Capitolo 1

Principi di massimo

I principi di massimo per gli operatori ellittici lineari si sono rivelati un potente strumento nello studio delle equazioni differenziali ellittiche lineari e non lineari. Le applicazioni di tali principi sono innumerevoli e svariate; di conseguenza in queste dispense ne presenteremo soltanto alcune tra le più significative. Utilizzando i principio di massimo è possibile ottenere informazioni sul segno delle soluzioni di equazioni e disuguaglianze differenziali e sulle loro proprietà qualitative quali ad esempio la simmetria. È anche possibile dimostrare l'esistenza di soluzioni per alcune classi di equazioni ellittiche mediante l'utilizzo del così detto metodo delle soprasoluzioni-sottosoluzioni.

1.1 Principi di massimo per l'operatore di Laplace

I risultati e le dimostrazioni di questo paragrafo sono ispirate da [9] e alcune parti sono tratte da [7].

Iniziamo questo paragrafo enunciando la proprietà del valor medio per funzioni armoniche.

Teorema 1.1.1. (proprietà del valor medio). *Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ un aperto e sia u armonica in Ω. Allora, per ogni $x \in \Omega$ e per ogni $R > 0$ tali che $\overline{B_R(x)} \subset \Omega$ si ha*

$$u(x) = \frac{1}{|\partial B_R(x)|} \int_{\partial B_R(x)} u(\sigma) dS(\sigma) = \frac{1}{|B_R(x)|} \int_{B_R(x)} u(y) dy \ . \tag{1.1}$$

Dimostrazione. Sia $x \in \Omega$ e sia $R > 0$ tale che $\overline{B_R(x)} \subset \Omega$. Allora per ogni $r \in (0, R]$ si ha grazie al Teorema della Divergenza

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{B_r(x)} \Delta u(y) dy = \int_{\partial B_r(x)} \frac{\partial u}{\partial \nu}(\sigma)\ dS(\sigma) = r^{N-1} \int_{\partial B_1(0)} \nabla u(x + r\sigma) \cdot \sigma\ dS(\sigma) \\ &= r^{N-1} \frac{\partial}{\partial r} \int_{\partial B_1(0)} u(x + r\sigma)\ dS(\sigma) = r^{N-1} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r^{N-1}} \int_{\partial B_r(x)} u(\sigma)\ dS(\sigma) \right) \end{aligned}$$

$$= \omega_{N-1}\, r^{N-1} \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{|\partial B_r(x)|}\int_{\partial B_r(x)} u(\sigma)\ dS(\sigma)\right)$$

dove $\omega_{N-1} := \int_{\partial B_1(0)} dS$ denota la misura superficiale della sfera di raggio unitario in $\mathbb{R}^N$. Questo dimostra che il valor medio di u sulla sfera di raggio r centrata in x è costante rispetto a $r \in (0, R]$ e di conseguenza

$$\frac{1}{|\partial B_R(x)|}\int_{\partial B_R(x)} u(\sigma)\ dS(\sigma) = \lim_{r\to 0}\frac{1}{|\partial B_r(x)|}\int_{\partial B_r(x)} u(\sigma)\ dS(\sigma) = u(x)$$

il che prova la prima delle (1.1). D'altra parte si ha anche che per ogni $r \in (0, R)$

$$u(x)\omega_{N-1}r^{N-1} = \int_{\partial B_r(x)} u(\sigma)\ dS(\sigma)$$

e quindi integrando su $(0, R)$ si ottiene

$$u(x)\omega_{N-1}\frac{R^N}{N} = \int_0^R\left(\int_{\partial B_r(x)} u(\sigma)\ dS(\sigma)\right) dr = \int_{B_R(x)} u(y)\, dy$$

e da questa segue immediatamente la seconda delle (1.1). □

Di fatto, la proprietà del valor medio caratterizza la funzioni armoniche:

Teorema 1.1.2. (inverso della proprietà del valor medio). *Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ un aperto e sia $u \in C^2(\Omega)$. Se u soddisfa* (1.1) *ogni qualvolta $B_R(x) \subset \Omega$ allora $\Delta u = 0$ in Ω.*

Dimostrazione. Si veda [9, Theorem 2.7, Chapter 2]. □

Una sorta di proprietà del valor medio vale anche per le funzioni superarmoniche e subarmoniche, rispettivamente funzioni di classe C^2 soddisfacenti $\Delta u \le 0$ e $\Delta u \ge 0$.

Teorema 1.1.3. *Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ un aperto e sia $u \in C^2(\Omega)$.*
(i) Se $\Delta u \le 0$ (u superarmonica) allora per ogni $x \in \Omega$ e per ogni $R > 0$ tale che $\overline{B_R(x)} \subset \Omega$, si ha

$$u(x) \ge \frac{1}{|\partial B_R(x)|}\int_{\partial B_R(x)} u(\sigma)dS(\sigma) \qquad e \qquad u(x) \ge \frac{1}{|B_R(x)|}\int_{B_R(x)} u(y)dy. \quad (1.2)$$

(ii) Se $\Delta u \ge 0$ (u subarmonica) allora per ogni $x \in \Omega$ e per ogni $R > 0$ tale che $\overline{B_R(x)} \subset \Omega$, si ha

$$u(x) \le \frac{1}{|\partial B_R(x)|}\int_{\partial B_R(x)} u(\sigma)dS(\sigma) \qquad e \qquad u(x) \le \frac{1}{|B_R(x)|}\int_{B_R(x)} u(y)dy. \quad (1.3)$$

Dimostrazione. È sufficiente procedere come nel caso delle funzioni armoniche (Teorema 1.1.1) con le dovute modifiche. □

Grazie alle proprietà del valor medio possiamo dimostrare la seguente versione del principio di massimo:

Teorema 1.1.4. (principio del massimo forte). *Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ un aperto connesso e sia $u \in C^2(\Omega)$ subarmonica in Ω. Se esiste $x_0 \in \Omega$ tale che $u(x_0) = \sup_\Omega u$, allora u è costante in Ω.*

Dimostrazione. Supponiamo che esista $x_0 \in \Omega$ tale che $u(x_0) = M = \sup_\Omega u$. Si definisca

$$\Omega_M := \{x \in \Omega : u(x) = M\}\,.$$

Poichè $x_0 \in \Omega$ e $u(x_0) = M$ allora $\Omega_M \neq \emptyset$. Poiché u è continua in Ω allora l'insieme Ω_M è chiuso in Ω (nella topologia indotta su Ω). Dimostriamo che Ω_M è anche aperto in Ω.

Sia quindi $x \in \Omega_M$. Applicando la seconda delle (1.3) alla funzione subarmonica $u - M$, per ogni $r > 0$ tale che $B_r(x) \subset \Omega$ abbiamo

$$0 = u(x) - M \leq \frac{1}{|B_r(x)|} \int_{B_r(x)} (u(y) - M)\, dy \leq 0\,,$$

dove la seconda disuguaglianza segue dal fatto che $u(y) \leq M$ per ogni $y \in B_r(x)$. Ma allora la disuguaglianza precedente è un'uguaglianza e pertanto

$$\int_{B_r(x)} (u(y) - M)\, dy = 0\,.$$

Questo è possibile se e soltanto se $u \equiv M$ in $B_r(x)$ essendo $u - M$ una funzione di segno costante. Pertanto dato un generico elemento x di Ω_M abbiamo trovato un intorno di x interamente contenuto in Ω_M. Ciò dimostra che Ω_M è aperto in Ω. Essendo Ω connesso ed essendo Ω_M un sottoinsieme non vuoto aperto e chiuso in Ω, possiamo concludere che $\Omega_M = \Omega$ e che quindi $u \equiv M$ in Ω. □

Analogamente si può dimostrare che vale la seguente versione del principio di massimo per funzioni superarmoniche (in questo caso sarebbe più opportuno chiamarlo "principio di minimo"):

Teorema 1.1.5. *Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ un aperto connesso e sia $u \in C^2(\Omega)$ superarmonica in Ω. Se esiste $x_0 \in \Omega$ tale che $u(x_0) = \inf_\Omega u$, allora u è costante in Ω.*

Osservazione 1.1.6. Osserviamo che se nei Teoremi 1.1.4-1.1.5 supponiamo inoltre che Ω sia un aperto limitato e che $u \in C^2(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$ allora $\sup_\Omega u = \max_{\overline{\Omega}} u$

e $\inf_{\Omega} u = \min_{\overline{\Omega}} u$. In tal caso il Teorema 1.1.4 afferma che se $\max_{\overline{\Omega}} u$ viene raggiunto in un punto $x_0 \in \Omega$ (e quindi $x_0 \notin \partial\Omega$) allora u è costante in Ω. Analogamente il Teorema 1.1.5 afferma che se $\min_{\overline{\Omega}} u$ viene raggiunto in un punto $x_0 \in \Omega$ allora u è costante in Ω. □

Come conseguenza del principio di massimo forte vale la seguente versione debole del principio di massimo:

Teorema 1.1.7. (principio del massimo debole). *Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un aperto limitato e sia $u \in C^2(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$.*

(i) Se u è subarmonica in Ω allora $\max_{\overline{\Omega}} u = \max_{\partial\Omega} u$.

(ii) Se u è superarmonica in Ω allora $\min_{\overline{\Omega}} u = \min_{\partial\Omega} u$.

(iii) Se u è armonica in Ω allora $\min_{\partial\Omega} u \leq u(x) \leq \max_{\partial\Omega} u$ per ogni $x \in \Omega$.

Dimostrazione. È sufficiente dimostrare la (i) in quanto la (ii) e la (iii) seguono facilmente dalla (i). Poiché $\partial\Omega \subset \overline{\Omega}$ si ha $\max_{\partial\Omega} u \leq \max_{\overline{\Omega}} u$. Dovendo dimostrare la validità dell'uguaglianza supponiamo per assurdo che $\max_{\partial\Omega} u < \max_{\overline{\Omega}} u$. Questo significa che il massimo su $\overline{\Omega}$ viene raggiunto in un punto di Ω; sia pertanto $x_0 \in \Omega$ tale che $u(x_0) = \max_{\overline{\Omega}} u$ e sia $\Omega_{x_0} \subseteq \Omega$ la componente connessa di Ω che contiene x_0. Essendo Ω aperto in $\mathbb{R}^N$ allora Ω_{x_0} è anch'esso aperto in $\mathbb{R}^N$ e inoltre $\partial\Omega_{x_0} \subseteq \partial\Omega$. Essendo inoltre Ω_{x_0} connesso possiamo applicare il principio di massimo forte (Teorema 1.1.4) alla funzione u sul dominio Ω_{x_0} e concludere che u deve essere costante in Ω_{x_0}. Dal fatto che u è costante in Ω_{x_0} e dal fatto che $\partial\Omega_{x_0} \subseteq \partial\Omega$ si ottiene

$$\max_{\partial\Omega} u \geq \max_{\partial\Omega_{x_0}} u = \max_{\overline{\Omega}_{x_0}} u = u(x_0) = \max_{\overline{\Omega}} u$$

in contraddizione con $\max_{\partial\Omega} u < \max_{\overline{\Omega}} u$. □

Passiamo ora a considerare alcune applicazioni dei principi di massimo nello studio delle equazioni a derivate parziali.

Si consideri l'equazione di Poisson con condizioni al contorno di Dirichlet su un aperto limitato $\Omega \subset \mathbb{R}^N$:

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{in } \Omega \\ u = \varphi & \text{su } \partial\Omega\,. \end{cases} \tag{1.4}$$

Allora vale il seguente risultato di unicità:

Teorema 1.1.8. *Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un aperto limitato. Siano $f \in C^0(\Omega)$ e $\varphi \in C^0(\partial\Omega)$. Siano $u_1, u_2 \in C^2(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$ soluzioni del problema (1.4). Allora $u_1 \equiv u_2$ su $\overline{\Omega}$.*

Dimostrazione. Siano u_1 e u_2 due soluzioni di (1.4) e sia $w := u_1 - u_2$. Allora w è una soluzione del problema

$$\begin{cases} \Delta w = 0 & \text{in } \Omega \\ w = 0 & \text{su } \partial\Omega\,. \end{cases}$$

Applicando il Teorema 1.1.7 (iii) a w si conclude immediatamente che $w \equiv 0$ su $\overline{\Omega}$ e quindi $u_1 \equiv u_2$ su $\overline{\Omega}$. □

Il principio di massimo può dare informazioni anche sul segno delle soluzioni di (1.4).

Teorema 1.1.9. *Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un aperto limitato connesso. Siano $f \in C^0(\Omega)$ e $\varphi \in C^0(\partial\Omega)$. Sia $u \in C^2(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$ una soluzione del problema (1.4). Se $f \geq 0$ in Ω e $\varphi \geq 0$ su $\partial\Omega$ allora vale una delle seguenti alternative:*

(i) $u > 0$ *in* Ω;

(ii) $u \equiv 0$ *in* Ω.

Dimostrazione. Dal Teorema 1.1.7 (ii) deduciamo che

$$\min_{\overline{\Omega}} u = \min_{\partial\Omega} \varphi \geq 0$$

e quindi che $u \geq 0$ in Ω. Supponiamo che non valga la (i); allora esiste $x_0 \in \Omega$ tale che $u(x_0) = 0$. In tal caso si avrebbe quindi che $\min_{\overline{\Omega}} u = 0$ e che tale minimo viene raggiunto in un punto di Ω. Dal Teorema 1.1.5 si otterrebbe che u è costante in Ω e quindi $u \equiv 0$ in Ω. □

Possiamo fornire un'interpretazione fisica del Teorema 1.1.9. Prendiamo in considerazione il problema di una membrana elastica fissata al bordo; allora si perviene al seguente modello matematico

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{in } \Omega \\ u = 0 & \text{su } \partial\Omega \end{cases}$$

dove Ω rappresenta la porzione di piano occupata dalla membrana quando essa è a riposo, u rappresenta lo spostamento verticale rispetto alla posizione a riposo e f rappresenta il carico verticale a cui viene sottoposta la membrana. Se ad esempio supponiamo che il carico verticale sia non nullo e diretto verso l'alto allora la funzione f è non negativa in Ω. Risulta allora chiaro che la funzione u è superarmonica in Ω ed essendo nulla al bordo si deduce che $u > 0$ in Ω. Dal punto di vista fisico questo significa che la membrana si deforma verso l'alto quando viene sottoposta a un carico verticale diretto verso l'alto come era ragionevole aspettarsi.

Osservazione 1.1.10. Una funzione subarmonica u in $\mathbb{R}$ soddisfa $u'' \geq 0$ e quindi u è convessa. È facile dimostrare direttamente sia il principio di massimo debole che quello forte. □

1.2 Principi di massimo per operatori ellittici lineari

In questo paragrafo ci poniamo l'obiettivo di estendere i principi di massimo enunciati nel caso dell'operatore di Laplace al caso di operatori differenziali lineari del secondo ordine della forma

$$Lu = -\sum_{i,j=1}^{N} a_{ij}(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{N} b_i(x)\frac{\partial u}{\partial x_i} + c(x)u \qquad \forall\, x \in \Omega, \forall\, u \in C^2(\Omega) \quad (1.5)$$

dove $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ è un aperto. Essendo L applicato su funzioni $u \in C^2(\Omega)$ non è restrittivo supporre che

$$a_{ij}(x) = a_{ji}(x) \qquad \text{per ogni } x \in \Omega, \text{ per ogni } i,j \in \{1,\dots,N\}\,.$$

Definizione 1.2.1. *(i) Diremo che L è un operatore ellittico se esistono delle funzioni λ, Λ tali che*

$$0 < \lambda(x)|\xi|^2 \leq \sum_{i,j=1}^{N} a_{ij}(x)\xi_i\xi_j \leq \Lambda(x)|\xi|^2 \quad (1.6)$$

per ogni $x \in \Omega$ e per ogni $\xi \in \mathbb{R}^N \setminus \{0\}$.

(ii) Diremo che L è strettamente ellittico se vale (1.6) con $\lambda_0 := \inf_{x\in\Omega} \lambda(x) > 0$.

(iii) Diremo che L è uniformemente ellittico se vale (1.6) con

$$K_\Lambda := \sup_{x\in\Omega} \frac{\Lambda(x)}{\lambda(x)} < +\infty\,. \quad (1.7)$$

Introduciamo ora le seguenti ipotesi sui coefficienti $b_i, i \in \{1,\dots,N\}$ e c. Supponiamo che

$$K_b := \max_{i\in\{1,\dots,N\}} \sup_{x\in\Omega} \frac{|b_i(x)|}{\lambda(x)} < +\infty \quad (1.8)$$

e che

$$K_c := \sup_{x\in\Omega} \frac{|c(x)|}{\lambda(x)} < +\infty\,. \quad (1.9)$$

Definizione 1.2.2. *Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ aperto, sia L come in (1.5) e si consideri l'equazione*

$$Lu = 0 \qquad \text{in } \Omega\,. \quad (1.10)$$

(i) *Si dice che una funzione* $w \in C^2(\Omega)$ *è una soluzione di (1.10) se* $Lw(x) = 0$ *per ogni* $x \in \Omega$.

(ii) *Si dice che una funzione* $w \in C^2(\Omega)$ *è una soprasoluzione (o supersoluzione) di (1.10) se* $Lw(x) \geq 0$ *per ogni* $x \in \Omega$.

(iii) *Si dice che una funzione* $w \in C^2(\Omega)$ *è una sottosoluzione (o subsoluzione) di (1.10) se* $Lw(x) \leq 0$ *per ogni* $x \in \Omega$.

Passiamo ora ad enunciare la versione debole del principio di massimo per l'operatore L.

Teorema 1.2.3. (principio del massimo debole). *Sia* $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ *un aperto limitato e sia* L *l'operatore introdotto in (1.5). Supponiamo che* L *sia ellittico, che i coefficienti* $b_1, \ldots, b_N$ *soddisfino (1.8) e che* $c \equiv 0$ *in* Ω. *Sia ora* $u \in C^2(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$ *tale che* $Lu \leq 0$ *(*u *sottosoluzione) in* Ω. *Allora si ha*

$$\max_{\overline{\Omega}} u = \max_{\partial\Omega} u \,.$$

Analogamente se $u \in C^2(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$ *soddisfa* $Lu \geq 0$ *(*u *soprasoluzione) in* Ω *allora*

$$\min_{\overline{\Omega}} u = \min_{\partial\Omega} u \,.$$

Dimostrazione. Iniziamo a dimostrare il teorema nel caso in cui valga $Lu < 0$ in Ω. Supponiamo per assurdo che $\max_{\partial\Omega} u < \max_{\overline{\Omega}} u$ e sia $x_0 \in \Omega$ tale che $u(x_0) = \max_{\overline{\Omega}} u$. Sia $A(x)$ la matrice a coefficienti variabili tale che $(A(x))_{ij} = a_{ij}(x)$. Non è restrittivo supporre che la matrice $A(x_0)$ sia diagonale; se non lo fosse essendo comunque $A(x_0)$ simmetrica esisterebbero due matrici Θ ortogonale e D diagonale tali che $A(x_0) = \Theta D \Theta^{-1}$. Introducendo ora l'aperto $\widetilde{\Omega} := \{y \in \mathbb{R}^N : y = \Theta^{-1}x, x \in \Omega\}$ e la funzione $w \in C^2(\widetilde{\Omega}) \cap C^0\left(\overline{\widetilde{\Omega}}\right)$ definita da $w(y) = u(\Theta y)$ per ogni $y \in \overline{\widetilde{\Omega}}$ si può verificare che w risolve la disuguaglianza differenziale

$$-\sum_{i,j=1}^{N} \widetilde{a}_{ij}(y) \frac{\partial^2 w}{\partial y_i \partial y_j} + \sum_{i=1}^{N} \widetilde{b}_i(y) \frac{\partial w}{\partial y_i} \leq 0 \,, \qquad y \in \widetilde{\Omega}$$

con

$$\big(\widetilde{a}_{ij}(y)\big) = \Theta^{-1} A(\Theta y) \Theta \,, \qquad \widetilde{b}_i(y) = \sum_{j=1}^{N} \Theta_{ji} b_i(\Theta y) \,,$$

per ogni $y \in \widetilde{\Omega}$. A questo punto si avrebbe che w raggiunge il massimo nel punto $y_0 = \Theta^{-1} x_0$. Una volta posto $(\widetilde{A}(y))_{ij} := \widetilde{a}_{ij}(y)$ si osserva facilmente che $\widetilde{A}(y_0)$ è diagonale in quanto

$$\widetilde{A}(y_0) = \Theta^{-1} A(\Theta y_0) \Theta = \Theta^{-1} A(x_0) \Theta = \Theta^{-1}(\Theta D \Theta^{-1}) \Theta = D \,.$$

Come prima anticipato, a meno di utilizzare il procedimento appena esposto, possiamo ridurci al caso in cui la matrice $A(x_0)$ sia diagonale. Essendo x_0 un punto di massimo interno, x_0 è un punto stazionario e la matrice Hessiana di u in x_0 è semidefinita negativa ed in particolare

$$\frac{\partial u}{\partial x_i}(x_0) = 0 \quad \text{e} \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}(x_0) \le 0 \qquad \text{per ogni } i \in \{1, \dots, N\} . \tag{1.11}$$

Inoltre da (1.6) si ha anche che

$$a_{ii}(x_0) \ge 0 \qquad \text{per ogni } i \in \{1, \dots, N\} . \tag{1.12}$$

Da (1.11), (1.12) e dal fatto che $A(x_0)$ è diagonale si deduce che

$$Lu(x_0) = -\sum_{i=1}^{N} a_{ii}(x_0) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}(x_0) \ge 0$$

in contraddizione con $Lu < 0$ in Ω.

Resta da dimostrare il teorema nel caso più generale in cui $Lu \le 0$ in Ω. Si ponga $v(x) := e^{\gamma x_1}$ per ogni $x = (x_1, \dots, x_N) \in \Omega$ con $\gamma > 0$ costante da fissare in un secondo momento. Allora da (1.6) e (1.8) si ha che

$$Lv(x) = [-a_{11}(x)\gamma^2 + b_1(x)\gamma]e^{\gamma x_1} \le (-\gamma^2 + K_b\gamma)\lambda(x)e^{\gamma x_1} < 0 \qquad \text{in } \Omega \tag{1.13}$$

se fissiamo $\gamma > K_b$. Con questa scelta di v definiamo $u_\varepsilon := u + \varepsilon v \in C^2(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$ in modo tale che da (1.13) si abbia

$$Lu_\varepsilon = Lu + \varepsilon Lv < 0 \qquad \text{in } \Omega$$

per ogni $\varepsilon > 0$. Avendo già dimostrato la validità del teorema nel caso della disuguaglianza stretta, applicando tale risultato alla funzione u_ε si ottiene

$$\max_{\overline{\Omega}} u_\varepsilon = \max_{\partial\Omega} u_\varepsilon$$

per ogni $\varepsilon > 0$. Per $\varepsilon \to 0^+$ si arriva alla conclusione

$$\max_{\overline{\Omega}} u = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \max_{\overline{\Omega}} (u + \varepsilon v) = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \max_{\partial\Omega} (u + \varepsilon v) = \max_{\partial\Omega} u .$$

Questo conclude la dimostrazione del teorema. □

Nel Teorema 1.2.3 abbiamo supposto che $c \equiv 0$ in Ω. Nel caso in cui $c \ge 0$ vale la seguente versione del principio di massimo debole:

Corollario 1.2.4. *Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un aperto limitato e sia L l'operatore introdotto in (1.5). Supponiamo che L sia ellittico, che i coefficienti $b_1, \dots, b_N$ soddisfino (1.8) e che $c \geq 0$ in Ω. Sia ora $u \in C^2(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$ tale che $Lu \leq 0$ (u sottosoluzione) in Ω. Allora si ha che*

$$\max_{\overline{\Omega}} u \leq \max_{\partial\Omega} u^+ . \tag{1.14}$$

Dimostrazione. Se $u \leq 0$ in Ω la conclusione del corollario è ovvia. Possiamo quindi supporre che u sia positiva in almeno un punto di Ω ovvero che

$$\Omega^+ := \{x \in \Omega : u(x) > 0\} \neq \emptyset .$$

Per il Teorema di Permanenza del Segno l'insieme Ω^+ è aperto in $\mathbb{R}^N$. Sia ora L_0 l'operatore definito da $L_0 v = Lv - c(x)v$ per ogni $v \in C^2(\Omega)$. Essendo per ipotesi $Lu \leq 0$ allora

$$L_0 u(x) = Lu(x) - c(x)u(x) \leq -c(x)u(x) \leq 0 \qquad \text{per ogni } x \in \Omega^+ .$$

Applicando il Teorema 1.2.3 all'operatore L_0 e alla funzione u sul dominio Ω^+ se ne deduce che

$$\max_{\overline{\Omega^+}} u = \max_{\partial\Omega^+} u .$$

Pertanto esiste $x_0 \in \partial\Omega^+ \subset \overline{\Omega}$ tale che $u(x_0) = \max_{\overline{\Omega^+}} u > 0$. Affermiamo che $x_0 \in \partial\Omega$. Se così non fosse $x_0 \in \Omega$ e grazie al Teorema di Permanenza del Segno esisterebbe un intorno $U \subset \Omega$ di x_0 tale che $u(x) > 0$ per ogni $x \in U$, il che implica $U \subseteq \Omega^+$. In particolare x_0 è un punto interno a Ω^+ in contraddizione con $x_0 \in \partial\Omega^+$. Questo completa la dimostrazione della precedente affermazione. Dal fatto che $x_0 \in \partial\Omega$ possiamo concludere che

$$\max_{\overline{\Omega}} u = \max_{\overline{\Omega^+}} u = u(x_0) \leq \max_{\partial\Omega} u \leq \max_{\overline{\Omega}} u .$$

Questo dimostra che le precedenti disuguaglianze sono in realtà delle uguaglianze e che quindi $\max_{\overline{\Omega}} u = \max_{\partial\Omega} u = u(x_0) = \max_{\partial\Omega} u^+$. In particolare vale la disuguaglianza (1.14) che conclude la dimostrazione del teorema anche nel caso $\Omega^+ \neq \emptyset$. □

Va precisato che la disuguaglianza (1.14) può essere stretta come accade nel caso in cui la funzione u sia strettamente negativa su $\overline{\Omega}$. Si veda a tale proposito il seguente esempio:

Esempio 1.2.5. Sia $\Omega := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 1\}$ e sia L l'operatore definito da $Lv = -\Delta v + v$ per ogni $v \in C^2(\Omega)$. In questo esempio si ha che $c \equiv 1$ in Ω. Si consideri la funzione $u(x, y) = -x^2 - y^2 - 4$ in modo tale che

$$Lu = -x^2 - y^2 \leq 0 \qquad \text{per ogni } (x, y) \in \Omega .$$

In questa situazione valgono tutte le ipotesi del Corollario 1.2.4 ed inoltre la disuguaglianza (1.14) è stretta:

$$\max_{\overline{\Omega}} u = -4 < 0 = \max_{\partial\Omega} u^+ .$$

Va osservato che questo esempio fornisce anche una prova della non validità del Teorema 1.2.3 nel caso in cui la funzione c risulti essere non nulla. Infatti $\max_{\overline{\Omega}} u = -4$ mentre $\max_{\partial\Omega} u = -5$. □

Il prossimo esempio mostra che, nel caso in cui si omettano le ipotesi di non negatività su c, anche la conclusione del Corollario 1.2.4 potrebbe risultare falsa.

Esempio 1.2.6. Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un aperto limitato con frontiera sufficientemente regolare e supponiamo che L sia l'operatore definito da $Lv := -\Delta v - \kappa v$ con κ costante positiva che verrà fissata in un secondo momento. In questa situazione la funzione $c(x) = -\kappa < 0$ per ogni $x \in \Omega$ e quindi le ipotesi del Corollario 1.2.4 non vengono soddisfatte. Si consideri ora il seguente problema agli autovalori per l'operatore di Laplace con le condizioni al bordo di Dirichlet:

$$\begin{cases} -\Delta u = \kappa u & \text{in } \Omega \\ u = 0 & \text{su } \partial\Omega \,. \end{cases} \tag{1.15}$$

Se supponiamo che κ sia un autovalore dell'operatore di Laplace con le condizioni al bordo di Dirichlet allora il problema (1.15) ammette una soluzione non banale $u \in C^2(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$ che, a meno di essere scambiata con $-u$, risulta essere positiva in almeno un punto di Ω. In questo modo u risulta essere una soluzione di $Lu = 0$ ma

$$\max_{\overline{\Omega}} u > 0 = \max_{\partial\Omega} u^+ = \max_{\partial\Omega} u \,.$$

Questo esempio mostra la non validità delle conclusioni sia del Teorema 1.2.3 che del Corollario 1.2.4. □

Il prossimo obiettivo è quello di dimostrare la validità di un principio di massimo forte anche nel caso di operatori ellittici lineari del tipo (1.5). A tale scopo premettiamo la seguente

Definizione 1.2.7. *Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ aperto e sia $x_0 \in \partial\Omega$. Si dice che $\partial\Omega$ soddisfa la condizione della sfera interna in x_0 se esiste $y_0 \in \Omega$ ed esiste $R > 0$ tale che $B_R(y_0) \subset \Omega$ e $x_0 \in \partial B_R(y_0)$. Inoltre si dice che $\partial\Omega$ soddisfa la condizione della sfera interna se tale condizione viene soddisfatta in ogni punto $x \in \partial\Omega$.*

Possiamo a questo punto enunciare il seguente lemma:

Lemma 1.2.8. (di Hopf). *Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ un aperto e sia L l'operatore introdotto in (1.5). Supponiamo che L sia uniformemente ellittico e che i coefficienti $b_1, \dots, b_N$ soddisfino (1.8). Sia $u \in C^2(\Omega)$ tale che $Lu \leq 0$ (u subsoluzione) in Ω. Supponiamo inoltre che*

(a) u sia prolungabile per continuità in x_0;

(b) $u(x) < u(x_0)$ per ogni $x \in \Omega$;

(c) $\partial\Omega$ soddisfi la condizione della sfera interna in x_0.

Valgono le seguenti conclusioni:

(i) se $c \equiv 0$ in Ω allora la derivata normale esterna di u in x_0, nel caso in cui sia ben definita, soddisfa la disuguaglianza

$$\frac{\partial u}{\partial \nu}(x_0) > 0\,; \tag{1.16}$$

(ii) se $c \geq 0$ in Ω e c soddisfa (1.9) allora vale (1.16) sotto l'ulteriore condizione $u(x_0) \geq 0$;

(iii) se c soddisfa (1.9) e $u(x_0) = 0$ allora vale (1.16) senza ulteriori ipotesi sul segno di c.

Dimostrazione. Siano $y_0 \in \Omega$ e $R > 0$ tali che $B_R(y_0) \subset \Omega$ e $x_0 \in \partial B_R(y_0)$. Sia $r \in (0, R)$ fissato ad arbitrio e sia

$$v(x) := e^{-\alpha|x-y_0|^2} - e^{-\alpha R^2} \qquad \text{per ogni } x \in \overline{B_R(y_0) \setminus B_r(y_0)}$$

con $\alpha > 0$ da fissare in un secondo momento.

Mediante calcolo diretto, utilizzando le ipotesi (1.7), (1.8), (1.9), si ottiene per ogni $x \in \overline{B_R(y_0) \setminus B_r(y_0)}$

$$\begin{aligned}
Lv(x) &= e^{-\alpha|x-y_0|^2} \left[-4\alpha^2 \sum_{i,j=1}^N a_{ij}(x)(x_i - y_{0i})(x_j - y_{0j}) + 2\alpha \sum_{i=1}^N a_{ii}(x) \right] \\
&+ e^{-\alpha|x-y_0|^2} \left[-2\alpha \sum_{i=1}^N b_i(x)(x_i - y_{0i}) + c(x) \right] - e^{-\alpha R^2} c(x) \\
&\leq e^{-\alpha|x-y_0|^2} \left[-4\alpha^2 \lambda(x)|x - y_0|^2 + 2\alpha N \Lambda(x) + 2\alpha K_b \lambda(x) \sum_{i=1}^N |x_i - y_{0i}| + K_c \lambda(x) \right] \\
&\leq e^{-\alpha|x-y_0|^2} \lambda(x) \left(-4r^2\alpha^2 + 2NK_\Lambda \alpha + 2NRK_b\alpha + K_c \right) \leq 0
\end{aligned}$$

per α sufficientemente grande.

Essendo $u(x) < u(x_0)$ per ogni $x \in \Omega$ ed essendo $\partial B_r(y_0) \subset \Omega$ si ha che $\max\limits_{x\in\partial B_r(y_0)} (u(x) - u(x_0)) < 0$ e pertanto esiste $\varepsilon > 0$ tale che

$$u(x) - u(x_0) + \varepsilon v(x) \le 0 \qquad \text{per ogni } x \in \partial B_r(y_0)\,. \tag{1.17}$$

D'altra parte $v(x) = 0$ per ogni $x \in \partial B_R(y_0)$ e quindi si ha anche

$$u(x) - u(x_0) + \varepsilon v(x) \le 0 \qquad \text{per ogni } x \in \partial B_R(y_0)\,. \tag{1.18}$$

In entrambi i casi (i)-(ii) vale la seguente disuguaglianza

$$L(u(x) - u(x_0) + \varepsilon v(x)) = Lu(x) + \varepsilon Lv(x) - c(x)u(x_0) \le -c(x)u(x_0) \le 0 \tag{1.19}$$

per ogni $x \in B_R(y_0) \setminus \overline{B_r(y_0)}$.

Combinando (1.17), (1.18) e (1.19) e applicando alla funzione $u - u(x_0) + \varepsilon v$ il Teorema 1.2.3 e il Corollario 1.2.4 sul dominio aperto $A := B_R(y_0)\setminus\overline{B_r(y_0)}$ si ottiene

$$\max_{x\in\overline{A}} (u(x) - u(x_0) + \varepsilon v(x)) = \max_{x\in\partial A} (u(x) - u(x_0) + \varepsilon v(x)) \le 0 \qquad \text{se } c \equiv 0$$

$$\max_{x\in\overline{A}} (u(x) - u(x_0) + \varepsilon v(x)) \le \max_{x\in\partial A} (u(x) - u(x_0) + \varepsilon v(x))^+ \le 0 \qquad \text{se } c \ge 0\,.$$

In entrambi i casi (i)-(ii) possiamo dedurre che $u(x) - u(x_0) + \varepsilon v(x) \le 0$ per ogni $x \in A = B_R(y_0) \setminus \overline{B_r(y_0)}$ e quindi per ogni $t \in (r - R, 0)$ si ottiene

$$u(x_0 + t\nu) - u(x_0) \le -\varepsilon v(x_0 + t\nu) = -\varepsilon(v(x_0 + t\nu) - v(x_0))\,.$$

Passando al limite per $t \to 0^-$

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial \nu}(x_0) &= \lim_{t\to 0^-} \frac{u(x_0 + t\nu) - u(x_0)}{t} \ge -\varepsilon \lim_{t\to 0^-} \frac{v(x_0 + t\nu) - v(x_0)}{t} \\ &= -\varepsilon \frac{\partial v}{\partial \nu}(x_0) = -\varepsilon \nabla v(x_0) \cdot \frac{x_0 - y_0}{|x_0 - y_0|} = 2\varepsilon\alpha R e^{-\alpha R^2} > 0\,.\end{aligned}$$

Quest'ultima disuguaglianza completa la dimostrazione del lemma nei casi (i)-(ii). Rimane da considerare il caso (iii). Essendo $u(x) < u(x_0) = 0$ per ogni $x \in \Omega$, una volta introdotto l'operatore $\widetilde{L}$ definito da $\widetilde{L}v := Lv + c^-(x)v$ per ogni $v \in C^2(\Omega)$, si ottiene ($c^-(x) := -\min\{c(x), 0\}$)

$$\widetilde{L}u(x) = Lu(x) + c^-(x)u(x) \le 0 \qquad \text{per ogni } x \in \Omega\,.$$

Va inoltre osservato che l'operatore $\widetilde{L}$ è della forma

$$-\sum_{i,j=1}^{N} a_{ij}(x)\frac{\partial^2 v}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{N} b_i(x)\frac{\partial v}{\partial x_i} + \widetilde{c}(x)v \qquad \text{per ogni } v \in C^2(\Omega)$$

con $\widetilde{c} = c^+ \ge 0$ in Ω ed è quindi possibile applicare il punto (ii) e arrivare alla conclusione. □

Corollario 1.2.9. *Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ un aperto e sia L l'operatore introdotto in (1.5). Supponiamo che L sia uniformemente ellittico e che i coefficienti $b_1, \dots, b_N$ soddisfino (1.8). Sia $u \in C^2(\Omega)$ tale che $Lu \geq 0$ (u soprasoluzione) in Ω. Supponiamo inoltre che*

(a) u sia prolungabile per continuità in x_0;

(b) $u(x) > u(x_0)$ per ogni $x \in \Omega$;

(c) $\partial\Omega$ soddisfi la condizione della sfera interna in x_0.

Valgono le seguenti conclusioni:

(i) se $c \equiv 0$ in Ω allora la derivata normale esterna di u in x_0, nel caso in cui sia ben definita, soddisfa la disuguaglianza

$$\frac{\partial u}{\partial \nu}(x_0) < 0\,. \tag{1.20}$$

(ii) se $c \geq 0$ in Ω e c soddisfa (1.9) allora vale (1.20) sotto l'ulteriore condizione $u(x_0) \leq 0$;

(iii) se c soddisfa (1.9) e $u(x_0) = 0$ allora vale (1.20) senza ulteriori ipotesi sul segno di c.

Dimostrazione. Basta applicare il Lemma 1.2.8 alla funzione $-u$. □

Il Lemma di Hopf è uno strumento fondamentale per dimostrare il seguente principio di massimo forte:

Teorema 1.2.10. (principio del massimo forte). *Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ un aperto connesso e sia L l'operatore introdotto in (1.5). Supponiamo che L sia uniformemente ellittico e che i coefficienti $b_1, \dots, b_N$ soddisfino (1.8). Sia ora $u \in C^2(\Omega)$ tale che $Lu \leq 0$ (u sottosoluzione) in Ω. Valgono le seguenti conclusioni:*

(i) se $c \equiv 0$ in Ω e se esiste $x_0 \in \Omega$ tale che $u(x_0) = \sup_\Omega u$ allora u è costante in Ω;

(ii) se $c \geq 0$ in Ω e c soddisfa (1.9) si supponga che valgano le ulteriori ipotesi:

$$\sup_\Omega u \geq 0 \quad \text{ed esiste } x_0 \in \Omega \text{ tale che } u(x_0) = \sup_\Omega u\,;$$

allora u è costante in Ω.

(iii) se c soddisfa (1.9) (senza alcuna restrizione sul segno di c) si supponga che $\sup_\Omega u = 0$ e che esista $x_0 \in \Omega$ tale che $u(x_0) = \sup_\Omega u$; allora $u \equiv 0$ in Ω.

Dimostrazione. Supponiamo che esista $\bar{x} \in \Omega$ tale che $u(\bar{x}) = M := \sup_{\Omega} u$. Supponiamo per assurdo che u non sia costante in Ω in modo tale che

$$\Omega_M := \{x \in \Omega : u(x) < M\} \neq \emptyset \, .$$

Grazie al Teorema di Permanenza del Segno l'insieme Ω_M è aperto (sia in Ω sia in $\mathbb{R}^N$ essendo Ω aperto in $\mathbb{R}^N$).

Dimostriamo ora che

$$\partial\Omega_M \cap \Omega \neq \emptyset \, . \tag{1.21}$$

Supponiamo per assurdo che $\partial\Omega_M \cap \Omega = \emptyset$. Allora ogni punto di $\Omega \setminus \Omega_M$ è interno a $\Omega \setminus \Omega_M$ in quanto se così non fosse esisterebbe $x \in \Omega \setminus \Omega_M$ tale che $x \in \overline{\Omega}_M$ ed essendo $x \notin \Omega_M$ allora $x \in \partial\Omega_M$; in particolare si avrebbe che $x \in \partial\Omega_M \cap \Omega$ in contraddizione con $\partial\Omega_M \cap \Omega = \emptyset$. Abbiamo dimostrato che $\Omega \setminus \Omega_M$ è aperto in Ω e quindi Ω_M è chiuso in Ω. Essendo $\Omega_M \neq \emptyset$ contemporaneamente aperto e chiuso in Ω ed essendo Ω connesso deve valere $\Omega_M = \Omega$, in contraddizione con $u(\bar{x}) = M$. Questo conclude la dimostrazione di (1.21).

Da (1.21) si deduce che esiste $y_0 \in \Omega$ tale che $R := \mathrm{dist}(y_0, \partial\Omega_M) < \mathrm{dist}(y_0, \partial\Omega)$. Con questa scelta di y_0 possiamo affermare che

$$\overline{B_R(y_0)} \subset \Omega \, , \quad B_R(y_0) \subseteq \Omega_M \quad \text{e} \quad \partial B_R(y_0) \cap \partial\Omega_M \neq \emptyset \, .$$

Sia $z_0 \in \partial B_R(y_0) \cap \partial\Omega_M$. Essendo $z_0 \in \Omega \cap \partial\Omega_M$ dalla continuità di u in Ω si deduce che $u(z_0) = M$ (se così non fosse per il Teorema di Permanenza del Segno z_0 sarebbe interno a Ω_M).

Riassumendo si ha che $u(x) < M = u(z_0)$ per ogni $x \in B_R(y_0)$, $z_0 \in \partial B_R(y_0)$ e $Lu \leq 0$ in $B_R(y_0)$. Le ipotesi di questo teorema consentono di applicare il Lemma di Hopf in tutti e tre i casi (i)-(iii) e pertanto possiamo concludere che $\frac{\partial u}{\partial \nu}(z_0) > 0$ con ν normale esterna a $\partial B_R(y_0)$ in z_0. In particolare si deve avere $\nabla u(z_0) \neq 0$ e questo è assurdo in quanto z_0 è un punto di massimo interno a Ω. □

Osservazione 1.2.11. Nel caso (ii) del Teorema 1.2.10 si afferma che u deve essere costante in Ω. Nel caso in cui $c \not\equiv 0$, si può facilmente verificare che in realtà tale costante deve essere necessariamente nulla e quindi $u \equiv 0$ in Ω. Sia infatti $\tilde{x} \in \Omega$ tale che $c(\tilde{x}) > 0$ e sia $u(x) \equiv k \geq 0$ in Ω. Essendo u costante si ha

$$0 \geq Lu(\tilde{x}) = c(\tilde{x})k \geq 0$$

e quindi $c(\tilde{x})k = 0$ da cui segue $k = 0$ essendo $c(\tilde{x}) > 0$. □

Consideriamo ora l'equazione di Poisson associata all'operatore L su un aperto Ω con condizioni al bordo di Dirichlet:

$$\begin{cases} Lu = f & \text{in } \Omega \\ u = \varphi & \text{su } \partial\Omega \, . \end{cases} \tag{1.22}$$

In modo analogo a quanto fatto per l'equazione di Poisson con l'operatore di Laplace, possiamo dimostrare grazie al Teorema 1.2.3 e al Teorema 1.2.10, risultati analoghi al Teorema 1.1.8 e al Teorema 1.1.9.

Teorema 1.2.12. *Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ un aperto limitato connesso e sia L l'operatore introdotto in (1.5). Supponiamo che L sia uniformemente ellittico e che i coefficienti $b_1, \dots, b_N$ soddisfino (1.8). Siano $f \in C^0(\Omega)$, $\varphi \in C^0(\partial\Omega)$ tali che $f \geq 0$ in Ω e $\varphi \geq 0$ su $\partial\Omega$ e sia $u \in C^2(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$ una soluzione del problema (1.22). Valgono le seguenti conclusioni:*

(i) se $c \equiv 0$ in Ω allora valgono le seguenti alternative

$$u > 0 \textit{ in } \Omega \qquad \textit{oppure} \qquad u \equiv 0 \textit{ in } \Omega\,; \tag{1.23}$$

(ii) se $c \geq 0$ e c soddisfa (1.9) allora vale (1.23).

(iii) se c soddisfa (1.9) (senza alcuna restrizione sul segno di c) e se $u \geq 0$ in Ω allora vale (1.23).

Dimostrazione. Nel caso (i) applicando il Teorema 1.2.3 alla funzione $-u$, si deduce che $\min\limits_{\overline{\Omega}} u = \min\limits_{\partial\Omega} u \geq 0$. Nel caso (ii) applicando il Corollario 1.2.4 a $-u$, dal fatto che $\varphi \geq 0$ su $\partial\Omega$, si deduce che

$$\max_{\overline{\Omega}}(-u) \leq \max_{\partial\Omega}(-u)^+ = \max_{\partial\Omega}(-\varphi)^+ = 0\,.$$

Riassumendo possiamo affermare che sia nel caso (iii) per ipotesi che nei casi (i)-(ii) per quanto appena mostrato, la funzione u è non negativa su $\overline{\Omega}$.

Se esistesse un punto $x_0 \in \Omega$ tale che $u(x_0) = 0$ allora x_0 sarebbe un punto di minimo appartenente a Ω e applicando il Teorema 1.2.10 alla funzione $-u$ si concluderebbe che u è costante in $\overline{\Omega}$ e di conseguenza $u \equiv 0$ su $\overline{\Omega}$. □

Teorema 1.2.13. *Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ un aperto limitato connesso e sia L l'operatore introdotto in (1.5). Supponiamo che L sia uniformemente ellittico e che valgano (1.8), (1.9) e $c \geq 0$ in Ω. Siano $f \in C^0(\Omega)$ e $\varphi \in C^0(\partial\Omega)$. Siano $u_1, u_2 \in C^2(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$ soluzioni del problema (1.22). Allora $u_1 \equiv u_2$ su $\overline{\Omega}$.*

Dimostrazione. Siano u_1 e u_2 soluzioni di (1.22) e sia $w = u_1 - u_2$. Allora $w \in C^2(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$ è una soluzione del problema

$$\begin{cases} Lw = 0 & \text{in } \Omega \\ w = 0 & \text{su } \partial\Omega\,. \end{cases}$$

Applicando il Corollario 1.2.4 alla funzione w si ottiene

$$\max_{\overline{\Omega}} w \leq \max_{\partial\Omega} w^+ = 0$$

da cui $w \leq 0$ su $\overline{\Omega}$. Applicando ora il medesimo corollario alla funzione $-w$ si ottiene $-w \leq 0$ su $\overline{\Omega}$. In conclusione $w \equiv 0$ su $\overline{\Omega}$ e cioè $u_1 \equiv u_2$. □

Osservazione 1.2.14. Va osservato che l'ipotesi $c \geq 0$ nel Teorema 1.2.13 è fondamentale in quanto senza tale condizione il risultato potrebbe essere falso. Basta considerare l'operatore $Lv := -\Delta v - \kappa v$, $v \in C^2(\Omega)$, con $\kappa > 0$ autovalore del problema (1.15); in tale situazione si avrebbe $c \equiv -\kappa < 0$. È chiaro a questo punto che il problema

$$\begin{cases} Lu = 0 & \text{su } \Omega \\ u = 0 & \text{su } \partial\Omega \end{cases}$$

ammette come soluzioni tutte le (infinite) autofunzioni di κ. □

Un'altra conseguenza che segue dalla combinazione del principio di massimo forte e del Lemma di Hopf è un risultato di unicità, a meno di costanti additive, delle soluzioni della seguente equazione di Poisson con condizioni al bordo di Neumann:

$$\begin{cases} -\Delta u + c(x)u = f & \text{in } \Omega \\ \dfrac{\partial u}{\partial \nu} = \varphi & \text{su } \partial\Omega\,. \end{cases} \tag{1.24}$$

Vale infatti il seguente risultato:

Teorema 1.2.15. *Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un aperto limitato connesso soddisfacente la condizione della sfera interna e sia $c \geq 0$ una funzione soddisfacente (1.9). Siano $f \in C^0(\overline{\Omega})$ e $\varphi \in C^0(\partial\Omega)$. Siano $u_1, u_2 \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$ soluzioni del problema (1.24). Allora $u_1 - u_2$ è costante su $\overline{\Omega}$.*

Dimostrazione. Se poniamo $w = u_1 - u_2$ allora $w \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$ è una soluzione del problema

$$\begin{cases} -\Delta w + c(x)w = 0 & \text{in } \Omega \\ \dfrac{\partial w}{\partial \nu} = 0 & \text{su } \partial\Omega\,. \end{cases}$$

Supponiamo per assurdo che w non sia costante in Ω. A meno di scambiare w con $-w$ non è restrittivo supporre che w sia positiva in almeno un punto. Dal principio di massimo forte (Teorema 1.2.10) si deduce che $w(x) < \max_{\overline{\Omega}} w$ per ogni $x \in \Omega$ e che esiste $x_0 \in \partial\Omega$ tale che $w(x_0) = \max_{\overline{\Omega}} w$.

Possiamo ora applicare il Lemma di Hopf (Corollario 1.2.9) e concludere che $\frac{\partial w}{\partial \nu}(x_0) > 0$ in contraddizione con $\frac{\partial w}{\partial \nu} \equiv 0$ su $\partial\Omega$. □

Osservazione 1.2.16. Si osservi che se nel Teorema 1.2.15 la funzione $c \geq 0$ è diversa da zero in almeno un punto allora la funzione $w = u_1 - u_2$ è identicamente nulla e pertanto in tal caso si avrebbe $u_1 \equiv u_2$ e quindi l'unicità vera e propria. Soltanto nel caso $c \equiv 0$ si avrebbe soltanto un'unicità a meno di costanti additive; infatti se u è una soluzione di (1.24) allora $u + k$ è una soluzione di (1.24) per ogni costante $k \in \mathbb{R}$. $\square$

Capitolo 2

Risultati di simmetria per equazioni ellittiche semilineari

Il risultato principale di questo capitolo riguarda la simmetria delle soluzioni di un problema ellittico non lineare con condizioni al bordo di Dirichlet omogenee su una palla di raggio R centrata nell'origine. La dimostrazione di tale risultato dovuta a Gidas-Ni-Nirenberg [8] è ottenuta mediante l'utilizzo del metodo dei "piani mobili"; tale metodo sfrutta in maniera fondamentale i principi di massimo. La dimostrazione esposta in queste dispense non segue fedelmente quella contenuta in [8] ma risulta esserne una versione riveduta basata su [5].

2.1 Un principio di massimo su domini di misura "piccola"

Il principio di massimo che andremo ad enunciare è uno strumento di fondamentale importanza nella dimostrazione del risultato di simmetria che andremo ad esporre nel prossimo paragrafo. Si consideri una funzione u tale che

$$\begin{cases} -\Delta u + c(x)u \geq 0 & \text{in } \Omega \\ u \geq 0 & \text{su } \partial\Omega \end{cases} \tag{2.1}$$

con $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ aperto limitato. Dal Capitolo 1 sappiamo che se c è un coefficiente di segno non specificato, il principio di massimo non è valido e non è pertanto possibile in generale affermare che $u \geq 0$ in Ω. L'obiettivo è a questo punto quello di cercare di individuare una classe di domini sui quali valga ugualmente il principio di massimo nonostante vengano meno le ipotesi di segno su c.

Introduciamo ora alcune notazioni. Per ogni $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ aperto denotiamo con $C_c^\infty(\Omega)$ lo spazio delle funzioni $C^\infty(\Omega)$ il cui supporto è contenuto in Ω e con $\mathcal{D}^{1,2}(\Omega)$

il completamento dello spazio $C_c^\infty(\Omega)$ con la norma $\|\cdot\|_{\mathcal{D}^{1,2}(\Omega)}$ definita da

$$\|\varphi\|_{\mathcal{D}^{1,2}(\Omega)} = \left(\int_\Omega |\nabla\varphi(x)|^2 dx\right)^{1/2} \qquad \text{per ogni } \varphi \in C_c^\infty(\Omega)\,.$$

Osserviamo che $\mathcal{D}^{1,2}(\Omega) = H_0^1(\Omega)$ su tutti i domini sui quali vale la disuguaglianza di Poincaré come ad esempio nel caso in cui Ω sia un aperto limitato.

Ricordiamo che si dice essere valida la disuguaglianza di Poincarè su un aperto Ω di $\mathbb{R}^N$, se esiste una costante $C_P(N,\Omega)$ dipendente soltanto da N e da Ω tale che

$$\int_\Omega |v(x)|^2 dx \le C_P(N,\Omega)\int_\Omega |\nabla v(x)|^2 dx \qquad \text{per ogni } v \in H_0^1(\Omega)\,. \tag{2.2}$$

Siamo ora interessati a capire quale sia la struttura di $\mathcal{D}^{1,2}(\mathbb{R}^N)$ nel caso $N \ge 3$. Va osservato che nel caso in cui $\Omega = \mathbb{R}^N$ la disuguaglianza di Poincarè non vale. Tuttavia dalla disuguaglianza di Sobolev-Gagliardo-Nirenberg sappiamo che per ogni $N \ge 3$, esiste una costante positiva $C_S(N)$ dipendente solo da N tale che

$$\left(\int_{\mathbb{R}^N} |\varphi(x)|^{2^*} dx\right)^{2/2^*} \le C_S(N)\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla\varphi(x)|^2 dx \qquad \text{per ogni } \varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N) \tag{2.3}$$

dove $2^* = \frac{2N}{N-2}$ è l'esponente critico di Sobolev. Grazie a questa disuguaglianza deduciamo che per ogni $N \ge 3$, $\mathcal{D}^{1,2}(\mathbb{R}^N)$ non è altro che lo spazio delle funzioni $v \in L^{2^*}(\mathbb{R}^N)$ tali che $\nabla v \in L^2(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^N)$.

Dalla definizione stessa di $\mathcal{D}^{1,2}(\mathbb{R}^N)$ si deduce che la disuguaglianza (2.3) si estende a tutte le funzioni $\mathcal{D}^{1,2}(\mathbb{R}^N)$:

$$\left(\int_{\mathbb{R}^N} |v(x)|^{2^*} dx\right)^{2/2^*} \le C_S(N)\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla v(x)|^2 dx \qquad \text{per ogni } v \in \mathcal{D}^{1,2}(\mathbb{R}^N)\,. \tag{2.4}$$

Introduciamo ora la "miglior costante di Sobolev":

$$S_N := \inf_{\substack{v\in\mathcal{D}^{1,2}(\mathbb{R}^N)\\ v\not\equiv 0}} \frac{\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla v(x)|^2 dx}{\left(\int_{\mathbb{R}^N} |v(x)|^{2^*} dx\right)^{2/2^*}}\,.$$

Dalla disuguaglianza (2.4) si deduce che S_N è strettamente positiva.

Sia ora $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ con $N \ge 1$. Se $v \in H_0^1(\Omega)$ allora il suo prolungamento banale a tutto $\mathbb{R}^N$ definito da

$$\overline{v}(x) := \begin{cases} v(x) & \text{se } x \in \Omega \\ 0 & \text{se } x \in \mathbb{R}^N \setminus \Omega\,, \end{cases}$$

appartiene a $H^1(\mathbb{R}^N)$. Nel caso in cui $N \ge 3$, sappiamo che $H^1(\mathbb{R}^N) \subset L^{2^*}(\mathbb{R}^N)$ e che

$$\left(\int_{\mathbb{R}^N} |v(x)|^{2^*} dx\right)^{2/2^*} \le S_N^{-1}\left(\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla v(x)|^2 dx + \int_{\mathbb{R}^N} |v(x)|^2 dx\right)$$

per ogni $v \in H^1(\mathbb{R}^N)$. In base alle considerazioni precedenti su $\mathcal{D}^{1,2}(\mathbb{R}^N)$ possiamo affermare che $H^1(\mathbb{R}^N) \subset \mathcal{D}^{1,2}(\mathbb{R}^N)$ ed in particolare che $\overline{v} \in \mathcal{D}^{1,2}(\mathbb{R}^N)$.

Per ulteriori chiarimenti su spazi di Sobolev e questioni ad essi connesse si veda ad esempio [3].

Dalla definizione di S_N deduciamo inoltre che per ogni $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ aperto

$$\begin{aligned}\inf_{\substack{v\in H_0^1(\Omega)\\ v\neq 0}} \frac{\int_\Omega |\nabla v(x)|^2 dx}{\left(\int_\Omega |v(x)|^{2^*} dx\right)^{2/2^*}} &= \inf_{\substack{v\in H_0^1(\Omega)\\ v\neq 0}} \frac{\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla \overline{v}(x)|^2 dx}{\left(\int_{\mathbb{R}^N} |\overline{v}(x)|^{2^*} dx\right)^{2/2^*}} \\ &\geq \inf_{\substack{v\in \mathcal{D}^{1,2}(\mathbb{R}^N)\\ v\neq 0}} \frac{\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla v(x)|^2 dx}{\left(\int_{\mathbb{R}^N} |v(x)|^{2^*} dx\right)^{2/2^*}} = S_N\,.\end{aligned} \tag{2.5}$$

In realtà si può dimostrare che vale l'uguaglianza in (2.5).

Passiamo ora ad esaminare i casi $N = 1$ e $N = 2$. In tali dimensioni non esiste alcun esponente critico di Sobolev ma possiamo affermare che per $N \in \{1, 2\}$ si ha $H^1(\mathbb{R}^N) \subset L^p(\mathbb{R}^N)$ per ogni $2 \leq p < \infty$ (in dimensione $N = 1$ vale anche $H^1(\mathbb{R}^N) \subset L^\infty(\mathbb{R}^N)$) e che esiste una costante $C_S(N, p)$ dipendente solo da N e da p tale che per ogni $v \in H^1(\mathbb{R}^N)$

$$\left(\int_{\mathbb{R}^N} |v(x)|^p dx\right)^{2/p} \leq C_S(N,p)\left(\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla v(x)|^2 dx + \int_{\mathbb{R}^N} |v(x)|^2 dx\right)\,. \tag{2.6}$$

Sia ora $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, aperto limitato e sia $R > 0$ tale che $\Omega \subseteq B_R(0)$. Come già detto, se $v \in H_0^1(\Omega)$ allora il suo prolungamento banale $\overline{v}$ appartiene a $H^1(\mathbb{R}^N)$. Inoltre denotando ancora con $\overline{v}$ il prolungamento banale di v a $B_R(0)$ si ha che $\overline{v} \in H_0^1(B_R(0))$. Combinando tra loro (2.6) e la disuguaglianza di Poincarè in B_R deduciamo che

$$\left(\int_\Omega |v(x)|^p dx\right)^{2/p} \leq C(N,p,R)\int_\Omega |\nabla v(x)|^2 dx \qquad \text{per ogni } v \in H_0^1(\Omega) \tag{2.7}$$

con $C(N, p, R) := C_S(N, P)[1 + C_P(N, B_R(0))]$.

Abbiamo così ottenuto una disuguaglianza di tipo Poincarè-Sobolev in Ω con una costante $C(N, p, R)$ che non dipende del tutto dal dominio Ω ma soltanto dal raggio di una palla che lo contiene oltre che da N e p.

Possiamo a questo punto enunciare il seguente principio di massimo per le soluzioni di (2.1) nel caso di domini di misura piccola distinguendo i casi $N \geq 3$ e $N \in \{1, 2\}$.

Proposizione 2.1.1. *Sia $N \geq 3$. Se $K > 0$ è una costante fissata allora per ogni $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ aperto limitato tale che $|\Omega| < \left(\frac{S_N}{K}\right)^{N/2}$, per ogni $c \in L^\infty(\Omega)$ tale che $\|c\|_{L^\infty(\Omega)} \leq K$ e per ogni funzione $u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$ soddisfacente (2.1), si ha che $u \geq 0$ in Ω.*

In particolare se Ω è connesso e $u \not\equiv 0$ in Ω, allora grazie al principio di massimo forte si può concludere che $u > 0$ in Ω.

Dimostrazione. Poiché $u \in C^1(\overline{\Omega})$ e $u \geq 0$ su $\partial\Omega$ allora $u^- = -\min\{u, 0\} \in H_0^1(\Omega)$ (si proceda come nella dimostrazione di [3, Teorema IX.7]). Va precisato che quest'ultima implicazione è vera anche senza dover imporre condizioni di regolarità su $\partial\Omega$. Inoltre ricordiamo che

$$\nabla u^-(x) := \begin{cases} -\nabla u(x) & \text{per q.o. } x \in \{y \in \Omega : u(y) < 0\} \\ 0 & \text{per q.o. } x \in \Omega \setminus \{y \in \Omega : u(y) < 0\}\,. \end{cases} \tag{2.8}$$

Testando la disuguaglianza differenziale in (2.1) con funzioni $v \in H_0^1(\Omega)$, $v \geq 0$, si ottiene

$$\int_\Omega \nabla u(x) \cdot \nabla v(x)\, dx + \int_\Omega c(x)u(x)v(x)\, dx \geq 0 \qquad \text{per ogni } v \in H_0^1(\Omega), v \geq 0\,.$$

In particolar modo scegliendo $v = u^- \in H_0^1(\Omega)$, si ottiene grazie alla disuguaglianza di Hölder e a (2.5)

$$\begin{aligned} 0 &\leq \int_\Omega \nabla u(x) \cdot \nabla u^-(x)\, dx + \int_\Omega c(x)(u^+(x) - u^-(x))u^-(x)\, dx \\ &= -\int_\Omega |\nabla u^-(x)|^2 dx - \int_\Omega c(x)(u^-(x))^2 dx \\ &\leq -\int_\Omega |\nabla u^-(x)|^2 dx + \left(\int_\Omega |c(x)|^{\frac{N}{2}} dx\right)^{2/N} \left(\int_\Omega |u^-(x)|^{2^*} dx\right)^{2/2^*} \\ &\leq -\int_\Omega |\nabla u^-(x)|^2 dx + K|\Omega|^{2/N} \left(\int_\Omega |u^-(x)|^{2^*} dx\right)^{2/2^*} \\ &\leq (K|\Omega|^{2/N} S_N^{-1} - 1) \int_\Omega |\nabla u^-(x)|^2 dx \leq 0\,. \end{aligned}$$

Da questa catena di disuguaglianze e da (2.2) (la disuguaglianza di Poincarè vale in domini limitati) ne segue che

$$0 \leq \int_\Omega |u^-(x)|^2 dx \leq C(N, \Omega) \int_\Omega |\nabla u^-(x)|^2 dx = 0$$

dove l'ultima uguaglianza segue dal fatto che

$$(K|\Omega|^{2/N} S_N^{-1} - 1) \int_\Omega |\nabla u^-(x)|^2 dx = 0$$

e $K|\Omega|^{2/N} S_N^{-1} - 1 < 0$. Ne deduciamo quindi che $u^- = 0$ quasi ovunque in Ω. In conclusione $u \geq 0$ quasi ovunque in Ω ed essendo u continua in Ω tale disuguaglianza vale in realtà su tutto Ω.

Nel caso in cui Ω sia connesso e $u \not\equiv 0$, il fatto che $u > 0$ in Ω, segue immediatamente dal Teorema 1.2.12. □

Un risultato analogo alla Proposizione 2.1.1 si può dimostrare anche nei casi $N = 1$ e $N = 2$.

Proposizione 2.1.2. *Sia $N \in \{1, 2\}$. Siano $K > 0$, $p > 2$, $R > 0$ costanti fissate. Per ogni aperto $\Omega \subset B_R(0)$ tale che $|\Omega| < (C(N,p,R)K)^{-\frac{p}{p-2}}$, per ogni $c \in L^\infty(\Omega)$ tale che $\|c\|_{L^\infty(\Omega)} \leq K$ e per ogni funzione $u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$ soddisfacente* (2.1), *si ha che $u \geq 0$ in Ω.*

In particolare se Ω è connesso e $u \not\equiv 0$ in Ω, allora grazie al principio di massimo forte si può concludere che $u > 0$ in Ω.

Dimostrazione. Si procede esattamente come nella dimostrazione della Proposizione 2.1.1. L'unica differenza sta nella stima che coinvolge la funzione c. Utilizzando la disuguaglianza di Hölder con gli esponenti coniugati $\frac{p}{p-2}$ e $\frac{p}{2}$ e la disuguaglianza (2.7) si ottiene

$$\begin{aligned}\left|\int_\Omega c(x)(u^-(x))^2 dx\right| &\leq \left(\int_\Omega |c(x)|^{\frac{p}{p-2}}\right)^{\frac{p-2}{p}} \left(\int_\Omega |u^-(x)|^p dx\right)^{2/p} \\ &\leq K|\Omega|^{\frac{p-2}{p}} C(N,p,R) \int_\Omega |\nabla u^-(x)|^2 dx\,.\end{aligned}$$

Si arriva così alla conclusione

$$(K|\Omega|^{\frac{p-2}{p}} C(N,p,R) - 1) \int_\Omega |\nabla u^-(x)|^2 dx = 0 \tag{2.9}$$

con $K|\Omega|^{\frac{p-2}{p}} C(N,p,R) - 1 < 0$ grazie all'ipotesi su $|\Omega|$. □

2.2 Il metodo dei piani mobili

Si consideri il seguente problema di Dirichlet non lineare

$$\begin{cases} -\Delta u = f(u) & \text{in } B \\ u > 0 & \text{in } B \\ u = 0 & \text{su } \partial B \end{cases} \tag{2.10}$$

con $B_R := \{x \in \mathbb{R}^N : |x| < R\}$ palla aperta di raggio R centrata nell'origine e f lipschitziana in $\mathbb{R}$. Con soluzione di (2.10) intendiamo una funzione $u \in C^2(\overline{\Omega})$ che risolve (2.10) in senso classico.

Nelle ipotesi sopra elencate vale il seguente risultato:

Teorema 2.2.1. *Sia $u \in C^2(\overline{B})$ una soluzione di (2.10) con f lipschitziana in $\mathbb{R}$. Allora u è radialmente simmetrica e cioè $u(x) = u(y)$ per ogni $x, y \in B_R$ tali che $|x| = |y|$. In altre parole esiste una funzione $\widetilde{u} : [0, R] \to \mathbb{R}$ tale che $u(x) = \widetilde{u}(|x|)$ per ogni $x \in B_R$. Inoltre $\widetilde{u}'(r) < 0$ per ogni $r \in (0, R)$.*

Tale risultato è stato dimostrato in [8], si vedano anche [2, 5].

Prima di passare alla dimostrazione del Teorema 2.2.1 introduciamo alcune notazioni. Per ogni $x \in \mathbb{R}^N$ denotiamo con $x_1, \ldots, x_N$ le componenti di $x = (x_1, \ldots, x_N)$. Per ogni $\lambda \in \mathbb{R}$ si definiscano l'iperpiano

$$T_\lambda := \{x \in \mathbb{R}^N : x_1 = \lambda\}$$

e l'insieme aperto

$$\Sigma_\lambda := \{x \in B_R : x_1 > \lambda\} .$$

Inoltre per ogni $\lambda \in \mathbb{R}$ e per ogni $x = (x_1, \ldots, x_N) \in \mathbb{R}^N$ si definisca

$$x^\lambda := (2\lambda - x_1, x_2, \ldots, x_N)$$

la riflessione del punto x rispetto all'iperpiano T_λ.

Infine per ogni $\lambda \in \mathbb{R}$ sia

$$\Sigma'_\lambda := \{x^\lambda : x \in \Sigma_\lambda\}$$

la riflessione dell'insieme Σ_λ rispetto all'iperpiano T_λ.

Dimostrazione del Teorema 2.2.1. Sia $\lambda \in (0, R)$ e sia $w_\lambda(x) := u(x^\lambda) - u(x)$ per ogni $x \in \overline{\Sigma}_\lambda$. Si ha allora

$$\begin{aligned} -\Delta w_\lambda(x) &= -\Delta(u(x^\lambda)) + \Delta u(x) = -\Delta u(x^\lambda) + \Delta u(x) \\ &= f(u(x^\lambda)) - f(u(x)) = -c_\lambda(x) w_\lambda(x) \qquad \text{per ogni } x \in \Sigma_\lambda \end{aligned} \tag{2.11}$$

dove si è posto per ogni $x \in \Sigma_\lambda$

$$c_\lambda(x) := \begin{cases} \frac{f(u(x^\lambda)) - f(u(x))}{u(x) - u(x^\lambda)} & \text{se } u(x) \neq u(x^\lambda) \\ 0 & \text{se } u(x) = u(x^\lambda) . \end{cases}$$

Osserviamo che $\partial\Sigma_\lambda$ è costituito da una parte contenuta in ∂B_R e da una parte contenuta in T_λ. Essendo $u > 0$ in B_R e $u = 0$ su ∂B_R si ha che $w_\lambda(x) \geq 0$ per ogni $x \in \partial\Sigma_R \cap \partial B_R$. D'altra parte per ogni $x \in \partial\Sigma_R \cap T_\lambda$ si ha $w_\lambda(x) = 0$.

Pertanto da (2.11) si ha che $w_\lambda \in C^2(\overline{\Sigma}_\lambda)$ soddisfa

$$\begin{cases} -\Delta w_\lambda + c_\lambda(x) w_\lambda = 0 & \text{in } \Sigma_\lambda \\ w_\lambda \geq 0 & \text{su } \partial\Sigma_\lambda . \end{cases}$$

Detta L la costante di Lipschitz di f si ha allora

$$c_\lambda \in L^\infty(B_R) \qquad \text{e} \qquad \|c_\lambda\|_{L^\infty(B_R)} \leq L \qquad \text{per ogni } \lambda \in (0, R)\,.$$

Sia ora

$$\lambda_0 := \inf \Lambda$$

con

$$\Lambda := \{\mu \in (0, R) : w_\lambda > 0 \text{ in } \Sigma_\lambda \text{ per ogni } \lambda \in (\mu, R)\}\,.$$

Dalle Proposizioni 2.1.1-2.1.2 con $K = L$ deduciamo che se $|\Sigma_\lambda| < \left(\frac{S_N}{L}\right)^{N/2}$ nel caso $N \geq 3$, oppure $|\Sigma_\lambda| < (LC(N,p,R))^{-\frac{p}{p-2}}$ per un certo $p > 2$ fissato ad arbitrio nel caso $N \in \{1, 2\}$, allora $w_\lambda > 0$ in Σ_λ essendo $w_\lambda \not\equiv 0$ (si noti che $w_\lambda > 0$ su $\partial B_R \cap \Sigma_\lambda$). Affinché le condizioni sulla misura di Σ_λ vengano soddisfatte è sufficiente scegliere $\lambda \in (R - \delta, R)$ con $\delta > 0$ sufficientemente piccolo. Questo mostra che

$$\Lambda \neq \emptyset$$

e che quindi $\lambda_0 \in [0, R)$.

Vogliamo dimostrare che $\lambda_0 = 0$. Supponiamo per assurdo che $\lambda_0 > 0$. Poiché $w_\lambda > 0$ in Σ_λ per ogni $\lambda \in (\lambda_0, R)$ per definizione di λ_0, dalla continuità di u segue che $w_{\lambda_0} \geq 0$ in Σ_{λ_0}. Poiché $w_{\lambda_0} \not\equiv 0$ dal Teorema 1.2.12 (iii) si ottiene $w_{\lambda_0} > 0$ in Σ_{λ_0}. A questo punto si consideri un insieme compatto $C \subset \Sigma_{\lambda_0}$ tale che $|\Sigma_{\lambda_0} \setminus C| < \left(\frac{S_N}{L}\right)^{N/2}$ se $N \geq 3$ oppure $|\Sigma_{\lambda_0} \setminus C| < (LC(N,p,R))^{-\frac{p}{p-2}}$ se $N \in \{1, 2\}$.

Poichè $\min_C w_{\lambda_0} > 0$, per continuità esiste $\bar{\varepsilon} > 0$ tale che $\min_C w_{\lambda_0 - \varepsilon} > 0$ per ogni $\varepsilon \in (0, \bar{\varepsilon})$. Inoltre dalla continuità della misura di Lebesgue, a meno di scegliere $\bar{\varepsilon}$ più piccolo, si ha $|\Sigma_{\lambda_0 - \varepsilon} \setminus C| < \left(\frac{S_N}{L}\right)^{N/2}$ se $N \geq 3$ oppure $|\Sigma_{\lambda_0 - \varepsilon} \setminus C| < (LC(N,p,R))^{-\frac{p}{p-2}}$ se $N \in \{1, 2\}$, per ogni $\varepsilon \in (0, \bar{\varepsilon})$. Poiché $w_{\lambda_0 - \varepsilon}$ soddisfa

$$\begin{cases} -\Delta w_{\lambda_0 - \varepsilon} + c_{\lambda_0 - \varepsilon}(x) w_{\lambda_0 - \varepsilon} = 0 & \text{in } \Sigma_{\lambda_0 - \varepsilon} \setminus C \\ w_{\lambda_0 - \varepsilon} \geq 0 & \text{su } \partial(\Sigma_{\lambda_0 - \varepsilon} \setminus C)\,, \end{cases}$$

applicando le Proposizioni 2.1.1-2.1.2 in $\Sigma_{\lambda_0 - \varepsilon} \setminus C$ si ottiene $w_{\lambda_0 - \varepsilon} > 0$ in $\Sigma_{\lambda_0 - \varepsilon} \setminus C$ per ogni $\varepsilon \in (0, \bar{\varepsilon})$. Da quest'ultima affermazione e dal fatto che $\min_C w_{\lambda_0 - \varepsilon} > 0$ si deduce che $w_{\lambda_0 - \varepsilon} > 0$ in $\Sigma_{\lambda_0 - \varepsilon}$ per ogni $\varepsilon \in (0, \bar{\varepsilon})$. Questo contraddice la definizione di λ_0.

Abbiamo dimostrato che $\lambda_0 = 0$ e cioè che $w_\lambda > 0$ in Σ_λ per ogni $\lambda \in (0, R)$. Per continuità si ottiene che $w_0 \geq 0$ in Σ_0 e cioè

$$u(-x_1, x_2, \ldots, x_N) \geq u(x_1, x_2, \ldots, x_N) \qquad \text{per ogni } x = (x_1, \ldots, x_N) \in \Sigma_0\,. \tag{2.12}$$

Applicando lo stesso tipo di procedimento alla funzione

$$\widetilde{u}(x_1, x_2, \dots, x_N) := u(-x_1, x_2, \dots, x_N),$$

per ogni $x = (x_1, \dots, x_N) \in \Sigma_0$ si ottiene

$$u(x_1, x_2, \dots, x_N) = \widetilde{u}(-x_1, x_2, \dots, x_N) \geq \widetilde{u}(x_1, x_2, \dots, x_N) = u(-x_1, x_2, \dots, x_N)\,. \tag{2.13}$$

Si osservi che la funzione $\widetilde{u}$ è anch'essa una soluzione del problema (2.10). Combinando ora (2.12) e (2.13) si ottiene

$$u(-x_1, x_2, \dots, x_N) = u(x_1, x_2, \dots, x_N) \qquad \text{per ogni } x = (x_1, \dots, x_N) \in \Sigma_0\,. \tag{2.14}$$

In altre parole la funzione u è simmetrica rispetto all'iperpiano T_0.

Poiché l'operatore di Laplace è invariante per rotazioni lo stesso risultato di simmetria si può ottenere rispetto ad un qualunque iperpiano di $\mathbb{R}^N$ contenente l'origine.

Presi ora due punti $x, y \in B_R$ tali che $|x| = |y|$ è possibile determinare univocamente un iperpiano Π passante per l'origine in modo tale che y sia l'immagine di x attraverso la riflessione rispetto a Π. Grazie alla simmetria di u rispetto ad un qualunque iperpiano passante per l'origine, possiamo concludere che $u(x) = u(y)$.

Resta da dimostrare la disuguaglianza $\widetilde{u}'(r) < 0$ per ogni $r \in (0, R)$. Poichè $\widetilde{u}'(r) = \frac{\partial u}{\partial x_1}(r, 0, \dots, 0)$ per ogni $r \in (0, R)$, è sufficiente dimostrare che

$$\frac{\partial u}{\partial x_1}(r, 0, \dots, 0) < 0 \qquad \text{per ogni } r \in (0, R)\,. \tag{2.15}$$

Si consideri la funzione w_r. Tale funzione soddisfa

$$\begin{cases} -\Delta w_r + c_r(x) w_r = 0 & \text{in } \Sigma_r \\ w_r > 0 & \text{in } \Sigma_r \\ w_r = 0 & \text{su } \partial\Sigma_r \cap T_r\,. \end{cases}$$

Applicando il Lemma di Hopf (Corollario 1.2.9 (iii)) si ottiene $\frac{\partial w_r}{\partial \nu}(x) < 0$ per ogni $x \in \partial\Sigma_r \cap T_r$ ed essendo $\nu = (-1, 0, \dots, 0)$ si ha $\frac{\partial w_r}{\partial x_1}(x) > 0$. Per $x = (r, 0, \dots, 0) \in T_r$ si ottiene $\frac{\partial w_r}{\partial x_1}(r, 0, \dots, 0) > 0$. La dimostrazione di (2.15) segue dal fatto che dalla definizione di w_r vale

$$\frac{\partial w_r}{\partial x_1}(r, 0, \dots, 0) = -2\frac{\partial u}{\partial x_1}(r, 0, \dots, 0)\,. \qquad \square$$

Esercizio 2.2.2. Si dimostri che il Laplaciano è un operatore invariante per rotazioni e cioè

$$\Delta v(x) = \Delta u(Ax) \qquad \text{per ogni } x \in B_R \tag{2.16}$$

con $u \in C^2(B_R)$, $v(x) = u(Ax)$ e A matrice ortogonale.

Si suggerisce di dimostrare che equivalentemente a (2.16), *vale la seguente identità*

$$\int_{B_R} \Delta v(x)\varphi(x)\, dx = \int_{B_R} \Delta u(Ax)\varphi(x)\, dx \qquad \textit{per ogni } \varphi \in C_c^\infty(B_R)\,.$$

Si suggerisce inoltre di partire dall'identità

$$\int_{B_R} \Delta v(x)\varphi(x)\, dx = -\int_{B_R} \nabla v(x) \cdot \nabla\varphi(x)\, dx\,. \qquad \square$$

Capitolo 3

Regolarità per soluzioni di equazioni ellittiche

Il metodo variazionale è uno strumento estremamente efficace che consente di dimostrare l'esistenza di soluzioni di equazioni ellittiche lineari e non lineari mediante l'utilizzo di risultati astratti dell'analisi funzionale. Tuttavia le soluzioni ottenute con tale metodo appartengono in prima analisi soltanto ad un opportuno spazio di Sobolev mentre l'obiettivo di partenza era quello di dimostrare l'esistenza di soluzioni classiche. Per questo motivo è di fondamentale importanza sviluppare una teoria della regolarità che consenta, sotto opportune ipotesi, di dimostrare che le soluzioni trovate con il metodo variazionale sono in realtà soluzioni classiche. Questo è l'argomento che verrà affrontato in questo capitolo.

3.1 Regolarità H^2 per soluzioni di equazioni ellittiche lineari

Si consideri il seguente problema modello

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{in } \Omega \\ u = 0 & \text{su } \partial\Omega \end{cases} \tag{3.1}$$

con $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ aperto limitato, $f \in L^2(\Omega)$. È ben noto che grazie al Teorema di Lax-Milgram è possibile dimostrare che (3.1) ammette un'unica soluzione debole $u \in H_0^1(\Omega)$. Con soluzione debole di (3.1) si intende una funzione $u \in H_0^1(\Omega)$ tale che

$$\int_\Omega \nabla u(x) \cdot \nabla v(x)\, dx = \int_\Omega f(x)v(x)\, dx \qquad \text{per ogni } v \in H_0^1(\Omega)\,. \tag{3.2}$$

In base alla formulazione di (3.2) sappiamo soltanto che la funzione $u \in H_0^1(\Omega)$ e quindi che u ammette in prima analisi soltanto derivate deboli del primo ordine in

$L^2(\Omega)$. Ci si aspetterebbe che u ammetta derivate deboli fino al secondo ordine e che tali derivate appartengano a $L^2(\Omega)$. Questo risultato è sostanzialmente vero nel caso in cui $\partial\Omega$ sia sufficientemente regolare; se invece non si ha sufficiente regolarità del bordo si può comunque dimostrare che le derivate deboli del secondo ordine appartengono a $L^2_{\mathrm{loc}}(\Omega)$.

Ricordiamo che se $X(\Omega)$ è un certo spazio di funzioni definite su Ω (L^p o di Sobolev) diremo che $u \in X_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ se $u \in X(\omega)$ per ogni aperto $\omega \Subset \Omega$.

Il risultato sopra descritto si può estendere a equazioni lineari più generali del tipo

$$Lu = f \qquad \text{in } \Omega$$

dove L è un operatore ellittico in forma di divergenza della forma

$$Lu = -\sum_{i,j=1}^{N} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}(x)\frac{\partial u}{\partial x_j}\right) + \sum_{i=1}^{N} b_i(x)\frac{\partial u}{\partial x_i} + c(x)u \qquad \forall\, x \in \Omega, \tag{3.3}$$

per ogni $u \in C^2(\Omega)$. Si dice che tale operatore è scritto in forma di divergenza in quanto definita la matrice $A(x) = (a_{ij}(x))$ allora

$$Lu = -\mathrm{div}(A(x)\nabla u) + \sum_{i=1}^{N} b_i(x)\frac{\partial u}{\partial x_i} + c(x)u \qquad \forall\, x \in \Omega\,. \tag{3.4}$$

In (3.4) con $A(x)\nabla u(x)$ si intende l'usuale prodotto matriciale in cui però il gradiente deve essere considerato come vettore colonna.

Sia ora $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ un aperto (non necessariamente limitato). Nel resto di questo capitolo supporremo che i coefficienti dell'operatore soddisfino le seguenti ipotesi:

$$a_{ij} \in W^{1,\infty}(\Omega), \quad a_{ij} \equiv a_{ji} \text{ in } \Omega, \qquad \text{per ogni } i,j \in \{1,\dots,N\}\,, \tag{3.5}$$

esiste $\lambda_0 > 0$ tale che

$$\sum_{i,j=1}^{N} a_{ij}(x)\xi_i\xi_j \geq \lambda_0|\xi|^2 \qquad \text{per ogni } x \in \Omega, \quad \text{per ogni } \xi \in \mathbb{R}^N\,, \tag{3.6}$$

$$b_i \in L^\infty(\Omega) \quad \text{per ogni } i \in \{1,\dots,N\}\,, \qquad c \in L^\infty(\Omega)\,. \tag{3.7}$$

Va osservato che sotto queste ipotesi l'operatore L è riconducibile all'operatore L definito in (1.5). Infatti da (3.3) si ottiene

$$\begin{aligned} Lu &= -\sum_{i,j=1}^{N} a_{ij}(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x_i\partial x_j} - \sum_{j=1}^{N}\left(\sum_{i=1}^{N}\frac{\partial a_{ij}}{\partial x_i}(x)\right)\frac{\partial u}{\partial x_j} + \sum_{i=1}^{N} b_i(x)\frac{\partial u}{\partial x_i} + c(x)u \\ &= -\sum_{i,j=1}^{N} a_{ij}(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x_i\partial x_j} + \sum_{i=1}^{N}\widetilde{b}_i(x)\frac{\partial u}{\partial x_i} + c(x)u \end{aligned}$$

con $\widetilde{b}_i(x) = -\sum_{j=1}^{N} \frac{\partial a_{ij}}{\partial x_j}(x) + b_i(x)$.

Si consideri ora il seguente problema

$$\begin{cases} Lu = f & \text{in } \Omega \\ u = 0 & \text{su } \partial\Omega \end{cases} \tag{3.8}$$

con $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ aperto limitato e $f \in L^2(\Omega)$. Con soluzione debole di (3.8) intendiamo una funzione $u \in H_0^1(\Omega)$ tale che

$$\int_\Omega (A(x)\nabla u) \cdot \nabla v \, dx + \int_\Omega (\mathbf{b}(x) \cdot \nabla u) v \, dx + \int_\Omega c(x) uv \, dx = \int_\Omega fv \, dx$$

per ogni $v \in H_0^1(\Omega)$, dove abbiamo posto $\mathbf{b}(x) = (b_1(x), \dots, b_N(x))$.

L'obiettivo è quello di dimostrare che se $u \in H_0^1(\Omega)$ è una soluzione debole di (3.8) allora $u \in H^2(\Omega)$ tutte le volte che la frontiera di Ω è sufficientemente regolare e i coefficienti dell'operatore L soddisfano le ipotesi (3.5), (3.6), (3.7).

Analogo risultato può essere ottenuto per il problema di Neumann

$$\begin{cases} Lu = f & \text{in } \Omega \\ A\nabla u \cdot \nu = 0 & \text{su } \partial\Omega \end{cases} \tag{3.9}$$

il quale ammette una formulazione variazionale del tutto analoga a quella ottenuta per il problema (3.8): si dice che $u \in H^1(\Omega)$ è una soluzione debole di (3.9) se

$$\int_\Omega (A(x)\nabla u) \cdot \nabla v \, dx + \int_\Omega (\mathbf{b}(x) \cdot \nabla u) v \, dx + \int_\Omega c(x) uv \, dx = \int_\Omega fv \, dx$$

per ogni $v \in H^1(\Omega)$.

Il primo passo per arrivare ai risultati di regolarità su un aperto limitato in Ω è quello di considerare il seguente problema

$$Lu = f \qquad \text{in } \mathbb{R}^N . \tag{3.10}$$

Con soluzione debole di (3.10) si intende una funzione $u \in H^1(\mathbb{R}^N)$ tale che

$$\int_{\mathbb{R}^N} (A(x)\nabla u) \cdot \nabla v \, dx + \int_{\mathbb{R}^N} (\mathbf{b}(x) \cdot \nabla u) v(x) \, dx + \int_{\mathbb{R}^N} c(x) uv \, dx = \int_{\mathbb{R}^N} fv \, dx \tag{3.11}$$

per ogni $v \in H^1(\mathbb{R}^N)$.

All'enunciato del primo risultato di regolarità premettiamo il seguente lemma:

Lemma 3.1.1. *Sia $u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ con $1 \leq p \leq \infty$. Allora valgono le seguenti stime*

$$\left(\int_{\mathbb{R}^N} |u(x+y) - u(x)|^p dx \right)^{1/p} \leq |y| \left(\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u(x)|^p dx \right)^{1/p} \qquad \textit{per ogni } y \in \mathbb{R}^N \tag{3.12}$$

se $1 \le p < \infty$ *e*

$$|u(x+y) - u(x)| \le |y| \; \|\nabla u\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N,\mathbb{R}^N)} \qquad \text{per q.o. } x \in \mathbb{R}^N\,, \qquad \text{per ogni } y \in \mathbb{R}^N$$

se $p = \infty$, *dove abbiamo posto*

$$\|\nabla u\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N,\mathbb{R}^N)} := \operatorname*{ess\,sup}_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|$$

Dimostrazione. Per la dimostrazione si veda ad esempio [3, Proposizione IX.3]. Nel caso $p = 1$ si veda [3, OSSERVAZIONE 6]. □

Possiamo enunciare il risultato di regolarità per (3.10):

Teorema 3.1.2. *Sia* $\Omega = \mathbb{R}^N$, *sia* L *un operatore soddisfacente le ipotesi (3.5), (3.6), (3.7) e sia* $f \in L^2(\mathbb{R}^N)$. *Se* $u \in H^1(\mathbb{R}^N)$ *è una soluzione debole di (3.10) allora* $u \in H^2(\mathbb{R}^N)$. *Inoltre esiste una costante* C *dipendente soltanto da* N, $\|a_{ij}\|_{W^{1,\infty}(\mathbb{R}^N)}$, $\|b_i\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)}$, $\|c\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)}$, λ_0 *tale che*

$$\|u\|_{H^2(\mathbb{R}^N)} \le C\Big(\|f\|_{L^2(\mathbb{R}^N)} + \|u\|_{H^1(\mathbb{R}^N)}\Big)\,. \tag{3.13}$$

Dimostrazione. Nel corso di questa dimostrazione indicheremo con C una generica costante dipendente da N, $\|a_{ij}\|_{W^{1,\infty}(\mathbb{R}^N)}$, $\|b_i\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)}$, $\|c\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)}$, λ_0 che può variare nei vari passaggi.

Si tratta di dimostrare che le derivate deboli di u appartengono a $H^1(\mathbb{R}^N)$. Per un generico $i \in \{1,\dots,N\}$ si consideri la corrispondente derivata parziale $\frac{\partial u}{\partial x_i} \in L^2(\mathbb{R}^N)$.

Per ogni $h \in \mathbb{R}$ si definisca la funzione

$$u_h(x) := u(x + he_i) - u(x) \qquad \text{per q.o. } x \in \mathbb{R}^N\,.$$

Utilizzeremo un'analoga notazione per una qualunque funzione a valori reali o a valori matriciali.

L'equazione (3.10) può essere scritta nella versione semplificata

$$-\mathrm{div}(A(x)\nabla u) + \lambda_0 u = \widetilde{f} \qquad \text{in } \mathbb{R}^N \tag{3.14}$$

con $\widetilde{f} := f - \mathbf{b}\cdot\nabla u - cu + \lambda_0 u$. Si osservi che da (3.5) e (3.7) si ha $\widetilde{f} \in L^2(\mathbb{R}^N)$. Inoltre

$$\begin{aligned}\|\widetilde{f}\|_{L^2(\mathbb{R}^N)} &\le \|f\|_{L^2(\mathbb{R}^N)} + \left(\max_{1\le i\le N} \|b_i\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} + \|c\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} + \lambda_0\right) \|u\|_{H^1(\mathbb{R}^N)} \\ &\le C(\|f\|_{L^2(\mathbb{R}^N)} + \|u\|_{H^1(\mathbb{R}^N)})\,.\end{aligned} \tag{3.15}$$

Sia $v \in H^1(\mathbb{R}^N)$ e si consideri la funzione $v_{-h} \in H^1(\mathbb{R}^N)$. Testando l'equazione (3.14) con $v_{-h} \in H^1(\mathbb{R}^N)$ si ottiene

$$\int_{\mathbb{R}^N} (A(x)\nabla u(x)) \cdot \nabla v_{-h}(x)\,dx + \lambda_0 \int_{\mathbb{R}^N} u(x)v_{-h}(x)\,dx = \int_{\mathbb{R}^N} \widetilde{f}(x)v_{-h}(x)\,dx\,.$$

Il primo membro di quest'ultima identità può essere scritto nella forma

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}^N} (A(x)\nabla u(x)) \cdot \nabla v(x-he_i)\,dx - \int_{\mathbb{R}^N} (A(x)\nabla u(x)) \cdot \nabla v(x)\,dx \\
&\qquad + \lambda_0 \int_{\mathbb{R}^N} u(x)v(x-he_i)\,dx - \lambda_0 \int_{\mathbb{R}^N} u(x)v(x)\,dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^N} (A(x+he_i)\nabla u(x+he_i)) \cdot v(x)\,dx - \int_{\mathbb{R}^N} (A(x)\nabla u(x)) \cdot \nabla v(x)\,dx \\
&\qquad + \lambda_0 \int_{\mathbb{R}^N} u(x+he_i)v(x)\,dx - \lambda_0 \int_{\mathbb{R}^N} u(x)v(x)\,dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^N} (A(x)\nabla u_h(x)) \cdot \nabla v(x)\,dx + \int_{\mathbb{R}^N} (A_h(x)\nabla u_h(x)) \cdot \nabla v(x)\,dx \\
&\qquad + \int_{\mathbb{R}^N} (A_h(x)\nabla u(x)) \cdot \nabla v(x)\,dx + \lambda_0 \int_{\mathbb{R}^N} u_h(x)v(x)\,dx
\end{aligned}$$

e pertanto si ottiene

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}^N} (A(x)\nabla u_h(x)) \cdot \nabla v(x)\,dx + \lambda_0 \int_{\mathbb{R}^N} u_h(x)v(x)\,dx \\
&\quad = \int_{\mathbb{R}^N} \widetilde{f}(x)v_{-h}(x)\,dx - \int_{\mathbb{R}^N} (A_h(x)\nabla u_h(x)) \cdot \nabla v(x)\,dx \\
&\qquad - \int_{\mathbb{R}^N} (A_h(x)\nabla u(x)) \cdot \nabla v(x)\,dx
\end{aligned} \tag{3.16}$$

per ogni $v \in H^1(\mathbb{R}^N)$. Stimiamo ora i tre termini a secondo membro di (3.16). Utilizzando il Lemma 3.1.1 e (3.15) si ottiene

$$\begin{aligned}
&\left|\int_{\mathbb{R}^N} \widetilde{f}(x)v_{-h}(x)\,dx\right| \le \|\widetilde{f}\|_{L^2(\mathbb{R}^N)}\|v_{-h}\|_{L^2(\mathbb{R}^N)} \\
&\le |h|\ \|\widetilde{f}\|_{L^2(\mathbb{R}^N)} \left(\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla v(x)|^2 dx\right)^{1/2} \le |h|\ \|\widetilde{f}\|_{L^2(\mathbb{R}^N)}\|v\|_{H^1(\mathbb{R}^N)} \\
&\le C|h|\ \Big(\|f\|_{L^2(\mathbb{R}^N)} + \|u\|_{H^1(\mathbb{R}^N)}\Big)\|v\|_{H^1(\mathbb{R}^N)}\,.
\end{aligned} \tag{3.17}$$

Passiamo al secondo termine; utilizzando ancora il Lemma 3.1.1 si ottiene

$$
\begin{aligned}
&\left|\int_{\mathbb{R}^N} (A_h(x)\nabla u_h(x)) \cdot \nabla v(x)\, dx\right| \le \int_{\mathbb{R}^N} |A_h(x)\nabla u_h(x)|\; |\nabla v(x)|\, dx \qquad (3.18)\\
&\le \left(\int_{\mathbb{R}^N} |A_h(x)\nabla u_h(x)|^2 dx\right)^{1/2} \left(\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla v(x)|^2\, dx\right)^{1/2}\\
&= \left(\int_{\mathbb{R}^N} \sum_{i=1}^N \left(\sum_{j=1}^N (a_{ij})_h \frac{\partial u_h}{\partial x_j}\right)^2 dx\right)^{1/2} \left(\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla v(x)|^2\, dx\right)^{1/2}\\
&\le \left(2\int_{\mathbb{R}^N} \sum_{i=1}^N \left(\sum_{j=1}^N ((a_{ij})_h)^2 \left(\frac{\partial u_h}{\partial x_j}\right)^2\right) dx\right)^{1/2} \|v\|_{H^1(\mathbb{R}^N)}\\
&\le \left(2h^2 \max_{1\le i,j\le N} \|\nabla a_{ij}\|^2_{L^\infty(\mathbb{R}^N,\mathbb{R}^N)} N \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u_h|^2 dx\right)^{1/2} \|v\|_{H^1(\mathbb{R}^N)}\\
&\le \sqrt{2N}|h| \max_{1\le i,j\le N} \|a_{ij}\|_{W^{1,\infty}(\mathbb{R}^N)} \|u_h\|_{H^1(\mathbb{R}^N)} \|v\|_{H^1(\mathbb{R}^N)}\\
&\le 2\sqrt{2N}|h| \max_{1\le i,j\le N} \|a_{ij}\|_{W^{1,\infty}(\mathbb{R}^N)} \|u\|_{H^1(\mathbb{R}^N)} \|v\|_{H^1(\mathbb{R}^N)}\\
&= C|h|\; \|u\|_{H^1(\mathbb{R}^N)} \|v\|_{H^1(\mathbb{R}^N)}\,.
\end{aligned}
$$

Analoga stima si può ottenere per il terzo termine:

$$
\left|\int_{\mathbb{R}^N} (A_h(x)\nabla u(x)) \cdot \nabla v(x)\, dx\right| \le C|h|\; \|u\|_{H^1(\mathbb{R}^N)} \|v\|_{H^1(\mathbb{R}^N)}\,. \qquad (3.19)
$$

Scegliendo $v = u_h$ in (3.16), utilizzando (3.6) e le stime (3.17), (3.18), (3.19), si ottiene

$$
\begin{aligned}
\lambda_0 \|u_h\|^2_{H^1(\mathbb{R}^N)} &\le \int_{\mathbb{R}^N} (A(x)\nabla u_h(x)) \cdot \nabla u_h(x)\, dx + \lambda_0 \int_{\mathbb{R}^N} |u_h(x)|^2\, dx\\
&\le C|h|\Big(\|f\|_{L^2(\mathbb{R}^N)} + \|u\|_{H^1(\mathbb{R}^N)}\Big) \|u_h\|_{H^1(\mathbb{R}^N)}
\end{aligned}
$$

e cioè

$$
\left\|\frac{u_h}{h}\right\|_{H^1(\mathbb{R}^N)} \le C(\|f\|_{L^2(\mathbb{R}^N)} + \|u\|_{H^1(\mathbb{R}^N)})\,. \qquad (3.20)
$$

È ben noto che in uno spazio di Banach riflessivo ogni insieme limitato è debolmente sequenzialmente precompatto e cioè da ogni successione in tale insieme limitato è possibile estrarre una sottosuccessione convergente debolmente ad un elemento dello spazio (non necessariamente appartenente all'insieme limitato). Essendo in particolare $H^1(\mathbb{R}^N)$ uno spazio di Banach riflessivo ed essendo l'insieme

$$
\left\{\frac{u_h}{h} : h \in \mathbb{R}\right\}
$$

limitato grazie a (3.20), è possibile costruire una successione $\{h_n\} \subset \mathbb{R}$ tale che $h_n \to 0$ e tale che $\{u_{h_n}/h_n\}$ converga debolmente in $H^1(\mathbb{R}^N)$ ad una funzione $v_i \in H^1(\mathbb{R}^N)$.

Si tratta di dimostrare che $v_i = \frac{\partial u}{\partial x_i}$. Sia $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$; grazie alla convergenza debole $u_{h_n}/h_n \rightharpoonup v$ e al Teorema di Convergenza Dominata si ha

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^N} v_i(x)\varphi(x)\,dx &= \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{h_n}\int_{\mathbb{R}^N} [u(x+h_ne_i)-u(x)]\varphi(x)\,dx \\
&= \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{h_n}\int_{\mathbb{R}^N} u(x)\varphi(x-h_ne_i)\,dx - \frac{1}{h_n}\int_{\mathbb{R}^N} u(x)\varphi(x)\,dx\right) \\
&= \lim_{n\to+\infty}\int_{\mathbb{R}^N} u(x)\frac{\varphi(x-h_ne_i)-\varphi(x)}{h_n}\,dx \\
&= \lim_{n\to+\infty} -\int_{\mathbb{R}^N} u(x)\frac{\varphi(x+k_ne_i)-\varphi(x)}{k_n}\,dx = -\int_{\mathbb{R}^N} u(x)\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}(x)\,dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^N} \frac{\partial u}{\partial x_i}(x)\varphi(x)\,dx
\end{aligned}$$

dove l'ultimo passaggio segue dalla definizione di derivata debole. La possibilità di applicare il Teorema di Convergenza Dominata segue dal fatto che esiste un compatto $K \subset \mathbb{R}^N$ indipendente da n tale che $\operatorname{supp}\frac{\varphi_{k_n}}{k_n} \subset K$ per ogni $n \geq 1$ e inoltre dal Lemma 3.1.1 $\|\frac{\varphi_{k_n}}{k_n}\|_{L^\infty(K)} \leq \|\nabla\varphi\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N,\mathbb{R}^N)}$ per ogni $n \geq 1$.

Abbiamo dimostrato che per ogni $i \in \{1,\dots,N\}$, $\frac{\partial u}{\partial x_i} = v_i \in H^1(\mathbb{R}^N)$ ed in particolare che

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_j \partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right) \in L^2(\mathbb{R}^N)$$

per ogni $i,j \in \{1,\dots,N\}$. Questo dimostra che $u \in H^2(\mathbb{R}^N)$.

Inoltre, la semicontinuità inferiore della norma $H^1(\mathbb{R}^N)$ rispetto alla topologia debole implica

$$\left\|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right\|_{H^1(\mathbb{R}^N)} = \|v_i\|_{H^1(\mathbb{R}^N)} \leq \liminf_{n\to+\infty}\left\|\frac{u_{h_n}}{h_n}\right\|_{H^1(\mathbb{R}^N)} \leq C\Big(\|f\|_{L^2(\mathbb{R}^N)} + \|u\|_{H^1(\mathbb{R}^N)}\Big)$$

ed in particolare che per ogni $i,j \in \{1,\dots,N\}$

$$\left\|\frac{\partial^2 u}{\partial x_j \partial x_i}\right\|_{L^2(\mathbb{R}^N)} \leq C\Big(\|f\|_{L^2(\mathbb{R}^N)} + \|u\|_{H^1(\mathbb{R}^N)}\Big).$$

Possiamo quindi concludere

$$\|u\|_{H^2(\mathbb{R}^N)} \leq C(\|f\|_{L^2(\mathbb{R}^N)} + \|u\|_{H^1(\mathbb{R}^N)}).$$

Quest'ultima stima conclude la dimostrazione del teorema. □

Il passo successivo è quello di considerare un dominio che a differenza di $\mathbb{R}^N$ abbia una frontiera non vuota. Un semplice esempio di una situazione come questa è dato da

$$\mathbb{R}^N_+ := \{(x_1, \dots, x_N) \in \mathbb{R}^N : x_N > 0\}.$$

Si consideri pertanto l'equazione

$$Lu = f \qquad \text{in } \mathbb{R}^N_+ . \tag{3.21}$$

L'equazione (3.21) sarà accompagnata da condizioni di Dirichlet o Neumann su $\partial\mathbb{R}^N_+$:

$$\begin{cases} Lu = f & \text{in } \mathbb{R}^N_+ \\ u = 0 & \text{su } \partial\mathbb{R}^N_+ \end{cases} \tag{3.22}$$

oppure

$$\begin{cases} Lu = f & \text{in } \mathbb{R}^N_+ \\ (A\nabla u)\cdot\nu = 0 & \text{su } \partial\mathbb{R}^N_+ . \end{cases} \tag{3.23}$$

Per i problemi (3.22), (3.23) è possibile fornire una formulazione variazionale comune: trovare una funzione $u \in V$ tale che

$$\int_{\mathbb{R}^N_+} (A(x)\nabla u)\cdot\nabla v\,dx + \int_{\mathbb{R}^N_+} (\mathbf{b}(x)\cdot\nabla u)v\,dx + \int_{\mathbb{R}^N_+} c(x)uv\,dx = \int_{\mathbb{R}^N_+} fv\,dx \tag{3.24}$$

per ogni $v \in V$, con $V = H^1_0(\mathbb{R}^N_+)$ per il problema (3.22) e $V = H^1(\mathbb{R}^N_+)$ per il problema (3.23). Verifichiamo che nel caso $V = H^1(\mathbb{R}^N_+)$, il problema (3.24) corrisponde effettivamente all'equazione $Lu = f$ in $\mathbb{R}^N_+$ con le condizioni al bordo di Neumann.

Iniziamo a considerare una soluzione classica u di (3.23) e sia $\varphi \in C^\infty_c(\overline{\mathbb{R}^N_+})$ una funzione test. Moltiplicando ambo i membri dell'equazione differenziale per φ e integrando su $\mathbb{R}^N_+$ si ottiene grazie al Teorema della Divergenza e alla condizione di Neumann

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}^N_+} f\varphi\,dx = \int_{\mathbb{R}^N_+} -\mathrm{div}(A(x)\nabla u)\varphi\,dx + \int_{\mathbb{R}^N_+} (\mathbf{b}(x)\cdot\nabla u)\varphi + c(x)u\varphi)\,dx \\
&= -\int_{\partial\mathbb{R}^N_+} [(A(x)\nabla u)\cdot\nu]\varphi\,dS + \int_{\mathbb{R}^N_+} [(A(x)\nabla u)\cdot\nabla\varphi + (\mathbf{b}(x)\cdot\nabla u)\varphi + c(x)u\varphi]\,dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^N_+} [(A(x)\nabla u)\cdot\nabla\varphi + (\mathbf{b}(x)\cdot\nabla u)\varphi + c(x)u\varphi]\,dx
\end{aligned}$$

e cioè (3.24) con $v = \varphi \in C^\infty_c(\overline{\mathbb{R}^N_+})$. La validità di (3.24) per tutte le $v \in H^1(\mathbb{R}^N)$ segue dalla densità di $C^\infty_c(\overline{\mathbb{R}^N_+})$ in $H^1(\mathbb{R}^N_+)$. Viceversa supponiamo che valga (3.24).

Scegliendo $v = \varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}_+^N)$ in (3.24) si ottiene grazie al Teorema della Divergenza

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}_+^N} \operatorname{div}(A(x)\nabla u)\varphi\,dx &= \int_{\partial\mathbb{R}_+^N} [(A(x)\nabla u)\cdot\nu]\varphi\,dS - \int_{\mathbb{R}_+^N} (A(x)\nabla u)\cdot\nabla\varphi\,dx \\ &= \int_{\mathbb{R}_+^N} [(\mathbf{b}(x)\cdot\nabla u)\varphi + c(x)u\varphi - f\varphi]\,dx \qquad \text{per ogni } \varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}_+^N)\,.\end{aligned}$$

Questo significa che

$$-\operatorname{div}(A(x)\nabla u) + \mathbf{b}(x)\cdot\nabla u + c(x)u = f \qquad \text{q.o. in } \mathbb{R}_+^N\,. \tag{3.25}$$

Scegliendo ora $v = \varphi \in C_c^\infty(\overline{\mathbb{R}_+^N})$ in (3.24) e utilizzando ancora il Teorema della Divergenza si ottiene

$$\int_{\mathbb{R}_+^N} [-\operatorname{div}(A(x)\nabla u) + \mathbf{b}(x)\cdot\nabla u + c(x)u - f]\varphi\,dx + \int_{\partial\mathbb{R}_+^N} [(A(x)\nabla u)\cdot\nu]\varphi\,dS = 0\,.$$

Grazie a (3.25) possiamo allora concludere che

$$\int_{\partial\mathbb{R}_+^N} [(A(x)\nabla u)\cdot\nu]\varphi\,dS = 0 \qquad \text{per ogni } \varphi \in C_c^\infty(\overline{\mathbb{R}_+^N})$$

e grazie all'arbitrarietà di φ ciò implica

$$(A(x)\nabla u)\cdot\nu = 0 \qquad \text{q.o. su } \partial\mathbb{R}_+^N\,.$$

Passiamo a enunciare e dimostrare il risultato di regolarità per le soluzioni di (3.24):

Teorema 3.1.3. *Sia $\Omega = \mathbb{R}_+^N$, sia L un operatore soddisfacente le ipotesi (3.5), (3.6), (3.7) e sia $f \in L^2(\mathbb{R}_+^N)$. Se $u \in V$ è una soluzione di (3.24) con $V = H_0^1(\mathbb{R}_+^N)$ oppure $V = H^1(\mathbb{R}_+^N)$ allora $u \in H^2(\mathbb{R}_+^N)$. Inoltre esiste una costante C dipendente soltanto da N, $\|a_{ij}\|_{W^{1,\infty}(\mathbb{R}_+^N)}$, $\|b_i\|_{L^\infty(\mathbb{R}_+^N)}$, $\|c\|_{L^\infty(\mathbb{R}_+^N)}$, λ_0 tale che*

$$\|u\|_{H^2(\mathbb{R}_+^N)} \le C\Big(\|f\|_{L^2(\mathbb{R}_+^N)} + \|u\|_{H^1(\mathbb{R}_+^N)}\Big)\,. \tag{3.26}$$

Dimostrazione. Come nel caso del problema in $\mathbb{R}^N$ sarà sufficiente dimostrare che per ogni $1 \le i \le N$ si ha $\frac{\partial u}{\partial x_i} \in H^1(\mathbb{R}_+^N)$. Se $1 \le i \le N-1$ si può procedere esattamente come nella dimostrazione del Teorema 3.1.2 in quanto per ogni $h \in \mathbb{R}$ e per ogni $x \in \mathbb{R}_+^N$ si ha $x + he_i \in \mathbb{R}_+^N$ ed è pertanto possibile definire gli incrementi u_h, v_h, A_h.

In definitiva si riesce a dimostrare che se $1 \le i \le N-1$, $\frac{\partial u}{\partial x_i} \in H^1(\mathbb{R}_+^N)$ e inoltre

$$\left\|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right\|_{H^1(\mathbb{R}_+^N)} \le C\Big(\|f\|_{L^2(\mathbb{R}^N)} + \|u\|_{H^1(\mathbb{R}_+^N)}\Big)\,.$$

Questo significa che

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 u}{\partial x_j \partial x_i} \in L^2(\mathbb{R}^N_+) \quad \text{e} \quad \left\| \frac{\partial^2 u}{\partial x_j \partial x_i} \right\|_{L^2(\mathbb{R}^N_+)} \leq C\Big(\|f\|_{L^2(\mathbb{R}^N)} + \|u\|_{H^1(\mathbb{R}^N_+)} \Big) \tag{3.27}$$

a patto che almeno uno tra i e j sia strettamente minore di N.

Resterebbe soltanto da dimostrare che $\frac{\partial^2 u}{\partial x_N^2} \in L^2(\mathbb{R}^N_+)$.

Da (3.24) e dalla definizione di derivata debole sappiamo che per ogni $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N_+)$,

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^N_+} a_{NN}(x) \frac{\partial u}{\partial x_N} \frac{\partial \varphi}{\partial x_N}\, dx = &- \sum_{\substack{i,j=1 \\ (i,j)\neq(N,N)}}^{N} \int_{\mathbb{R}^N_+} a_{ij}(x) \frac{\partial u}{\partial x_j} \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}\, dx \\
&+ \int_{\mathbb{R}^N_+} (-\mathbf{b}(x)\cdot \nabla u - c(x) u + f)\varphi\, dx \\
= &\int_{\mathbb{R}^N_+} \sum_{\substack{i,j=1 \\ (i,j)\neq(N,N)}}^{N} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}(x) \frac{\partial u}{\partial x_j}\right) \varphi\, dx + \int_{\mathbb{R}^N_+} (-\mathbf{b}(x)\cdot \nabla u - c(x) u + f)\varphi\, dx \\
= &\int_{\mathbb{R}^N_+} g(x)\varphi(x)\, dx
\end{aligned} \tag{3.28}$$

con

$$\begin{aligned}
g :=& \sum_{\substack{i,j=1 \\ (i,j)\neq(N,N)}}^{N} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}(x) \frac{\partial u}{\partial x_j}\right) - \mathbf{b}(x)\cdot \nabla u - c(x) u + f \\
=& \sum_{\substack{i,j=1 \\ (i,j)\neq(N,N)}}^{N} a_{ij}(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{\substack{i,j=1 \\ (i,j)\neq(N,N)}}^{N} \frac{\partial a_{ij}}{\partial x_i} \frac{\partial u}{\partial x_j} - \mathbf{b}(x)\cdot \nabla u - c(x) u + f\,.
\end{aligned}$$

Da (3.5), (3.7) e (3.27) si deduce che $g \in L^2(\mathbb{R}^N_+)$ e che

$$\|g\|_{L^2(\mathbb{R}^N_+)} \leq C\Big(\|f\|_{L^2(\mathbb{R}^N_+)} + \|u\|_{H^1(\mathbb{R}^N_+)} \Big)\,. \tag{3.29}$$

Inoltre da (3.28) e dalla definizione di derivata debole si deduce che $a_{NN} \frac{\partial u}{\partial x_N}$ ammette derivata debole rispetto a x_N e inoltre

$$\frac{\partial}{\partial x_N}\left(a_{NN}(x) \frac{\partial u}{\partial x_N}\right) = -g\,. \tag{3.30}$$

Infine si ha

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 u}{\partial x_N^2} &= \frac{\partial}{\partial x_N}\left(\frac{1}{a_{NN}(x)}\, a_{NN}(x)\frac{\partial u}{\partial x_N}\right) \\
&= -\frac{1}{a_{NN}(x)}\,\frac{\partial a_{NN}}{\partial x_N}\frac{\partial u}{\partial x_N} + \frac{1}{a_{NN}(x)}\,\frac{\partial}{\partial x_N}\left(a_{NN}(x)\frac{\partial u}{\partial x_N}\right) \\
&= -\frac{1}{a_{NN}(x)}\left(g + \frac{\partial a_{NN}}{\partial x_N}\frac{\partial u}{\partial x_N}\right).
\end{aligned}$$

Pertanto, da (3.5), (3.6), (3.29) e (3.30) si deduce che $\frac{\partial^2 u}{\partial x_N^2} \in L^2(\mathbb{R}^N_+)$ e inoltre

$$\begin{aligned}
\left\|\frac{\partial^2 u}{\partial x_N^2}\right\|_{L^2(\mathbb{R}^N_+)} &\le \frac{1}{\lambda_0}\left(\|g\|_{L^2(\mathbb{R}^N_+)} + \|a_{NN}\|_{W^{1,\infty}(\mathbb{R}^N_+)}\left\|\frac{\partial u}{\partial x_N}\right\|_{L^2(\mathbb{R}^N_+)}\right) \\
&\le C\Big(\|f\|_{L^2(\mathbb{R}^N_+)} + \|u\|_{H^1(\mathbb{R}^N_+)}\Big).
\end{aligned}$$

Questo completa la dimostrazione del teorema. □

Il passo successivo è quello di considerare il problema

$$Lu = f \qquad \text{in } \Omega \tag{3.31}$$

con $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ aperto. Precisiamo che Ω potrebbe essere anche non limitato; inoltre non è richiesto che Ω soddisfi una qualche condizione di regolarità della frontiera.

Consideriamo soluzioni $u \in H^1(\Omega)$ che risolvono (3.31) nel senso delle distribuzioni e cioè tali che

$$\int_\Omega (A(x)\nabla u)\cdot\nabla\varphi\, dx + \int_\Omega (\mathbf{b}(x)\cdot\nabla u)\varphi\, dx + \int_\Omega c(x)u\varphi\, dx = \int_\Omega f\varphi\, dx \tag{3.32}$$

per ogni $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$. Va osservato che dal fatto che $u \in H^1(\Omega)$ sia una soluzione del problema (3.32) non si può dedurre alcuna informazione su quale possa essere il comportamento della u su $\partial\Omega$.

Vale il seguente risultato

Teorema 3.1.4. *Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ un aperto, sia L un operatore soddisfacente le ipotesi (3.5), (3.6), (3.7) e sia $f \in L^2(\Omega)$. Sia $u \in H^1(\Omega)$ una soluzione (3.32). Allora per ogni aperto $\omega \Subset \Omega$ si ha che $u \in H^2(\omega)$ e inoltre esiste una costante C dipendente soltanto da N, ω, $\|a_{ij}\|_{W^{1,\infty}(\Omega)}$, $\|b_i\|_{L^\infty(\Omega)}$, $\|c\|_{L^\infty(\Omega)}$, λ_0 tale che*

$$\|u\|_{H^2(\omega)} \le C\Big(\|f\|_{L^2(\Omega)} + \|u\|_{H^1(\Omega)}\Big). \tag{3.33}$$

Dimostrazione. IN FASE DI PREPARAZIONE. □

Nel caso in cui i coefficienti dell'operatore L e la funzione f posseggano in partenza una maggiore regolarità, iterando il Teorema 3.1.4, è possibile ottenere una maggiore regolarità per le soluzioni u di (3.32).

Teorema 3.1.5. *Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ un aperto, sia L un operatore soddisfacente (3.6). Supponiamo inoltre che per un certo intero $k \geq 0$ valgano le seguenti ipotesi:*

$$a_{ij} \in W^{k+1,\infty}(\Omega), \qquad a_{ij} \equiv a_{ji} \quad \text{in } \Omega\,, \qquad \text{per ogni } i,j \in \{1,\dots,N\}\,;$$

$$b_i \in W^{k,\infty}(\Omega) \quad \text{per ogni } i \in \{1,\dots,N\}, \qquad c \in W^{k,\infty}(\Omega)\,.$$

Sia infine $f \in H^k(\Omega)$. Se $u \in H^1(\Omega)$ è una soluzione di (3.32) allora per ogni aperto $\omega \Subset \Omega$ si ha che $u \in H^{k+2}(\omega)$ e inoltre esiste una costante C dipendente soltanto da N, ω, $\|a_{ij}\|_{W^{k+1,\infty}(\Omega)}$, $\|b_i\|_{W^{k,\infty}(\Omega)}$, $\|c\|_{W^{k,\infty}(\Omega)}$, λ_0 tale che

$$\|u\|_{H^{k+2}(\omega)} \leq C\Big(\|f\|_{H^k(\Omega)} + \|u\|_{H^1(\Omega)}\Big)\,. \tag{3.34}$$

Dimostrazione. IN FASE DI PREPARAZIONE. □

Osservando l'enunciato del Teorema 3.1.4 e il risultato di regolarità locale ivi enunciato ci si può chiedere sotto quali condizioni si possa arrivare a concludere che le soluzioni u di (3.31) appartengono a $H^2(\Omega)$.

Per arrivare ad un risultato di regolarità globale occorre richiedere una qualche ipotesi sulla geometria del dominio Ω o sulla regolarità di $\partial\Omega$.

In questa ottica introduciamo la nozione di frontiera di classe C^k con $k \geq 1$ intero. Introduciamo le seguenti notazioni:

$$Q := \{(x', x_N) \in \mathbb{R}^{N-1} \times \mathbb{R} : |x'|_{\mathbb{R}^{N-1}} < 1,\ |x_N| < 1\}$$
$$Q_+ := \{(x', x_N) \in \mathbb{R}^{N-1} \times \mathbb{R} : |x'|_{\mathbb{R}^{N-1}} < 1,\ 0 < x_N < 1\}$$
$$Q_0 := \{(x', x_N) \in \mathbb{R}^{N-1} \times \mathbb{R} : |x'|_{\mathbb{R}^{N-1}} < 1,\ x_N = 0\}$$

Definizione 3.1.6. *Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ aperto. Si dice che $\partial\Omega$ è di classe C^k e si scrive $\partial\Omega \in C^k$ se per ogni $x \in \partial\Omega$ esiste un intorno U di x ed un'applicazione invertibile $\Phi : Q \to U$ tale che*

$$\Phi \in C^k(Q, U) \qquad \Phi^{-1} \in C^k(U, Q)$$

e tale che

$$\Phi(Q_0) = \partial\Omega \cap U, \qquad \Phi(Q_+) = \Omega \cap U\,.$$

Si dice che $\partial\Omega$ è di classe C^∞ e si scrive $\partial\Omega \in C^\infty$ se $\partial\Omega \in C^k$ per ogni intero $k \geq 0$.

Si dice infine che $\partial\Omega \in C^{k,\alpha}$, $\alpha \in (0,1)$, se per ogni $x \in \partial\Omega$ è possibile determinare una funzione Φ come sopra tale che $\Phi \in C^{k,\alpha}(Q, U)$ e $\Phi^{-1} \in C^{k,\alpha}(U, Q)$.

Consideriamo le soluzioni deboli di (3.8) o di (3.9). Possiamo utilizzare la seguente formulazione variazionale comune ai due problemi: trovare $u \in V$ tale che

$$\int_\Omega (A(x)\nabla u) \cdot \nabla v\, dx + \int_\Omega (\mathbf{b}(x) \cdot \nabla u) v\, dx + \int_\Omega c(x) uv\, dx = \int_\Omega fv\, dx \tag{3.35}$$

per ogni $v \in V$, con $V = H_0^1(\Omega)$ per (3.8) e $V = H^1(\Omega)$ per (3.9).

Teorema 3.1.7. *Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un aperto limitato di classe C^2, sia L un operatore soddisfacente le ipotesi (3.5), (3.6), (3.7) e sia $f \in L^2(\Omega)$. Se $u \in V$ è una soluzione di (3.35) allora $u \in H^2(\Omega)$. Inoltre esiste una costante C dipendente soltanto da N, Ω, $\|a_{ij}\|_{W^{1,\infty}(\Omega)}$, $\|b_i\|_{L^\infty(\Omega)}$, $\|c\|_{L^\infty(\Omega)}$, λ_0 tale che*

$$\|u\|_{H^2(\Omega)} \leq C\Big(\|f\|_{L^2(\Omega)} + \|u\|_{H^1(\Omega)}\Big)\,. \tag{3.36}$$

Dimostrazione. IN FASE DI PREPARAZIONE. □

Il Teorema 3.1.7 ammette un'estensione che non ipotesi più forti sulla regolarità dei dati permette di ottenere una maggiore regolarità della soluzione. Il prossimo teorema afferma che con ipotesi di regolarità del bordo, è possibile dimostrare un risultato di regolarità di ordine superiore globale e non soltanto locale come accade nel Teorema 3.1.5.

Teorema 3.1.8. *Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un aperto limitato di classe C^{k+2}, sia L un operatore soddisfacente (3.6). Supponiamo inoltre che per un certo intero $k \geq 0$ valgano le seguenti ipotesi:*

$$a_{ij} \in W^{k+1,\infty}(\Omega), \qquad a_{ij} \equiv a_{ji} \quad \textit{in } \Omega\,, \qquad \textit{per ogni } i,j \in \{1,\ldots,N\}\,;$$

$$b_i \in W^{k,\infty}(\Omega) \quad \textit{per ogni } i \in \{1,\ldots,N\}, \qquad c \in W^{k,\infty}(\Omega)\,.$$

Sia infine $f \in H^k(\Omega)$. Se $u \in V$ è una soluzione di (3.35) allora $u \in H^{k+2}(\Omega)$. Inoltre esiste una costante C dipendente soltanto da N, Ω, $\|a_{ij}\|_{W^{k+1,\infty}(\Omega)}$, $\|b_i\|_{W^{k,\infty}(\Omega)}$, $\|c\|_{W^{k,\infty}(\Omega)}$, λ_0 tale che

$$\|u\|_{H^{k+2}(\Omega)} \leq C\Big(\|f\|_{H^k(\Omega)} + \|u\|_{H^1(\Omega)}\Big)\,. \tag{3.37}$$

Dimostrazione. IN FASE DI PREPARAZIONE. □

3.2 Ulteriori risultati

Nel paragrafo precedente si è affrontato il problema della regolarità H^2 (rispettivamente H^{k+2}) delle soluzioni di $Lu = f$ nel caso in cui $f \in L^2$ (rispettivamente H^k). Spesso in molte applicazioni può risultare di fondamentale importanza ottenere qualche informazione sulla regolarità della soluzione anche in ipotesi di diverso tipo sul dato f. Per esempio si potrebbe sapere che $f \in L^p$ per un certo $p \neq 2$. La domanda che ci si può porre e si possa ancora affermare che la corrispondente soluzione dell'equazione $Lu = f$ appartenga allo spazio di Sobolev $W^{2,p}$. Un risultato di regolarità di questo tipo risulta essere ancora vero per ogni $1 < p < \infty$. Vediamo di formalizzare tutto questo. Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ aperto, sia L un operatore soddisfacente le ipotesi (3.5), (3.6), (3.7) e sia $f \in L^p(\Omega)$ con $1 < p < \infty$. Si dice che u è una soluzione debole di $Lu = f$ se $u \in W^{1,1}_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ e se vale

$$\int_\Omega (A(x)\nabla u) \cdot \nabla \varphi \, dx + \int_\Omega (\mathbf{b}(x) \cdot \nabla u)\varphi \, dx + \int_\Omega c(x) u \varphi \, dx = \int_\Omega f \varphi \, dx \tag{3.38}$$

per ogni $\varphi \in C^\infty_c(\Omega)$.

Teorema 3.2.1. *Sia $\Omega = \mathbb{R}^N$ e sia L un operatore soddisfacente (3.6). Supponiamo inoltre che per un certo intero $k \geq 0$ valgano le seguenti ipotesi:*

$$a_{ij} \in W^{k+1,\infty}(\mathbb{R}^N), \qquad a_{ij} \equiv a_{ji} \quad \textit{in } \mathbb{R}^N, \qquad \textit{per ogni } i, j \in \{1, \dots, N\};$$

$$b_i \in W^{k,\infty}(\mathbb{R}^N) \quad \textit{per ogni } i \in \{1, \dots, N\}, \qquad c \in W^{k,\infty}(\mathbb{R}^N).$$

Sia infine $f \in W^{k,p}(\mathbb{R}^N)$ per un certo $1 < p < \infty$. Sia $u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ una soluzione debole di $Lu = f$ nel senso dato in (3.38). Allora $u \in W^{k+2,p}(\mathbb{R}^N)$ e inoltre esiste una costante C dipendente soltanto da N, $\|a_{ij}\|_{W^{k+1,\infty}(\mathbb{R}^N)}$, $\|b_i\|_{W^{k,\infty}(\mathbb{R}^N)}$, $\|c\|_{W^{k,\infty}(\mathbb{R}^N)}$, λ_0 tale che

$$\|u\|_{W^{k+2,p}(\mathbb{R}^N)} \leq C\Big(\|f\|_{W^{k,p}(\mathbb{R}^N)} + \|u\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^N)}\Big). \tag{3.39}$$

Dimostrazione. Per la dimostrazione di questo risultato si veda ad esempio [9, Chapter 9] o l'articolo [1]. □

Passiamo ora ad enunciare un risultato di regolarità locale.

Teorema 3.2.2. *Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ un aperto, sia L un operatore soddisfacente (3.6). Supponiamo inoltre che per un certo intero $k \geq 0$ valgano le seguenti ipotesi:*

$$a_{ij} \in W^{k+1,\infty}(\Omega), \qquad a_{ij} \equiv a_{ji} \quad \textit{in } \Omega, \qquad \textit{per ogni } i, j \in \{1, \dots, N\};$$

$$b_i \in W^{k,\infty}(\Omega) \quad \textit{per ogni } i \in \{1, \dots, N\}, \qquad c \in W^{k,\infty}(\Omega).$$

Sia infine $f \in W^{k,p}(\Omega)$ per un certo $1 < p < \infty$. Se $u \in W^{1,p}(\Omega)$ è una soluzione di $Lu = f$ nel senso di (3.38) allora per ogni aperto $\omega \Subset \Omega$ si ha che $u \in W^{k+2,p}(\omega)$ e inoltre esiste una costante C dipendente soltanto da N, ω $\|a_{ij}\|_{W^{k+1,\infty}(\Omega)}$, $\|b_i\|_{W^{k,\infty}(\Omega)}$, $\|c\|_{W^{k,\infty}(\Omega)}$, λ_0 tale che

$$\|u\|_{W^{k+2,p}(\omega)} \leq C\Big(\|f\|_{W^{k,p}(\Omega)} + \|u\|_{W^{1,p}(\Omega)}\Big). \tag{3.40}$$

Dimostrazione. Per la dimostrazione di questo risultato si veda ad esempio [9, Chapter 9] o l'articolo [1]. □

Passiamo infine al risultato di regolarità globale per l'equazione $Lu = f$ con condizioni al bordo di Dirichlet omogenee.

Teorema 3.2.3. *Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un aperto limitato di classe C^{k+2}, sia L un operatore soddisfacente (3.6). Supponiamo inoltre che per un certo intero $k \geq 0$ valgano le seguenti ipotesi:*

$$a_{ij} \in W^{k+1,\infty}(\Omega), \qquad a_{ij} \equiv a_{ji} \quad \text{in } \Omega\,, \qquad \text{per ogni } i,j \in \{1,\dots,N\}\,;$$
$$b_i \in W^{k,\infty}(\Omega) \quad \text{per ogni } i \in \{1,\dots,N\}, \qquad c \in W^{k,\infty}(\Omega)\,.$$

Sia infine $f \in W^{k,p}(\Omega)$ per un certo $1 < p < \infty$. Se $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ è una soluzione di $Lu = f$ nel senso di (3.38) allora $u \in W^{k+2,p}(\Omega)$. Inoltre esiste una costante C dipendente soltanto da N, Ω, $\|a_{ij}\|_{W^{k+1,\infty}(\Omega)}$, $\|b_i\|_{W^{k,\infty}(\Omega)}$, $\|c\|_{W^{k,\infty}(\Omega)}$, λ_0 tale che

$$\|u\|_{W^{k+2,p}(\Omega)} \leq C\Big(\|f\|_{W^{k,p}(\Omega)} + \|u\|_{W^{1,p}(\Omega)}\Big)\,. \tag{3.41}$$

Dimostrazione. Anche per questo risultato rimandiamo il lettore a [9, Chapter 9] o [1]. □

Vediamo di fornire una prima applicazione dei risultati di questo e del precedente paragrafo. Si consideri ad esempio su un aperto limitato $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ con frontiera di classe C^1, il problema agli autovalori per l'operatore di Laplace con le condizioni al bordo di Dirichlet

$$\begin{cases} -\Delta u = \lambda u & \text{in } \Omega \\ u = 0 & \text{su } \partial\Omega\,. \end{cases}$$

Supponiamo che λ sia un autovalore di $-\Delta$ e sia $u \in H_0^1(\Omega)$ una corrispondente autofunzione. Applicando iterativamente il Teorema 3.1.5 possiamo concludere che $u \in C^\infty(\Omega)$. Infatti essendo $u \in H_0^1(\Omega)$ allora $\lambda u \in H^1(\Omega)$ e quindi applicando il Teorema 3.1.5 con $f = \lambda u$ otteniamo $u \in H^3(\omega)$ per ogni aperto $\omega \Subset \Omega$. Poichè ogni aperto $\omega \Subset \Omega$ può essere inglobato in un altro aperto $\omega' \Subset \Omega$ allora dal passo precedente sappiamo che $u \in H^3(\omega')$ e quindi applicando nuovamente il Teorema 3.1.5 otteniamo $u \in H^5(\omega)$. Procedendo in questo modo arriviamo a concludere che $u \in H^k(\omega)$ per ogni $\omega \Subset \Omega$ e per ogni $k \geq 1$ intero. Utilizzando ora le immersioni di Sobolev sugli aperti $\omega \Subset \Omega$ con $\partial\omega \in C^\infty$ si deduce che $H^k(\omega) \subset C^m(\overline{\omega})$ dove m indica la parte intera di $k - \frac{N}{2}$. Poichè possiamo scegliere k arbitrariamente grande possiamo concludere che $u \in C^m(\overline{\omega})$ per ogni intero $m \geq 1$ e ciò significa che $u \in C^\infty(\overline{\omega})$ per ogni aperto $\omega \Subset \Omega$ con $\partial\omega \in C^\infty$. In conclusione si ha appunto $u \in C^\infty(\Omega)$.

Se supponiamo inoltre che $\partial\Omega \in C^\infty$ allora $u \in C^\infty(\overline{\Omega})$. Basta applicare il Teorema 3.1.8 per concludere che $u \in H^k(\Omega)$ per ogni intero $k \geq 1$. Utilizzando ancora i risultati di immersione di Sobolev arriviamo alla conclusione $u \in C^\infty(\overline{\Omega})$.

Un'altra questione che si vuole affrontare in questo paragrafo è la seguente: consideriamo ad esempio il problema

$$\begin{cases} Lu = f & \text{in } \Omega \\ u = 0 & \text{su } \partial\Omega \end{cases} \tag{3.42}$$

con $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ aperto limitato con $\partial\omega \in C^2$ e L operatore strettamente ellittico . Nel caso in cui $f \in C^0(\overline{\Omega})$ ci si può chiedere se il problema (3.42) possa ammettere una soluzione classica e cioè una funzione $u \in C^2(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$ che risolva l'equazione differenziale e che sia nulla su $\partial\Omega$.

Vediamo a quale conclusione possiamo arrivare utilizzando i precedenti risultati. Poichè Ω è limitato e $f \in C^0(\overline{\Omega})$ allora $u \in L^p(\Omega)$ per ogni $1 \leq p \leq \infty$. Per utilizzare Teorema 3.2.3 dobbiamo però fissare un arbitrario $1 < p < \infty$. In questo modo si ottiene che $u \in W^{2,p}(\Omega)$ per ogni $1 < p < \infty$. Grazie ai risultati di immersione di Sobolev possiamo concludere che $u \in C^{1,\alpha}(\overline{\Omega})$ per ogni $\alpha \in (0, 1)$.

L'informazione che abbiamo ottenuto non ci permette di affermare che u sia una soluzione classica di (3.42). Con la sola ipotesi di continuità sulla funzione f non si può affermare in generale che la soluzione u sia di classe C^2 in quanto esistono funzioni che non sono di classe C^2 ma il cui Laplaciano è continuo come mostrato nel seguente esempio:

Esempio 3.2.4. Si consideri la funzione $u : D \to \mathbb{R}$ definita da

$$u(x,y) := \begin{cases} xy\log(-\log(x^2+y^2)) & \text{se } (x,y) \in D \setminus \{(0,0)\} \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

con $D := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 1\}$. Allora u è soluzione (debole) del problema

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{in } B_{\frac{1}{\sqrt{e}}} \\ u = 0 & \text{su } \partial B_{\frac{1}{\sqrt{e}}} \end{cases}$$

con

$$f(x,y) := \begin{cases} \frac{4xy\left(1-2\log(x^2+y^2)\right)}{(x^2+y^2)\left(\log(x^2+y^2)\right)^2} & \text{se } (x,y) \in D \setminus \{(0,0)\} \\ \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0)\,. \end{cases}$$

Mediante una verifica diretta è possibile constatare che $u \notin C^2(\overline{B}_{1/\sqrt{e}})$ in quanto $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} \notin C^0(\overline{B}_{1/\sqrt{e}})$ ma $f \in C^0(\overline{B}_{1/\sqrt{e}})$. □

Per avere una soluzione classica è necessario imporre una condizione più restrittiva sulla funzione f.

Teorema 3.2.5. *Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un aperto limitato tale che $\partial\Omega \in C^2$. Sia L un operatore strettamente ellittico della forma*

$$Lv = -\sum_{i,j=1}^{N} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}(x)\frac{\partial v}{\partial x_j}\right) \qquad \textit{per ogni } v \in C^2(\Omega)$$

con i coefficienti a_{ij} soddisfacenti

$$a_{ij} \in C^{0,\alpha}(\overline{\Omega}), \qquad a_{ij} \equiv a_{ji} \textit{ in } \Omega \qquad \textit{per ogni } i,j \in \{1,\dots,N\}$$

per un certo $\alpha \in (0,1)$. *Sia inoltre* $f \in C^{0,\alpha}(\overline{\Omega})$. *Allora il problema*

$$\begin{cases} Lu = f & \textit{in } \Omega \\ u = 0 & \textit{su } \partial\Omega \end{cases}$$

ammette un'unica soluzione $u \in C^{2,\alpha}_{\mathrm{loc}}(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$.

Se supponiamo inoltre che $\partial\Omega \in C^{2,\alpha}$ *allora* $u \in C^{2,\alpha}(\overline{\Omega})$.

Per chiarimenti su quest'ultimo risultato si consulti [9, Chapter 6].

Veniamo ora ad un'altra applicazione nell'ambito delle equazioni non lineari:

$$\begin{cases} -\Delta u = f(x,u) & \text{in } \Omega \\ u = 0 & \text{su } \partial\Omega\,, \end{cases} \tag{3.43}$$

con $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ aperto limitato, $\partial\Omega \in C^2$ e $f \in C^1(\overline{\Omega} \times \mathbb{R})$ funzione soddisfacente la seguente *condizione di crescita*:

$$|f(x,s)| \leq C(1 + |s|^{p-1}) \qquad \text{per q.o. } x \in \Omega, \text{per ogni } s \in \mathbb{R}\,, \tag{3.44}$$

dove $2 < p < \infty$ se $N \leq 2$ e $p < 2^* = \frac{2N}{N-2}$ se $N \geq 3$. Supponiamo che $u \in H^1_0(\Omega)$ sia una soluzione debole di (3.43) e cioè

$$\int_\Omega \nabla u(x) \cdot \nabla v(x)\, dx = \int_\Omega f(x, u(x)) v(x)\, dx \qquad \text{per ogni } v \in H^1_0(\Omega)\,. \tag{3.45}$$

Grazie a (3.44) questa formulazione debole del problema (3.43) è ben definita in quanto si può verificare che $f(x,u(x))v(x) \in L^1(\Omega)$ per ogni $v \in H^1_0(\Omega)$. In dimensione $N \geq 3$, ai fini di dare un senso a (3.45), si può ammettere che valga la condizione (3.44) con $p = 2^*$.

Iniziamo ad esaminare il caso $N \leq 2$. Grazie ai risultati di immersione di Sobolev possiamo affermare che $u \in L^q(\Omega)$ per ogni $1 \leq q < \infty$ e grazie (3.44) questo implica $f(x,u(x)) \in L^q(\Omega)$ per ogni $1 \leq q < \infty$. Il Teorema 3.2.3 con $k = 0$ implica allora $u \in W^{2,q}(\Omega)$ per ogni $1 \leq q < \infty$. Utilizzando i risultati di immersione di Sobolev se ne deduce che $u \in C^{1,\alpha}(\overline{\Omega})$ per ogni $\alpha \in (0,1)$. Ma allora $f(x,u(x)) \in C^1(\overline{\Omega})$ e utilizzando il Teorema 3.2.5 con $f(x,u(x))$ al posto di f si conclude che $u \in C^{2,\alpha}_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ per ogni $\alpha \in (0,1)$. Abbiamo mostrato che $u \in C^{2,\alpha}_{\mathrm{loc}}(\Omega) \cap C^{1,\alpha}(\overline{\Omega})$ è una soluzione classica di (3.43).

Vediamo che cosa accade nel caso $N \geq 3$. Grazie ai risultati di immersione di Sobolev possiamo soltanto affermare in prima analisi che $u \in L^{2^*}(\Omega)$. Da questo segue $|u|^{p-1} \in L^{\frac{2^*}{p-1}}(\Omega)$ e da (3.44) $f(x,u(x)) \in L^{\frac{2^*}{p-1}}(\Omega)$. Poniamo $q_0 = \frac{2^*}{p-1}$; utilizzando il Teorema 3.2.3 si ottiene $u \in W^{2,q_0}(\Omega)$. A questo punto si possono presentare due situazioni: se $N \leq 2q_0$ allora $W^{2,q_0}(\Omega) \subset L^q(\Omega)$ per ogni $1 \leq q < \infty$

e quindi possiamo procedere esattamente come prima e concludere che $u \in C^{2,\alpha}_{\mathrm{loc}}(\Omega) \cap C^{1,\alpha}(\overline{\Omega})$ per ogni $\alpha \in (0,1)$; se $N > 2q_0$ allora $W^{2,q_0}(\Omega) \subset L^{\frac{Nq_0}{N-2q_0}}(\Omega)$. In questo secondo caso avremmo allora $f(x,u(x)) \in L^{q_1}(\Omega)$ con $q_1 := \frac{Nq_0}{(N-2q_0)(p-1)}$. Con un passo di questa procedura siamo passati da $f(x,u(x)) \in L^{q_0}(\Omega)$ a $f(x,u(x)) \in L^{q_1}(\Omega)$ con

$$\frac{q_1}{q_0} = \frac{N}{(N-2q_0)(p-1)} = \frac{N}{N(p-1) - 2 \cdot 2^*} > \frac{N}{N(2^*-1) - 2 \cdot 2^*} = 1$$

Procedendo in questo modo, da $q_k < \frac{N}{2}$, è possibile costruire q_{k+1} tale che

$$f(x,u(x)) \in L^{\frac{Nq_k}{(N-2q_k)(p-1)}}(\Omega) \qquad \text{e} \qquad \frac{q_{k+1}}{q_k} = \frac{N}{(N-2q_k)(p-1)}$$

Tale sequenza q_k risulta essere crescente rispetto a k e inoltre

$$\frac{q_{k+1}}{q_k} = \frac{N}{(N-2q_k)(p-1)} > \frac{N}{(N-2q_0)(p-1)} > 1\,.$$

Questo significa che con un numero finito di passi è possibile determinare un intero $\overline{k}$ tale che $N \leq 2q_{\overline{k}}$ e $u \in W^{2,q_{\overline{k}}}(\Omega)$.

A questo punto i risultati di immersione permettono di concludere che $u \in L^q(\Omega)$ per ogni $1 \leq q < \infty$. Procedendo come nei casi precedenti si arriva a dimostrare che $u \in C^{2,\alpha}_{\mathrm{loc}}(\Omega) \cap C^{1,\alpha}(\overline{\Omega})$ per ogni $\alpha \in (0,1)$.

È di fondamentale importanza osservare che il precedente procedimento iterativo permette di arrivare ad una conclusione sulla regolarità di u, grazie al fatto che nel caso $N \geq 3$ si è supposto $p < 2^*$. Se avessimo imposto la condizione meno restrittiva

$$|f(x,s)| \leq C(1 + |s|^{2^*-1}) \qquad \text{per q.o. } x \in \Omega, \text{per ogni } s \in \mathbb{R}\,, \tag{3.46}$$

già dopo il primo passo avremmo avuto $q_1 = q_0$ e di conseguenza avremmo anche avuto $q_k = q_0$ per ogni intero $k \geq 1$.

Per avere un esempio di una funzione $f = f(x,s)$ che soddisfi la (3.46) ma non la (3.44), basta considerare la funzione

$$f(x,s) = g(x,s) + |s|^{2^*-2}s$$

con g soddisfacente (3.44).

Per ovviare a questo inconveniente bisogna ricorrere alle così dette stime di tipo De Giorgi-Nash-Moser (si veda anche [4]).

Teorema 3.2.6. *Sia $N \geq 3$ e sia $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un aperto limitato. Siano $a \in L^{\frac{N}{2}}(\Omega)$ e $b \in L^\infty(\Omega)$. Sia $u \in H^1_0(\Omega)$ una soluzione debole del problema*

$$\begin{cases} -\Delta u = a(x)u + b(x) & \textit{in } \Omega \\ u = 0 & \textit{su } \partial\Omega\,. \end{cases} \tag{3.47}$$

Supponiamo che esista $q > 2$ tale che $u \in L^q(\Omega)$. Allora $u \in L^{\frac{2^*}{2}q}(\Omega)$ e inoltre esiste una costante C dipendente soltanto da N, Ω, a, b, q tale che

$$\|u\|_{L^{\frac{2^*}{2}q}(\Omega)} \leq C(1 + \|u\|_{L^q(\Omega)}) .$$

Alla dimostrazione del teorema premettiamo il seguente lemma:

Lemma 3.2.7. *Sia $N \geq 3$ e sia $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un aperto limitato. Siano $a \in L^{\frac{N}{2}}(\Omega)$ e $w \in H_0^1(\Omega)$. Allora per ogni $M > 0$ vale la seguente stima*

$$\int_\Omega a(x)w^2(x)dx \leq M \int_\Omega w^2(x)dx + \left(\int_{\{|a| \geq M\}} |a(x)|^{\frac{N}{2}} dx \right)^{\frac{2}{N}} \cdot S_N^{-1} \int_\Omega |\nabla w(x)|^2 dx .$$

Dimostrazione. Dalle disuguaglianza di Hölder e Sobolev si ottiene

$$\begin{aligned}
&\int_\Omega a(x)w^2(x)dx = \int_{\{|a| \leq M\}} a(x)w^2(x)dx + \int_{\{|a| \geq M\}} a(x)w^2(x)dx \\
&\leq M \int_\Omega w^2(x)dx + \left(\int_{\{|a| \geq M\}} |a(x)|^{\frac{N}{2}} dx \right)^{\frac{2}{N}} \left(\int_\Omega |w(x)|^{2^*} dx \right)^{\frac{2}{2^*}} \\
&\leq M \int_\Omega w^2(x)dx + \left(\int_{\{|a| \geq M\}} |a(x)|^{\frac{N}{2}} dx \right)^{\frac{2}{N}} S_N^{-1} \int_\Omega |\nabla u(x)|^2 dx .
\end{aligned}$$

Quest'ultima disuguaglianza completa la dimostrazione del lemma. □

Dimostrazione del Teorema 3.2.6. Essendo $u \in H_0^1(\Omega)$ una soluzione debole di (3.47) si ha

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \, dx = \int_\Omega a(x)uv \, dx + \int_\Omega b(x)v \, dx \qquad \text{per ogni } v \in H_0^1(\Omega) . \tag{3.48}$$

Si definisca per ogni intero $n \geq 1$ la funzione $u^n := \min |u|, n$ e si scelga $v = (u^n)^{q-2}u$ in (3.48). Essendo $q > 2$, è possibile verificare che $(u^n)^{q-2}u \in H_0^1(\Omega)$ e che quindi risulta essere una funzione test ammissibile. Inoltre si ha

$$\begin{aligned}
\nabla((u^n)^{q-2}u) &= (q-2)(u^n)^{q-3}u\nabla u^n + (u^n)^{q-2}\nabla u \\
&= (q-2)(u^n)^{q-3}u\frac{u}{|u|}\chi_{\{|u|<n\}}\nabla u + (u^n)^{q-2}\nabla u \\
&= (q-2)(u^n)^{q-2}\chi_{\{|u|<n\}}\nabla u + (u^n)^{q-2}\nabla u
\end{aligned}$$

Sia ora $M_q > 0$ tale che

$$\int_{\{|a| \geq M_q\}} |a(x)|^{\frac{N}{2}} dx \leq \left(\frac{4S_N}{q+2} \right)^{\frac{N}{2}} .$$

Da quest'ultima identità, da (3.48) e dal Lemma 3.2.7 con $w = (u^n)^{\frac{q}{2}-1}u$ si ottiene

$$
\begin{aligned}
&(q-2)\int_\Omega (u^n)^{q-2}\chi_{\{|u|<n\}}|\nabla u|^2 dx + \int_\Omega (u^n)^{q-2}|\nabla u|^2 dx \qquad (3.49)\\
&= \int_\Omega a(x)(u^n)^{q-2}u^2 dx + \int_\Omega b(x)(u^n)^{q-2}u\, dx\\
&\leq M_q \int_\Omega (u^n)^{q-2}u^2 dx + \left(\int_{\{|a|\geq M_q\}} |a(x)|^{\frac{N}{2}} dx\right)^{\frac{2}{N}} S_N^{-1}\int_\Omega |\nabla((u^n)^{\frac{q}{2}-1}u)|^2 dx\\
&\quad + \|b\|_{L^\infty(\Omega)}\int_\Omega (u^n)^{\frac{(q-1)(q-2)}{q}}|u|^{\frac{2(q-1)}{q}} dx\\
&\leq M_q \int_\Omega (u^n)^{q-2}u^2 dx + \left(\int_{\{|a|\geq M_q\}} |a(x)|^{\frac{N}{2}} dx\right)^{\frac{2}{N}} S_N^{-1}\int_\Omega |\nabla((u^n)^{\frac{q}{2}-1}u)|^2 dx\\
&\quad + \|b\|_{L^\infty(\Omega)}|\Omega|^{\frac{1}{q}}\left(\int_\Omega (u^n)^{q-2}u^2\, dx\right)^{\frac{q-1}{q}}
\end{aligned}
$$

Si osservi ora che

$$\nabla((u^n)^{\frac{q}{2}-1}u) = \frac{q-2}{2}(u^n)^{\frac{q}{2}-1}\chi_{\{|u|<n\}}\nabla u + (u^n)^{\frac{q}{2}-1}\nabla u$$

e che

$$|\nabla((u^n)^{\frac{q}{2}-1}u)|^2 = \frac{(q-2)(q+2)}{4}(u^n)^{q-2}\chi_{\{|u|<n\}}|\nabla u|^2 + (u^n)^{q-2}|\nabla u|^2$$

Inserendo quest'ultima identità in (3.49) e tendendo conto che $q > 2$ si ottiene

$$
\begin{aligned}
&\frac{4}{q+2}\int_\Omega |\nabla((u^n)^{\frac{q}{2}-1}u)|^2 dx\\
&\leq M_q \int_\Omega (u^n)^{q-2}u^2 dx + \|b\|_{L^\infty(\Omega)}|\Omega|^{\frac{1}{q}}\left(\int_\Omega (u^n)^{q-2}u^2 dx\right)^{\frac{q-1}{q}}\\
&\quad + \left(\int_{\cap\{|a|\geq M_q\}} |a(x)|^{\frac{N}{2}} dx\right)^{\frac{2}{N}} S_N^{-1}\int_\Omega |\nabla((u^n)^{\frac{q}{2}-1}u)|^2 dx
\end{aligned}
$$

e cioè

$$
\begin{aligned}
&\left[\frac{4}{q+2} - \left(\int_{\{|a|\geq M_q\}} |a(x)|^{\frac{N}{2}} dx\right)^{\frac{2}{N}} S_N^{-1}\right]\int_\Omega |\nabla((u^n)^{\frac{q}{2}-1}u)|^2 dx\\
&\quad \leq M_q \int_\Omega (u^n)^{q-2}u^2 dx + \|b\|_{L^\infty(\Omega)}|\Omega|^{\frac{1}{q}}\left(\int_\Omega (u^n)^{q-2}u^2 dx\right)^{\frac{q-1}{q}} .
\end{aligned}
$$

Applicando ora la disuguaglianza di Sobolev si ottiene

$$S_N \left[\frac{4}{q+2} - \left(\int_{\{|a| \geq M_q\}} |a(x)|^{\frac{N}{2}} dx \right)^{\frac{2}{N}} S_N^{-1} \right] \left(\int_\Omega |(u^n)^{\frac{q}{2}-1} u|^{2^*} dx \right)^{\frac{2}{2^*}}$$

$$\leq M_q \int_\Omega (u^n)^{q-2} u^2 dx + \|b\|_{L^\infty(\Omega)} |\Omega|^{\frac{1}{q}} \left(\int_\Omega (u^n)^{q-2} u^2 dx \right)^{\frac{q-1}{q}}$$

Facendo ora tendere $n \to +\infty$ e tenendo conto che la costante tra parentesi quadre è positiva, dal Lemma di Fatou si ottiene

$$S_N^{\frac{2^*}{2}} \left[\frac{4}{q+2} - \left(\int_{\{|a| \geq M_q\}} |a(x)|^{\frac{N}{2}} dx \right)^{\frac{2}{N}} S_N^{-1} \right]^{\frac{2^*}{2}} \int_\Omega |u(x)|^{\frac{2^*}{2} q} dx$$

$$\leq S_N^{\frac{2^*}{2}} \left[\frac{4}{q+2} - \left(\int_{\{|a| \geq M_q\}} |a(x)|^{\frac{N}{2}} dx \right)^{\frac{2}{N}} S_N^{-1} \right]^{\frac{2^*}{2}} \liminf_{n \to +\infty} \int_\Omega |(u^n)^{\frac{q}{2}-1} u|^{2^*} dx$$

$$\leq \lim_{n \to +\infty} \left[M_q \int_\Omega (u^n)^{q-2} u^2 dx + \|b\|_{L^\infty(\Omega)} |\Omega|^{\frac{1}{q}} \left(\int_\Omega (u^n)^{q-2} u^2 dx \right)^{\frac{q-1}{q}} \right]^{\frac{2^*}{2}}$$

$$= \left[M_q \int_\Omega |u(x)|^q \, dx + \|b\|_{L^\infty(\Omega)} |\Omega|^{\frac{1}{q}} \left(\int_\Omega |u(x)|^q \, dx \right)^{\frac{q-1}{q}} \right]^{\frac{2^*}{2}} < +\infty \, .$$

La dimostrazione del teorema è conclusa. □

Enunciamo il seguente corollario:

Corollario 3.2.8. *Sia $N \geq 3$ e sia $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un aperto limitato. Siano $a \in L^{\frac{N}{2}}(\Omega)$ e $b \in L^\infty(\Omega)$. Sia $u \in H_0^1(\Omega)$ una soluzione debole del problema*

$$\begin{cases} -\Delta u = a(x)u + b(x) & \text{in } \Omega \\ u = 0 & \text{su } \partial\Omega \, . \end{cases} \tag{3.50}$$

Allora $u \in L^q(\Omega)$ per ogni $1 \leq q < \infty$.

Dimostrazione. Poichè $u \in H_0^1(\Omega) \subset L^{2^*}(\Omega)$ applicando il Teorema 3.2.6 si deduce che $u \in L^{\frac{(2^*)^2}{2}}(\Omega)$. Iterando il procedimento k volte si arriva a $u \in L^{\left(\frac{2^*}{2}\right)^k 2^*}(\Omega)$. □

Vediamo ora come il Teorema 3.2.6 e il Corollario 3.2.8 possono essere adattati per dedurre informazioni sulla sommabilità delle soluzioni di problemi non lineari quali (3.43).

Teorema 3.2.9. *Sia $N \geq 3$ e sia $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un aperto limitato. Sia $u \in H_0^1(\Omega)$ una soluzione debole di (3.43) con $f \in C^1(\overline{\Omega} \times \mathbb{R})$ soddisfacente (3.46). Supponiamo che esista $q > 2$ tale che $u \in L^q(\Omega)$. Allora $u \in L^{\frac{2^*}{2}q}(\Omega)$ e inoltre esiste una costante C dipendente da N, Ω, f, u, q tale che*

$$\|u\|_{L^{\frac{2^*}{2}q}(\Omega)} \leq C(1 + \|u\|_{L^q(\Omega)})\,.$$

Dimostrazione. Si procede esattamente come nella dimostrazione del Teorema 3.2.6 scegliendo come funzione test $v = (u^n)^{q-2}u$. In questo modo si arriva a dire che

$$(q-2)\int_\Omega (u^n)^{q-2}\chi_{\{|u|<n\}}|\nabla u|^2 dx + \int_\Omega (u^n)^{q-2}|\nabla u|^2 dx = \int_\Omega f(x,u(x))(u^n)^{q-2}u^2 dx$$

Occorre stimare il secondo membro di quest'ultima identità:

$$\begin{aligned}\int_\Omega f(x,u(x))(u^n)^{q-2}u\,dx &\leq \int_\Omega C|u(x)|^{2^*-1}(u^n)^{q-2}|u|\,dx + \int_\Omega C(u^n)^{q-2}|u|\,dx \\ &= \int_\Omega a(x)(u^n)^{q-2}u^2\,dx + \int_\Omega b(x)(u^n)^{q-2}|u|\,dx\end{aligned}$$

dove abbiamo posto $a(x) := C|u(x)|^{2^*-2} \in L^{\frac{N}{2}}(\Omega)$ e $b(x) := C \in L^\infty(\Omega)$. A questo punto basta procedere esattamente come nella dimostrazione del Teorema 3.2.6. $\square$

Come conseguenza immediata del Teorema 3.2.9 vale il seguente corollario:

Corollario 3.2.10. *Sia $N \geq 3$ e sia $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un aperto limitato. Sia $u \in H_0^1(\Omega)$ una soluzione debole di (3.43) con $f \in C^1(\overline{\Omega} \times \mathbb{R})$ soddisfacente (3.46). Allora $u \in L^q(\Omega)$ per ogni $1 \leq q < \infty$.*

In particolare, se supponiamo che $\partial\Omega \in C^2$, procedendo come per (3.45)*, si ottiene $u \in C^{2,\alpha}_{\mathrm{loc}}(\Omega) \cap C^{1,\alpha}(\overline{\Omega})$ per ogni $\alpha \in (0,1)$.*

Se supponiamo inoltre che $\partial\Omega \in C^{2,\beta}$ per un certo $\beta \in (0,1)$ allora $u \in C^{2,\beta}(\overline{\Omega})$.

Capitolo 4

Equazioni paraboliche lineari

In questo capitolo affronteremo essenazialmente due questioni connesse alle equazioni paraboliche: i principi di massimo ed esistenza e unicità delle soluzioni.

4.1 Principi di massimo

In questo paragrafo ci prononiamo di enunciare alcuni principi di massimo per una classe di operatori parabolici lineari. Introduciamo il seguente operatore

$$\frac{\partial u}{\partial t}+Lu := \frac{\partial u}{\partial t}-\sum_{i,j=1}^{N} a_{ij}(x,t)\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}+\sum_{i=1}^{N} b_i(x,t)\frac{\partial u}{\partial x_i}+c(x,t)u \quad \text{in } \Omega\times(0,T] \tag{4.1}$$

per ogni $u \in C^2(\Omega \times (0,T])$, dove $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ è un aperto e $T \in (0,+\infty)$. Supporremo che

$$a_{ij}(x,t) = a_{ji}(x,t) \qquad \text{per ogni } (x,t) \in \Omega\times(0,T], \text{ per ogni } i,j \in \{1,\dots,N\}\,. \tag{4.2}$$

Definizione 4.1.1. *(i) Diremo che $\partial_t + L$ è un operatore parabolico se esistono delle funzioni λ, Λ tali che*

$$0 < \lambda(x,t)|\xi|^2 \le \sum_{i,j=1}^{N} a_{ij}(x)\xi_i\xi_j \le \Lambda(x,t)|\xi|^2 \tag{4.3}$$

per ogni $(x,t) \in \Omega \times (0,T]$ e per ogni $\xi \in \mathbb{R}^N \setminus \{0\}$.

(ii) Diremo che $\partial_t + L$ è strettamente parabolico se vale (4.3) con

$$\lambda_0 := \inf_{(x,t)\in\Omega\times(0,T]} \lambda(x,t) > 0\,.$$

(iii) Diremo che $\partial_t + L$ è uniformemente parabolico se vale (4.3) con

$$K_\Lambda := \sup_{(x,t)\in\Omega\times(0,T]} \frac{\Lambda(x,t)}{\lambda(x,t)} < +\infty\,. \tag{4.4}$$

Per semplicità da ora in poi supporremo che $\partial_t + L$ sia un operatore strettamente parabolico e che valga

$$a_{ij} \in L^\infty(\Omega\times(0,T]) \quad \forall i,j \in \{1,\dots,N\}\,, \quad b_i \in L^\infty(\Omega\times(0,T]) \quad \forall i \in \{1,\dots,N\}\,. \tag{4.5}$$

In questa situazione $\partial_t + L$ sarà in particolare uniformemente parabolico.

Supporremo inoltre che

$$c \in L^\infty(\Omega\times(0,T])\,. \tag{4.6}$$

Infine porremo

$$K_b := \max_{i\in\{1,\dots,N\}} \|b_i\|_{L^\infty(\Omega\times(0,T])} \tag{4.7}$$

e

$$K_c := \|c\|_{L^\infty(\Omega\times(0,T])}\,. \tag{4.8}$$

Definizione 4.1.2. *Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un aperto e sia $0 < T < +\infty$. Allora porremo*

$$\Omega_T := \Omega\times(0,T] \qquad e \qquad \Gamma_T := \overline{\Omega}_T \setminus \Omega_T\,.$$

L'insieme Γ_T viene detto frontiera parabolica di Ω_T.

Possiamo ora enunciare la seguente versione debole del principio di massimo parabolico.

Teorema 4.1.3. (principio del massimo debole). *Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un aperto limitato e sia $T \in (0,+\infty)$. Sia $\partial_t + L$ l'operatore introdotto in (4.1) e supponiamo che $\partial_t + L$ sia strettamente parabolico e che valgano (4.2), (4.5). Supponiamo inoltre che $c \equiv 0$ in Ω_T. Sia ora $u \in C^2(\Omega_T)\cap C^0(\overline{\Omega}_T)$ tale che $\partial_t u + Lu \le 0$ in Ω_T. Allora si ha*

$$\max_{\overline{\Omega}_T} u = \max_{\Gamma_T} u\,.$$

Analogamente se $u \in C^2(\Omega_T)\cap C^0(\overline{\Omega}_T)$ soddisfa $\partial_t u + Lu \ge 0$ in Ω_T allora

$$\min_{\overline{\Omega}_T} u = \min_{\Gamma_T} u\,.$$

Dimostrazione. Iniziamo a dimostrare il teorema nel caso in cui valga $\partial_t u + Lu < 0$ in Ω_T. Supponiamo per assurdo che $\max_{\Gamma_T} u < \max_{\overline{\Omega}_T} u$ e sia $(x_0,t_0) \in \Omega_T$ tale che $u(x_0,t_0) = \max_{\overline{\Omega}_T} u$. Sia $A(x,t)$ la matrice a coefficienti variabili tale che $(A(x,t))_{ij} =$

$a_{ij}(x,t)$. Per motivi analoghi a quelli descritti nella dimostrazione del Teorema 1.2.3 non è restrittivo supporre che la matrice $A(x_0,t_0)$ sia diagonale.

Essendo x_0 un punto di massimo interno per la funzione $x \mapsto u(x,t_0)$ allora

$$\frac{\partial u}{\partial x_i}(x_0,t_0) = 0 \quad \text{e} \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}(x_0,t_0) \le 0 \qquad \text{per ogni } i \in \{1,\dots,N\}\,. \tag{4.9}$$

D'altra parte $t_0 \in (0,T]$ è un punto di massimo per la funzione $t \mapsto u(x_0,t)$ e quindi

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x_0,t_0) \ge 0\,. \tag{4.10}$$

In realtà la derivata temporale in (x_0,t_0) sarà nulla quando $t_0 < T$.

Inoltre da (4.3) si ha anche che

$$a_{ii}(x_0,t_0) \ge 0 \qquad \text{per ogni } i \in \{1,\dots,N\}\,. \tag{4.11}$$

Da (4.9), (4.10), (4.11) e dal fatto che $A(x_0,t_0)$ è diagonale si deduce che

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x_0,t_0) + Lu(x_0,t_0) = \frac{\partial u}{\partial t}(x_0,t_0) - \sum_{i=1}^{N} a_{ii}(x_0,t_0)\frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}(x_0,t_0) \ge 0$$

in contraddizione con $\partial_t u + Lu < 0$ in Ω_T.

Resta da dimostrare il teorema nel caso più generale in cui $\partial_t u + Lu \le 0$ in Ω_T. Si ponga $u_\varepsilon(x,t) := u(x,t) - \varepsilon t \in C^2(\Omega_T) \cap C^0(\overline{\Omega}_T)$ in modo tale da (1.13) si abbia

$$\partial_t u_\varepsilon + Lu_\varepsilon = \partial_t u + Lu - \varepsilon < 0 \qquad \text{in } \Omega_T$$

per ogni $\varepsilon > 0$. Avendo già dimostrato la validità del teorema nel caso della disuguaglianza stretta, applicando tale risultato alla funzione u_ε si ottiene

$$\max_{\overline{\Omega}_T} u_\varepsilon = \max_{\Gamma_T} u_\varepsilon$$

per ogni $\varepsilon > 0$. Per $\varepsilon \to 0^+$ si arriva alla conclusione

$$\max_{\overline{\Omega}_T} u = \lim_{\varepsilon\to 0^+} \max_{\overline{\Omega}_T}(u - \varepsilon t) = \lim_{\varepsilon\to 0^+} \max_{\Gamma_T}(u - \varepsilon t) = \max_{\Gamma_T} u\,.$$

Questo conclude la dimostrazione del teorema. □

In questa prima versione del principio di massimo debole abbiamo supposto che $c \equiv 0$ in Ω_T. Ma come per gli operatori ellittici anche per quelli parabolici è possibile ottenere una versione estesa del principio di massimo nel caso in cui $c \ge 0$ in Ω_T.

Corollario 4.1.4. *Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un aperto limitato e sia $T \in (0, +\infty)$. Sia $\partial_t + L$ l'operatore introdotto in (4.1) e supponiamo che $\partial_t + L$ sia strettamente parabolico e che valgano (4.2), (4.5), (4.6). Supponiamo inoltre che $c \geq 0$ in Ω_T. Sia ora $u \in C^2(\Omega_T) \cap C^0(\overline{\Omega}_T)$ tale che $\partial_t u + Lu \leq 0$ in Ω_T. Allora si ha*

$$\max_{\overline{\Omega}_T} u \leq \max_{\Gamma_T} u^+ . \tag{4.12}$$

Dimostrazione. Se $u \leq 0$ in $\overline{\Omega}_T$ la conclusione del teorema è ovvia. Possiamo quindi supporre che u sia positiva in almeno un punto appartenente a $\overline{\Omega}_T$ in modo tale che $\max_{\overline{\Omega}_T} u > 0$.

Iniziamo a trattare il caso particolare in cui $\partial_t u + Lu < 0$ in Ω_T. Sia $(x_0, t_0) \in \Omega_T$ come nella dimostrazione del Teorema 4.1.3. Allora da (4.9), (4.10), (4.11) e dal fatto che $c(x_0, t_0)u(x_0, t_0) \geq 0$ si ottiene

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x_0, t_0) + Lu(x_0, t_0) = \frac{\partial u}{\partial t}(x_0, t_0) - \sum_{i=1}^N a_{ii}(x_0, t_0) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}(x_0, t_0) + c(x_0, t_0)u(x_0, t_0) \geq 0$$

in contraddizione con $\partial_t u + Lu < 0$ in Ω_T.

Veniamo infine al caso $\partial_t u + Lu \leq 0$ in Ω_T. È suffuciente porre $u_\varepsilon(x, t) = u(x, t) - \varepsilon t$ per ogni $(x, t) \in \overline{\Omega}_T$ con $\varepsilon > 0$ e procedere come nella dimostrazione del Teorema 4.1.3. □

L' Esempio 1.2.5 descritto nel caso ellittico fornisce una prova del fatto che la disuguaglianza (4.12) può essere stretta. Infatti basta scegliere Ω come nell'Esempio 1.2.5, $T \in (0, +\infty)$ qualsiasi, $\partial_t v + Lv := \partial_t v - \Delta v + v$ per ogni $v \in C^2(\overline{\Omega}_T)$ e $u(x, y, t) = -x^2 - y^2 - 4$ per ogni $(x, y, t) \in \overline{\Omega}_T$. In questo modo si avrebbe

$$\max_{\overline{\Omega}_T} u = -4 < 0 = \max_{\Gamma_T} u^+ .$$

Tuttavia questo esempio non è sufficiente a mostrare che la conclusione del Teorema 4.1.3 può non essere vera nel caso in cui $c \geq 0$ ma $c \not\equiv 0$ in Ω_T. Per rispondere a questo quesito forniamo il seguente ulteriore esempio:

Esempio 4.1.5. Sia $\Omega := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 1\}$ e sia $\partial_t + L$ l'operatore definito da $\partial_t v + Lv = \partial_t v - \Delta v + v$ per ogni $v \in C^2(\Omega_1)$. In questo esempio si ha che $c \equiv 1$ in Ω_1. Si consideri la funzione $u(x, y) = -x^2 - y^2 + t - 6$ per ogni $(x, y, t) \in \overline{\Omega}_1 = \overline{\Omega} \times [0, 1]$ in modo tale che

$$\partial_t u + Lu = -x^2 - y^2 + t - 1 \leq 0 \qquad \text{per ogni } (x, y, t) \in \Omega_1 .$$

Tuttavia

$$\max_{\overline{\Omega}_1} u = -5 > -6 = \max_{\Gamma_1} u .$$

Quest'ultima disuguaglianza mostra la non validità della conclusione del Teorema 4.1.3. □

Nel caso in cui la condizione $c \geq 0$ in Ω_T venga a mancare, le conclusioni del Teorema 4.1.3 e del Corollario 4.1.4 potrebbero essere entrambe false come mostrato nel sequente esempio:

Esempio 4.1.6. Sia $\Omega = (-\pi/2, \pi/2)$ e sia $T = 1$. Su $(-\pi/2, \pi/2) \times (0, 1]$ si consideri l'operatore parabolico definito da $\partial_t v - \partial_x^2 v - 2v$ per ogni $v \in C^2((-\pi/2, \pi/2) \times (0, 1])$. In questo caso si avrebbe che $c \equiv -2$ in $(-\pi/2, \pi/2) \times (0, 1]$. Si introduca la funzione $u(x, t) = e^t \cos x$ per ogni $(x, t) \in [-\pi/2, \pi/2] \times [0, 1]$. Si ha allora

$$\partial_t u - \partial_x^2 u - 2u = e^t \cos x + e^t \cos x - 2e^t \cos x = 0$$

per ogni $(x, t) \in (-\pi/2, \pi/2) \times (0, 1]$. Tuttavia

$$\max_{[-\pi/2,\pi/2]\times[0,1]} u = u(0, 1) = e > 1 = u(0, 0) = \max_{\Gamma_1} u = \max_{\Gamma_1} u^+$$

dove si ricorda che in questo caso $\Gamma_1 = ([-\pi/2, \pi/2] \times \{0\}) \cup (\{-\pi/2, \pi/2\} \times [0, 1])$.

Ciò mostra la non validità delle conclusioni del Teorema 4.1.3 e del Corollario 4.1.4. □

Passiamo ora all'enunciato della versione forte del principio di massimo.

Teorema 4.1.7. (principio del massimo forte). *Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ un aperto connesso e sia $T \in (0, +\infty)$. Sia $\partial_t + L$ l'operatore introdotto in (4.1) e supponiamo che $\partial_t + L$ sia strettamente parabolico e che valgano (4.2), (4.5). Sia ora $u \in C^2(\Omega_T)$ tale che $\partial_t u + Lu \leq 0$ in Ω_T. Valgono le seguenti conclusioni:*

(i) se $c \equiv 0$ in Ω_T e se esiste $(x_0, t_0) \in \Omega_T$ tale che $u(x_0, t_0) = \sup_{\Omega_T} u$ allora u è costante in Ω_T;

(ii) se $c \in L^\infty(\Omega_T)$ soddisfa $c \geq 0$ in Ω_T, si supponga che valgano le ulteriori ipotesi:

$$\sup_{\Omega_T} u \geq 0 \quad \text{ed esiste } (x_0, t_0) \in \Omega_T \text{ tale che } u(x_0, t_0) = \sup_{\Omega_T} u\,;$$

allora u è costante in Ω_T.

Dimostrazione. Si veda per esempio [6, Section 7.1, Theorem 11]. □

Mostriamo ora alcune applicazioni dei principi di massimo nello studio di problemi parabolici della forma

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} + Lu = f & \text{in } \Omega_T \\ u = \varphi & \text{su } \Gamma_T\,. \end{cases} \tag{4.13}$$

Teorema 4.1.8. *Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ un aperto limitato connesso e sia $T \in (0, +\infty)$. Sia $\partial_t + L$ l'operatore introdotto in (4.1) e supponiamo che $\partial_t + L$ sia strettamente parabolico e che valgano (4.2), (4.5). Siano $f \in C^0(\Omega_T)$, $\varphi \in C^0(\Gamma_T)$ tali che $f \geq 0$ in Ω_T e $\varphi \geq 0$ su Γ_T e sia $u \in C^2(\Omega_T) \cap C^0(\overline{\Omega}_T)$ una soluzione del problema (4.13). Valgono le seguenti conclusioni:*

(i) se $c \equiv 0$ in Ω_T allora valgono le seguenti alternative

$$u > 0 \text{ in } \Omega_T \qquad \text{oppure} \qquad u \equiv 0 \text{ in } \Omega_T\,; \tag{4.14}$$

(ii) se $c \geq 0$ e c soddisfa (4.6) allora vale (4.14).

Dimostrazione. Nel caso (i) applicando il Teorema 4.1.3 alla funzione $-u$, si deduce che $\min\limits_{\overline{\Omega}_T} u = \min\limits_{\Gamma_T} u \geq 0$. Nel caso (ii) applicando il Corollario 4.1.4 a $-u$, dal fatto che $\varphi \geq 0$ su Γ_T, si deduce che

$$\max_{\overline{\Omega}_T}(-u) \leq \max_{\Gamma_T}(-u)^+ = \max_{\Gamma_T}(-\varphi)^+ = 0\,.$$

Riassumendo possiamo affermare che nei casi (i)-(ii) la funzione u è non negativa su $\overline{\Omega}_T$.

Se esistesse un punto $(x_0, t_0) \in \Omega_T$ tale che $u(x_0, t_0) = 0$ allora (x_0, t_0) sarebbe un punto di minimo appartenente a Ω_T e applicando il Teorema 4.1.7 alla funzione $-u$ si concluderebbe che u è costante in Ω_T e di conseguenza $u \equiv 0$ su Ω_T. □

Concludiamo questo paragrafo con un risultato di unicità per il seguente problema (4.13).

Teorema 4.1.9. *Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ un aperto limitato e sia $T \in (0, +\infty)$. Sia $\partial_t + L$ l'operatore introdotto in (4.1) e supponiamo che $\partial_t + L$ sia strettamente parabolico e che valgano (4.2), (4.5), (4.6). Supponiamo inoltre che $c \geq 0$ in Ω_T. Siano $f \in C^0(\Omega_T)$ e $\varphi \in C^0(\Gamma_T)$. Siano $u_1, u_2 \in C^2(\Omega_T) \cap C^0(\overline{\Omega}_T)$ soluzioni del problema (4.13). Allora $u_1 \equiv u_2$ su $\overline{\Omega}_T$.*

Dimostrazione. Siano u_1 e u_2 soluzioni di (4.13) e sia $w = u_1 - u_2$. Allora $w \in C^2(\Omega_T) \cap C^0(\overline{\Omega}_T)$ è una soluzione del problema

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} + Lw = 0 & \text{in } \Omega_T \\ w = 0 & \text{su } \Gamma_T\,. \end{cases}$$

Applicando il Corollario 4.1.4 alla funzione w si ottiene

$$\max_{\overline{\Omega}_T} w \leq \max_{\Gamma_T} w^+ = 0$$

da cui $w \leq 0$ su $\overline{\Omega}$. Applicando ora il medesimo corollario alla funzione $-w$ si ottiene $-w \leq 0$ su $\overline{\Omega}_T$. In conclusione $w \equiv 0$ su $\overline{\Omega}_T$ e cioè $u_1 \equiv u_2$. □

4.2 Esistenza e unicità

Analogamente a quanto visto nel caso degli operatori ellittici, non è così restrittivo considerare operatori parabolici della forma

$$\frac{\partial u}{\partial t} + Lu = \frac{\partial u}{\partial t} - \operatorname{div}(A(x,t)\nabla u) + \sum_{i=1}^{N} b_i(x,t)\frac{\partial u}{\partial x_i} + c(x,t)u \quad \text{in } \Omega \times (0,T) \tag{4.15}$$

per ogni $u \in C^2(\Omega \times (0,T])$, dove $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ è un aperto, $T \in (0,+\infty)$ e $(A(x,t))_{ij} = a_{ij}(x,t)$. Poniamo inoltre $\mathbf{b}(x,t) := (b_1(x,t), \dots, b_N(x,t))$.

Come nel precedente paragrafo supporremo che valgano le ipotesi (4.2), (4.5), (4.6) e che $\partial_t + L$ sia strettamente parabolico.

Dato un aperto $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ limitato e dato $T \in (0,+\infty)$ ci proponiamo di studiare l'esistenza e l'unicità per il seguente problema di Cauchy-Dirichlet associato all'operatore $\partial_t + L$:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} + Lu = f & \text{in } \Omega_T \\ u(x,t) = 0 & \text{per ogni } (x,t) \in \partial\Omega \times (0,T) \\ u(x,0) = u_0(x) & \text{per ogni } x \in \Omega\,. \end{cases} \tag{4.16}$$

Alternativamente si potrebbe studiare il problema di Cauchy-Neumann

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} + Lu = f & \text{in } \Omega_T \\ (A(x,t)\nabla u(x,t)) \cdot \nu(x,t) = 0 & \text{per ogni } (x,t) \in \partial\Omega \times (0,T) \\ u(x,0) = u_0(x) & \text{per ogni } x \in \Omega\,, \end{cases} \tag{4.17}$$

dove ν rappresenta la normale esterna a $\partial\Omega$.

A partire da (4.16) cerchiamo di ottenerne un'opportuna formulazione variazionale. Introduciamo la seguente forma bilineare dipendente da t:

$$\begin{aligned} a(u,v;t) := &\int_\Omega (A(x,t)\nabla u(x)) \cdot \nabla v(x)\,dx + \int_\Omega (\mathbf{b}(x,t) \cdot \nabla u(x)) v(x)\,dx \\ &+ \int_\Omega c(x,t)u(x)v(x)\,dx \end{aligned} \tag{4.18}$$

per ogni $u, v \in H_0^1(\Omega)$ e per ogni $t \in (0,T)$.

Moltiplicando l'equazione in (4.16) per $v \in H_0^1(\Omega)$ e integrando per parti si ottiene

$$\int_\Omega \frac{\partial u}{\partial t}(x,t)v(x)\,dx + a(u(x,t), v(x); t) = \int_\Omega f(x,t)v(x)\,dx\,. \tag{4.19}$$

Per ottenere una formulazione variazionale rigorosa del problema (4.16) è necessario introdurre alcune nozioni sugli spazi di funzioni a valori in spazi di Banach.

Sia X uno spazio di Banach. Dato $T \in (0, +\infty)$ l'obiettivo è quello di introdurre spazi di funzioni $u : (0, T) \to X$.

Iniziamo con la seguente definizione:

Definizione 4.2.1. *Si dice che una funzione $s : (0, T) \to X$ è semplice se esiste un numero finito di insiemi $A_1, ..., A_k \subset (0, T)$ misurabili e di vettori $x_1, ..., x_k \in X$ tali che*

$$s(t) = \sum_{i=1}^{k} \chi_{A_i}(t) x_i$$

dove le χ_{A_i} sono funzioni reali che valgono 1 su A_i e 0 su $(0, T) \setminus A_i$.

Se s è una funzione semplice appare naturale definire

$$\int_0^T s(t)\, dt := \sum_{i=1}^{n} |A_i| x_i \in X$$

dove ricordiamo che con $|A_i|$ si denota la misura di Lebesgue dell'insieme A_i.

Possiamo introdurre il concetto di misurabilità per funzioni a valori in X:

Definizione 4.2.2. *Sia $u : (0, T) \to X$.*

(i) Si dice che u è misurabile se esiste una successione $\{s_n\}$ di funzioni semplici tale che

$$s_n(t) \to u(t) \qquad \text{in } X, \text{ per quasi ogni } t \in (0, T)\,.$$

(ii) Si dice che u è integrabile in $(0, T)$ e si scrive $u \in L^1(0, T; X)$ se esiste una successione $\{s_n\}$ di funzioni semplici tali che $s_n(t) \to u(t)$ per quasi ogni $t \in (0, T)$ e tale che per ogni $\varepsilon > 0$ esista $\overline{n}$ tale che

$$\int_0^T \|s_n(t) - s_m(t)\|_X\, dt < \varepsilon \qquad \text{per ogni } n, m > \overline{n}\,.$$

In tal caso si pone

$$\int_0^T u(t)\, dt := \lim_{n \to +\infty} \int_0^T s_n(t)\, dt$$

dove quest'ultimo limite va inteso nel senso della convergenza in X.

Possiamo poi definire

$$L^p(0, T; X) = \left\{ u : (0, T) \to X \text{ misurabili} : \int_0^T \|u(t)\|_X^p\, dt < \infty \right\} \tag{4.20}$$

per $1 \leq p < \infty$ e

$$L^\infty(0,T;X) = \left\{ u : (0,T) \to X \text{ misurabili : } \operatorname*{ess\,sup}_{t\in(0,T)} \|u(t)\|_X < \infty \right\}.$$

A meno di identificare funzioni uguali quasi ovunque si possono introdurre su di essi le norme

$$\|u\|_{L^p(0,T;X)} := \left(\int_0^T \|u(t)\|_X^p dt \right)^{1/p} \qquad (1 \leq p < \infty)$$

$$\|u\|_{L^\infty(0,T;X)} := \operatorname*{ess\,sup}_{t\in(0,T)} \|u(t)\|_X$$

che generano una struttura di spazio di Banach. Se $p = 2$ e X è di Hilbert, allora anche $L^2(0,T;X)$ è di Hilbert con il prodotto scalare

$$(u,v)_{L^2(0,T;X)} = \int_0^T (u(t),v(t))_X \, dt \, .$$

Oltre agli spazi $L^p(0,T;X)$, possiamo anche definire lo spazio $C^0([0,T];X)$ delle funzioni $u : [0,T] \to X$ continue in $[0,T]$. È ben noto che anch'esso può essere reso uno spazio di Banach con la norma $\| \cdot \|_{L^\infty(0,T;X)}$.

Faremo ampio uso del seguente risultato.

Teorema 4.2.3. (di Bochner). *Sia X uno spazio di Banach e sia $L \in X'$. Se $u \in L^1(0,T;X)$ allora la funzione scalare $t \mapsto \langle L, u(t)\rangle$ appartiene a $L^1(0,T)$ e inoltre*

$$\int_0^T \langle L, u(t)\rangle dt = \langle L, \int_0^T u(t) dt\rangle.$$

Dimostrazione. Si veda [10, Corollary 2, Section 5, Chapter V]. □

Per maggiori dettagli sull'integrazione di funzioni a valori su uno spazio di Banach si veda [10].

Data una funzione $u \in L^2(0,T;X)$ è possibile introdurre la nozione di derivata debole di u. Tale derivata verrà indicata nel seguito semplicemente con u'. La situazione tipica con la quale avremo a che fare è la seguente: dati due spazi di Banach $X \subset Y$ tali che l'immersione sia continua e data $u \in L^2(0,T;X)$ diremo che u ammette derivata debole $u' \in L^2(0,T;Y)$ se esiste una funzione $v \in L^2(0,T;Y)$ tale che

$$\int_0^T \varphi'(t)u(t)\, dt = - \int_0^T \varphi(t)v(t)\, dt \qquad \text{per ogni } \varphi \in C_c^\infty(0,T)\,. \tag{4.21}$$

In tal caso si pone $u' = v$.

Tornando alla (4.19), questa può essere riscritta formalmente nel modo seguente

$$(u'(t), v)_{L^2(\Omega)} + a(u(t), v; t) = (f(t), v)_{L^2(\Omega)}$$

dove abbiamo considerato la funzione u e la funzione f non come funzioni delle due variabili $x \in \Omega$ e $t \in (0,T)$ ma come funzioni $u : (0,T) \to H_0^1(\Omega)$ e $f : (0,T) \to L^2(\Omega)$. Infine la funzione u' può essere interpretata come derivata debole di u nel senso di (4.21).

Tuttavia non è sensato aspettarsi che $u' : (0,T) \to H_0^1(\Omega)$. Quello che accade in generale è che $u' : (0,T) \to H^{-1}(\Omega)$ dove ricordiamo che con $H^{-1}(\Omega)$ si indica lo spazio duale di $H_0^1(\Omega)$.

A questo punto siamo in grado di fornire una corretta formulazione variazionale per il problema (4.16).

Sia $u_0 \in L^2(\Omega)$ e sia $f \in L^2(0,T; H^{-1}(\Omega))$. Diremo che u è una soluzione debole di (4.16) se

$$u \in L^2(0,T; H_0^1(\Omega)) \cap C^0([0,T]; L^2(\Omega)), \quad u' \in L^2(0,T; H^{-1}(\Omega))$$

e se vale

$$\begin{cases} \langle u'(t), v \rangle + a(u(t), v; t) = \langle f(t), v \rangle & \text{per ogni } v \in H_0^1(\Omega), \text{ per q.o. } t \in (0,T), \\ u(0) = u_0 . \end{cases} \tag{4.22}$$

Nella precedente formula abbiamo indicato con $\langle \cdot, \cdot \rangle : H^{-1}(\Omega) \times H_0^1(\Omega) \to \mathbb{R}$ il prodotto di dualità tra elementi di $H^{-1}(\Omega)$ ed elementi di $H_0^1(\Omega)$.

Si osservi che la condizione $u(0) = u_0$ in (4.22) viene resa significativa dal fatto che $u \in C^0([0,T]; L^2(\Omega))$.

In modo del tutto analogo è possibile fornire la seguente formulazione variazionale per il problema (4.17). Siano $u_0 \in L^2(\Omega)$ e $f \in L^2(0,T; (H^1(\Omega))')$. Diremo che u è una soluzione debole di (4.17) se

$$u \in L^2(0,T; H^1(\Omega)) \cap C^0([0,T]; L^2(\Omega)), \quad u' \in L^2(0,T; (H^1(\Omega))')$$

e se vale

$$\begin{cases} \langle u'(t), v \rangle + a(u(t), v; t) = \langle f(t), v \rangle & \text{per ogni } v \in H^1(\Omega), \text{ per q.o. } t \in (0,T), \\ u(0) = u_0 \end{cases} \tag{4.23}$$

dove questa volta $\langle \cdot, \cdot \rangle : (H^1(\Omega))' \times H^1(\Omega) \to \mathbb{R}$ rappresenta il prodotto di dualità tra elementi di $(H^1(\Omega))'$ ed elementi di $H^1(\Omega)$. Osserviamo che la forma bilineare a introdotta in (4.18) può anche essere considerata come funzione definita su $H^1(\Omega) \times H^1(\Omega)$.

A causa della struttura comune dei due problemi possiamo cercare di fornire un'unica formulazione unica per entrambi. A tale scopo si ponga $V = H^1_0(\Omega)$ nel caso del problema (4.16) e $V = H^1(\Omega)$ nel caso del problema (4.17); infine si ponga $H = L^2(\Omega)$. A questo punto i problemi (4.22) e (4.23) possono essere riscritti nella forma: trovare una funzione

$$u \in L^2(0,T;V) \cap C^0([0,T];H)\,, \qquad u' \in L^2(0,T;V')$$

tale che

$$\begin{cases} \langle u'(t), v\rangle + a(u(t), v; t) = \langle f(t), v\rangle & \text{per ogni } v \in V, \text{ per q.o. } t \in (0,T)\,, \\ u(0) = u_0\,. \end{cases} \tag{4.24}$$

L'esistenza delle soluzioni del problema (4.24) può essere dimostrata con il metodo di Galerkin. A tale scopo denotiamo con $\{w_k\}_{k\geq 1} \subset V$ una base Hilbertiana di $H = L^2(\Omega)$ e definiamo per ogni $m \geq 1$ il sottospazio finito dimensionale $V_m := \mathrm{span}\{w_1, \ldots, w_m\}$. Si ricorda che con base Hilbertiana di un generico spazio di Hilbert si intende un sistema di vettori ortonormali tali per cui la chiusura dello spazio delle combinazioni lineari finite di elementi di tale base, coincide con l'intero spazio di Hilbert medesimo.

Supponiamo inoltre che $\{w_k\}$ sia un sistema ortogonale completo in V. In altre parole supponiamo che la chiusura in V dello spazio delle combinazioni lineari finite di elementi di $\{w_k\}$ coincida con V stesso.

Una tale scelta è possibile sia nel caso di $V = H^1_0(\Omega)$ sia nel caso $V = H^1(\Omega)$.

Nel primo caso è sufficiente scegliere come w_k le autofunzioni di $-\Delta$ con le condizioni al contorno di Dirichlet; nel secondo caso le autofunzioni di $-\Delta$ con le condizioni al bordo di Neumann.

Dimostriamo ora il seguente risultato di coercività per la forma bilineare a:

Proposizione 4.2.4. *Per ogni $t \in (0,T)$ sia $a(\cdot,\cdot;t) : V \times V \to \mathbb{R}$ la forma bilineare definita dalla formula (4.18) sia nel caso $V = H^1_0(\Omega)$ sia nel caso $V = H^1(\Omega)$. Supponiamo che valgano le ipotesi (4.2), (4.5), (4.6) e che $\partial_t + L$ sia strettamente parabolico. Allora esistono $\alpha_0, C_0 > 0$ indipendenti da $t \in (0,T)$ tali che*

$$a(v,v;t) + C_0\|v\|^2_H \geq \alpha_0\|v\|^2_V \qquad \textit{per ogni } v \in V, \quad \textit{per ogni } t \in (0,T)\,.$$

Inoltre esiste $M > 0$ indipendente da t tale che

$$|a(u,v;t)| \leq M\|u\|_V\|v\|_V \qquad \textit{per ogni } u, v \in V, \quad \textit{per ogni } t \in (0,T)\,. \tag{4.25}$$

Dimostrazione. Sia $v \in V$ e sia $t \in (0,T)$. Si ha grazie alle disuguaglianze di Hölder e Young

$$\left|\int_\Omega (\mathbf{b}(x,t)\cdot\nabla v)v\,dx\right| \le K_b\sqrt{N}\left(\int_\Omega |\nabla v|^2 dx\right)^{1/2}\left(\int_\Omega |v|^2 dx\right)^{1/2} \tag{4.26}$$
$$\le \frac{\lambda_0}{2}\int_\Omega |\nabla v|^2 dx + \frac{K_b^2 N}{2\lambda_0}\int_\Omega |v|^2 dx \le \frac{\lambda_0}{2}\|v\|_V^2 + \frac{K_b^2 N}{2\lambda_0}\|v\|_H^2\,.$$

Inoltre

$$\left|\int_\Omega c(x,t)v^2 dx\right| \le K_c\int_\Omega v^2 dx = K_c\|v\|_H^2\,. \tag{4.27}$$

Combinando le stime (4.26), (4.27) con l'ipotesi (4.3) si ottiene

$$\begin{aligned} a(v,v;t) &\ge \lambda_0\int_\Omega |\nabla v|^2 dx - \frac{\lambda_0}{2}\|v\|_V^2 - \frac{K_b^2N}{2\lambda_0}\|v\|_H^2 - K_c\|v\|_H^2 \\ &= \lambda_0\left(\int_\Omega |\nabla v|^2 dx + \int_\Omega |v|^2 dx\right) - \frac{\lambda_0}{2}\|v\|_V^2 - \left(\frac{K_b^2N}{2\lambda_0} + K_c + \lambda_0\right)\|v\|_H^2 \\ &\ge \frac{\lambda_0}{2}\|v\|_V^2 - \left(\frac{K_b^2N}{2\lambda_0} + K_c + \lambda_0\right)\|v\|_H^2\,. \end{aligned}$$

Questo completa la prima parte della dimostrazione.

Passiamo ora alla dimostrazione di (4.25).

Grazie a (4.2), (4.3), (4.5), (4.6) si ottiene

$$\begin{aligned} |a(u,v;t)| &\le \left(\int_\Omega \Lambda(x,t)|\nabla u|^2 dx\right)^{1/2}\left(\int_\Omega \Lambda(x,t)|\nabla v|^2 dx\right)^{1/2} \\ &+ K_b\sqrt{N}\left(\int_\Omega |\nabla u|^2 dx\right)^{1/2}\left(\int_\Omega |v|^2 dx\right)^{1/2} + K_c\left(\int_\Omega |u|^2 dx\right)^{1/2}\left(\int_\Omega |v|^2 dx\right)^{1/2} \\ &\le (\|\Lambda|_{L^\infty(\Omega_T)} + K_b\sqrt{N} + K_c)\|u\|_V\|v\|_V\,. \end{aligned}$$

□

Passiamo ad enunciare il risultato di esistenza e unicità per il problema (4.24):

Teorema 4.2.5. *Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un aperto limitato tale che $\partial\Omega \in C^1$ e sia $T \in (0,+\infty)$. Supponiamo che valgano le ipotesi (4.2), (4.5), (4.6) e che $\partial_t + L$ sia strettamente parabolico. Siano $u_0 \in H$ e $f \in L^2(0,T;V')$. Allora (4.24) ammette un'unica soluzione $u \in L^2(0,T;V) \cap C^0([0,T];H)$ tale che $u' \in L^2(0,T;V')$.*

Dimostrazione. La dimostrazione di questo teorema verrà suddivisa in una parte riguardante l'esistenza e in una parte riguardante l'unicità.

<u>*ESISTENZA.*</u> Sia $u_0 \in H$ come in (4.24) e si definisca $u_0^m := P_m u_0$ dove per ogni $m \geq 1$ $P_m : H \to V_m$ rappresenta la proiezione ortogonale da H in V_m.

Si ha quindi che $u_0^m = \sum_{k=1}^{m} (u_0, w_k)_H \, w_k$ dove con $(\cdot,\cdot)_H$ abbiamo denotato il prodotto scalare in H.

<u>*Passo 1.*</u> Ci proponiamo di risolvere il problema (4.24) in V_m: cerchiamo $u_m \in L^2(0,T;V_m)$ tale che

$$\begin{cases} \langle u_m'(t), v\rangle + a(u_m(t), v; t) = \langle f(t), v\rangle & \text{per ogni } v \in V_m, \ \text{per q.o. } t \in (0,T)\,, \\ u_m(0) = u_0^m\,. \end{cases} \tag{4.28}$$

Cerchiamo u_m nella forma

$$u_m(t) = \sum_{i=1}^{m} g_i^m(t) w_i$$

in modo tale che da (4.28) e dall'ortonormalità di $\{w_k\}$ in H, si ottiene

$$\begin{cases} (g_k^m(t))' + \displaystyle\sum_{i=1}^{m} a(w_i, w_k; t) g_i^m(t) = \langle f(t), w_k\rangle & \text{in } (0,T), \quad \forall\, k = 1,\dots,m\,, \\ g_k^m(0) = (u_0, w_k)_H\,. \end{cases} \tag{4.29}$$

Una volta posto

$$B_m(t) := \begin{pmatrix} a(w_1, w_1; t) & \dots & a(w_m, w_1; t) \\ \vdots & & \vdots \\ a(w_1, w_m; t) & \dots & a(w_m, w_m; t) \end{pmatrix}\,,$$

e

$$g_m(t) := \begin{pmatrix} g_1^m(t) \\ \vdots \\ g_m^m(t) \end{pmatrix}\,, \quad \gamma_m(t) := \begin{pmatrix} \langle f(t), w_1\rangle \\ \vdots \\ \langle f(t), w_m\rangle\,, \end{pmatrix}\,, \quad g_{0m} := \begin{pmatrix} (u_0, w_1)_H \\ \vdots \\ (u_0, w_m)_H \end{pmatrix}\,,$$

il problema (4.29) si può riscrivere come problema di Cauchy per un sistema di equazioni differenziali:

$$\begin{cases} g_m'(t) + B_m(t) g_m(t) = \gamma_m(t) & \text{in } (0,T)\,, \\ g_m(0) = g_{0m}\,. \end{cases} \tag{4.30}$$

Grazie alle ipotesi (4.5), (4.6), le componenti della $B_m(t)$ e del vettore $\gamma_m(t)$ sono funzioni limitate in $(0,T)$.

Da classici risultati di esistenza e unicità per le equazioni differenziali ordinarie, si che il problema (4.30) ammette un'unica soluzione g_m assolutamente continua. Abbiamo così dimostrato l'esistenza di una soluzione di (4.28) per ogni $m \geq 1$.

<u>*Passo 2.*</u> In questo secondo passo cerchiamo di ottenere opportune stime sulla successione $\{u_m\}$. Indicheremo con C una generica costante positiva che può variare nei vari passaggi.

Per ogni $t \in (0,T)$ fissato, scegliendo $v = u_m(t)$ in (4.28) si ottiene

$$(u_m'(t), u_m(t))_H + a(u_m, u_m; t) = \langle f(t), u_m \rangle$$

e cioè

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u_m(t)\|_H^2 + a(u_m(t), u_m(t); t) = \langle f(t), u_m(t) \rangle\,.$$

Grazie alla Proposizione 4.2.4, da quest'ultima identità e dalla disuguaglianza di Young si ottiene

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\frac{d}{dt}&\|u_m(t)\|_H^2 + \alpha_0\|u_m(t)\|_V^2 \leq \langle f(t), u_m(t)\rangle + C_0\|u_m(t)\|_H^2\\ &\leq \|f(t)\|_{V'}\|u_m(t)\|_V + C_0\|u_m(t)\|_H^2\\ &\leq \frac{\alpha_0}{2}\|u_m(t)\|_V^2 + \frac{1}{2\alpha_0}\|f(t)\|_{V'}^2 + C_0\|u_m(t)\|_H^2\,.\end{aligned}$$

Da ciò segue

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u_m(t)\|_H^2 + \frac{\alpha_0}{2}\|u_m(t)\|_V^2 \leq C_0\|u_m(t)\|_H^2 + \frac{1}{2\alpha_0}\|f(t)\|_{V'}^2\,. \tag{4.31}$$

In particolare si ha

$$\frac{d}{dt}\|u_m(t)\|_H^2 \leq 2C_0\|u_m(t)\|_H^2 + \frac{1}{\alpha_0}\|f(t)\|_{V'}^2\,.$$

Moltiplicando ambo i membri di quest'ultima disuguaglianza per e^{-2C_0t} e integrando si ottiene

$$\begin{aligned}\|u_m(t)\|_H^2 &\leq \|u_m(0)\|_H^2\; e^{2C_0t} + \frac{e^{2C_0t}}{\alpha_0}\int_0^t e^{-2C_0s}\|f(s)\|_{V'}^2\,ds\\ &\leq \|u_0\|_H^2\; e^{2C_0T} + \frac{e^{2C_0T}}{\alpha_0}\int_0^T \|f(s)\|_{V'}^2\,ds\,, \qquad \text{per ogni } t \in (0,T)\end{aligned}$$

e di conseguenza

$$\|u_m\|_{L^\infty(0,T;H)} = \operatorname*{ess\,sup}_{t\in(0,T)}\|u_m(t)\|_H \leq C(\|u_0\|_H + \|f\|_{L^2(0,T;V')})\,. \tag{4.32}$$

Integrando (4.31) e utilizzando (4.32) si ottiene

$$
\begin{aligned}
\|u_m(t)\|_H^2 &+ \alpha_0 \int_0^t \|u_m(s)\|_V^2 ds \\
&\leq \|u_m(0)\|_H^2 + 2C_0 \int_0^t \|u_m(s)\|_H^2 ds + \frac{1}{\alpha_0} \int_0^t \|f(s)\|_{V'}^2 ds \\
&\leq \|u_0\|_H^2 + 2C_0 T \|u_m\|_{L^\infty(0,T;H)}^2 + \frac{1}{\alpha_0} \|f\|_{L^2(0,T;V')}^2
\end{aligned}
$$

da cui si deduce che

$$
\|u_m\|_{L^2(0,T;V)} \leq C(\|u_0\|_H + \|f\|_{L^2(0,T;V')}) .
$$

<u>*Passo 3.*</u> Nel passo precedente si è mostrato che la successione $\{u_m\}$ è limitata sia in $L^2(0,T;V)$ che $L^\infty(0,T;H)$. Grazie ai risultati di compattezza debole possiamo affermare che a meno di sottosuccessioni esiste $u \in L^2(0,T;V) \cap L^\infty(0,T;H)$ tale che $u_m \rightharpoonup u$ in $L^2(0,T;V)$ e $u_m \rightharpoonup^* u$ in $L^\infty(0,T;H)$. In altre parole

$$
\begin{aligned}
&\int_0^T (u_m(t), v(t))_V \, dt \to \int_0^T (u(t), v(t))_V \, dt \qquad \text{per ogni } v \in L^2(0,T;V) \\
&\int_0^T (u_m(t), v(t))_H \, dt \to \int_0^T (u(t), v(t))_H \, dt \qquad \text{per ogni } v \in L^1(0,T;H) .
\end{aligned}
$$

Siano ora $\varphi \in C_c^\infty(0,T)$, $v \in V$ e sia $v_m = P_m v$ in modo tale che $v_m \in V_m$ per ogni $m \geq 1$ e $v_m \to v$ in V.

Moltiplicando ambo i membri di (4.28) per φ e integrando su $(0,T)$ dal Teorema 4.2.3 e da (4.21) si ottiene

$$
-\int_0^T (u_m(t), v_m)_H \varphi'(t) \, dt + \int_0^T a(u_m(t), v_m)\varphi(t) \, dt = \int_0^T \langle f(t), v_m \rangle \varphi(t) \, dt . \tag{4.33}
$$

Dalla convergenza forte $v_m \to v$ in V, dalla convergenza debole $u_m \rightharpoonup u$ in $L^2(0,T;V)$ e da (4.25) si ha che

$$
\int_0^T (u_m(t), v_m)_H \varphi'(t) \, dt \to \int_0^T (u(t), v)_H \varphi'(t) \, dt , \tag{4.34}
$$

$$
\int_0^T a(u_m(t), v_m)\varphi(t) \, dt \to \int_0^T a(u(t), v)\varphi(t) \, dt , \tag{4.35}
$$

$$
\int_0^T \langle f(t), v_m \rangle \varphi(t) \, dt \to \int_0^T \langle f(t), v \rangle \varphi(t) \, dt . \tag{4.36}
$$

Vediamo di giustificare in modo più dettagliato i passaggi al limite (4.34)-(4.36).

Iniziamo da (4.34); introduciamo i funzionali $\Lambda_m, \Lambda \in (L^2(0,T;H))'$ definiti da

$$\langle \Lambda_m, w\rangle := \int_0^T (w(t), v_m)_H \varphi'(t)\, dt \qquad \text{per ogni } w \in L^2(0,T;H)$$
$$\langle \Lambda, w\rangle := \int_0^T (w(t), v)_H \varphi'(t)\, dt \qquad \text{per ogni } w \in L^2(0,T;H)\,.$$

Verifichiamo che $\Lambda_m \to \Lambda$ fortemente in $(L^2(0,T;H))'$:

$$\begin{aligned} |\langle \Lambda_m - \Lambda, w\rangle| &\le \int_0^T |(w(t), v_m - v)_H|\, |\varphi'(t)|\, dt \\ &\le \|\varphi'\|_{L^\infty(0,T)} \int_0^T \|w(t)\|_H \|v_m - v\|_H\, dt \\ &\le \|\varphi'\|_{L^\infty(0,T)} \|v_m - v\|_H \sqrt{T} \left(\int_0^T \|w(t)\|_H^2\, dt \right)^{1/2} \\ &= \sqrt{T} \|\varphi'\|_{L^\infty(0,T)} \|v_m - v\|_H \|w\|_{L^2(0,T;H)} \end{aligned}$$

da cui si ottiene dalla definizione di norma duale

$$\|\Lambda_m - \Lambda\|_{(L^2(0,T;H))'} \le \sqrt{T} \|\varphi'\|_{L^\infty(0,T)} \|v_m - v\|_H \to 0 \qquad \text{per } m \to +\infty\,.$$

Poichè $u_m \rightharpoonup u$ debolmente in $L^2(0,T;V)$ ed quindi debolmente in $L^2(0,T;H)$, da un ben noto risultato di analisi funzionale (si veda ad esempio [3, Proposizione III.5]) si ha

$$\int_0^T (u_m(t), v_m)_H \varphi'(t)\, dt = \langle \Lambda_m, u_m\rangle \to \langle \Lambda, u\rangle = \int_0^T (u(t), v)_H \varphi'(t)\, dt\,.$$

Per il passaggio al limite (4.35) si procede in modo analogo ponendo

$$\langle \Lambda_m, w\rangle := \int_0^T a(w(t), v_m; t) \varphi'(t)\, dt \qquad \text{per ogni } w \in L^2(0,T;V)$$
$$\langle \Lambda, w\rangle := \int_0^T a(w(t), v; t) \varphi'(t)\, dt \qquad \text{per ogni } w \in L^2(0,T;V)$$

in modo tale che $\Lambda_m, \Lambda \in (L^2(0,T;V))'$. Si dimostra utilizzando (4.25) che vale la stima

$$\|\Lambda_m - \Lambda\|_{(L^2(0,T;V))'} \le \sqrt{T} M \|\varphi'\|_{L^\infty(0,T)} \|v_m - v\|_V \to 0 \qquad \text{per } m \to +\infty\,.$$

Poichè $u_m \rightharpoonup u$ debolmente in $L^2(0,T;V)$, esattamente come per (4.34) si ottiene

$$\int_0^T a(u_m(t), v_m; t) \varphi'(t)\, dt = \langle \Lambda_m, u_m\rangle \to \langle \Lambda, u\rangle = \int_0^T a(u(t), v; t) \varphi'(t)\, dt\,.$$

Analoga procedura si può utilizzare per il passaggio al limite (4.36).

Passando al limite per $m \to +\infty$ in (4.33) si ottiene

$$-\int_0^T (u(t), v)_H \varphi'(t)\, dt + \int_0^T a(u(t), v; t)\varphi(t)\, dt = \int_0^T \langle f(t), v\rangle \varphi(t)\, dt\,. \qquad (4.37)$$

per ogni $v \in V$ e per ogni $\varphi \in C_c^\infty(0, T)$. Per ogni $t \in (0, T)$ introduciamo l'operatore $L(t) : V \to V'$ definito da

$$\langle L(t)u, v\rangle := a(u, v; t) \qquad \text{per ogni } u, v \in V\,.$$

Grazie a (4.25) è possibile verificare che per ogni $t \in (0, T)$ l'applicazione $L(t)$ è un operatore lineare e continuo da V in V' e che inoltre

$$\|L(t)\|_{\mathcal{L}(V,V')} \le M \qquad \text{per ogni } t \in (0, T)\,. \qquad (4.38)$$

Da (4.37), dal Teorema 4.2.3 si deduce che per ogni $v \in V$

$$(-\int_0^T \varphi'(t)u(t)\, dt, v)_H = \langle \int_0^T \varphi(t)[-L(t)u(t) + f(t)]\, dt, v\rangle$$

e cioè

$$-\int_0^T \varphi'(t)u(t)\, dt = \int_0^T \varphi(t)[-L(t)u(t) + f(t)]\, dt \qquad \text{per ogni } \varphi \in C_c^\infty(0, T)\,.$$

Grazie alla definizione (4.21), quest'ultima uguaglianza implica

$$u'(t) = -L(t)u(t) + f(t) \qquad (4.39)$$

nel senso delle distribuzioni. Da (4.38) si deduce che la funzione $t \mapsto L(t)u(t)$ appartiene a $L^2(0, T; V')$ ed essendo $f \in L^2(0, T; V')$ si può concludere che $u' \in L^2(0, T; V')$. Dalla defnzione di $L(t)$ possiamo riscrivere (4.39) nella forma

$$\langle u'(t), v\rangle + a(u(t), v; t) = \langle f(t), v\rangle \qquad \text{per ogni } v \in V\,. \qquad (4.40)$$

Inoltre è noto che se $u \in L^2(0, T; V)$ e $u' \in L^2(0, T; V')$ allora $u \in C^0([0, T]; H)$, si veda ad esempio [6, Section 5.9, Theorem 3].

Passo 4. Resta da dimostrare che $u(0) = u_0$. Sia ora $\varphi \in C_c^\infty([0, T))$ e $v \in V$. Analogamente a prima sia $v_m := P_m v$ in modo tale che $v_m \in V_m$ per ogni $m \ge 1$ e $v_m \to v$ in V. Moltiplicando (4.29) per φ e integrando per parti si può verficare che

$$\begin{aligned} -(u_0^m, v_m)_H\, \varphi(0) - \int_0^T (u_m(t), v_m)_H \varphi'(t)\, dt + \int_0^T a(u_m(t), v_m)\varphi(t)\, dt \\ = \int_0^T \langle f(t), v_m\rangle \varphi(t)\, dt \end{aligned}$$

Passando al limite per $m \to +\infty$, procedendo come sopra si ottiene

$$-(u_0, v)_H\, \varphi(0) - \int_0^T (u(t), v)_H \varphi'(t)\, dt + \int_0^T a(u(t), v)\varphi(t)\, dt = \int_0^T \langle f(t), v\rangle \varphi(t)\, dt$$

È facile verificare che la funzione $t \mapsto (u(t), v)_H$ appartiene a $H^1(0, T)$ e che

$$\frac{d}{dt}(u(t), v)_H = \langle u'(t), v\rangle\,.$$

Integrando per parti si ottiene quindi

$$-(u_0, v)_H \varphi(0) + (u(0), v)_H \varphi(0) + \int_0^T \langle u'(t), v\rangle \varphi(t)\, dt + \int_0^T a(u(t), v)\varphi(t)\, dt = \int_0^T \langle f(t), v\rangle \varphi(t)\, dt$$

o equivalentemente

$$(u_0, v)_H \varphi(0) - (u(0), v)_H \varphi(0) = - \int_0^T [\langle u'(t), v\rangle + a(u(t), v) - \langle f(t), v\rangle]\varphi(t)\, dt = 0$$

per ogni $\varphi \in C_c^\infty([0, T))$ e per ogni $v \in V$. Scegliendo φ tale che $\varphi(0) \neq 0$ si deduce che $(u(0), v)_H = (u_0, v)_H$ per ogni $v \in V$ e grazie alla densità di V in H anche per ogni $v \in H$. Questo implica $u(0) = u_0$.

<u>*UNICITÀ.*</u> Siano u_1, u_2 due soluzioni di (4.24) e sia $w = u_1 - u_2$. Allora w risolve il problema

$$\begin{cases} \langle w'(t), v\rangle + a(w(t), v; t) = 0 & \text{per ogni } v \in V, \text{ per q.o. } t \in (0, T)\,, \\ w(0) = 0\,. \end{cases}$$

Per quasi ogni $t \in (0, T)$ possiamo scegliere $v = w(t)$ in modo da ottenere

$$\langle w'(t), w(t)\rangle + a(w(t), w(t); t) = 0$$

o equivalentemente

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|w(t)\|_H^2 + a(w(t), w(t); t) = 0\,.$$

Dalla Proposizione 4.2.4 si ha poi

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|w(t)\|_H^2 + \alpha_0 \|w(t)\|_V^2 \le C_0 \|w(t)\|_H^2$$

il che implica
$$\frac{d}{dt}\|w(t)\|_H^2 \le 2C_0\|w(t)\|_H^2 \,.$$
Moltiplicando ambo i membri per di questa disuguaglianza per $e^{-2C_0 t}$ si ottiene
$$\frac{d}{dt}(e^{-2C_0 t}\|w(t)\|_H^2) \le 0$$
e quindi
$$e^{-2C_0 t}\|w(t)\|_H^2 \le \|w(0)\|_H^2 = 0\,.$$
Possiamo quindi concludere che $w(t) = 0$ per quasi ogni $t \in (0,T)$ e quindi che $u_1 = u_2$ in $L^2(0,T;H)$. □

Ci si occuperà ora della regolarità delle soluzioni nel caso in cui si impongano delle condizioni più restrittive su u_0, f e $\partial\Omega$.

Teorema 4.2.6. *Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un aperto limitato tale che $\partial\Omega \in C^2$ e sia $T \in (0,+\infty)$. Supponiamo che i coefficienti a_{ij}, b_i, c con $i,j \in \{1,\dots,N\}$ siano indipendenti dalla variabile t, che valgano le ipotesi (4.2), (4.5), (4.6) e che $a_{ij} \in W^{1,\infty}(\Omega)$ per ogni $i,j \in \{1,\dots,N\}$. Supponiamo inoltre che $\partial_t + L$ sia strettamente parabolico. Siano $u_0 \in V$ e $f \in L^2(0,T;H)$. Allora l'unica soluzione u di (4.24) soddisfa*
$$u \in L^2(0,T;H^2(\Omega)) \cap L^\infty(0,T;V)\,, \qquad u' \in L^2(0,T;H)\,.$$
Inoltre vale la seguente stima:
$$\|u\|_{L^2(0,T;H^2(\Omega))} + \|u\|_{L^\infty(0,T;V)} + \|u'\|_{L^2(0,T;H)} \le C(\|u_0\|_V + \|f\|_{L^2(0,T;H)})$$
con C costante positiva dipendente soltanto da Ω, T e dai coefficienti a_{ij}, b_i, c con $i,j \in \{1,\dots,N\}$.

Infine dal fatto che $u \in L^2(0,T;H^2(\Omega))$ e che $u' \in L^2(0,T;H)$ si ha anche $u \in C^0([0,T];V)$.

Dimostrazione. Si può procedere come nella dimostrazione di [6, Section 7.1, Theorem 5]. □

Ulteriore regolarità della soluzione di (4.24) può essere ottenuta con ipotesi ancora più restrittive come mostrato nel prossimo teorema.

Teorema 4.2.7. *Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un aperto limitato tale che $\partial\Omega \in C^2$ e sia $T \in (0,+\infty)$. Supponiamo che i coefficienti a_{ij}, b_i, c con $i,j \in \{1,\dots,N\}$ siano indipendenti dalla variabile t, che valgano le ipotesi (4.2), (4.5), (4.6) e che $a_{ij} \in W^{1,\infty}(\Omega)$ per ogni $i,j \in \{1,\dots,N\}$. Supponiamo inoltre che $\partial_t + L$ sia strettamente parabolico. Siano $u_0 \in V \cap H^2(\Omega)$ e $f \in H^1(0,T;H)$. Allora l'unica soluzione u di (4.24) soddisfa*
$$u \in L^\infty(0,T;H^2(\Omega)) \qquad u' \in L^\infty(0,T;H) \cap L^2(0,T;V) \qquad u'' \in L^2(0,T;V')\,.$$

Inoltre vale la seguente stima:

$$\|u\|_{L^\infty(0,T;H^2(\Omega))} + \|u'\|_{L^\infty(0,T;H)} + \|u'\|_{L^2(0,T;V)} \\ + \|u''\|_{L^2(0,T;V')} \leq C(\|u_0\|_{H^2(\Omega)} + \|f\|_{H^1(0,T;H)})$$

con C costante positiva dipendente soltanto da Ω, T e dai coefficienti a_{ij}, b_i, c con $i, j \in \{1, \dots, N\}$.

Dimostrazione. Si può procedere come nella dimostrazione di [6, Section 7.1, Theorem 5]. □

Iterando il Teorema 4.2.6 si ottiene il seguente risultato:

Teorema 4.2.8. *Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un aperto limitato tale che $\partial\Omega \in C^2$ e sia $T \in (0, +\infty)$. Supponiamo che i coefficienti a_{ij}, b_i, c con $i, j \in \{1, \dots, N\}$ siano indipendenti dalla variabile t, che valga l'ipotesi (4.2), e che per un certo intero $m \geq 0$ si abbia $a_{ij} \in W^{2m+1,\infty}(\Omega)$ per ogni $i, j \in \{1, \dots, N\}$, $b_i \in W^{2m,\infty}(\Omega)$ per ogni $i \in \{1, \dots, N\}$ e $c \in W^{2m,\infty}(\Omega)$.*
Supponiamo inoltre che $\partial_t + L$ sia strettamente parabolico.
Siano $u_0 \in V \cap H^{2m+1}(\Omega)$ e $f^{(k)} \in L^2(0, T; H^{2m-2k}(\Omega))$ per ogni $k \in \{0, \dots, m\}$.
Supponiamo infine che valgano le ulteriori condizioni di compatibilità $g_0, \dots, g_m \in V$ con

$$g_0 := u_0\,, \quad g_1 := f(0) - Lg_0\,, \quad \dots\,, \quad g_m := f^{(m-1)}(0) - Lg_{m-1}\,. \tag{4.41}$$

Allora l'unica soluzione u di (4.24) soddisfa

$$u^{(k)} \in L^2(0, T; H^{2m+2-2k}(\Omega)) \qquad \text{per ogni } k \in \{0, \dots, m\}\,.$$

Inoltre vale la seguente stima:

$$\sum_{k=0}^{m} \|u^{(k)}\|_{L^2(0,T;H^{2m+2-2k}(\Omega))} \leq C \left(\|u_0\|_{H^{2m+1}(\Omega)} + \sum_{k=0}^{m} \|f^{(k)}\|_{L^2(0,T;H^{2m-2k}(\Omega))} \right)$$

con C costante positiva dipendente soltanto da Ω, T e dai coefficienti a_{ij}, b_i, c con $i, j \in \{1, \dots, N\}$.

Dimostrazione. Si può procedere come nella dimostrazione di [6, Section 7.1, Theorem 6]. □

Come immediata conseguenza di quest'ultimo risultato si ottiene il seguente corollario.

Corollario 4.2.9. *Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un aperto limitato tale che $\partial\Omega \in C^\infty$ e sia $T \in (0, +\infty)$. Supponiamo che i coefficienti a_{ij}, b_i, c con $i, j \in \{1, \dots, N\}$ siano indipendenti dalla variabile t, che valga l'ipotesi (4.2), e che $a_{ij} \in C^\infty(\overline{\Omega})$ per ogni $i, j \in \{1, \dots, N\}$, $b_i \in C^\infty(\overline{\Omega})$ per ogni $i \in \{1, \dots, N\}$ e $c \in C^\infty(\overline{\Omega})$.*

Siano $u_0 \in C^\infty(\overline{\Omega})$ *e* $f \in C^\infty(\overline{\Omega}_T)$. *Supponiamo infine che valgano le condizioni di compatibilità (4.41) per ogni intero* m.
Allora l'unica soluzione u *di (4.24) soddisfa* $u \in C^\infty(\overline{\Omega}_T)$.

Bibliografia

[1] S. Agmon, A. Douglis, L. Nirenberg, *Estimates near the boundary for solutions of elliptic partial differential equations satisfying general boundary value conditions I*, Comm. Pure Appl. Math 12, 1959, 623-727

[2] H. Berestycki, L. Nirenberg, *On the method of moving planes and the sliding method*, Bol. Soc. Bras. Mat. 22, 1991, 1-37

[3] H. Brezis, *Analisi Funzionale*, Liguori Editore 1986

[4] H. Brezis, T. Kato, *Remarks on the Schrödinger operator with singular complex potentials*, J. Math. Pures Appl. (9), 58 (1979), no. 2, 137-151.

[5] X. Cabré, *Elliptic PDEs in probability and geometry. Symmetry and regularity of solutions*, Lecture Notes

[6] L. C. Evans, *Partial Differential Equations*, Graduate Studies in Mathematics vol. 19, American Mathematical Society

[7] A. Ferrero, F. Gazzola, M. Zanotti, *Elementi di Analisi Superiore per la Fisica e l'Ingegneria*, Società Editrice Esculapio 2010

[8] B. Gidas, W.-M. Ni, L. Nirenberg, *Symmetry and related properties via the maximum principle*, Commun. Math. Phys. 68, 1979, 209-243

[9] D. Gilbarg, N. S. Trudinger, *Elliptic Partial Differential Equations of Second Order*, Springer Verlag 1983

[10] K. Yosida, *Functional Analysis*, Springer-Verlag, 1980