 \|\mathbf{p} - \mathbf{p}_1\|^2 - ((\mathbf{p}_0 - \mathbf{p}_1) \bullet (\mathbf{p} - \mathbf{p}_1))^2)} \\
 &= \frac{(\mathbf{p}_0 - \mathbf{p}_1) \times (\mathbf{p} - \mathbf{p}_1)}{\|\mathbf{p}_0 - \mathbf{p}_1\| \|\mathbf{p} - \mathbf{p}_1\|^2 + ((\mathbf{p}_0 - \mathbf{p}_1) \bullet (\mathbf{p} - \mathbf{p}_1)) \|\mathbf{p} - \mathbf{p}_1\|}.
 \end{aligned}$$

Tämä tulos on jossain mielessä paras mahdollinen, eihän juuri vähempää voi avaruudesta poistaa potentiaalin aikaansaamiseksi.

Lähteettömille kentille tuntematon kenttä voidaan siis esittää (myös toistaiseksi tuntemattoman) vektorikentän, vektoripotentiaalin, roottorina: $\mathbf{F} = \nabla \times \mathbf{U}$. Lähteettömyys seuraa yleensä tehtävän asetelusta. Myöskin muotokenttämielessä vektorikentän työmuoto on tietysti ”yksinkertaisempi” kuin sellaisen vuomuoto.

Jos \mathbf{U} on kentän \mathbf{F} vektoripotentiaali ja ∇f on gradienttikenttä, niin $\mathbf{U} + \nabla f$ on myös \mathbf{F} :n vektoripotentiaali, sillä $\nabla \times (\mathbf{U} + \nabla f) = \nabla \times \mathbf{U} + \nabla \times \nabla f = \nabla \times \mathbf{U}$. Toisaalta, jos \mathbf{U} ja \mathbf{V} ovat molemmat saman kentän vektoripotentiaaleja, niin $\nabla \times (\mathbf{U} - \mathbf{V}) = \mathbf{0}$ ja $\mathbf{U} - \mathbf{V}$ on pyörteetön. Vektoripotentiaali on siis yksikäsitteinen pyörteetöntä yhteenlaskettavaa vaille. Mikäli tarkasteltava monisto on sellainen, että siinä on skalaaripotentiaali—esimerkiksi yhdesti yhtenäinen—on vektoripotentiaali yksikäsitteinen yhteenlaskettavaa gradienttikenttää vaille. Jos skalaaripotentiaalia ei aina ole, näin ei ole. Esimerkiksi edellisen pykälän esimerkin rinkilässä nollakentän $\mathbf{0}$ vektoripotentiaali on kyllä olemassa (eräs sellainen on tietysti $\mathbf{0}$), mutta myös

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = \frac{1}{x^2 + y^2} \begin{pmatrix} -y \\ x \\ 0 \end{pmatrix}$$

on $\mathbf{0}$:n vektoripotentiaali ja sehän ei ollut gradienttikenttä.

Vektoripotentiaalin olemassolo liittyy pintaintegraaleihin seuraavalla tavalla, joka seuraa Yleistetystä Stokesin lauseesta, kun muistetaan, että pintaintegraali on vektoripotentiaalin roottorin vuomuodon integraali ja että mainittu vuomuoto on vektoripotentiaalin työmuodon ulko-derivaatta:

Lause 6.4. Jos jatkuvasti derivoituvalla vektorikentällä \mathbf{F} on \mathbb{R}^3 :n avoimessa joukossa \mathcal{K} (monistossa) vektoripotentiaali \mathbf{U} ja \mathcal{S} on $\vec{\mathcal{K}}$:ssa oleva suunnattu sulkeutuva pinta (2-ulotteinen suunnistettu monisto laajennetussa parametrisoinnissa, jonka sileä reuna on tyhjä), niin

$$\oint_{\vec{\mathcal{S}}} \mathbf{F}(\mathbf{r}) \bullet d\mathbf{S} = \oint_{\vec{\mathcal{S}}} \nabla \times \mathbf{U}(\mathbf{r}) \bullet d\mathbf{S} = 0.$$

Kuten skalaaripotentialillekin, vektoripotentialin olemassaolo ei riipu pelkästään kentästä, vaan myös tarkastelumonistosta \mathcal{K} . Tähtimäisissä monistoissa lähteettömällä vektorikentällä on vektoripotentialit Poincarén lemman nojalla. Muiden osalta tilanne on vain mutkikkaampi. Joka tapauksessa eo. lauseen antaman välttämättömän ehdon on toteuduttava.

Esimerkki. *Tavallinen esimerkki tapauksesta, missä lähteettömällä kentällä ei ole vektoripotentialia, on Newtonin vektorikenttä*

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}_0}{\|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0\|^3}$$

”puhkaistussa” monistossa \mathcal{K} , mistä piste \mathbf{r}_0 on suljettu pois, mutta joka ”ympäröi” pisteen \mathbf{r}_0 . Kuten aikaisemmin todettiin, kenttä on lähteetön. Mainitun pisteen alueesta pois rajaavan pienen δ -säteisen \mathbf{r}_0 -keskisen pallonpinnan

$$\mathcal{S} : \mathbf{r} = \gamma(\theta, \phi) = \mathbf{r}_0 + \delta(\sin \theta \cos \phi, \sin \theta \sin \phi, \cos \theta) \quad (0 \leq \theta \leq \pi, 0 \leq \phi < 2\pi)$$

yli integroiden nimittäin saadaan (suunnistus ulkonormaalia vastaten)

$$\begin{aligned} \oint_{\vec{\mathcal{S}}} \mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{S} &= \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \frac{1}{\delta^2} \begin{pmatrix} \sin \theta \cos \phi \\ \sin \theta \sin \phi \\ \cos \theta \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \sin \theta \cos \phi \\ \sin \theta \sin \phi \\ \cos \theta \end{pmatrix} \delta^2 \sin \theta \, d\theta d\phi \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \sin \theta \, d\theta d\phi = 4\pi \neq 0. \end{aligned}$$

Lauseen 6.4 johtopäätös ei siis päde, joten mitään vektoripotentialiaakaan ei ole.

Gaußin lauseella on myös seurauksensa vektoripotentialin osalta. Jos Lauseessa 6.4 mainitun suunnatun sulkeutuvan pinnan $\vec{\mathcal{S}}$ sisälleen rajaama avaruuden osa \mathcal{L} on kokonaan monistossa \mathcal{K} , niin myös Gaußin lauseen mukaan

$$\oint_{\vec{\mathcal{S}}} \mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{S} = \int_{\mathcal{L}} \nabla \cdot \mathbf{F}(\mathbf{r}) \, d\mathbf{r} = 0,$$

sillä vektorikentän \mathbf{F} on oltava lähteetön, mikäli sillä on vektoripotentiali. Entäs jos koko \mathcal{L} ei ole monistossa \mathcal{K} , vaan \mathcal{K} :ssa on ”onteloita”, jotka ovat \mathcal{L} :n sisällä? Ottamalla kyllin pieni sopiva pinta $\vec{\mathcal{S}}$ voidaan olettaa, että \mathcal{L} sisältää vain yhden tällaisen ontelon. Merkitään \mathcal{L} :n sisään jäävää moniston \mathcal{K} osaa \mathcal{N} :llä ja mainitun ontelon reunaa $\vec{\mathcal{T}}$:llä. $\vec{\mathcal{T}}$ on suunnattu sulkeutuva pinta, joka on suunnistettu ontelon sisään suuntautuvaa normaalivektoria vastaten. Sovellettaessa Gaußin lausetta \mathcal{N} :ään ja sen reunaan $\vec{\mathcal{S}} + \vec{\mathcal{T}}$ (joista $\vec{\mathcal{S}}$ on suunnistettu ulkonormaalia vastaten) saadaan Lausetta 6.4 käyttäen

$$0 = \int_{\mathcal{N}} \nabla \cdot \mathbf{F}(\mathbf{r}) \, d\mathbf{r} = \oint_{\vec{\mathcal{S}} + \vec{\mathcal{T}}} \mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{S} = \oint_{\vec{\mathcal{S}}} \mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{S} + \oint_{\vec{\mathcal{T}}} \mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{S} = \oint_{\vec{\mathcal{T}}} \mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{S}.$$

Siis jokaisen \mathcal{K} :n sisään jäävän ontelon reunapinnan läpikin kentän vuon on oltava $= 0$, jos kentällä on vektoripotentiali \mathcal{K} :ssa.

Idealisesti ym. välttämätön ehto olisi lähteettömille vektorikentille myös riittävä. Kirjallisuudesta löytyviä klassistyyppisiä riittäviä ehtoja—tähtimäisen moniston tapauksen lisäksi—ovat mm. seuraavat:

- Kenttä \mathbf{F} jatkuvasti derivoituva ja lähteetön. Jokaisen $\mathcal{K} \cup \partial\mathcal{K}$:hon (monisto + reuna) sisältyvän suljetun pinnan sisälle jäävä monisto \mathcal{L} sisältyy kokonaisuudessaan \mathcal{K} :hon (ei onteloita) (APOSTOL).
- Magneettikenttä \mathbf{B} vakuuissa, joka sisältää liikkuvia varauksia (FEYNMAN, R.P. *et al.*: *The Feynman Lectures on Physics. Vol. II.* Addison–Wesley (1998)).
- Kenttä \mathbf{F} on derivoituva ja sen vuo mielivaltaisen moniston \mathcal{K} sisällä olevan sulkeutuvan paloittain sileän pinnan läpi on nolla. \mathcal{K} on jatkuvien muunnosten muunnettavissa tähti-mäiseksi monistoksi, josta on poistettu korkeintaan äärellinen määrä pallomaisia onteloita (TON, T.-C.: On the Potential of a Solenoidal Vector Field. *Journal of Mathematical Analysis and Applications* **151** (1990), 557–580).

Välttämättömät ja riittävät ehdot vektoripotentialin olemassaololle distribuutiomielessä (yleistetyt funktiot) löytyvät esimerkiksi kirjasta GIRAULT, V. & RAVIART, P.-A.: *Finite Element Methods for Navier–Stokes Equations: Theory and Algorithms.* Springer–Verlag (1986). Ehdot ovat ideaaliset—yleistetyssä mielessä siis:

(i) Vektorikenttä \mathbf{F} on lähteetön ja

(ii) \mathcal{K} :n jokaisen reunapinnan $\partial\mathcal{K}_i$ yli (ulkopinta + ontelot) on $\oint_{\partial\mathcal{K}_i} \mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{S} = 0$.

Fysikaaliselta puolelta mainittakoon klassinen artikkeli MISNER, C.W. & WHEELER, J.A.: Classical Physics as Geometry: Gravitation, Electromagnetism, Unquantified Charge, and Mass as Properties of Curved Empty Space. *Annals of Physics* **2** (1957), 525–603, jossa annetaan suhteellisuusteoreettinen abstrakti karakterisaatio vektoripotentialin olemassaololle eräissä melko yleisissä tapauksissa. Myöskin monistoteoreettisin tarkastelu on päästy pitkälle. Alan klassinen viite on WEYL, H.: The Method of Orthogonal Projection in Potential Theory. *Duke Mathematical Journal* **7** (1940), 411–444. Modernit ideat perustuvat Georges de Rhamin perustaviin tuloksiin. Ks. DE RHAM, G.H.: *Differentiable Manifolds.* Springer–Verlag (1984). Tällä tavoin onkin päästy hyvin lähelle ym. ideaalista karakterisaatiota vektoripotentialin olemassaololle.

6.4 Helmholtzin hajotelma

Kuten edellä todettiin, $\mathbf{F}(\mathbf{r})$:n vektoripotentiali, jos yleensäkin olemassa, on yksikäsitteinen vain pyörteetöntä yhteenlaskettavaa vaille. Tämä antaa mahdollisuuden lisätä ehtoja vektoripotentialille. Otetaan tilanne, missä tarkastelumonistossa \mathcal{K} jatkuvasti derivoituvilla pyörteettömillä kentillä on skalaaripotentiali. Entäs, jos esimerkiksi halutaan \mathbf{F} :lle vektoripotentiali \mathbf{U}_1 , joka on lähteetön, ja on jo saatu jokin vektoripotentiali \mathbf{U} . Jos \mathbf{U} :n lähteisyys $\nabla \cdot \mathbf{U} = g$ on nolla, asia on selvä. Muutoin halutunlainen vektoripotentiali on muotoa $\mathbf{U}_1 = \mathbf{U} + \nabla\phi$ ja

$$0 = \nabla \cdot \mathbf{U}_1(\mathbf{r}) = \nabla \cdot \mathbf{U}(\mathbf{r}) + \Delta\phi(\mathbf{r}) = g(\mathbf{r}) + \Delta\phi(\mathbf{r}).$$

Esiintyvälle skalaarikentälle ϕ saadaan siis yhtälö

$$\Delta\phi(\mathbf{r}) = -g(\mathbf{r}).$$

Tämä on osittaisdifferentiaaliyhtälö, ns. *Poissonin yhtälö*. Yhtälön ratkaisu ei ole yksikäsitteinen, mikä tahansa funktio $\phi + h$, missä $\Delta h = 0$, on myös ratkaisu. Osittaisdifferentiaaliyhtälö

$$\Delta h(\mathbf{r}) = 0$$

taas on ns. *Laplacen yhtälö* ja sen ratkaisut ovat ns. *harmoniset funktiot*³, ks. myös Luku 7 ja Liite 1. Saatu ϕ (jos olemassa) on siis yksikäsitteinen harmonista yhteenlaskettavaa vaille. Jos vielä haluttaisiin yksikäsitteinen ϕ :kin, pitää asettaa Poissonin yhtälölle lisäehtoja, ns. reunaehtoja—joista ei tässä sen enempää. Kaiken kaikkiaan, koska toisaalta Poissonin yhtälöllä varsin yleisesti on ratkaisu, voidaan todeta, että jos yleensä ottaen saadaan vektoripotentiaali, niin saadaan myös lähteetön vektoripotentiaali.

Samalla idealla saadaan myös pyörteetön kenttä \mathbf{U}_2 , jonka lähteisyys f on annettu. Silloin $\mathbf{U}_2 = \nabla\psi$ ja

$$\nabla \bullet \mathbf{U}_2(\mathbf{r}) = \Delta\psi(\mathbf{r}) = f(\mathbf{r}).$$

Kyseessä on jälleen Poissonin yhtälö ja ratkaisu ψ on yksikäsitteinen harmonista yhteenlaskettavaa vaille.

Jos nyt halutaan kenttä \mathbf{U} , jolla on annettu roottori (pyörteisyys) $\nabla \times \mathbf{U} = \mathbf{F}$ ja annettu divergenssi (lähteisyys) $\nabla \bullet \mathbf{U} = f$, niin se on yksinkertaisesti $\mathbf{U} = \mathbf{U}_1 + \mathbf{U}_2$. Jotta \mathbf{U} olisi yksikäsitteinen tarvitaan siis lisä(reuna)ehtoja. VÄISÄLÄ mainitsee koko \mathbb{R}^3 :ssa yksikäsitteisyyden seuraavan, jos vaaditaan lisäksi, että kenttä \mathbf{U} häviää äärettömyydessä, ts.

$$\lim_{\|\mathbf{r}\| \rightarrow \infty} \mathbf{U}(\mathbf{r}) = \mathbf{0}.$$

Yhdistelemällä näistä saadaan kuuluisa ns. *Helmholtzin hajotelma*. Suhteellisen yleinen kenttä \mathbf{U} voidaan kirjoittaa lähteettömän ja pyörteettömän kentän summaksi seuraavalla tavalla:

1. Valitaan $\mathbf{F} = \nabla \times \mathbf{U}$ ja etsitään eo. lähteetön kenttä \mathbf{U}_1 .
2. Valitaan $f = \nabla \bullet \mathbf{U}$ ja etsitään eo. pyörteetön kenttä \mathbf{U}_2 .
3. Kirjoitetaan kenttä \mathbf{U} muotoon

$$\mathbf{U} = \mathbf{U}_1 + \mathbf{U}_2 + (\mathbf{U} - \mathbf{U}_1 - \mathbf{U}_2).$$

Erotus $\mathbf{U} - \mathbf{U}_1 - \mathbf{U}_2$ on silloin harmonisen funktion gradientti (totea!) ja se voidaan lisätä joko \mathbf{U}_1 :een tai \mathbf{U}_2 :een. Siis

$$\mathbf{U} = (\mathbf{U} - \mathbf{U}_2) + \mathbf{U}_2 = \mathbf{U}_1 + (\mathbf{U} - \mathbf{U}_1)$$

(lähteetön osa + pyörteetön osa). Kenttä siis voidaan kirjoittaa gradientin ja roottorin summaksi.

Korostettakoon vielä, että kaikki tämä toimii tietysti sillä edellytyksellä, että monistossa \mathcal{K} skalaari- ja vektoripotentiaalit ovat olemassa ja että esiintyvillä Poissonin yhtälöillä on ratkaisut.

Huomautus. *Muotokentille yleisemminkin on vastaava hajotelma, ns. Hodgen hajotelma, ks. esimerkiksi ABRAHAM & MARSDEN & RATIU.*

³Harmonisilla funktioilla on keskeinen osa skalaarikenttien yhteydessä. Asiasta enemmän kurssilla Osittaisdiferentiaaliyhtälöt.

6.5 Nelipotentiali

Nelipotentiali on 4-ulotteisen 2-muotokentän Φ potentiaali. Tämä on Poincarén lemman nojalla olemassa tähtimäisessä joukossa, mikäli $d\Phi = 0$.

Edellä Pykälässä 5.3 todettiin, että $d\Phi_{\text{Faraday}} = 0$. Näin ollen tähtimäisessä joukossa Faradayn muotokentällä on potentiaali A , ns. *sähkömagneettinen nelipotentiali*. Tämä on 1-muotokenttä, joka (perinteisesti) kirjoitetaan muotoon

$$A = A_1 dx + A_2 dy + A_3 dz - \phi dt.$$

Lasketaan ulkoderivaatta ja etsitään kertoimet A_1, A_2, A_3 sekä ϕ . Pykälän 5.2 derivointisäännön (IV) nojalla

$$\begin{aligned} dA &= \left(\frac{\partial A_1}{\partial x} dx + \frac{\partial A_1}{\partial y} dy + \frac{\partial A_1}{\partial z} dz + \frac{\partial A_1}{\partial t} dt \right) \wedge dx \\ &+ \left(\frac{\partial A_2}{\partial x} dx + \frac{\partial A_2}{\partial y} dy + \frac{\partial A_2}{\partial z} dz + \frac{\partial A_2}{\partial t} dt \right) \wedge dy \\ &+ \left(\frac{\partial A_3}{\partial x} dx + \frac{\partial A_3}{\partial y} dy + \frac{\partial A_3}{\partial z} dz + \frac{\partial A_3}{\partial t} dt \right) \wedge dz \\ &- \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} dx + \frac{\partial \phi}{\partial y} dy + \frac{\partial \phi}{\partial z} dz + \frac{\partial \phi}{\partial t} dt \right) \wedge dt \end{aligned}$$

ja tämän pitää olla

$$E_1 dx \wedge dt + E_2 dy \wedge dt + E_3 dz \wedge dt + B_1 dy \wedge dz + B_2 dz \wedge dx + B_3 dx \wedge dy.$$

Laskemalla auki ja vertailemalla todetaan, että

$$\mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \nabla \phi \quad \text{ja} \quad \mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A},$$

missä $\mathbf{A} = (A_1, A_2, A_3)^T$. A siis saadaan, kun ensin etsitään magneettivuon tiheydelle \mathbf{B} vektoripotentiali \mathbf{A} (muista, että \mathbf{B} on lähteetön) ja sitten vektorikentälle

$$-\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \mathbf{E}$$

skalaaripotentiali ϕ . Huomaa, että Maxwellin yhtälöiden mukaisesti (sopivin heikoin oletuksin)

$$\nabla \times \left(-\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \mathbf{E} \right) = -\frac{\partial}{\partial t} (\nabla \times \mathbf{A}) - \nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \mathbf{0}.$$

Nelipotentiali A ei ole yksikäsitteinen, \mathbf{A} :han voidaan lisätä gradienttikenttä $\nabla \psi$ korvaten ϕ vastaavasti $\phi - \partial \psi / \partial t$:llä ulkoderivaatan muuttumatta. Usein valitaan \mathbf{A} ja ϕ siten, että ns. *Lorenzin mittaehto* (engl. gauge condition)

$$\nabla \cdot \mathbf{A} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \phi}{\partial t} = 0$$

toteutuu. Tämä nimittäin erottaa tietyssä mielessä \mathbf{A} :n ja ϕ :n toisistaan. Jos alunperin

$$\nabla \cdot \mathbf{A} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \phi}{\partial t} = g \neq 0,$$

saadaan Lorenzin mittaehto toteutumaan (totea!) valitsemalla ψ , joka toteuttaa osittaisdifferen-tiaaliyhtälön

$$\Delta \psi(\mathbf{r}, t) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \psi(\mathbf{r}, t)}{\partial t^2} = -g(\mathbf{r}, t).$$

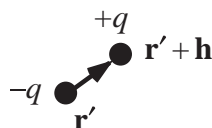
Tämä on ns. aaltoyhtälö ja sillä on varsin yleisin ehdoin ratkaisu. Lorenzin mittaehdon voidaan siis olettaa toteutuvan varsin yleisesti.

6.6 Dipoliaprossimaatio ja -potentiaali

Dipolikentällä tarkoitetaan kahden vastakkaismerkkisen potentiaalin aiheuttamaa kenttää. Tyyppillinen tilanne on lähellä toisiaan olevat samansuuruiset mutta vastakkaismerkkiset varaukset ja niiden aiheuttama sähkökenttä.

Katsotaan ensin sähkökentän tapausta. Sähkövaraukset $+q$ ja $-q$ sijaitsevat alla olevan kuvan mukaisesti lähellä toisiaan pisteissä $\mathbf{r}' + \mathbf{h}$ ja \mathbf{r}' . Tarkastellaan niiden aiheuttamaa sähköstaattista kenttää pisteessä \mathbf{r} . Dipoliaprossimaation luonteeseen kuuluu, että $\|\mathbf{r} - \mathbf{r}'\| \gg \|\mathbf{h}\|$.

● \mathbf{r}



Sähköfysiikan mukaisesti varausten synnyttämän kentän (äärettömyydessä häviävä Coulombin) potentiaali pisteessä \mathbf{r} on

$$\phi(\mathbf{r}) = \frac{q}{4\pi\epsilon} \left(\frac{1}{\|\mathbf{r} - \mathbf{r}' - \mathbf{h}\|} - \frac{1}{\|\mathbf{r} - \mathbf{r}'\|} \right).$$

Toisaalta, kuten Pykälässä 5.3 todettiin, funktion (0-muotokentän) $f(\mathbf{r}') = \frac{q}{4\pi\epsilon} \frac{1}{\|\mathbf{r} - \mathbf{r}'\|}$ ulkoderivaatta on f :n gradientin työmuoto

$$(df)(\mathbf{r}'; \mathbf{h}) = \nabla' f(\mathbf{r}') \cdot \mathbf{h} \cong f(\mathbf{r}' + \mathbf{h}) - f(\mathbf{r}') = \phi(\mathbf{r}),$$

kun derivointimuuttujana on \mathbf{r}' (pilkutettu nabla). Aprossimaatio seuraa ulkoderivaatan määritelmästä. Siten tarkastelupisteessä \mathbf{r}

$$\phi(\mathbf{r}) \cong \frac{q}{4\pi\epsilon} \left(\nabla' \frac{1}{\|\mathbf{r} - \mathbf{r}'\|} \right) \cdot \mathbf{h} = \frac{q}{4\pi\epsilon} \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{\|\mathbf{r} - \mathbf{r}'\|^3} \cdot \mathbf{h}.$$

Lauseketta

$$q\mathbf{h} = \mathbf{p}'$$

kutsutaan *sähköiseksi dipolimomentiksi*. Jos aprossimaatio katsotaan riittäväksi (siis rajalla $\mathbf{h} \rightarrow \mathbf{0}$ siten, että $q\mathbf{h} = \mathbf{p}'$), saadaan tavanomainen *potentiaalidipoliaprossimaatio*

$$\phi(\mathbf{r}) \cong \frac{1}{4\pi\epsilon} \frac{\mathbf{p}' \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{\|\mathbf{r} - \mathbf{r}'\|^3},$$

missä pisteeseen \mathbf{r}' liittyvä suure \mathbf{p}' on pilkutettu.

Entäs sitten sähkökentän voimakkuus tarkastelupisteessä \mathbf{r} ? Sähköfysiikassa potentiaalinetumerkki sovitaan siten, että $\mathbf{E}(\mathbf{r}) = -\nabla\phi(\mathbf{r})$. Siis

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) \cong -\frac{1}{4\pi\epsilon} \nabla \frac{\mathbf{p}' \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{\|\mathbf{r} - \mathbf{r}'\|^3}.$$

Koska gradientti muodostetaan tarkastelupisteessä \mathbf{r} (kuten aina laskettaessa kenttää paikallisesta potentiaalista), nabla kohdistuu muuttujaan \mathbf{r} . Lausekkeessa vektori \mathbf{p}' ei riipu muuttujasta \mathbf{r} , johon nabla kohdistuu. Pykälän 1.5 kaavaa (i) soveltaen saadaan

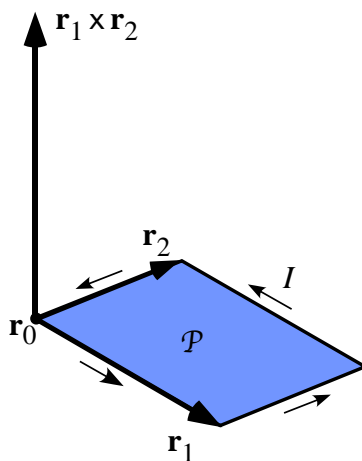
$$\begin{aligned}\nabla \frac{\mathbf{p}' \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{\|\mathbf{r} - \mathbf{r}'\|^3} &= (\mathbf{p}' \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}')) \nabla \frac{1}{\|\mathbf{r} - \mathbf{r}'\|^3} + \frac{1}{\|\mathbf{r} - \mathbf{r}'\|^3} \nabla (\mathbf{p}' \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}')) \\ &= -3 \frac{\mathbf{p}' \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{\|\mathbf{r} - \mathbf{r}'\|^5} (\mathbf{r} - \mathbf{r}') + \frac{\mathbf{p}'}{\|\mathbf{r} - \mathbf{r}'\|^3}\end{aligned}$$

ja sitten *kentän dipoliapproksimaatio*

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) \cong \frac{1}{4\pi\epsilon\|\mathbf{r} - \mathbf{r}'\|^5} (-\|\mathbf{r} - \mathbf{r}'\|^2 \mathbf{p}' + 3(\mathbf{p}' \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}'))(\mathbf{r} - \mathbf{r}'))$$

(kentän voimakkuus on negatiivinen gradientti). Tällainen approksimaatio on käyttökelpoinen, paitsi varsinaisille sähköisille dipoleille, myös kentille, jotka ovat likimain dipolikenttiä. Dipolimomentti saadaan silloin fysikaalisin perustein.

Magneettinen dipoli on samankaltainen kuin edellä ollut sähköinen dipoli. Käsitellään sitä virtasilmuksen avulla ja muistellaan roottorin määrittelyä ulkoderivaattana Pykälässä 5.3. Tarkastellaan pientä tasossa olevaa suunnikkaanmuotoista virtasilmuksia $\vec{\partial\mathcal{P}}$, jossa kiertää virta I . Silmukan tason normaali on $\mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_2 = A\mathbf{n}$, missä A on suunnikkaan ala ja \mathbf{n} vastaava yksikkönormaali, ja se on virran kiertosuuntaan nähden oikein suunnistettu. Tarkastelupiste \mathbf{r} sijaitsee silmukan mittoihin nähden kaukana silmukasta. (Ks. alla oleva kuva.) Silmukan sijaintia karakterisoimaan valitaan sen kärkipiste \mathbf{r}_0 . Silmukan pisteitä taas karakterisoidaan muuttujavektorilla \mathbf{r}' . Tarkastelupisteen \mathbf{r} ”kaukaisuus” tarkoittaa, että $\|\mathbf{r} - \mathbf{r}'\| \gg \|\mathbf{r}' - \mathbf{r}_0\|$.



Sähkömagneetiikan Biot–Savart-lain mukaan magneettikentän voimakkuus pisteessä \mathbf{r} on

$$\mathbf{H}(\mathbf{r}) = \frac{I}{4\pi} \oint_{\vec{\partial\mathcal{P}}} \frac{\mathbf{r}' - \mathbf{r}}{\|\mathbf{r} - \mathbf{r}'\|^3} \times d\mathbf{s}',$$

jolloin vakiovektorille \mathbf{a}

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{H}(\mathbf{r}) = \frac{I}{4\pi} \oint_{\vec{\partial\mathcal{P}}} \frac{\mathbf{a} \times (\mathbf{r}' - \mathbf{r})}{\|\mathbf{r} - \mathbf{r}'\|^3} \cdot d\mathbf{s}'.$$

Tämä integraali on vektorikentän

$$\frac{I}{4\pi} \frac{\mathbf{a} \times (\mathbf{r}' - \mathbf{r})}{\|\mathbf{r} - \mathbf{r}'\|^3}$$

kierto silmukan ympäri ja—kuten Pykälässä 5.3 todettiin—se on likimain ko. kentän roottorin vuomuoto pisteessä \mathbf{r}_0 , ts.

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{H}(\mathbf{r}) \cong \left(\nabla' \times \left(\frac{I}{4\pi} \frac{\mathbf{a} \times (\mathbf{r}' - \mathbf{r})}{\|\mathbf{r} - \mathbf{r}'\|^3} \right) \right)_{\mathbf{r}'=\mathbf{r}_0} \cdot \mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_2 = \frac{AI}{4\pi} \mathbf{n} \cdot \left(\nabla' \times \frac{\mathbf{a} \times (\mathbf{r}' - \mathbf{r})}{\|\mathbf{r} - \mathbf{r}'\|^3} \right)_{\mathbf{r}'=\mathbf{r}_0},$$

missä ∇' operoi muuttujaan \mathbf{r}' . Pykälän 1.5 kaavan (vi) avulla laskien⁴ ja muistaen, että Newtonin vektorikentän divergenssi on $= 0$, esiintyväksi roottoriksi saadaan

$$-\frac{\mathbf{a}}{\|\mathbf{r} - \mathbf{r}'\|^3} + 3 \frac{\mathbf{a} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{\|\mathbf{r} - \mathbf{r}'\|^5} (\mathbf{r} - \mathbf{r}')$$

(totea!). Näin ollen

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{H}(\mathbf{r}) \cong \frac{IA}{4\pi} \left(-\frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{n}}{\|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0\|^3} + 3 \frac{(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) \cdot \mathbf{n}}{\|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0\|^5} (\mathbf{a} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)) \right).$$

Vakiovektori \mathbf{a} oli toisaalta mielivaltainen, joten myös

$$\mathbf{H}(\mathbf{r}) \cong \frac{IA}{4\pi} \left(-\frac{\mathbf{n}}{\|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0\|^3} + 3 \frac{(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) \cdot \mathbf{n}}{\|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0\|^5} (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) \right).$$

Ottamalla käyttöön silmukkaan liittyvä *magneettinen dipolimomentti*

$$\mathbf{m}' = I \mathbf{A} \mathbf{n}$$

saadaan sen aiheuttaman magneettikentän dipoliapproksimaatio kaukaisessa pisteessä \mathbf{r} :

$$\mathbf{H}(\mathbf{r}) \cong \frac{1}{4\pi \|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0\|^5} (-\|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0\|^2 \mathbf{m}' + 3((\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) \cdot \mathbf{m}')(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)).$$

Lauseke on täsmälleen samaa muotoa kuin sähköstaattisella dipolilla! Niinpä edellä olevan mukaisesti takaperin argumentoiden nähdään, että magneettikentän voimakkuudella on tässä tapauksessa approksimatiivinen (skalaari)potentiaali ϕ , ts.

$$\mathbf{H}(\mathbf{r}) \cong -\nabla \phi(\mathbf{r}),$$

missä

$$\phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi} \frac{\mathbf{m}' \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)}{\|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0\|^3}.$$

Pykälän 1.5 kaavaa (iii) käyttäen voidaan tarkistaa, että dipoliapproksimaatiokentän divergenssi on $= 0$. Näin ollen sillä on (sopivassa alueessa) myöskin vektoripotentiaali. Tämä voitaisiin etsiä samaan tapaan kuin Newtonin vektorikentän vektoripotentiaali Pykälän 6.3 esimerkissä, mutta katsomalla yo. roottorilauseketta lienee melko ilmeistä, että ko. vektoripotentiaali on

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi} \frac{\mathbf{m}' \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)}{\|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0\|^3}.$$

Huomautus. *Dipoliapproksimaatio on vain osa vektorikentän ns. multipolikehitelmää. Sen ensimmäinen termi, ns. monopoliapproksimaatio, on Newtonin vektorikenttä, toinen termi on yo. kahden vastakkaismerkkisen Newtonin vektorikentän yhdelmän dipoliapproksimaatio, kolmas termi on neljän pareittain vastakkaismerkkisen Newtonin vektorikentän yhdelmän approksimaatio, ns. kvadrupoliapproksimaatio, sitten tulee ns. oktupoliapproksimaatio jne.*

⁴Tai Lausetta 6.1 käyttäen.

”The miracle of the appropriateness of the language of mathematics for the formulation of the laws of physics is a wonderful gift which we neither understand nor deserve.”

(E. WIGNER (1959))

Luku 7

OSITTAISDIFFERENTIAALIYHTÄLÖT

7.1 Standardimuodot

Numeeriset osittaisdifferentiaaliyhtälöratkaisijat sopivat erityisesti muotoa

$$\nabla \cdot (k(\mathbf{r})\nabla u(\mathbf{r})) = F(\mathbf{r}) \quad (\text{ns. elliptinen yhtälö})$$

oleville tehtäville tai ajasta riippuvassa tapauksessa tehtäville

$$\nabla \cdot (k(\mathbf{r})\nabla u(\mathbf{r}, t)) = f(\mathbf{r})\frac{\partial u}{\partial t} + g(\mathbf{r})\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + F(\mathbf{r}, t), \quad \text{missä } k(\mathbf{r}) > 0,$$

asianomaisin reuna- ja alkuehdoin, joihin ei tässä yhteydessä puututa. Kerroinfunktiot k , f ja g voivat lisäksi vielä riippua u :sta, funktio g mahdollisesti myös gradientista ∇u . Funktio F on ns. *pakkofunktio*, joka edustaa ulkopuolisten voimien tms. vaikutusta. Aikariippuvassa tapauksessa eri tyypit ovat

- $f > 0$ ja $g = 0$: *parabolinen yhtälö* eli lämpöyhtälö eli diffuusioyhtälö,
- $f < 0$ ja $g = 0$: *käänteinen lämpöyhtälö* (Black–Scholes-yhtälö),
- $f = 0$ ja $g > 0$: *hyperbolinen yhtälö* eli aaltoyhtälö,
- $f > 0$ ja $g > 0$: *lennätinyhtälö* eli vaimennettu aaltoyhtälö eli hyperbolinen lämpöyhtälö.

Osittaisdifferentiaaliyhtälöitä käsitellään paljon enemmän kursseilla Osittaisdifferentiaaliyhtälöt, Osittaisdifferentiaaliyhtälöiden numeeriset menetelmät, Osittaisdifferentiaaliyhtälöiden jatkokurssi ja Jakautuneet järjestelmät.

7.2 Esimerkkejä

Esitellään esimerkein eräitä yo. yhtälöihin johtavia kenttätehtäviä. Sähkö- ja magneettikenttien osalta viittaukset ovat Maxwellin yhtälöihin (M1)–(M4), ks. Pykälä 5.3.

Esimerkki. (Sähköstaattinen kenttä) Koska staattisessa kentässä kentän voimakkuus \mathbf{E} on pyörteetön (M3), on $\nabla \times \mathbf{E} = \mathbf{0}$ ja kentällä on potentiaali, ts. $\mathbf{E} = -\nabla V$. (Sähkötekniikassa käytettyjen merkintöjen mukaisesti potentiaali on $\Phi = -V$.)

Toisaalta (M1) $\nabla \cdot \mathbf{D} = \nabla \cdot (\varepsilon \mathbf{E}) = \rho$, varaustiheys. Tässä ε on permittiviteetti. Jos varaustiheys—ja tietenkin permittiviteetti—tunnetaan,

$$\nabla \cdot (\varepsilon(\mathbf{r})\nabla V(\mathbf{r})) = -\rho(\mathbf{r}).$$

Tämä on ym. standardimuotoa.

Esimerkki. (Stationäärinen sähkövirtauskenttä) Virran tiheys on $\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E}$, missä σ on johtavuus (Ohmin laki). Kirchhoffin lain perusteella sähköä ei kerry minnekään, ts. suunnatun suljetun pinnan läpi sähkönettovirta on nolla. Siten suunnatulle suljetulle pinnalle \vec{S} , joka rajaa sisälleen kappaleen \mathcal{K} ,

$$\oint_{\vec{S}} \mathbf{J}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{S} = 0 = \int_{\mathcal{K}} \nabla \cdot \mathbf{J}(\mathbf{r}) \, d\mathbf{r}$$

(Gaußin lause). Tehtävissä yleensä oletetaan kenttä jatkuvasti derivoituvaksi, joten kappaleen \mathcal{K} mielivaltaisuudesta johtuen $\nabla \cdot \mathbf{J} = 0$.

Kentällä \mathbf{E} on pyörteettömydestä (M3) johtuen skalaaripotentiali eli $\mathbf{E} = -\nabla V$, joten

$$\nabla \cdot \mathbf{J}(\mathbf{r}) = \nabla \cdot (\sigma(\mathbf{r}) \nabla V(\mathbf{r})) = 0,$$

ja taas päästään standardimuotoon.

Esimerkki. (Magneettikenttä ja skalaaripotentiali) Jos alueessa ei ole sähköjohtimia, virran tiheys on nolla ja (M4) $\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} = \mathbf{0}$. Tällöin kentällä on skalaaripotentiali, ts. $\mathbf{H} = \nabla \Phi$.

Toisaalta (M2)

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = \nabla \cdot (\mu \mathbf{H}) = 0,$$

missä μ on permeabiliteetti. Taas tultiin samaan yhtälötyyppiin, sillä nyt

$$\nabla \cdot (\mu(\mathbf{r}) \nabla \Phi(\mathbf{r})) = 0.$$

Esimerkki. (Kokoonpuristumaton pyörteetön virtaus) Virtauskenttä tiedetään luonteestaan johtuen tehtävässä pyörteetömäksi, ts. $\nabla \times \mathbf{v} = \mathbf{0}$. Nopeudella on siten skalaaripotentiali eli $\mathbf{v} = \nabla \phi$. Jos virtaus on kokoonpuristumatonta, nestettä ei kerry mihinkään suunnatun suljetun pinnan \vec{S} rajoittamaan kappaleeseen \mathcal{K} , kaikki mikä sisään tulee menee myös ulos. Kappaleesta poistuu aikayksikössä nettonestemäärä

$$\oint_{\vec{S}} \mathbf{v}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{S} = \int_{\mathcal{K}} \nabla \cdot \mathbf{v}(\mathbf{r}) \, d\mathbf{r} = 0.$$

Koska kappale on mielivaltainen, niin kuten edellä $\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$. Siten päädytään Laplacen yhtälöön

$$\nabla \cdot \nabla \phi(\mathbf{r}) = \Delta \phi(\mathbf{r}) = 0.$$

Esimerkki. (Stationäärinen lämmönjohtuminen) Lämpövirta on $\mathbf{v} = -k \nabla T$, missä T on lämpötila ja k on lämmönjohtumiskerroin. Kyseessä on empiirinen malli, joka pätee isotrooppiselle aineelle, ts. sellaiselle, jossa lokaali lämmönjohtuminen ei eri suuntiin ole erilainen.

Mikäli lämpötila on stationäärinen, lämpöenergiaa ei kasaudu mihinkään ja, kuten nestevirtauksen tai Kirchhoffin lain yhteydessä, $\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$. Siten

$$\nabla \cdot (k(\mathbf{r}) \nabla T(\mathbf{r})) = 0.$$

Esimerkki. (Dynaaminen lämmönjohtuminen) *Kuten edellä, lämpövirta on $\mathbf{v} = -k\nabla T$. Aikayksikössä kappaleesta \mathcal{K} , jonka reunapinta on \vec{S} , poistuu nettolämpömäärä*

$$\oint_{\vec{S}} \mathbf{v}(\mathbf{r}, t) \cdot d\mathbf{S}$$

eli sinne kertyy nettolämpömäärää nopeudella

$$\frac{dE}{dt} = - \oint_{\vec{S}} \mathbf{v}(\mathbf{r}, t) \cdot d\mathbf{S} = \int_{\mathcal{K}} \nabla \cdot (k(\mathbf{r})\nabla T(\mathbf{r}, t)) d\mathbf{r}$$

(Gaußin lause). Tämän lämpömäärän täytyy energian häviämättömyyden perusteella olla sama kuin massaan lämpötilan nousun johdosta sitoutuva lämpömäärä.

Massa-alkioon sitoutuu lämpöenergiaa nopeudella

$$C(\mathbf{r})\rho(\mathbf{r})\frac{\partial T(\mathbf{r}, t)}{\partial t},$$

missä $C(\mathbf{r})$ on lämpökapasiteetti ja $\rho(\mathbf{r})$ tiheys pisteessä \mathbf{r} , ja koko kappaleeseen nopeudella

$$\frac{dE}{dt} = \int_{\mathcal{K}} C(\mathbf{r})\rho(\mathbf{r})\frac{\partial T(\mathbf{r}, t)}{\partial t} d\mathbf{r}.$$

Kun näitä energialausekkeitä verrataan toisiinsa, päätellään, että integrandien tulee olla yhtä suuret eli

$$\nabla \cdot (k(\mathbf{r})\nabla T(\mathbf{r}, t)) = C(\mathbf{r})\rho(\mathbf{r})\frac{\partial T(\mathbf{r}, t)}{\partial t}.$$

Standardityyppisistä osittaisdifferentiaaliyhtälöistä tämä on jälkimmäistä muotoa, ns. lämpöyhtälö. Numeerisesti siitä voidaan laskea lämpötilajakautuma ja lämpövirtakenttä halutuun aika-askelin.

On mielenkiintoista, miten eri alojen problematiikka johtaa matemaattisessa mielessä samoihin yhtälöihin.

Eräät osittaisdifferentiaaliyhtälöt pitävät sisällään Newtonin laista tulevan toisen kertaluvun aikaderivaatan. Tällainen tulisi mukaan myös dynaamiseen virtausyhtälöön. Esimerkkeinä käsitellään ns. *aaltoyhtälöä*.

Esimerkki. (Pieniamplitudinen akustinen tasoaalto) *Tasoaallolla tarkoitetaan tasomaista aaltorintamaa. Koordinaatisto asetetaan niin, että rintama "etenee" x -akselin suuntaan, ts. se on yz -tason suuntainen. Tyydytään käyttämään vain x -koordinaattia (sekä aikaa t), rintaman suunnassahan tilanne on vakio. Merkitään alussa ($t = 0$) pisteessä x olevan ilmamolekyylin paikkaa $x + u(x, t)$:llä hetkellä t . Tässä $u(x, t)$ siis ilmoittaa poikkeaman alkupaikasta. dx :n paksuinen rintaman kerros on alussa pisteessä x (vasen reuna) ja hetkellä t se on pisteessä $x + u(x, t)$ (vasen reuna). Vm. tilanteessa kerroksen paksuus on*

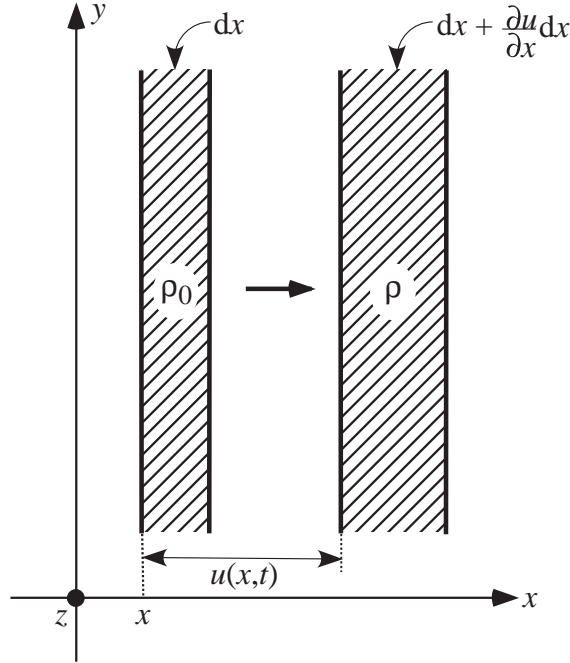
$$dx + \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} dx.$$

Ks. kuva alla. Kerroksen massa yksikköalaa kohti pysyy vakiona, ts.

$$\rho_0 dx = \rho(x, t) \left(1 + \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} \right) dx,$$

missä ρ_0 on ilman tiheys hetkellä $t = 0$ ja $\rho(x, t)$ vastaavasti tiheys hetkellä t . Tästä nähdään, että

$$\frac{\rho(x, t)}{\rho_0} = \left(1 + \frac{\partial u(x, t)}{\partial x}\right)^{-1}.$$



Adiabaattisessa prosessissa—lämpöä ei synny eikä häviä—on fysiikan lakien mukaan

$$\frac{p(x, t)}{p_0} = \left(\frac{\rho(x, t)}{\rho_0}\right)^\gamma,$$

missä p_0 on ilmanpaine alussa ja $p(x, t)$ hetkellä t . γ on ns. adiabaattivakio, ilmalle $\gamma = 1.40$. Derivoimalla saadaan

$$\begin{aligned} \frac{\partial p(x, t)}{\partial x} &= p_0 \frac{\partial}{\partial x} \left(1 + \frac{\partial u(x, t)}{\partial x}\right)^{-\gamma} = -\gamma p_0 \left(1 + \frac{\partial u(x, t)}{\partial x}\right)^{-\gamma-1} \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} \\ &= -\frac{\gamma p_0}{\rho_0} \rho(x, t) \left(1 + \frac{\partial u(x, t)}{\partial x}\right)^{-\gamma} \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2}. \end{aligned}$$

Pienillä amplitudeilla

$$\frac{\gamma p_0}{\rho_0} = c^2$$

on vakio, äänen nopeuden neliö. Tämä seuraa ideaalikaasulaista, pienillä amplitudeilla lämpötila ei muutu ja tiheys on kääntäen verrannollinen tilavuuteen. Ilmalle, yhden ilmakehän paineessa merenpinnan tasossa, tästä saadaan $c = 340.3 \text{ ms}^{-1}$.

Kerrosta liikuttaa sen eri puolien välisen paine-eron aiheuttama voima (yksikköalaa kohti), jonka on oltava sama kuin Newtonin lain antama:

$$\begin{aligned} \frac{\partial p(x, t)}{\partial x} dx &= -c^2 \rho(x, t) \left(1 + \frac{\partial u(x, t)}{\partial x}\right)^{-\gamma} \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} dx \\ &= -\rho(x, t) \left(1 + \frac{\partial u(x, t)}{\partial x}\right) \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} dx. \end{aligned}$$

Huomaa etumerkki, molekyylithän liikkuvat paine-erolle vastakkaiseen suuntaan. Näin lopulta saadaan osittaisdifferentiaaliyhtälö

$$\frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2} \left(1 + \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} \right)^{\gamma+1} \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2},$$

joka on edellä esitettyä muotoa. Kerroinfunktio g riippuu tässä myös $\partial u / \partial x$:stä.

Pienillä amplitudeilla ja akustisilla taajuuksilla myös $\partial u(x, t) / \partial x$ on pieni, joten (ainakin approksimatiivisesti)

$$\frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2}.$$

Vm. osittaisdifferentiaaliyhtälö on aaltoyhtälö. Laplacen operaattorin koordinaatistoriippumattomuudesta johtuen aaltoyhtälö mielivaltaiselle tasoallon rintaman suunnalle on

$$\Delta u(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u(\mathbf{r}, t)}{\partial t^2}.$$

Usein valitaan yksiköt siten, että $c = 1$, ja merkitään

$$\square u = \Delta u - \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad (\text{ns. d'Alembert'n operaattori})$$

(esiintyy joskus vastakkaismerkkisenä). Aaltoyhtälö on silloin yksinkertaisesti $\square u = 0$ (tai $\square u = F(\mathbf{r}, t)$, jos mukana on pakkofunktio F). Yleisellä aaltoyhtälöllä on muitakin ratkaisuja kuin tasoallot, mm. ns. palloallot.

On mielenkiintoista, että samaan yhtälöön päästään tutkimalla pieniamplitudisia värähtelyjä yleensäkin: kielille, ohuille sauvoille ja kalvoille, sähkömagneettisille aalloille (Maxwellin yhtälöiden seurauksena), virtapiireille jms. Katsotaan vielä esimerkkinä yleisen akustisen paineaaltoyhtälön johto.

Esimerkki. (Pieniamplitudinen akustinen paineaalto) Tutkitaan tilannetta kuvitteellisessa suunnatun sulkeutuvan pinnan $\vec{S}(t)$ rajaamassa kappaleessa $\mathcal{K}(t)$. Niin kappale kuin sen reunakin ovat liikkuvia, ajasta riippuvia, kappale pitää sisällään samat hiukkaset seuraten niiden liikkeitä.¹ Käytetään edellisen esimerkin merkintöjä ja merkitään lisäksi hiukkasen nopeutta $\mathbf{v}(\mathbf{r}, t)$:llä.

Kappaleessa olevan massan muutos on

$$0 = \int_{\mathcal{K}(t)} \frac{\partial \rho(\mathbf{r}, t)}{\partial t} d\mathbf{r} + \oint_{\vec{S}(t)} \rho(\mathbf{r}, t) \mathbf{v}(\mathbf{r}, t) \cdot d\mathbf{S} = \int_{\mathcal{K}(t)} \frac{\partial \rho(\mathbf{r}, t)}{\partial t} d\mathbf{r} + \int_{\mathcal{K}(t)} \nabla \cdot (\rho(\mathbf{r}, t) \mathbf{v}(\mathbf{r}, t)) d\mathbf{r}$$

(käyttäen Gaußin lausetta). Esiintyvä pintaintegraali ilmoittaa kappaleen siirtymästä johtuvan massan muutoksen. Pinta-alkio dS siirtyy nopeudella $\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}$, missä \mathbf{n} on ulkonormaalivektori, ottaen mukaan tai jättäen ulos lokaalia tiheyttä $\rho(\mathbf{r}, t)$. Koska kappale on mielivaltainen, päätellään, että

$$\frac{\partial \rho(\mathbf{r}, t)}{\partial t} = -\nabla \cdot (\rho(\mathbf{r}, t) \mathbf{v}(\mathbf{r}, t)) \quad (\text{ns. jatkuvuusyhtälö}).$$

¹Tämä on ns. Lagrangen tapa. Toinen tapa, ns. Eulerin tapa, on pitää hypoteettinen kappale paikallaan ja seurata partikkelien liikettä sen kautta.

Newtonin lain nojalla kokonaisliikemäärän aikaderivaatta on kokonaisvoima. Tarkasteltuun kappaleeseen sovelletuna

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{K}(t)} \rho(\mathbf{r}, t) \mathbf{v}(\mathbf{r}, t) d\mathbf{r} = - \oint_{\vec{\mathcal{S}}(t)} p(\mathbf{r}, t) d\mathbf{S},$$

missä jälkimmäinen integraali edustaa paineen aiheuttamaa kokonaisvoimaa reunalla. Toisaalta, päätellen aivan samalla tavalla kuin jatkuvuusyhtälöä johdettaessa, mutta nyt liikemäärälle, todetaan, että

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{K}(t)} \rho(\mathbf{r}, t) \mathbf{v}(\mathbf{r}, t) d\mathbf{r} = \int_{\mathcal{K}(t)} \frac{\partial}{\partial t} (\rho(\mathbf{r}, t) \mathbf{v}(\mathbf{r}, t)) d\mathbf{r} + \oint_{\vec{\mathcal{S}}(t)} (\rho(\mathbf{r}, t) \mathbf{v}(\mathbf{r}, t)) \mathbf{v}(\mathbf{r}, t) \bullet d\mathbf{S},$$

missä edellinen integraali edustaa liikemäärän muutosta kappaleessa ja jälkimmäinen taas kappaleen liikkeen kautta mukaan tulevaa/poistuvaa lokaalista liikemäärää.² Tässä voidaan olettaa, että ko. jälkimmäinen integraali on likimain nolla pienille amplitudeille ja akustisille taajuuksille. Integrandi nimittäin on tyyppiä nopeuden neliö, joka on silloin hyvin pieni, vrt. edellinen esimerkki. Toisaalta Vektoraalisen Gaußin lauseen mukaisesti, ks. Pykälä 5.4,

$$\oint_{\vec{\mathcal{S}}(t)} p(\mathbf{r}, t) d\mathbf{S} = \int_{\mathcal{K}(t)} \nabla p(\mathbf{r}, t) d\mathbf{r},$$

joten kaiken kaikkiaan saadaan

$$\int_{\mathcal{K}(t)} \frac{\partial}{\partial t} (\rho(\mathbf{r}, t) \mathbf{v}(\mathbf{r}, t)) d\mathbf{r} = - \int_{\mathcal{K}(t)} \nabla p(\mathbf{r}, t) d\mathbf{r},$$

josta päätellään kuten edellä, että

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho(\mathbf{r}, t) \mathbf{v}(\mathbf{r}, t)) = -\nabla p(\mathbf{r}, t).$$

Jatketaan derivoimalla puolittain yhtälö

$$\frac{p(\mathbf{r}, t)}{p_0} = \left(\frac{\rho(\mathbf{r}, t)}{\rho_0} \right)^\gamma$$

(adiabaattisuus, ks. edellinen esimerkki) t :n suhteen. Ensin saadaan

$$\frac{1}{p_0} \frac{\partial p(\mathbf{r}, t)}{\partial t} = \frac{\gamma}{\rho_0} \left(\frac{\rho(\mathbf{r}, t)}{\rho_0} \right)^{\gamma-1} \frac{\partial \rho(\mathbf{r}, t)}{\partial t} \quad \text{eli} \quad \frac{\rho(\mathbf{r}, t)}{p_0 \rho_0} \frac{\partial p(\mathbf{r}, t)}{\partial t} = \frac{\gamma}{\rho_0} \frac{p(\mathbf{r}, t)}{p_0} \frac{\partial \rho(\mathbf{r}, t)}{\partial t}$$

ja sitten

$$\frac{\partial p(\mathbf{r}, t)}{\partial t} = \gamma \frac{p(\mathbf{r}, t)}{\rho(\mathbf{r}, t)} \frac{\partial \rho(\mathbf{r}, t)}{\partial t}.$$

²Huomaa, miten tämä muistuttaa tavallista integraalin derivoimista parametrin suhteen:

$$\frac{d}{dt} \int_{a(t)}^{b(t)} f(x, t) dx = \int_{a(t)}^{b(t)} \frac{\partial f(x, t)}{\partial t} dx + f(b(t), t) b'(t) - f(a(t), t) a'(t).$$

Ideaalikaasulain mukaisesti pienille amplitudeille, joille lämpötila ei juurikaan muutu,

$$\gamma \frac{p(\mathbf{r}, t)}{\rho(\mathbf{r}, t)} = c^2 \quad (\text{vakio}).$$

Siispä

$$\frac{\partial^2 p(\mathbf{r}, t)}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 \rho(\mathbf{r}, t)}{\partial t^2}.$$

Nyt osat ovat valmiina. Ensiksi todetaan, että

$$\nabla \cdot \frac{\partial}{\partial t}(\rho(\mathbf{r}, t)\mathbf{v}(\mathbf{r}, t)) = \frac{\partial}{\partial t}(\nabla \cdot (\rho(\mathbf{r}, t)\mathbf{v}(\mathbf{r}, t))) = \frac{\partial}{\partial t} \left(-\frac{\partial \rho(\mathbf{r}, t)}{\partial t} \right)$$

ja sitten

$$\frac{\partial^2 \rho(\mathbf{r}, t)}{\partial t^2} = \Delta p(\mathbf{r}, t),$$

ja lopulta saadaan haluttu aaltoyhtälö

$$\Delta p(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 p(\mathbf{r}, t)}{\partial t^2}.$$

Liite 1

OSITTAISINTEGROINTI JA GREENIN KAAVAT

L1.1 Osittaisintegrointi

Yhden muuttujan integraalien tuttu osittaisintegrointikaava

$$\int_a^b u'(x)v(x) dx = \int_a^b u(x)v(x) - \int_a^b u(x)v'(x) dx$$

voidaan yleistää Yleistettyä Stokesin lausetta ja Cartanin taikakaavaa käyttäen muotoon

$$\int_{\mathcal{A}} d\Phi \wedge \Psi = \int_{\vec{\partial}_{\vec{\mathcal{M}}}^s \mathcal{A}} \Phi \wedge \Psi + (-1)^{k+1} \int_{\mathcal{A}} \Phi \wedge d\Psi.$$

Kuten Pykälässä 5.3 todettiin, fysikaalisille skalaarikentille f ja g ja vektorikentille \mathbf{F} ja \mathbf{G} saadaan kiilatulot

\wedge	g	$\bar{\Phi}_{g\text{-density}}$	$\bar{\Phi}_{\mathbf{F}\text{-work}}$	$\bar{\Phi}_{\mathbf{F}\text{-flux}}$	$\bar{\Phi}_{\mathbf{G}\text{-work}}$	$\bar{\Phi}_{\mathbf{G}\text{-flux}}$
f	fg	$\bar{\Phi}_{fg\text{-density}}$	$\bar{\Phi}_{f\mathbf{F}\text{-work}}$	$\bar{\Phi}_{f\mathbf{F}\text{-flux}}$	—	—
$\bar{\Phi}_{\mathbf{F}\text{-work}}$	—	—	—	—	$\bar{\Phi}_{\mathbf{F}\times\mathbf{G}\text{-flux}}$	$\bar{\Phi}_{\mathbf{F}\bullet\mathbf{G}\text{-density}}$

sekä ulkoderivointikaavat

$$df = \bar{\Phi}_{\nabla f\text{-work}} \quad , \quad d\bar{\Phi}_{\mathbf{F}\text{-work}} = \bar{\Phi}_{\nabla\times\mathbf{F}\text{-flux}} \quad \text{ja} \quad d\bar{\Phi}_{\mathbf{F}\text{-flux}} = \bar{\Phi}_{\nabla\bullet\mathbf{F}\text{-density}}.$$

Näistä saadaan neljä osittaisintegrointikaavaa (ne kaksi muuta ovat tylsää tyyppiä $0 = 0 \pm 0$):

$$1. \int_{\mathcal{A}} \bar{\Phi}_{g\nabla f\text{-work}} = \int_{\vec{\partial}_{\vec{\mathcal{M}}}^s \mathcal{A}} fg - \int_{\mathcal{A}} \bar{\Phi}_{f\nabla g\text{-work}} \quad \text{eli viivalle } \mathcal{C}, \text{ jonka päätepisteet ovat } \mathbf{r}_1 \text{ ja } \mathbf{r}_2,$$

$$\boxed{\int_{\mathcal{C}} g(\mathbf{r})\nabla f(\mathbf{r}) \bullet d\mathbf{s} = f(\mathbf{r}_2)g(\mathbf{r}_2) - f(\mathbf{r}_1)g(\mathbf{r}_1) - \int_{\mathcal{C}} f(\mathbf{r})\nabla g(\mathbf{r}) \bullet d\mathbf{s}.}$$

$$2. \int_{\mathcal{A}} \Phi_{\nabla f \times \mathbf{F}\text{-flux}} = \int_{\vec{\partial}_{\vec{\mathcal{M}}}\mathcal{A}} \Phi_{f\mathbf{F}\text{-work}} - \int_{\mathcal{A}} \Phi_{f\nabla \times \mathbf{F}\text{-flux}} \text{ eli suunnatulle pinnalle } \vec{\mathcal{S}}$$

$$\boxed{\int_{\vec{\mathcal{S}}} \nabla f(\mathbf{r}) \times \mathbf{F}(\mathbf{r}) \bullet \mathbf{dS} = \oint_{\vec{\partial}_{\vec{\mathcal{M}}}\mathcal{S}} f(\mathbf{r})\mathbf{F}(\mathbf{r}) \bullet \mathbf{ds} - \int_{\vec{\mathcal{S}}} f(\mathbf{r})\nabla \times \mathbf{F}(\mathbf{r}) \bullet \mathbf{dS}.}$$

$$3. \int_{\mathcal{A}} \Phi_{\mathbf{F} \bullet \nabla f\text{-density}} = \int_{\vec{\partial}_{\vec{\mathcal{M}}}\mathcal{A}} \Phi_{f\mathbf{F}\text{-flux}} - \int_{\mathcal{A}} \Phi_{f\nabla \bullet \mathbf{F}\text{-density}} \text{ eli suunnatulle kappaleelle } \vec{\mathcal{K}}$$

$$\boxed{\int_{\vec{\mathcal{K}}} \mathbf{F}(\mathbf{r}) \bullet \nabla f(\mathbf{r}) \mathbf{dr} = \oint_{\vec{\partial}_{\vec{\mathcal{M}}}\mathcal{K}} f(\mathbf{r})\mathbf{F}(\mathbf{r}) \bullet \mathbf{dS} - \int_{\vec{\mathcal{K}}} f(\mathbf{r})\nabla \bullet \mathbf{F}(\mathbf{r}) \mathbf{dr}.}$$

$$4. \int_{\mathcal{A}} \Phi_{\mathbf{G} \bullet \nabla \times \mathbf{F}\text{-density}} = \int_{\vec{\partial}_{\vec{\mathcal{M}}}\mathcal{A}} \Phi_{\mathbf{F} \times \mathbf{G}\text{-flux}} + \int_{\mathcal{A}} \Phi_{\mathbf{F} \bullet \nabla \times \mathbf{G}\text{-density}} \text{ eli suunnatulle kappaleelle } \vec{\mathcal{K}}$$

$$\boxed{\int_{\vec{\mathcal{K}}} \mathbf{G}(\mathbf{r}) \bullet \nabla \times \mathbf{F}(\mathbf{r}) \mathbf{dr} = \oint_{\vec{\partial}_{\vec{\mathcal{M}}}\mathcal{K}} \mathbf{F}(\mathbf{r}) \times \mathbf{G}(\mathbf{r}) \bullet \mathbf{dS} + \int_{\vec{\mathcal{K}}} \mathbf{F}(\mathbf{r}) \bullet \nabla \times \mathbf{G}(\mathbf{r}) \mathbf{dr}.}$$

Näistä kaava 3. on tavallisin.

Ratkaistaessa vektorikenttiä esimerkiksi elementtimenetelmän avulla (ks. kurssi Osittaisdifferentiaaliyhtälöiden numeeriset menetelmät) tavataan usein tyyppiä

$$\int_{\mathcal{K}} v(\mathbf{r})\nabla \bullet (k(\mathbf{r})\nabla u(\mathbf{r})) \mathbf{dr}$$

oleva integraali. Tavalliset oletukset silloin ovat, että funktiot k ja v ovat jatkuvasti derivoituvia ja u kahdesti jatkuvasti derivoituva. Tähän voidaan soveltaa yo. osittaisintegroitikaavaa 3., kun valitaan $f = v$ ja $\mathbf{F} = k\nabla u$ (merkitään \mathcal{K} :n ulkonormaalin mukaisesti suunnistettua reunapintaa $\vec{\mathcal{S}}$:llä):

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{K}} v(\mathbf{r})\nabla \bullet (k(\mathbf{r})\nabla u(\mathbf{r})) \mathbf{dr} &= - \int_{\mathcal{K}} k(\mathbf{r})\nabla u(\mathbf{r}) \bullet \nabla v(\mathbf{r}) \mathbf{dr} + \oint_{\vec{\mathcal{S}}} v(\mathbf{r})k(\mathbf{r})\nabla u(\mathbf{r}) \bullet \mathbf{dS} \\ &= - \int_{\mathcal{K}} k(\mathbf{r})\nabla u(\mathbf{r}) \bullet \nabla v(\mathbf{r}) \mathbf{dr} + \int_{\mathcal{S}} v(\mathbf{r})k(\mathbf{r})\frac{\partial u(\mathbf{r})}{\partial \mathbf{n}} \mathbf{dS}, \end{aligned}$$

missä

$$\frac{\partial u(\mathbf{r})}{\partial \mathbf{n}} = \nabla u(\mathbf{r}) \bullet \mathbf{n}$$

on funktion u ns. *normaaliderivaatta*, ts. sen suunnattu derivaatta reunapinnan yksikköulkonormaalien \mathbf{n} suuntaan. Osittaisintegrointi on kahdella tapaa merkittävä ratkaistaessa osittaisdifferentiaaliyhtälöitä elementtimenetelmällä (Galjorkinin¹ ja Ritzin menetelmät). Ensinnäkin tunnetut reunaehdot tekevät oikean puolen pintaintegraalista tunnetun. Tällä tavoin reunaehdot saadaan suoraan mukaan ratkaisuun. Toiseksi integraali

¹Usein Galerkin.

$$\int_{\mathcal{K}} k(\mathbf{r}) \nabla u(\mathbf{r}) \bullet \nabla v(\mathbf{r}) \, d\mathbf{r}$$

vaatii funktiolta k sekä funktioiden u ja v osittaisderivaatoilta ainoastaan paloittaisen jatkuvuuden, jos sitäkään.² Osittaisintegrointia käyttämällä voidaan tyytyä jatkuvuusvaatimuksiin nähdyn yksinkertaisempiin funktioihin.

L1.2 Greenin kaavat

Oletetaan, että yllä funktiot u ja v ovat kahdesti jatkuvasti derivoituvia. Valitsemalla $k(\mathbf{r}) = 1$ saadaan *Greenin ensimmäinen kaava*

$$\int_{\mathcal{K}} v(\mathbf{r}) \Delta u(\mathbf{r}) \, d\mathbf{r} = - \int_{\mathcal{K}} \nabla u(\mathbf{r}) \bullet \nabla v(\mathbf{r}) \, d\mathbf{r} + \int_{\mathcal{S}} v(\mathbf{r}) \frac{\partial u(\mathbf{r})}{\partial \mathbf{n}} \, dS.$$

Vaihtamalla funktiot u ja v keskenään saadaan vastaavasti

$$\int_{\mathcal{K}} u(\mathbf{r}) \Delta v(\mathbf{r}) \, d\mathbf{r} = - \int_{\mathcal{K}} \nabla v(\mathbf{r}) \bullet \nabla u(\mathbf{r}) \, d\mathbf{r} + \int_{\mathcal{S}} u(\mathbf{r}) \frac{\partial v(\mathbf{r})}{\partial \mathbf{n}} \, dS$$

ja vähentämällä saadut yhtälöt puolittain saadaan *Greenin toinen kaava*

$$\int_{\mathcal{K}} (v(\mathbf{r}) \Delta u(\mathbf{r}) - u(\mathbf{r}) \Delta v(\mathbf{r})) \, d\mathbf{r} = \int_{\mathcal{S}} \left(v(\mathbf{r}) \frac{\partial u(\mathbf{r})}{\partial \mathbf{n}} - u(\mathbf{r}) \frac{\partial v(\mathbf{r})}{\partial \mathbf{n}} \right) \, dS.$$

Tarkastellaan sitten skalaarikenttää u , joka on \mathcal{K} :ssa kahdesti jatkuvasti derivoituva ja harmoninen, ts. $\Delta u = 0$ (ks. Pykälä 6.4). Valitaan piste \mathbf{r}_0 kappaleen \mathcal{K} :n sisäosasta ja valitaan v :ksi Newtonin potentiaali

$$v(\mathbf{r}) = \frac{1}{\|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0\|}.$$

Koska v on singulaarinen kappaleessa \mathcal{K} (piste \mathbf{r}_0), muodostetaan uusi kappale \mathcal{K}_1 rajaamalla siitä pois \mathbf{r}_0 -keskinen δ -säteinen pieni pallo \mathcal{K}_2 . Vastaava pallonpinta on \mathcal{S}_2 , joka suunnistetaan ulkonormaalinsa avulla, siis kappaleen \mathcal{K} sisään osoittavaa normaalia vastaten. Kappaleella \mathcal{K}_1 on kaksi reunapintaa, sisempi ja ulompi. Kappaleessa \mathcal{K}_1 kumpikin funktioista u ja v on harmoninen (Newtonin vektorikenttään on lähteetön). Sovelletaan kappaleeseen \mathcal{K}_1 Greenin toista kaavaa:

$$0 = \int_{\mathcal{S}} \left(v(\mathbf{r}) \frac{\partial u(\mathbf{r})}{\partial \mathbf{n}} - u(\mathbf{r}) \frac{\partial v(\mathbf{r})}{\partial \mathbf{n}} \right) \, dS - \int_{\mathcal{S}_2} \left(v(\mathbf{r}) \frac{\partial u(\mathbf{r})}{\partial \mathbf{n}} - u(\mathbf{r}) \frac{\partial v(\mathbf{r})}{\partial \mathbf{n}} \right) \, dS.$$

Jälkimmäisen termin etumerkki johtuu \mathcal{K}_2 :n normaalin suuntauksesta.

Jatketaan valiten kappaleeksi \mathcal{K} avoin R -säteinen \mathbf{r}_0 -keskinen pallo $\|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0\| < R$. Tällöin tarkasteltava ulkopinta \mathcal{S} on R -säteinen \mathbf{r}_0 -keskinen pallonkuori. Ulkopinnalla funktiolla v on vakioarvo $1/R$. Normaaliderivaatta ulkopinnalla on puolestaan

$$\frac{\partial v(\mathbf{r})}{\partial \mathbf{n}} = \nabla \frac{1}{\|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0\|} \bullet \mathbf{n} = \frac{\mathbf{r}_0 - \mathbf{r}}{\|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0\|^3} \bullet \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}_0}{\|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0\|} = - \frac{1}{\|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0\|^2} = - \frac{1}{R^2}.$$

²Elementtimenetelmässä funktiot u ja v ovat ns. *elementtifunktioita*. Ratkaisua approksimoidaan elementtifunktioiden u_i lineaariyhdelemällä.

Koska jokaiselle harmoniselle funktiolle u on Gaußin lauseen mukaan

$$\int_S \frac{\partial u(\mathbf{r})}{\partial \mathbf{n}} dS = \oint_{\vec{S}} \nabla u(\mathbf{r}) \bullet d\mathbf{S} = \int_{\mathcal{K}} \Delta u(\mathbf{r}) d\mathbf{r} = 0,$$

niin

$$\int_S \left(v(\mathbf{r}) \frac{\partial u(\mathbf{r})}{\partial \mathbf{n}} - u(\mathbf{r}) \frac{\partial v(\mathbf{r})}{\partial \mathbf{n}} \right) dS = \int_S \frac{1}{R^2} u(\mathbf{r}) dS = 4\pi \times (u\text{:n keskiarvo pallonpinnalla}).$$

Sisäpinta on δ -säteinen pallo, joten äskeinen tarkastelu pätee siihenkin—muista sen normaalin suunta. Niinpä

$$\int_{S_2} \left(v(\mathbf{r}) \frac{\partial u(\mathbf{r})}{\partial \mathbf{n}} - u(\mathbf{r}) \frac{\partial v(\mathbf{r})}{\partial \mathbf{n}} \right) dS = \int_{S_2} \frac{1}{\delta^2} u(\mathbf{r}) dS = 4\pi \times (u\text{:n k.a. sisäpallonpinnalla}).$$

Funktion u jatkuvuudesta johtuen kyseinen keskiarvo lähenee raja-arvoa $u(\mathbf{r}_0)$, kun $\delta \rightarrow 0+$.

Palaten alkuperäiseen yhtälöön

$$0 = \oint_S \left(v(\mathbf{r}) \frac{\partial u(\mathbf{r})}{\partial \mathbf{n}} - u(\mathbf{r}) \frac{\partial v(\mathbf{r})}{\partial \mathbf{n}} \right) dS - \oint_{S_2} \left(v(\mathbf{r}) \frac{\partial u(\mathbf{r})}{\partial \mathbf{n}} - u(\mathbf{r}) \frac{\partial v(\mathbf{r})}{\partial \mathbf{n}} \right) dS$$

saadaan seuraava merkittävä tulos:

Harmonisten funktioiden keskiarvolause. *Harmonisen funktion arvo pallon keskipisteessä on keskiarvo funktion pallon pinnalla saamista arvoista.*

Toisaalta alkuperäiselle kappaleelle \mathcal{K} ja sen reunalle \mathcal{S}

$$\int_S \left(v(\mathbf{r}) \frac{\partial u(\mathbf{r})}{\partial \mathbf{n}} - u(\mathbf{r}) \frac{\partial v(\mathbf{r})}{\partial \mathbf{n}} \right) dS = \int_{S_2} \left(v(\mathbf{r}) \frac{\partial u(\mathbf{r})}{\partial \mathbf{n}} - u(\mathbf{r}) \frac{\partial v(\mathbf{r})}{\partial \mathbf{n}} \right) dS = 4\pi u(\mathbf{r}_0).$$

Tästä saadaan *Greenin kolmas kaava*

$$\boxed{\frac{1}{4\pi} \int_S \left(\frac{1}{\|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0\|} \frac{\partial u(\mathbf{r})}{\partial \mathbf{n}} - u(\mathbf{r}) \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}} \frac{1}{\|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0\|} \right) dS = u(\mathbf{r}_0).}$$

Liite 2

KÄYRÄVIIVAISET KOORDINAATISTOT

L2.1 Lokaali koordinaatisto

\mathbb{R}^n :n n -ulotteisen parametrisoidun moniston (siis avoimen joukon)

$$\mathcal{M} : \mathbf{r} = \boldsymbol{\gamma}(\mathbf{u}) = (\gamma_1(\mathbf{u}), \dots, \gamma_n(\mathbf{u})) \quad (\mathbf{u} \in \mathcal{U})$$

parametrisointi muodostaa ns. *käyräviivaisen koordinaatiston* (engl. curvilinear coordinates). \mathcal{M} :n tangenttiavaruus $\mathcal{T}_{\mathbf{r}}(\mathcal{M})$ pisteessä \mathbf{r} on koko \mathbb{R}^n . Toisaalta se on derivaattamatriisin $\boldsymbol{\gamma}'(\mathbf{u})$ kuva-avaruus, ks. Pykälä 2.6. Näin ollen eräs \mathbb{R}^n :n kanta saadaan $\boldsymbol{\gamma}'(\mathbf{u})$:n sarakkeista. Tämä kanta riippuu pisteestä \mathbf{r} ja vaihtuu (yleensä) pisteestä toiseen siirryttäessä. Kanta antaa ns. *lokaalin koordinaatiston*.

Jatkossa rajoitutaan vain tapaukseen, missä $\boldsymbol{\gamma}'(\mathbf{u})$:n sarakkeet ovat keskenään ortogonaaliset, ts. niiden väliset pistetulot ovat $= 0$, ja muodostavat positiivisesti suunnatun koordinaatiston. Merkitään $\mathbf{Q}(\mathbf{u})$:lla matriisia, joka saadaan $\boldsymbol{\gamma}'(\mathbf{u})$:sta normeeraamalla sen sarakkeet, ts. jakamalla kukin sarake pituudellaan. Silloin $\mathbf{Q}(\mathbf{u})$ on ortogonaalimatriisi, ts. $\mathbf{Q}(\mathbf{u})^{-1} = \mathbf{Q}(\mathbf{u})^T$, ja lisäksi $\det(\mathbf{Q}(\mathbf{u})) = 1$ (positiivinen suunnistus).

Esimerkki. \mathbb{R}^3 :n 3-ulotteisen moniston parametrisointi sylinterikoordinaatteja käyttäen on muotoa

$$\mathbf{r} = \boldsymbol{\gamma}(r, \phi, z) = (r \cos \phi, r \sin \phi, z) \quad ((r, \phi, z) \in \mathcal{U}),$$

missä \mathcal{U} on sopiva parametrialue. Silloin

$$\boldsymbol{\gamma}'(r, \phi, z) = \begin{pmatrix} \cos \phi & -r \sin \phi & 0 \\ \sin \phi & r \cos \phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{ja} \quad \mathbf{Q}(r, \phi, z) = \begin{pmatrix} \cos \phi & -\sin \phi & 0 \\ \sin \phi & \cos \phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ilmeisesti $\mathbf{Q}(r, \phi, z)$ on ortogonaalinen ja $\det(\mathbf{Q}(r, \phi, z)) = 1$. Lokaalit koordinaattivektorit ovat silloin

$$\mathbf{e}_r = \begin{pmatrix} \cos \phi \\ \sin \phi \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{e}_\phi = \begin{pmatrix} -\sin \phi \\ \cos \phi \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{ja} \quad \mathbf{e}_z = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Esimerkki. \mathbb{R}^3 :n 3-ulotteisen moniston parametrisointi pallokoordinaatteja käyttäen on muotoa

$$\mathbf{r} = \boldsymbol{\gamma}(\rho, \theta, \phi) = (\rho \sin \theta \cos \phi, \rho \sin \theta \sin \phi, \rho \cos \theta) \quad ((\rho, \theta, \phi) \in \mathcal{U}),$$

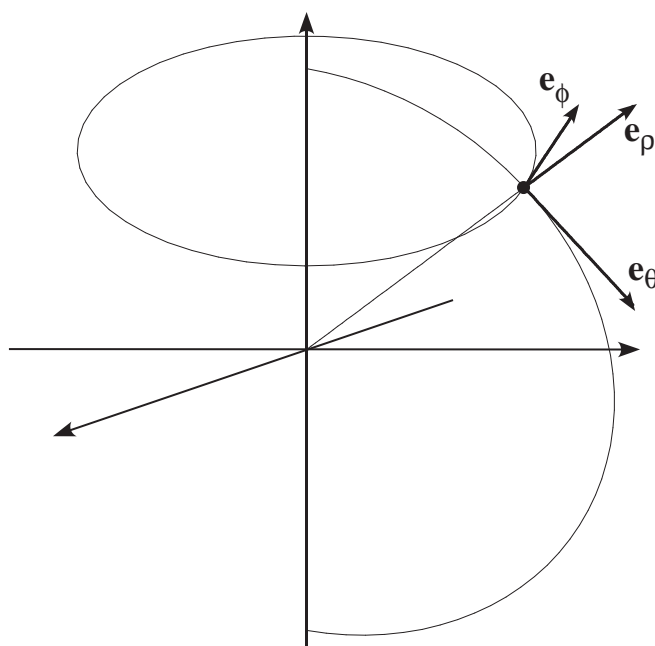
missä \mathcal{U} on sopiva parametrialue. Silloin

$$\gamma'(\rho, \theta, \phi) = \begin{pmatrix} \sin \theta \cos \phi & \rho \cos \theta \cos \phi & -\rho \sin \theta \sin \phi \\ \sin \theta \sin \phi & \rho \cos \theta \sin \phi & \rho \sin \theta \cos \phi \\ \cos \theta & -\rho \sin \theta & 0 \end{pmatrix}$$

ja

$$\mathbf{Q}(\rho, \theta, \phi) = \begin{pmatrix} \sin \theta \cos \phi & \cos \theta \cos \phi & -\sin \phi \\ \sin \theta \sin \phi & \cos \theta \sin \phi & \cos \phi \\ \cos \theta & -\sin \theta & 0 \end{pmatrix}.$$

Lisäksi $\mathbf{Q}(\rho, \theta, \phi)$ on ortogonaalinen ja $\det(\mathbf{Q}(\rho, \theta, \phi)) = 1$ (totea!).



Lokaalit koordinaattivektorit ovat

$$\mathbf{e}_\rho = \begin{pmatrix} \sin \theta \cos \phi \\ \sin \theta \sin \phi \\ \cos \theta \end{pmatrix}, \quad \mathbf{e}_\theta = \begin{pmatrix} \cos \theta \cos \phi \\ \cos \theta \sin \phi \\ -\sin \theta \end{pmatrix} \quad \text{ja} \quad \mathbf{e}_\phi = \begin{pmatrix} -\sin \phi \\ \cos \phi \\ 0 \end{pmatrix},$$

Paitsi että vektorikenttä \mathbf{F} halutaan usein esittää käyräviivaisten koordinaattien avulla, ts. muodossa $\mathbf{F}(\gamma(\mathbf{u}))$, halutaan myös esittää kenttä pisteessä $\gamma(\mathbf{u})$ määräytyneessä lokaalissa koordinaatistossa eli siis ko. pisteen tangentiavaruudessa. Matriisin $\mathbf{Q}(\mathbf{u})$ sarakkeet antavat uudet koordinaattivektorit esitettyinä vanhojen koordinaattien avulla. Haluttu esitys on siis (vrt. Pykälä 1.3)

$$\mathbf{G}(\mathbf{u}) = \mathbf{Q}(\mathbf{u})^T \mathbf{F}(\gamma(\mathbf{u})).$$

Jatkossa tarvitaan $\mathbf{Q}(\mathbf{u})^T$:n sarakkeita, joita merkitään vektoreilla $\mathbf{q}_1(\mathbf{u}), \dots, \mathbf{q}_n(\mathbf{u})$.

Skalaarikentälle f esitys on yksinkertaisesti

$$g(\mathbf{u}) = f(\gamma(\mathbf{u})).$$

L2.2 Derivaatan muunnos

Katsotaan ensin vektorikentän $\mathbf{F} = (F_1, \dots, F_n)^\top$ tapaus. Edellä olevin merkinnöin

$$\mathbf{G}(\mathbf{u}) = \mathbf{Q}(\mathbf{u})^\top \mathbf{F}(\gamma(\mathbf{u})) = \sum_{i=1}^n \mathbf{q}_i(\mathbf{u}) F_i(\gamma(\mathbf{u})).$$

Derivoidaan $\mathbf{G}(\mathbf{u})$ tulon derivointisäännöllä sekä ketjusäännöllä. Tavoitteena on saada lauseke, josta voidaan ratkaista alkuperäinen derivaatta \mathbf{F}' . Näin saadaan

$$\begin{aligned} \mathbf{G}'(\mathbf{u}) &= \sum_{i=1}^n \mathbf{q}'_i(\mathbf{u}) F_i(\gamma(\mathbf{u})) + \sum_{i=1}^n \mathbf{q}_i(\mathbf{u}) (F_i(\gamma(\mathbf{u})))' \\ &= \sum_{i=1}^n \mathbf{q}'_i(\mathbf{u}) F_i(\gamma(\mathbf{u})) + \sum_{i=1}^n \mathbf{q}_i(\mathbf{u}) F'_i(\gamma(\mathbf{u})) \gamma'(\mathbf{u}) \\ &= \sum_{i=1}^n \mathbf{q}'_i(\mathbf{u}) F_i(\gamma(\mathbf{u})) + \mathbf{Q}(\mathbf{u})^\top \mathbf{F}'(\gamma(\mathbf{u})) \gamma'(\mathbf{u}). \end{aligned}$$

Jälkimmäiseen summaan sovellettiin ns. toista matriisikertolaskusääntöä.³ Nyt voidaan ratkaista mainittu derivaatta \mathbf{F}' :

$$\begin{aligned} \mathbf{F}'(\gamma(\mathbf{u})) &= \mathbf{Q}(\mathbf{u}) \left(\mathbf{G}'(\mathbf{u}) - \sum_{i=1}^n \mathbf{q}'_i(\mathbf{u}) F_i(\gamma(\mathbf{u})) \right) \gamma'(\mathbf{u})^{-1} \\ &= \mathbf{Q}(\mathbf{u}) \left(\mathbf{G}'(\mathbf{u}) - \sum_{i=1}^n \mathbf{q}'_i(\mathbf{u}) (\mathbf{Q}(\mathbf{u}) \mathbf{G}(\mathbf{u}))_i \right) \gamma'(\mathbf{u})^{-1}. \end{aligned}$$

Muista, että γ' on täysiranginen eli tässä ei-singulaarinen.

Skalaarikentän $f(\mathbf{r})$ tapaus on analoginen. Ketjusäännön mukaisesti

$$g'(\mathbf{u}) = f'(\gamma(\mathbf{u})) \gamma'(\mathbf{u}).$$

Myös tarvitaan g :n toinen derivaatta eli Hessen matriisi eli $n \times n$ -matriisi

$$g''(\mathbf{u}) = \left(\frac{\partial^2 g(\mathbf{u})}{\partial u_i \partial u_j} \right),$$

josta sitten saadaan f :n Hessen matriisi. Tulon derivointisäännöllä ja ketjusäännöllä saadaan

$$\begin{aligned} g''(\mathbf{u}) &= (f'(\gamma(\mathbf{u})) \gamma'(\mathbf{u}))' = \left(\sum_{i=1}^n \gamma'_i(\mathbf{u})^\top (f'(\gamma(\mathbf{u})))_i \right)' \\ &= \sum_{i=1}^n \gamma''_i(\mathbf{u}) (f'(\gamma(\mathbf{u})))_i + \sum_{i=1}^n \gamma'_i(\mathbf{u})^\top ((f'(\gamma(\mathbf{u})))_i)' \\ &= \sum_{i=1}^n \gamma''_i(\mathbf{u}) (f'(\gamma(\mathbf{u})))_i + \gamma'(\mathbf{u})^\top f''(\gamma(\mathbf{u})) \gamma'(\mathbf{u}). \end{aligned}$$

³Jos matriisin \mathbf{A} sarakkeet ovat $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n$ ja matriisin \mathbf{B} rivit $\mathbf{b}_1^\top, \dots, \mathbf{b}_n^\top$, niin

$$\mathbf{AB} = \sum_{i=1}^n \mathbf{a}_i \mathbf{b}_i^\top.$$

Kyseessä on vain lohkomatriisien kertolasku.

Tästä ratkaistaan haluttu f'' :

$$\begin{aligned} f''(\gamma(\mathbf{u})) &= \gamma'(\mathbf{u})^{-\top} \left(g''(\mathbf{u}) - \sum_{i=1}^n \gamma''_i(\mathbf{u})(f'(\gamma(\mathbf{u})))_i \right) \gamma'(\mathbf{u})^{-1} \\ &= \gamma'(\mathbf{u})^{-\top} \left(g''(\mathbf{u}) - \sum_{i=1}^n \gamma''_i(\mathbf{u})(g'(\mathbf{u})\gamma'(\mathbf{u})^{-1})_i \right) \gamma'(\mathbf{u})^{-1}. \end{aligned}$$

Näin saaduista derivaatoista johdetaan vektori- ja skalaarikenttien derivaattojen muunnoskaavat. Huomaa, että kyseiset derivaatat ovat nuo tutut derivaatat, vain esitettyinä käyrävii-
vaisissa koordinaateissa ja lokaalissa koordinaattisysteemissä. Mitään uudenlaisia derivaattoja
tässä ei johdeta. Laskut voivat tosin muodostua tavattoman työläiksi ja symbolisen laskennan
ohjelmistot ovat tarpeen. Mielenkiintoista on kuitenkin todeta, että kyseessä ovat symboliset
identiteetit.

L2.3 Kenttien derivaattojen muunnokset

Divergenssi $\nabla \bullet \mathbf{F}$ saadaan $\mathbf{F}'(\gamma(\mathbf{u}))$:n jälkeen. Roottorin laskemiseksi todetaan ensin, että kaksi
yhtälöä

$$\nabla \times \mathbf{F} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \quad \text{ja} \quad \mathbf{F}' - \mathbf{F}'^{\top} = \begin{pmatrix} 0 & -c & b \\ c & 0 & -a \\ -b & a & 0 \end{pmatrix}$$

ovat ekvivalentit. Näin roottorin komponentit saadaan poimituksi $\mathbf{F}' - \mathbf{F}'^{\top}$:sta. Lisäksi roottori
pitää muuntaa uusiin lokaalisiin koordinaatteihin kertomalla $\mathbf{Q}(\mathbf{u})^{\top}$:lla:

$$\mathbf{Q}(\mathbf{u})^{\top} \begin{pmatrix} (\mathbf{F}'(\gamma(\mathbf{u})) - \mathbf{F}'(\gamma(\mathbf{u}))^{\top})_{3,2} \\ (\mathbf{F}'(\gamma(\mathbf{u})) - \mathbf{F}'(\gamma(\mathbf{u}))^{\top})_{1,3} \\ (\mathbf{F}'(\gamma(\mathbf{u})) - \mathbf{F}'(\gamma(\mathbf{u}))^{\top})_{2,1} \end{pmatrix}.$$

Seuraava Maple-ohjelma laskee esitetyllä tavalla divergenssin ja roottorin. Syötteenä ohjel-
malle annetaan muunnos (parametrusointi) γ vektorina \mathbf{h} ja koordinaattimuuttujat—oikeammin
vain niiden nimet listana \mathbf{m} .

```
> Dtransl:=proc(h,m)

local K,J,N,Q,H,DV,DG;

K:=<K1(op(m)),K2(op(m)),K3(op(m))>;
J:=Jacobian(h,m);
N:=Map(sqrt,Transpose(J).J);
Q:=simplify(J.MatrixInverse(N),symbolic);
H:=Q.K;

DV:=MatrixAdd(MatrixAdd(MatrixAdd(Jacobian(K,m),
    ScalarMultiply(Jacobian(Row(Q,1),m),-H[1])),
    ScalarMultiply(Jacobian(Row(Q,2),m),-H[2])),
    ScalarMultiply(Jacobian(Row(Q,3),m),-H[3]));
DG:=simplify(Q.DV.MatrixInverse(J),symbolic);

[Trace(DG),convert(Transpose(Q).<DG[3,2]-DG[2,3],
    DG[1,3]-DG[3,1],
    DG[2,1]-DG[1,2]>,vector)];
combine(subs({K1=G[m[1]],K2=G[m[2]],K3=G[m[3]]},simplify(% ,symbolic)));

end proc;
```

Edelleen esitetyistä derivaattalausekkeista saadaan suoraan gradientti:

$$\mathbf{Q}(\mathbf{u})^T f'(\gamma(\mathbf{u}))^T = \mathbf{Q}(\mathbf{u})^T \gamma'(\mathbf{u})^{-T} g'(\mathbf{u})^T.$$

Ilmeisesti Laplacen operaattori on Hessen matriisin jälki, joten sekin saadaan nyt suoraan. Seuraava Maple-ohjelma laskee tällä tavalla gradientin ja Laplacen operaattorin. Syötteenä ohjelmalle annetaan jälleen muunnos (parametrisointi) γ ja koordinaattimuuttujat.

```
Dtrans2:=proc(h,m)
local k,J,N,Q,H,HV,HF;
k:=g(op(m));
J:=Jacobian(h,m);
N:=simplify(Map(sqrt,Transpose(J).J),symbolic);
Q:=J.MatrixInverse(N);
H:=simplify(Jacobian([k],m).MatrixInverse(J),symbolic);
HV:=MatrixAdd(MatrixAdd(MatrixAdd(Hessian(k,m),
ScalarMultiply(Hessian(h[1],m),-H[1,1])),
ScalarMultiply(Hessian(h[2],m),-H[1,2])),
ScalarMultiply(Hessian(h[3],m),-H[1,3]));
HF:=simplify(MatrixInverse(Transpose(J)).HV.
MatrixInverse(J),symbolic);
[convert(H.Q,vector),Trace(HF)];
combine(simplify(% ,symbolic));
end proc;
```

Huomaa ällistytävä yhdennäköisyys edellisen ohjelman kanssa.

L2.4 Derivaatat sylinteri- ja pallokoordinaatistoissa

Kokeillaan eo. Maple-ohjelmia sylinteri- ja pallokoordinaatistoon. Aloitetaan vektorikentällä ja sylinterikoordinaatistolla:

```
> with(LinearAlgebra):
with(VectorCalculus):
```

```
Warning, the names &x, CrossProduct and DotProduct have been rebound
Warning, the assigned names '<>' and '<|>' now have a global binding
Warning, these protected names have been redefined and unprotected: *, +, ., D, Vector, diff, int, limit, series
```

```
> h:=<r*cos(phi),r*sin(phi),z>;
Dtrans1(h,[r,phi,z]);
```

$$\left[\frac{\frac{\partial}{\partial \phi} G_\phi(r, \phi, z) + G_r(r, \phi, z) + r \frac{\partial}{\partial r} G_r(r, \phi, z) + \left(\frac{\partial}{\partial z} G_z(r, \phi, z) \right) r}{r}, \right. \\ \left. \left[-\frac{\left(\frac{\partial}{\partial z} G_\phi(r, \phi, z) \right) r - \frac{\partial}{\partial \phi} G_z(r, \phi, z)}{r}, \frac{\partial}{\partial z} G_r(r, \phi, z) - \frac{\partial}{\partial r} G_z(r, \phi, z), \frac{-\frac{\partial}{\partial \phi} G_r(r, \phi, z) + G_\phi(r, \phi, z) + \left(\frac{\partial}{\partial r} G_\phi(r, \phi, z) \right) r}{r} \right] \right]$$

Siirrytään sitten pallokoordinaatistoon:

```
> h:=<rho*sin(theta)*cos(phi),rho*sin(theta)*sin(phi),rho*cos(theta)>;
Dtrans1(h,[rho,theta,phi]);
```

$$\left[\frac{\sin(\theta) \rho \frac{\partial}{\partial \rho} G_\rho(\rho, \theta, \phi) + \cos(\theta) G_\theta(\rho, \theta, \phi) + 2 \sin(\theta) G_\rho(\rho, \theta, \phi) + \sin(\theta) \frac{\partial}{\partial \theta} G_\theta(\rho, \theta, \phi) + \frac{\partial}{\partial \phi} G_\phi(\rho, \theta, \phi)}{\rho \sin(\theta)}, \right. \\ \left. \frac{-\frac{\partial}{\partial \phi} G_\theta(\rho, \theta, \phi) + \sin(\theta) \frac{\partial}{\partial \theta} G_\phi(\rho, \theta, \phi) + \cos(\theta) G_\phi(\rho, \theta, \phi)}{\rho \sin(\theta)}, \right. \\ \left. -\frac{\frac{\partial}{\partial \phi} G_\rho(\rho, \theta, \phi) + \sin(\theta) G_\phi(\rho, \theta, \phi) + \sin(\theta) \left(\frac{\partial}{\partial \rho} G_\phi(\rho, \theta, \phi) \right) \rho}{\rho \sin(\theta)}, \frac{-\frac{\partial}{\partial \theta} G_\rho(\rho, \theta, \phi) + G_\theta(\rho, \theta, \phi) + \left(\frac{\partial}{\partial \rho} G_\theta(\rho, \theta, \phi) \right) \rho}{\rho} \right]$$

Tulokset ovat vähemmän sievässä muodossa ja ne sieventyvät jonkin verran. Jatketaan skalaarikentällä. Ensin sylinterikoordinaatisto:

```
> with(LinearAlgebra):
with(VectorCalculus):
```

Warning, the names &x, CrossProduct and DotProduct have been rebound

Warning, the assigned names '<>' and '<>' now have a global binding

Warning, these protected names have been redefined and unprotected: *, +, .., D, Vector, diff, int, limit, series

```
> h:=<r*cos(phi), r*sin(phi), z>:
Dtrans2(h, [r, phi, z]):
```

$$\left[\frac{\partial}{\partial r} g(r, \phi, z), \frac{\partial}{\partial \phi} g(r, \phi, z)}{r}, \frac{\partial}{\partial z} g(r, \phi, z), \frac{\frac{\partial^2}{\partial \phi^2} g(r, \phi, z) + \left(\frac{\partial}{\partial r} g(r, \phi, z) \right) r + \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} g(r, \phi, z) \right) r^2 + \left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} g(r, \phi, z) \right) r^2}{r^2} \right]$$

Ja sitten pallokoordinaatisto:

```
> h:=<rho*sin(theta)*cos(phi), rho*sin(theta)*sin(phi), rho*cos(theta)>:
Dtrans2(h, [rho, theta, phi]):
```

$$\left[\frac{\partial}{\partial \rho} g(\rho, \theta, \phi), \frac{\frac{\partial}{\partial \theta} g(\rho, \theta, \phi)}{\rho}, \frac{\frac{\partial}{\partial \phi} g(\rho, \theta, \phi)}{\rho \sin(\theta)}, \right. \\ \left. \frac{1}{-\rho^2 + \rho^2 \cos(2\theta)} \left(2 \left(\frac{\partial}{\partial \rho} g(\rho, \theta, \phi) \right) \rho \cos(2\theta) + \left(\frac{\partial^2}{\partial \rho^2} g(\rho, \theta, \phi) \right) \rho^2 \cos(2\theta) - \left(\frac{\partial^2}{\partial \rho^2} g(\rho, \theta, \phi) \right) \rho^2 \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} g(\rho, \theta, \phi) - 2 \left(\frac{\partial}{\partial \rho} g(\rho, \theta, \phi) \right) \rho - 2 \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} g(\rho, \theta, \phi) + \left(\frac{\partial^2}{\partial \theta^2} g(\rho, \theta, \phi) \right) \cos(2\theta) - \left(\frac{\partial}{\partial \theta} g(\rho, \theta, \phi) \right) \sin(2\theta) \right) \right]$$

Tulokset ovat jälleen vähemmän sievässä muodossa.

Kootaan saadut tulokset sievennettyinä yhteen. Ensin sylinterikoordinaatisto, jossa lokaalit kantavektorit ovat \mathbf{e}_r , \mathbf{e}_ϕ ja \mathbf{e}_z ja $\mathbf{G} = G_r \mathbf{e}_r + G_\phi \mathbf{e}_\phi + G_z \mathbf{e}_z$:

$$\nabla f = \frac{\partial g}{\partial r} \mathbf{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial g}{\partial \phi} \mathbf{e}_\phi + \frac{\partial g}{\partial z} \mathbf{e}_z \\ \nabla \cdot \mathbf{F} = \frac{1}{r} G_r + \frac{\partial G_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial G_\phi}{\partial \phi} + \frac{\partial G_z}{\partial z} \\ \nabla \times \mathbf{F} = \left(\frac{1}{r} \frac{\partial G_z}{\partial \phi} - \frac{\partial G_\phi}{\partial z} \right) \mathbf{e}_r + \left(\frac{\partial G_r}{\partial z} - \frac{\partial G_z}{\partial r} \right) \mathbf{e}_\phi + \frac{1}{r} \left(G_\phi + r \frac{\partial G_\phi}{\partial r} - \frac{\partial G_r}{\partial \phi} \right) \mathbf{e}_z \\ \Delta f = \frac{1}{r} \frac{\partial g}{\partial r} + \frac{\partial^2 g}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 g}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 g}{\partial z^2}$$

Nämä operaattorien esitysmuodot ovat hyvin käteviä, kun kyseessä ovat aksiaalisymmetriset kentät. Ja sitten pallokoordinaatisto, jonka lokaalit kantavektorit ovat \mathbf{e}_ρ , \mathbf{e}_θ ja \mathbf{e}_ϕ ja $\mathbf{G} = G_\rho \mathbf{e}_\rho + G_\theta \mathbf{e}_\theta + G_\phi \mathbf{e}_\phi$:

$$\begin{aligned}\nabla f &= \frac{\partial g}{\partial \rho} \mathbf{e}_\rho + \frac{1}{\rho} \frac{\partial g}{\partial \theta} \mathbf{e}_\theta + \frac{1}{\rho \sin \theta} \frac{\partial g}{\partial \phi} \mathbf{e}_\phi \\ \nabla \cdot \mathbf{F} &= \frac{2}{\rho} G_\rho + \frac{\partial G_\rho}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho \tan \theta} G_\theta + \frac{1}{\rho} \frac{\partial G_\theta}{\partial \theta} + \frac{1}{\rho \sin \theta} \frac{\partial G_\phi}{\partial \phi} \\ \nabla \times \mathbf{F} &= \frac{1}{\rho \sin \theta} \left(\cos \theta G_\phi + \sin \theta \frac{\partial G_\phi}{\partial \theta} - \frac{\partial G_\theta}{\partial \phi} \right) \mathbf{e}_\rho + \frac{1}{\rho} \left(\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial G_\rho}{\partial \phi} - G_\phi - \rho \frac{\partial G_\phi}{\partial \rho} \right) \mathbf{e}_\theta \\ &\quad + \frac{1}{\rho} \left(G_\theta + \rho \frac{\partial G_\theta}{\partial \rho} - \frac{\partial G_\rho}{\partial \theta} \right) \mathbf{e}_\phi \\ \Delta f &= \frac{2}{\rho} \frac{\partial g}{\partial \rho} + \frac{\partial^2 g}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho^2 \tan \theta} \frac{\partial g}{\partial \theta} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 g}{\partial \theta^2} + \frac{1}{\rho^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 g}{\partial \phi^2}\end{aligned}$$

Nämä operaattorien muodot ovat puolestaan erityisen käteviä, kun kyseessä ovat radiaalisymmetriset kentät.

Huomautus. *Todettakoon, että nämä muunnoskaavat ja vastaavat kaavat monelle muullekin käyräviivaiselle koordinaatistolle ovat suoraan saatavissa Maple-ohjelmiston VectorCalculus-paketissa. Itse asiassa tässä paketissa voidaan määritellä mielivaltainen käyräviivainen koordinaatisto ja laskea tälle derivaattaoperaattorien muunnoskaavat.*

Liite 3

KULMAT

L3.1 Kulmamuotokenttä ja kulmapotentiaali

\mathbb{R}^n :n vektorikentän $\mathbf{F}(\mathbf{p}) = \|\mathbf{p}\|^{-n}\mathbf{p}^\top$ vuomuotokenttää ($n - 1$ -muotokenttää)

$$\Phi_{\mathbf{F}\text{-flux}}(\mathbf{p}; \mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_{n-1}) = \|\mathbf{p}\|^{-n} \det(\mathbf{p}^\top, \mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_{n-1})$$

kutsutaan *kulmamuotokentäksi*, merkitään $\Phi_{n\text{-angle}}$, ja sen integraalia \mathbb{R}^n :n $n - 1$ -ulotteisen moniston \mathcal{M} (tai reunallisen alueen) yli laajennetussa parametrisoinnissa sanotaan \mathcal{M} :n määrittämäksi *kulmaksi* origosta katsoen. (Jolloin oletetaan, että origo itse ei ole \mathcal{M} :ssä.)

Koska yleisesti $\Phi_{n\text{-angle}}$ on vektorikentän $\mathbf{F}(\mathbf{p}) = \|\mathbf{p}\|^{-n}\mathbf{p}^\top$ vuomuotokenttä, jonka ulkoderivaatta on divergenssin $\nabla \bullet \mathbf{F}$ tiheysmuotokenttä, ja mainittu divergenssi on $= 0$ (totea!), Poincarén lemmän nojalla kulmamuotokentällä $\Phi_{n\text{-angle}}$ on potentiaali $\Psi_{n\text{-angle}}$ ($n - 2$ -muotokenttä) tähtimäisissä alueissa, ns. *kulmapotentiaali*. (Yleistetyn) Stokesin lauseen nojalla silloin $n - 1$ -ulotteisen suunnistetun moniston $\vec{\mathcal{M}}$ määrittämä kulma on

$$\int_{\mathcal{M}} \Phi_{n\text{-angle}} = \int_{\vec{\mathcal{M}}} d\Psi_{n\text{-angle}} = \int_{\vec{\mathcal{M}}} \Psi_{n\text{-angle}}.$$

Kulma siis voidaan laskea moniston reunan yli.

L3.2 Tasokulma

Nimitykset käynevät selväksi, kun katsotaan tuttua tasokulman tapausta $n = 2$. Silloin

$$\Phi_{2\text{-angle}}(\mathbf{p}; \mathbf{r}_1) = \|\mathbf{p}\|^{-2} \det(\mathbf{p}^\top, \mathbf{r}_1) = \frac{xy_1 - x_1y}{x^2 + y^2},$$

kun merkitään $\mathbf{p} = (x, y)$ ja $\mathbf{r}_1 = (x_1, y_1)^\top$, ts.

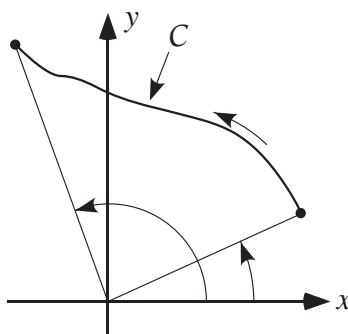
$$\Phi_{2\text{-angle}} = \frac{-y}{x^2 + y^2} dx + \frac{x}{x^2 + y^2} dy.$$

Kyseessä on siis funktion (0-muotokentän) atan ulkoderivaatta tähtimäisessä alueessa, joka saadaan poistamalla \mathbb{R}^2 :sta positiivinen x -akseli ja origo, ks. Pykälän 2.5 esimerkki. Vaikka atan itse ei olekaan jatkuva positiivisella x -akselilla—eikä määritelykään origossa—sen derivaatta atan' on jatkuva kaikkialla paitsi ei origossa. Integroidaan $\Phi_{2\text{-angle}}$ yli suunnatun viivan $\vec{\mathcal{C}} : \mathbf{r} = \gamma(u)$ ($u \in \mathcal{U}$) (laajennetussa parametrisoinnissa). Lisäoletuksena on, että origo ei

ole viivalla. Silloin

$$\int_{\vec{C}} \Phi_{2\text{-angle}} = \int_u \operatorname{atan}'(\gamma(u)) \gamma'(u) du = \int_u \frac{d}{du} \operatorname{atan}(\gamma(u)) du.$$

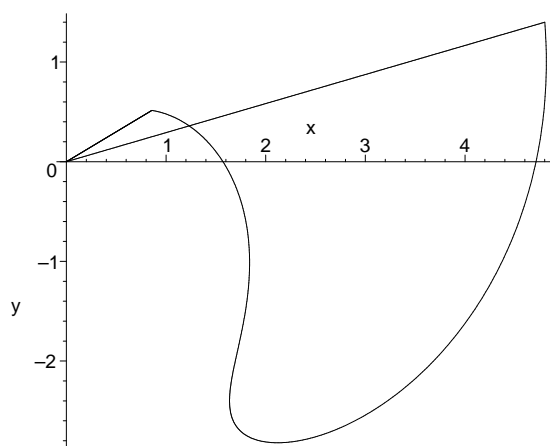
Kyseessä on siis nettokulma, jonka viivaa liikkuva piste origosta katsoen pyyhkii, positiivisena positiiviseen kiertosuuntaan ja negatiivisena negatiiviseen kiertosuuntaan.



Huomaa, että atan :n epäjatkuvuus ei haittaa, sillä x -akselin yli siirryttäessä atan :n arvo vähennee 2π :llä, mutta derivaatta on jatkuva. Mainittu tähtimäinen alue voitaisiin myös korvata millä tahansa alueella, jossa \mathbb{R}^2 :sta on poistettu origosta lähtevä puolisuora määrittelemällä atan sopivasti.

\mathbb{R}^2 :n kulmapotentiaali on siis skalaaripotentiaali, oleellisesti atan tai siitä vakioita lisäämällä saatava muu funktio. Reuna muodostuu pisteistä ja nettokulma saadaan aina periaatteessa yhteen/vähennyslaskuilla.

Esimerkki. Lasketaan viivan $\vec{C} : \mathbf{r} = \gamma(u) = (u \cos(\cos u), u \sin(\cos u))$ ($1 \leq u \leq 5$) määrittämä kulma. Ks. kuva (Maple):



Silloin

$$\begin{aligned} \operatorname{atan}'(\gamma(u)) \gamma'(u) &= -\frac{u \sin(\cos u)}{u^2} (\cos(\cos u) + u \sin(\cos u) \sin u) \\ &\quad + \frac{u \cos(\cos u)}{u^2} (\sin(\cos u) - u \cos(\sin u) \sin u) \\ &= -\sin u \end{aligned}$$

ja nettokulma on

$$\int_1^5 (-\sin u) du = \cos 5 - \cos 1 \cong -0.26 \text{ rad},$$

kuten pitääkin.

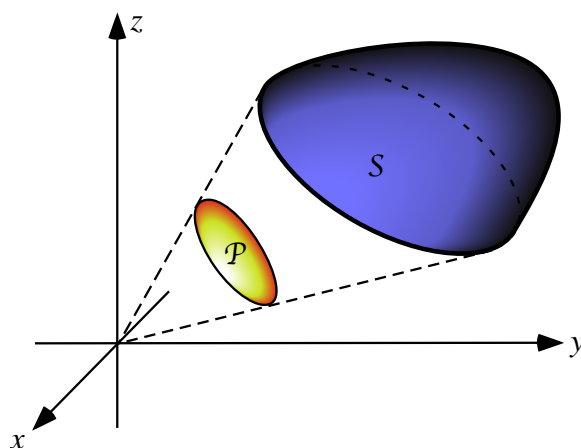
Huomautus. Kompleksimuuttujan funktioita tunteville tämä tuonee mieleen kompleksisen logaritmin ja sen derivaatan.

L3.3 Avaruuskulma

\mathbb{R}^3 :n kulmapotentiaali on Newtonin muotokentän

$$\mathbf{F}(\mathbf{p}) = \frac{\mathbf{p}^\top}{\|\mathbf{p}\|^3}$$

vektoripotentiaalin työmuotokenttä ja $\Phi_{3\text{-angle}}$ on \mathbf{F} :n vuomuoto. Kyseessä oleva kulman käsite on ns. *avaruuskulma* (engl. solid angle). Havainnollisesti pinnan \vec{S} määrittämä avaruuskulma origosta katsottuna on sen origokeskisen yksikköpallon pinnan osan ala, joka peittää tarkasti \vec{S} :n. (Ks. alla oleva kuva.) Mukaan on kuitenkin otettava mahdollisuus, että jokin pinnan osa näkyy kahdesti tai useampaan kertaan. Lisäksi mukaan otetaan positiivisina ne pinnan osat, joiden normaali sovitussa suunnistuksessa osoittaa ”poispäin origosta”, ja negatiivisina ne osat, joiden normaali osoittaa ”origoon päin”. Koko avaruuden antama avaruuskulma on ilmeisesti 4π . Avaruuskulman yksikkö on *steradiaani* (sterad).



Matemaattisesti \mathbb{R}^3 :n 2-ulotteisen moniston $\vec{S} : \mathbf{r} = \gamma(\mathbf{u})$ ($\mathbf{u} \in \mathcal{U}$) (suunnistettu pinta laajennetussa parametrissa) määrittämä avaruuskulma origosta katsoen on

$$\Omega(\vec{S}) = \int_{\mathcal{U}} \delta(\mathbf{u}) \bullet \frac{\partial \delta(\mathbf{u})}{\partial u_1} \times \frac{\partial \delta(\mathbf{u})}{\partial u_2} du \quad , \quad \text{missä} \quad \delta(\mathbf{u}) = \frac{\gamma(\mathbf{u})}{\|\gamma(\mathbf{u})\|}.$$

Tässä oletetaan jälleen, että origo ei ole S :ssä. Huomaa, että $\delta(\mathbf{u})$:n arvot ovat yksikköpallon $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ pinnalla. Toisaalta $\vec{P} : \mathbf{r} = \delta(\mathbf{u})$ ($\mathbf{u} \in \mathcal{U}$) ei (välttämättä) ole parametrisoitu monisto laajennetussa mielessäkään. Siinä yksikköpallon pinnan osa voi olla mukana montakin

kertaa, ehkä vastakkaisiin suuntiin suunnistettuna, riippuen siitä miten monta kertaa vastaava origosta lähtevä puolisuora pintaa \vec{S} leikkaa ja missä suunnassa. Yleisesti kuitenkin \vec{P} voidaan ajatella suunnatuksi ratamonistoksi laajennetussa parametrisoinnissa. Origokeskisen yksikköpallon pinnan yksikkönormaali pisteessä $\delta(\mathbf{u})$ on joko $\delta(\mathbf{u})^\top$ (ulkonormaali) tai $-\delta(\mathbf{u})^\top$ (sisänormaali). Näin ollen

$$\frac{\partial \delta(\mathbf{u})}{\partial u_1} \times \frac{\partial \delta(\mathbf{u})}{\partial u_2} = \pm \left\| \frac{\partial \delta(\mathbf{u})}{\partial u_1} \times \frac{\partial \delta(\mathbf{u})}{\partial u_2} \right\| \delta(\mathbf{u}),$$

missä merkki määräytyy kulloisestakin suunnistuksesta, ja edelleen

$$\delta(\mathbf{u}) \bullet \frac{\partial \delta(\mathbf{u})}{\partial u_1} \times \frac{\partial \delta(\mathbf{u})}{\partial u_2} = \pm \left\| \frac{\partial \delta(\mathbf{u})}{\partial u_1} \times \frac{\partial \delta(\mathbf{u})}{\partial u_2} \right\|.$$

Määritely $\Omega(\vec{S})$ on siis juuri havainnollisen ajatuksen antama avaruuskulma. (Muista pinnan ala volyymina.)

Etsitään sitten yhteys kulmamuotokenttään $\Phi_{3\text{-angle}}$. Laskien todetaan (totea!), että

$$\begin{aligned} \frac{\partial \delta(\mathbf{u})}{\partial u_1} &= \frac{1}{\|\gamma(\mathbf{u})\|} \frac{\partial \gamma(\mathbf{u})}{\partial u_1} - \frac{\gamma(\mathbf{u}) \bullet \frac{\partial \gamma(\mathbf{u})}{\partial u_1}}{\|\gamma(\mathbf{u})\|^3} \gamma(\mathbf{u}) \quad \text{ja} \\ \frac{\partial \delta(\mathbf{u})}{\partial u_2} &= \frac{1}{\|\gamma(\mathbf{u})\|} \frac{\partial \gamma(\mathbf{u})}{\partial u_2} - \frac{\gamma(\mathbf{u}) \bullet \frac{\partial \gamma(\mathbf{u})}{\partial u_2}}{\|\gamma(\mathbf{u})\|^3} \gamma(\mathbf{u}). \end{aligned}$$

Muistaen skalaarikolmitulon laskusääntöjä todetaan edelleen, että

$$\delta(\mathbf{u}) \bullet \frac{\partial \delta(\mathbf{u})}{\partial u_1} \times \frac{\partial \delta(\mathbf{u})}{\partial u_2} = \frac{\gamma(\mathbf{u}) \bullet \frac{\partial \gamma(\mathbf{u})}{\partial u_1} \times \frac{\partial \gamma(\mathbf{u})}{\partial u_2}}{\|\gamma(\mathbf{u})\|^3}.$$

Näin ollen

$$\Omega(\vec{S}) = \int_{\vec{S}} \Phi_{3\text{-angle}}.$$

Esimerkki. Pykälän 6.3 esimerkin tulosta käyttäen saadaan kentän $\mathbf{F}(\mathbf{p}) = \|\mathbf{p}\|^{-3} \mathbf{p}^\top$ vektoripotentiaali \mathbf{U} tähtimäisessä joukossa, joka saadaan poistamalla avaruudesta jokin puolisuora $-u\mathbf{p}_0$ ($u \geq 0$) missä $\mathbf{p}_0 \neq \mathbf{0}$, muodossa

$$\mathbf{U}(\mathbf{p}) = \frac{\mathbf{p}_0 \times \mathbf{p}}{\|\mathbf{p}_0\| \|\mathbf{p}\|^2 + (\mathbf{p}_0 \bullet \mathbf{p}) \|\mathbf{p}\|},$$

kun asetetaan $\mathbf{p}_1 = \mathbf{0}$.⁴ Vastaava kulmapotentiaali on 1-muotokenttä

$$\Psi_{3\text{-angle}}(\mathbf{p}; \mathbf{r}) = \mathbf{U}(\mathbf{p}) \bullet \mathbf{r} = \frac{\mathbf{p}_0 \times \mathbf{p} \bullet \mathbf{r}}{\|\mathbf{p}_0\| \|\mathbf{p}\|^2 + (\mathbf{p}_0 \bullet \mathbf{p}) \|\mathbf{p}\|}.$$

Suunnistetun pinnan \vec{S} määrittämä avaruuskulma saadaan Stokesin lauseen nojalla integroimalla \vec{S} :n vastaavasti suunnistetun reunan \vec{C} yli:

$$\Omega(\vec{S}) = \oint_{\vec{C}} \mathbf{U}(\mathbf{p}) \bullet d\mathbf{s} = \oint_{\vec{C}} \frac{\mathbf{p}_0 \times \mathbf{p}}{\|\mathbf{p}_0\| \|\mathbf{p}\|^2 + (\mathbf{p}_0 \bullet \mathbf{p}) \|\mathbf{p}\|} \bullet d\mathbf{s}.$$

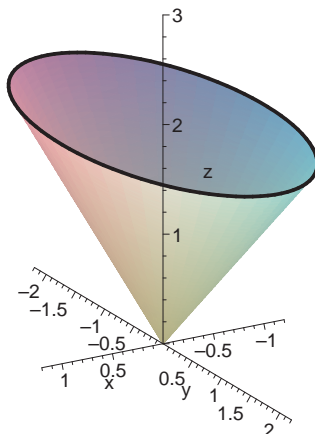
⁴Tässä käytetään merkintöjen yksinkertaistamiseksi samaa merkintää pisteille ja vektoreille.

Poistettu puolisuora voidaan valita ”katsomissuunnalle” vastakkaiseen suuntaan osoittavaksi, ts. \mathbf{p}_0 on katsomissuunnassa.

Lasketaan malliksi, missä avaruuskulmassa ellipsi

$$\vec{\mathcal{C}} : \mathbf{p} = \gamma(u) = (\cos u, 2 \sin u, 2) \quad (0 \leq u \leq 2\pi)$$

—tai vastaavasti mikä tahansa suunnattu pinta, jonka reuna se on—origosta näkyy. Valitaan $\mathbf{p}_0 = (0, 0, 1)$. (Kuva: Maple.)



Silloin

$$\mathbf{p}_0 \times \gamma'(u) = \begin{pmatrix} -2 \sin u \\ \cos u \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{ja} \quad \gamma'(u) = \begin{pmatrix} -\sin u \\ 2 \cos u \\ 0 \end{pmatrix}$$

ja kysytty avaruuskulma on⁵

$$\begin{aligned} \Omega &= \int_0^{2\pi} \frac{2 \, du}{\cos^2 u + 4 \sin^2 u + 4 + 2\sqrt{\cos^2 u + 4 \sin^2 u + 4}} \\ &= \int_0^{2\pi} \frac{2 \, du}{3 \sin^2 u + 5 + 2\sqrt{3 \sin^2 u + 5}} \cong 1.1 \text{ sterad.} \end{aligned}$$

Mainitun ellipsin ulkopuolinen osa avaruutta näkyy tällöin origosta katsoen avaruuskulmassa $4\pi - \Omega \cong 11.5$ sterad. Huomaa miten poissuljettu puolisuora—tässä negatiivinen z -akseli—näppärästi valitsee kumman näistä kahdesta avaruuskulmasta integraali laskee!

⁵Kyseessä oleva integraali on ns. elliptinen integraali eikä sitä voi esittää alkeisfunktioiden avulla. Numeerisesti se on toki helppo laskettava.

Kirjallisuus

1. ABRAHAM, R. & MARSDEN, J.E. & RATIU, T.: *Manifolds, Tensor Analysis, and Applications*. Springer–Verlag (1993)
2. AKCOGLU, M.A. & BARTHA, P.F.A. & HA, D.M.: *Analysis in Vector Spaces. A Course in Advanced Calculus*. Wiley (2009)
3. APOSTOL, T.M.: *Calculus. Vol. II: Multi-Variable Calculus and Linear Algebra with Applications to Differential Equations*. Wiley (1975)
4. APOSTOL, T.M.: *Mathematical Analysis. Modern Approach to Advanced Calculus*. Addison–Wesley (1982)
5. HUBBARD, J.H. & HUBBARD, B.B.: *Vector Calculus, Linear Algebra, and Differential Forms*. Matrix Editions (2009)
6. JÄNICH, K. & KAY, L.D.: *Vector Analysis*. Springer–Verlag (2010)
7. LOOMIS, L.H. & STERNBERG, S.: *Advanced Calculus*. Jones and Bartlett (1990)
8. LOVRIC, M.: *Vector Calculus*. Wiley (2007)
9. MARSDEN, J.E. & TROMBA, A.J.: *Vector Calculus*. W.H. Freeman (2003)
10. MISNER, C.W. & THORNE, K.S. & WHEELER, J.A.: *Gravitation*. W.H. Freeman (1973)
11. NIKOLSKY, S.M. & VOLOSOV, V.M.: *A Course of Mathematical Analysis*. MIR Publishers (1987)
12. O’NEILL B.: *Elementary Differential Geometry*. Academic Press (2006)
13. OSTROWSKI, A.: *Vorlesungen über Differential- und Integralrechnung*. Birkhäuser (1972)
14. RUDIN, W.: *Principles of Mathematical Analysis*. McGraw–Hill (1987)
15. SCHEY, H.M.: *Div, Grad, Curl, and All That. An Informal Text on Vector Calculus*. W.W. Norton (1997)
16. SPIVAK, M.: *Calculus on Manifolds. A Modern Approach to Classical Theorems of Advanced Calculus*. W.A. Benjamin (1971)
17. TALLQVIST, H.: *Grunderna av vektoranalysen med tillämpningar i fysiken*. Söderström (1923)
18. VÄISÄLÄ, K.: *Vektorianalyysi*. WSOY (1972)
19. WADE, W.R.: *An Introduction to Analysis*. Prentice–Hall (2004)

20. WEINTRAUB, S.H.: *Differential Forms. A Complement to Vector Calculus*. Academic Press (1996)

Hakemisto

- aaltoyhtälö 84,88
 affiini aliavaruus 31
 aktiivinen muuttuja 12
 alkeinen muoto 40
 antisymmetrisyys 37
 antivahdannaisuus 3
 atan 18,106
 atlas 13
 avaruuskulma 108
 avoin joukko 1
 bilineaarisuus 3
 Black–Scholes-yhtälö 88
 Cartanin taikakaava 60,95
 differentiaalimuoto 37
 diffuusioyhtälö 88
 dipoliapproksimaatio 85
 dipolimomentti 85
 divergenssi 7
 ei-stationäärinen 11
 eksakti muotokenttä 69
 eksplisiittinen esitys 16
 elliptinen yhtälö 88
 etäisyys 1
 Eulerin tapa 92
 Faradayn muotokenttä 50,63,84
 Gaußin lause 51,65
 geometrinen piste 1
 geometrinen vektori 2
 gradientti 7
 Gradienttilause 51,65
 Gramin matriisi 29,32,33
 Greenin kaavat 97
 Greenin lause 51,65
 harmoninen funktio 83,97
 Harmonisten funktioiden keskiarvolause 98
 Helmholtzin hajotelma 82
 Hodgen hajotelma 83
 hyperbolinen lämpöyhtälö 88
 hyperbolinen yhtälö 88
 Implisiittifunktiolause 15
 implisiittinen esitys 16
 Integraalilaskennan päälause 51
 Jacobin matriisi 7
 Jordan-mitallisuus 30
 Jordanin mitta 30
 jälki 10
 kaksoiroottorin kehityskaava 9
 kartasto 13
 kartta 13
 kiilatulo 42
 Kleinin pullo 66
 Kochin lumihutale 54
 kolmioepäyhtälö 1
 konservatiivinen vektorikenttä 76
 koordinaattipiste 4
 koordinaattivektori 5
 kordinaattifunktio 4
 kulma 3,106
 kulmamuuotokenttä 106
 kulmapotentiaali 106
 kuvaaja 12
 käyräviivainen koordinaatisto 99
 käänteinen lämpöyhtälö 88
 laajennettu parametrilue 34
 laajennettu parametrisointi 34
 Lagrangen tapa 92
 Laplacen operaattori 7
 Laplacen yhtälö 83
 lennätinyhtälö 88
 Lorentzin voimalaki 49
 Lorenzin mittaehto 84
 lähteen tiheys 63
 lähteisyys 63
 lämpöyhtälö 88
 Maxwellin muotokenttä 50,63
 Maxwellin yhtälöt 63,84,88
 monisto 13
 multilineaarisuus 37
 muoto 37
 muotokenttä 42
 Möbiuksen nauha 45
 nelipotentialiaali 84
 Newtonin muotokenttä 69,79,81,108
 Newtonin potentiaali 69,97
 nollajoukko 32
 normaaliavaruus 26
 normaaliderivaatta 96
 normeeraus 3
 osittaisintegrointi 95
 parabolinen yhtälö 88
 parametrialue 13
 parametrisointi 18,33
 passiivinen muuttuja 12
 piste 1,4
 pistetulo 3
 pituus 2
 Poincarén lemma 71
 Poissonin yhtälö 82
 potentiaali 69
 projektio 3

- pyörteen tiheys 62
- pyörteisyys 62
- ratamonisto 22,36
- reuna 1,52
- reunallinen alue 54
- rinkilä 46,78
- ristitulo 3
- roottori 7
- sileä piste 52
- sileä reuna 52
- sisäpeite 30
- sisävektori 55
- skalaarikenttä 6
- skalaarikolmituo 4
- skalaaripotentiali 73
- skalaaritulo 3
- stationäärinen 11
- steradiaani 108
- Stokesin lause 51,65
- suljettu joukko 1
- suljettu muotokenttä 69
- sulkeuma 1
- suunnattu derivaatta 8
- suunnistuvuus 45
- suunnistus 44
- suunta 2
- suuntaissärmiö 31
- taikakaava 60
- tangenttiavaruus 23
- tangenttivektori 6
- tasa-arvomonisto 16
- tasokulma 106
- tiheysmuotokenttä 49,61
- työmuotokenttä 49,61
- tähkimäinen alue 71
- ulkoderivaatta 58
- ulkopeite 30
- ulkovektori 55
- ura 14
- uudelleenparametrisointi 20,36
- vaimennettu aaltoyhtälö 88
- vastavektori 2
- Vektoraalinen Gaußin lause 66
- vektori 2,5
- vektorikenttä 6
- vektorikolmitulo 4
- vektoripotentiali 79
- vektoritulo 3
- virrantiheysmuoto 64
- volyymi 30
- vuoto 29,49
- vuomuotokenttä 49,61
- yhdesti yhtenäinen monisto 76
- yhtenäinen monisto 47
- yksikkövektori 2
- Yleistetty Stokesin lause 64,95