ПРОБЛЕМИ ТИСЯЧОЛІТТЯ

М. В. Шмигевський, м. Київ

Ця стаття є логічним продовженням теми про сучасні проблеми математики, обговорення якої на сторінках журналу розпочалося статтею М. В. Шмигевського «Проблеми Гільберта» (див. № 1 (13) за 2012 рік). Незважаючи на те що розуміння деяких питань вимагає досить високого рівня підготовки саме в тих галузях математики, про які йдеться в статті (адже це Проблеми тисячоліття), ми вважаємо, що вам, шановні читачі, буде цікаво ознайомитися з питаннями, над якими сьогодні працюють видатні математики планети.

На зламі тисячоліть було сформульовано низку проблем, розв'язання яких повинно освітлити шляхи розвитку математики впродовж XXI століття, а можливо, і подальших століть. Найбільш широкого розголосу набули Проблеми тисячоліття, які висунув Математичний інститут Клея (МІК). До переліку Проблем тисячоліття (Millennium Prize Problems) увійшли сім математичних задач, охарактеризованих як «важливі класичні задачі, розв'язання яких не знайдено протягом багатьох років».

Анонсуючи приз, МІК провів паралель зі списком проблем Гільберта, поданим 1900 року. Знамениті проблеми Гільберта здійснили суттєвий вплив на розвиток математики XX століття. Як відомо (див. статтю «Проблеми Гільберта» в нашому журналі № 1 за 2012 рік), із 23 проблем Гільберта більшість уже розв'язано, і лише одна з них — гіпотеза Рімана, яку дотепер не розв'язано, — увійшла й до списку Проблем тисячоліття.

24 травня 2000 р. Математичний інститут Клея під час спеціального засідання в Колеж де Франс (Париж), на якому були присутні майже 500 осіб, оголосив, що за розв'язання кожної із семи сформульованих Проблем тисячоліття встановлено винагороду в розмірі один мільйон доларів США. Установлюючи премії, МІК мав на меті не лише відзначити нове тисячоліття, але й привернути увагу широкого загалу до математики.

Математичний інститут Клея заснував 1998 року бізнесмен Лендон Т. Клей (Landon T. Clay). Його очолив професор А. Джеффі з Гарвардського університету. Інститут невдовзі став відомим завдяки міжнародній підтримці математиків, організації фондів для вчених, літніх програм для студентів вищих навчальних закладів, конференцій та багатьох інших форм активізації математичного життя.

Хоча МІК базується в Кембриджі (Массачусетс, США), саме Париж було обрано для оголошення призових проблем на ознаменування 100-річного ювілею знаменитої доповіді Давида Гільберта на Міжнародному конгресі математиків (1900) у Парижі, де він сформулював свої знамениті 23 проблеми. Але між проблемами Гільберта і призовими проблемами тисячоліття існує суттєва різниця. «Своїми проблемами Гільберт намагався спрямувати математику на правильний шлях, — зауважив член Наукового консультативного комітету МІК Ендрю Уайлс із Принстонського університету. — Ми ж прагнули увічнити видатні нерозв'язані проблеми».

Сім поданих проблем, звичайно, досить давні, їх можна вважати відшліфованими, але несподіванки можливі завжди. Правила нагородження гнучкі; вони передбачають різні ситуації, наприклад і такі як формулювання простого контрприкладу, що приводить до переформулювання проблеми.

Правила про премію передбачають, що розв'язання не можна подавати безпосередньо до МІК. Розв'язання, якому може бути присуджено премію, потрібно опублікувати в одному з визначених журналів, і його мають вивчати фахівці протягом двох років. Після закінчення цього періоду Наукова консультативна рада буде вирішувати, чи розглядати автора розв'язання як претендента на присудження премії. Незважаючи на ці правила, МІК передбачає також можливість надсилання розв'язань до його поштової скриньки. Правила про присудження премії значно простіші, ніж самі проблеми, розуміння яких вимагає високого рівня математичної підготовки.

Засновник інституту Лендон Т. Клей пояснює, чому він, бізнесмен із порівняно низьким рівнем підготовки в галузі математики, так зацікавився нею. Крім зовнішньої причини, що полягає в недостатній суспільній підтримці розвитку математики, він також указав і особисту причину: «Допитливість є частиною людської природи. Привабливість математики заохочує багатьох людей присвятити їй своє життя. Прагнення до істини і відповідальність за красу, силу й елегантність математики є стимулом, що надихає математиків всієї планети».

Розв'язання хоча б однієї з наведених нижче проблем у науковому світі означає сходження на математичний Еверест!

ФОРМУЛЮВАННЯ ПРОБЛЕМ ТИСЯЧОЛІТТЯ

Проблема P і NP. Нехай P — алгоритм, який дає відповідь за поліноміальний час (тобто час реалізації алгоритму є щонайбільше поліноміальною функцією параметрів входу). Чи є поліноміальним час алгоритму NP перевірки вказаного розв'язку? Чи справедливо, що P = NP?

Гіпотеза Рімана. Будь-який нетривіальний нуль дзета-функції Рімана має дійсну частину, що дорівнює $\frac{1}{2}$.

Гіпотеза Пуанкаре. Будь-який замкнений однозв'язний тривимірний многовид є гомеоморфним до тривимірної сфери.

Гіпотеза Ходжа. На несингулярному комплексному проективному алгебраїчному многовиді будь-який клас Ходжа є раціональною лінійною комбінацією класів алгебраїчних циклів.

Гіпотеза Бірча і Свіннертон-Дайєра. Для будь-якої еліптичної кривої на множині раціональних чисел порядок нуля її L-функції в одиниці дорівнює рангу абелевої групи раціональних точок на кривій.

Рівняння Нав'є — Стокса. Доведіть або спростуйте існування і гладкість розв'язків тривимірних рівнянь Нав'є — Стокса (для коректних граничних і початкових умов).

Теорія Янга — Міллса. Доведіть, що квантове поле Янга — Міллса існує і має щільність мас.

(Офіційний опис проблем можна знайти на сайті: http://www.claymath.org/)

ДЕЯКІ НЕФОРМАЛЬНІ МІРКУВАННЯ ЩОДО НАВЕДЕНИХ ПРОБЛЕМ

Гіпотеза Бірча і Свіннертон-Дайєра. Рівняння виду

$$x^n + y^n + z^n + \ldots = t^n$$

на множині цілих чисел привертали увагу математиків античних часів. Розв'язок найбільш простого з них

$$x^2 + y^2 = z^2$$

(наприклад, знаменитий єгипетський трикутник: $3^2 + 4^2 = 5^2$) був відомий ще у Вавилоні, а повністю його дослідив у III ст. н. е. Діофант. Саме на полях його «Арифметики» П'єр Ферма написав формулювання своєї знаменитої теореми. Пошуком цілих розв'язків рівнянь типу

$$x^n + y^n + z^n + \ldots = t^n$$

при певних значеннях n займалися багато фахівців та любителів теорії чисел. Наприклад, було встановлено такі числові рівності:

$$2682440^4 + 15365639^4 + 18796760^4 = 20615673^4;$$

$$27^5 + 84^5 + 110^5 + 133^5 = 144^5.$$

Універсального методу розв'язання в цілих числах такого типу рівнянь не існує. Однак ще в часи тривалих спроб доведення теореми Ферма стало відомо про їх зв'язок із простими числами, а потім із деякими класами плоских кривих. Корені діофантових рівнянь, прості числа і точки перетину плоских кривих описують за допомогою деяких спеціальних функцій, наприклад дзета-функції Рімана або її узагальнення, L-функції Гассе — Вейля.

Математики Бірч (Bryan John Birch) і Свіннертон-Дайєр (Sir Henry Peter Francis Swinnerton-Dyer) 1960 року, експериментуючи на комп'ютері з деякими відомими кривими, встановили для них досить просту поведінку L-функції поблизу її нулів. Тоді вони висловили гіпотезу, що ця властивість буде зберігатися для довільних еліптичних кривих. Більш точно вони припустили, що кількість розв'язків діофантового рівняння визначається значенням пов'язаної з рівнянням дзета-функції в точці 1: якщо значення дзета-функції в точці 1 дорівнює нулю, то існує безліч розв'язків, і навпаки, якщо значення дзета-функції в точці 1 не дорівнює нулю, то існує лише скінчене число розв'язків. Поки що ніхто ні довести, ні спростувати цю гіпотезу не зміг.

Гіпотеза Ходжа. Це важлива проблема алгебраїчної геометрії. Гіпотеза описує класи когомологій на комплексних проективних многовидах, які реалізуються алгебраїчними підмноговидами.

Гіпотеза полягає в тому, що для певних типів просторів, які називають проективними алгебраїчними многовидами, так звані цикли Ходжа є комбінаціями об'єктів, що мають геометричну інтерпретацію,— алгебраїчних циклів. Цю гіпотезу сформулював 1941 року професор Кембриджа Вільям Ходж (William Vallance Douglas Hodge, 1903—1975).

У XX ст. математики створили потужні методи дослідження форми складних об'єктів. Основна ідея полягає в тому, щоб з'ясувати, до якої межі ми можемо наближати (апроксимувати) форму поданого об'єкта, склеюючи разом прості тіла розмірностей, що зростають. Цей метод виявився ефективним для опису різноманітних об'єктів, що зустрічаються в математиці. Однак при цьому виявилося незрозумілим геометричне обґрунтування методу: в деяких випадках було необхідно додавати частини, які не мали ніякого геометричного тлумачення.

На сьогодні відомо, що гіпотезу Ходжа вдалося довести лише для деяких окремих випадків. У загальному випадку ось уже понад 70 років ні довести гіпотезу Ходжа, ні спростувати її вчені не можуть.

Рівняння Нав'є — Стокса. Коли ми пливемо човном, від нього розходяться хвилі. Під час руху літаком чи автомобілем виникають турбулентні потоки. Усі ці явища описують відкритими 1822 року рівняннями Нав'є — Стокса. Незважаючи на те що рівняння складені досить давно, як їх розв'язувати в загальному вигляді, дотепер ніхто не знає. Більше того, ніхто поки не може довести чи спростувати існування і гладкість розв'язків тривимірних рівнянь Нав'є — Стокса при коректних граничних і початкових умовах. Водночас їх широко використовують не лише математики, але й конструктори літаків, автомобілів і кораблів.

Рівняння Нав'є — Стокса є основою гідродинаміки. Вони являють собою систему диференціальних рівнянь у частинних похідних і описують рух рідин і газів. Нехай $\vec{v}\left(\vec{x},\vec{t}\right)$ — тривимірний вектор швидкості руху рідини, $p\left(\vec{x},t\right)$ — тиск. Тоді рівняння Нав'є — Стокса записують так:

$$\frac{\partial\vec{v}}{\partial t}+\left(\vec{v}\cdot\nabla\right)\vec{v}=-\frac{1}{\rho}\nabla p+\nu\Delta\vec{v}+\vec{f}\left(\vec{x},t\right),$$

де $\nu>0$ — кінематична в'язкість, ρ — густина, $\vec{f}\left(\vec{x},t\right)$ — зовнішня сила, ∇ — оператор Гамільтона (набла) і Δ — оператор Лапласа.

Чисельні розв'язки цих рівнянь використовують у багатьох практичних застосуваннях і наукових дослідженнях. Однак в аналітичному вигляді розв'язки цих рівнянь знайдено лише в деяких окремих випадках, тому немає повного розуміння властивостей таких рівнянь. Зокрема, розв'язки рівнянь Нав'є — Стокса часто містять у собі турбулентність, яка залишається однією з найважливіших нерозв'язаних проблем фізики, незважаючи на її важливість для науки і техніки.

Проблема P і NP. У неформальному викладі проблема полягає у визначенні того, що найшвидше можна виконати: знайти розв'язок задачі чи зробити його перевірку.

У теорії алгоритмів уже більше трьох десятиліть питання про рівність класів складності P і NP є однією із центральних відкритих проблем.

Суть проблеми P = NP: якщо позитивну відповідь на якесь питання можна швидко перевірити (за поліноміальний час), то чи правда, що відповідь на це ж питання можна швидко знайти (за поліноміальний час і використовуючи поліноміальну пам'ять)?

Відношення між класами P і NP розглядають у теорії обчислювальної складності (розділ теорії обчислень), яка вивчає ресурси, необхідні для розв'язання деякої задачі. Найбільш загальні ресурси — це час (скільки потрібно зробити кроків) і пам'ять (скільки пам'яті потрібно для розв'язання задачі).

З означення класів P і NP випливає наслідок: $P\subseteq NP$. Однак дотепер нічого не відомо про строгість цього включення, тобто чи існує задача, яка належить класу NP, але не належить класу P. Якщо такої задачі не існує, то всі задачі, що належать класу NP, можна буде розв'язати за поліноміальний час; це дає значні переваги з обчислювальної точки зору. Нині найбільш складні задачі з класу NP (так звані NP-повні задачі) можна розв'язати за експоненціальний час, що майже завжди є неприйнятним.

Уперше питання про рівність класів було поставлене Стівеном Куком 1971 року і незалежно Леонідом Левіним 1973 року. На сьогодні більшість математиків уважає, що ці класи не рівні між собою. Згідно з опитуванням, проведеним 2002 року серед 100 вчених, 61 особа вважає, що правильною є відповідь — «не рівні», 9 — «рівні», 22 особи мали труднощі з відповіддю і, нарешті, 8 осіб вважають, що гіпотезу не можна вивести з відомої системи аксіом і, таким чином, вона не може бути ні доведеною, ні спростованою.

6 серпня 2010 року співробітник науково-дослідної лабораторії Hewlett-Packard в Пало-Альто Віней Деолалікар розіслав деяким ученим на перевірку своє доведення нерівності P і NP. Стівен Кук назвав його препринт «відносно серйозною спробою розв'язання проблеми P і NP». Однак уже в тому ж місяці було знайдено недоліки в доведенні. Деолалікар заявив, що в наступній версії доведення він урахує всі зауваження. На вікісторінці «Deolalikar P vs NP paper», пов'язаній із проектом Polymath, наведено критичний аналіз, зібрані помилки та деякі описки в доведенні Деолалікара. Там же можна прослідкувати за онлайн-реакцією на запропоноване доведення.

Гіпотеза Рімана. Гіпотеза стверджує, що всі нетривіальні (тобто такі, що мають ненульову уявну частину) нулі дзета-функції Рімана мають дійсну частину, що дорівнює $\frac{1}{2}$. Нагадаємо, що дзета-функція Рімана має вигляд:

$$\varsigma(z)=1+2^{-z}+3^{-z}+4^{-z}+\ldots,$$

де $z=x+iy,\quad i^2=-1.$

Доведення чи спростування цієї гіпотези буде мати значні наслідки для теорії чисел, особливо в дослідженнях розподілу простих чисел. Гіпотеза Рімана була восьмою в списку проблем Гільберта. У випадку публікації контрприкладу до гіпотези Рімана, Вчена рада Математичного інституту Клея має право вирішити, чи можна вважати цей контрприклад остаточним розв'язанням проблеми, чи потрібно змінити формулювання проблеми та залишити її відкритою. У цьому разі автору контрприкладу за рішенням Вченої ради може бути виплачений певний грошовий приз.

Гіпотеза Рімана про розподіл нулів дзета-функції Рімана була сформульована Бернхардом Ріманом 1859 року. Ріман встановив, що число $\pi(x)$ простих чисел, які не перевищують x, можна виразити через розподіл нетривіальних нулів дзета-функції. Багато тверджень про розподіл простих чисел, у тому числі про обчислювальну складність деяких цілочислових алгоритмів, уже доведено, але за припущенням справедливості гіпотези Рімана.

Переважна більшість математиків має інтуїтивне переконання в тому, що гіпотеза Рімана є справедливою. На сьогодні правильність гіпотези перевірено більше ніж для 10^{13} перших нулів дзета-функції Рімана.

Вельми цікавою є відповідь Гільберта на жартівливе питання: якими будуть його дії, якщо він з якоїсь причини проспить п'ятсот років, а потім прокинеться? Знаменитий математик відповів, що найпершою його дією буде питання: а чи вже доведено гіпотезу Рімана?

Теорія Янга — Міллса. Ця проблема належить до математичного апарату фізики елементарних частинок. Теорія Янга — Міллса — це калібрувальна теорія з неабелевою калібрувальною групою. Калібрувальні поля в цій теорії називають полями Янга — Міллса.

Свої квантові рівняння американські фізики Чжень-Нін Янг (Chen-Ning Franklin Yang, 1922) і Роберт Міллс (Robert L. Mills, 1927—1999) склали 1954 року, виходячи із загальних уявлень про симетрію елементарних частинок. Тривалий час рівняння Янга – Міллса розглядалися лише як математичні конструкції, які не мають відношення до реальності. Незважаючи на це, саме на основі теорії Янга — Міллса в 1970-х роках були створені дві наріжні теорії Стандартної моделі у фізиці елементарних частинок: квантова хромодинаміка (теорія сильних взаємодій) на основі групи SU(3) і теорія електрослабких взаємодій на основі групи SU(2).

Суть проблеми з математичної точки зору: потрібно довести, що для довільної простої компактної калібрувальної групи G квантова теорія Янга — Міллса для простору $\mathbb{R}^4$ існує і має ненульовий дефект маси. Це твердження відповідає експериментальним даним і чисельному моделюванню, однак довести його дотепер не вдалося.

Незважаючи на формальність підходу, рівняння Янга — Міллса адекватно описують майже всі відомі види взаємодій — сильну, слабку та електромагнітну. За допомогою цих рівнянь навіть передбачено відкриття нових частинок, які потім були знайдені в експериментах, проведених у провідних лабораторіях світу — Brookhaven, Stanford і CERN.

(Для запису рівнянь Янга — Міллса потрібен досить потужний математичний апарат. Якщо Вас, шановний читачу, глибоко зацікавила саме ця проблема, рекомендуємо ознайомитися з книгами: Гитман Д. М., Тютин И. В. «Каноническое квантование полей»; П. Уэст «Введение в суперсимметрию и супергравитацию».)

Гіпотеза Пуанкаре. Це єдина проблема з усіх Проблем тисячоліття, яку на сьогодні повністю розв'язано. Пальма першості в її розв'язанні належить Григорію Яковичу Перельману (Санкт-Петербург, Росія), який досліджував її упродовж восьми років. Гіпотеза Пуанкаре є однією з найбільш відомих задач топології. У початковій формі гіпотеза Пуанкаре стверджує, що довільний однозв'язний компактний тривимірний многовид без краю є гомеоморфним тривимірній сфері.

Популярний виклад цієї гіпотези демонструють на прикладі гумового м'ячика і стрічки. Якщо натягнути на м'ячик еластичну стрічку, то, поступово стягуючи її, не розриваючи і не відриваючи від поверхні, можна зібрати еластичну стрічку в одну точку. Про стрічку тоді кажуть, що вона «гомотопна нулю». Якщо ж ви натягнете таку стрічку на бублик (тор), то такий трюк може й не пройти: не всяка крива на бублику буде гомотопна нулю.

У топології — розділі математики, що вивчає найбільш загальні властивості неперервності,— прийнято говорити, що м'ячик (сфера) і бублик (тор) мають різний рід (genus). Сфера (тобто м'ячик, хоч як завгодно зім'ятий або розтягнутий) має нульовий рід (genus 0), а тор (тобто бублик) — перший рід (genus 1).

Видатний французький математик Анрі Пуанкаре (Jules Henri Poincar, 1854—1912) 1900 року зробив припущення, що тривимірний многовид з усіма групами гомологій, як у сфери, є гомеоморфний сфері. 1904 року він знайшов контрприклад, який називають тепер сферою Пуанкаре, і сформулював остаточний варіант своєї гіпотези. Спроби довести гіпотезу Пуанкаре привели до важливих результатів у топології многовидів.

Узагальнена гіпотеза Пуанкаре стверджує: для довільного натурального числа n довільний многовид розмірності n гомотопічно еквівалентний сфері розмірності n тоді й тільки тоді, коли цей многовид гомеоморфний сфері.

Класична гіпотеза Пуанкаре є окремим випадком узагальненої гіпотези при $n=3$. Доведення узагальненої гіпотези Пуанкаре для $n \geq 5$ дістали ще на початку 1960—1970-х майже одночасно Смейл, а також (незалежно й іншими методами) Столлінгс. Доведення більш складного випадку $n=4$ здобув Майкл Фрідман 1982 року. Із теореми Новікова про топологічну інваріантність характеристичних класів Понтрягіна випливає, що існують гомотопічно еквівалентні, але не гомеоморфні многовиди високих розмірностей.

Найбільш складним, але й водночас найбільш важливим, виявився тривимірний випадок ($n=3$). Упродовж XX ст. знайти доведення гіпотези Пуанкаре для цього випадку так і не вдалося.

ІСТОРІЯ ДОВЕДЕННЯ ГІПОТЕЗИ ПУАНКАРЕ

Успіх прийшов на початку XXI століття. Другого листопада 2002 року Григорій Перельман розмістив свій препринт "The entropy formula for the Ricci flow and its geometric applications" (39 сторінок) на сайті arXiv.org, який тоді розміщувався на серверах Лос-Аламоської лабораторії (Los Alamos National Lab), а нещодавно «переїхав» до Корнельського університету (Cornell University).

Ще два препринти на цю саму тему Перельман розмістив на тому же сайті в березні

(22 сторінки) і липні (7 сторінок) 2003 року, а в проміжку між ними, у квітні 2003 року він на запрошення прочитав декілька лекцій, присвячених гіпотезі Пуанкаре, у Массачусетському технологічному інституті та інших провідних наукових установах США.

Доведення початкової гіпотези Пуанкаре (і більш загальної гіпотези Тьорстона) Перельман дістав у 2002–2003 рр. У подальшому доведення Перельмана перевірили і подали в розгорнутому вигляді кілька груп учених. Зазначимо, що доведення Перельмана суттєво використовує техніку «потоків Річчі з хірургією». Потоки Річчі першим почав застосовувати американський математик Ричард Гамільтон, але за 20 років дослідження йому так і не підкорилася гіпотеза Пуанкаре, хоча в ідейному плані Гамільтон був на правильному шляху.

Варто підкреслити, що основну і найбільш складну роботу з доведення гіпотези Пуанкаре виконав саме Григорій Перельман. Його конкурент Ричард Гамільтон якось у розпачі сказав, що якби він знав стільки, скільки знає Перельман, якби він «варився» у ленінградській математичній школі, то обов'язково першим би довів гіпотезу Пуанкаре. Та не склалося, про що мріялося. Успіх цілком справедливо знайшов талановитого і наполегливого російського математика, який ще зі шкільних років звик до підкорення вершин — перемагав на міжнародних математичних олімпіадах (до речі, з максимально можливим результатом).

Запропоноване Перельманом доведення гіпотези Пуанкаре офіційно отримало визнання 2006 року на Математичному конгресі в Мадриді. Однак сам переможець на своє вшанування не приїхав. Більше того, він звільнився з роботи в Математичному інституті і, мабуть, повністю завершив заняття математикою. Перельман відмовився від поїздки до Мадрида, а також і від присудження йому престижної премії Філдса.

2006 року журнал «Science» назвав доведення Перельманом гіпотези Пуанкаре науковим «проривом року» ("Breakthrough of the Year"). Це перша робота з математики, яка заслужила такого звання.

За доведення гіпотези Пуанкаре Математичний інститут Клея (США) у березні 2010 року оголосив Григорія Перельмана лауреатом своє премії. Щоб віддати належне Перельману й відзначити вручення першої Премії тисячоліття, МІК запланував дводенне читання лекцій провідними математиками світу, після яких мала бути церемонія вручення премії.

Запланована церемонія відбулася 8 червня 2010 року в Парижі. Виступили зі змістовними та емоційно насиченими лекціями видатні математики сучасності: Майкл Атья, Джон Морган, Кертіс Макмаллен, Стівен Смейл, Вільям Тьорстон, Михайло Громов, Ендрю Уайлс та інші. Усе йшло чудово, за винятком одного — у залі не було самого лауреата. Перельман відмовився від участі в церемонії.

Сертифікат премії тисячоліття було передано відомому математику Михайлу Громову, який представляв Перельмана і мав би умовити його отримати премію. Та знову не склалося. 1 липня 2010 року Перельман офіційно повідомив Інститут Клея про остаточну відмову від премії. Причиною відмови він назвав незгоду з організованим математичним товариством: «Мені не подобаються їхні рішення, я вважаю їх несправедливими. Я вважаю, що вклад у розв'язання задачі (гіпотези Пуанкаре) американського математика Гамільтона є нісскільки не меншим, ніж мій». Після цієї відмови Інститут Клея вирішив спрямувати весь грошовий розмір премії на стипендії молодим обдарованим математикам.

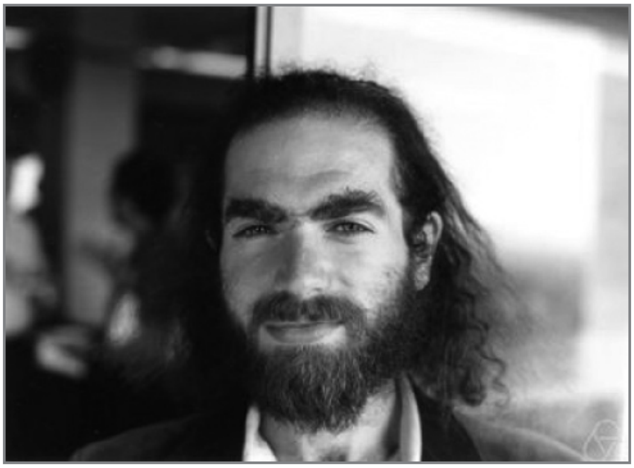
У квітні 2011 року Перельман після тривалого мовчання дав своє перше інтерв'ю ізраїльському журналісту і продюсеру московської кінокомпанії «Президент-фільм» Олександру Забровському. У цьому інтерв'ю математик на питання про те, чому він не взяв мільйон доларів, відповів, що ці гроші — ніщо для «людини, яка керує Всесвітом». Окрім цього, Перельман погодився знятися у фільмі Забровського, в якому мова повинна йти про «співробітництво і протиборство трьох основних світових математичних шкіл: російської, китайської та американської, які найбільше просунулися по шляху вивчення і керування Всесвітом».

У вересні 2011 року Вчена рада Санкт-Петербурзького відділення математичного інституту імені В. А. Стєклова висунула кандидатуру Перельмана на пост дійсного члена (академіка) Російської академії наук, однак учений ніяк не відреагував на цю ініціативу (не побажав підготувати необхідні документи) і тому до списку кандидатів в академіки не потрапив.

В опублікованому в жовтні 2007 року газетою “The Sunday Telegraph” списку 100 геніїв, які живуть нині, Перельман зайняв почесне дев’яте місце. Від цього місця він поки що не відмовився...

КОРОТКІ БІОГРАФІЧНІ ВІДОМОСТІ ПРО ПЕРЕЛЬМАНА

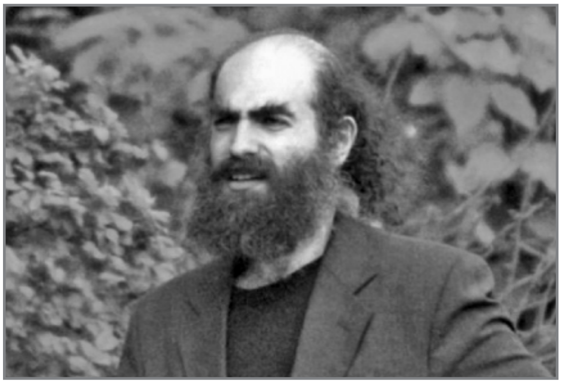
Григорій Якович Перельман народився 13 червня 1966 року в Ленінграді. Його батько був інженером-електриком, 1993 року емігрував до Ізраїлю. Мати Любов Лейбівна залишилася в Санкт-Петербурзі, працювала вчителем математики в ПТУ. Сама грала на скрипці й прищепила любов до класичної музики своєму синові.



До 9 класу Перельман навчався в середній школі на околиці міста, однак у 5 класі почав відвідувати математичний гурток при Палаці піонерів під керівництвом Сергія Рукшина, учні якого вибороли багато нагород на математичних олімпіадах різного рівня.

1982 року в складі команди радянських школярів виборов золоту медаль на Міжнародній математичній олімпіаді в Будапешті, отримав повний бал за бездоганне розв’язання всіх задач.

Григорій Перельман закінчив 239-у фізико-математичну школу Ленінграда. Гарно грав у настільний теніс, відвідував музичну школу. Золотої медалі не отримав лише через фізкультуру: не склав норми ГПО.



Без іспитів зарахований на математико-механічний факультет Ленінградського державного університету. Перемагав на факультетських, міських і всесоюзних студентських математичних олімпіадах. Усі роки навчався лише на «відмінно». За успіхи в навчанні отримував Ленінську стипендію.

Закінчив із відзнакою університет, вступив до аспірантури (науковий керівник — академік А. Д. Александров) при Ленінградському відділенні Математичного інституту ім. В. А. Стєклова (ЛОМІ — до 1992 р.; потім — ПОМІ). Захистив 1990 року кандидатську дисертацію, залишився працювати в ЛОМІ старшим науковим співробітником.

На початку 1990-х років Перельман приїхав до США, де працював науковим співробітником у різних університетах. Дивував колег аскетичністю побуту, улюбленою їжею були молоко, хліб і сир.

1996 року повернувся до Санкт-Петербурга, де продовжив роботу в ПОМІ. У грудні 2005 року він звільнився з ПОМІ і практично повністю порвав контакти з колегами.

До подальшої наукової кар’єри інтересу не виявляє. Зараз мешкає в Петербурзі (масив Купчино, околиця міста) в одній квартирі з матір’ю. Веде досить замкнений спосіб життя, всіляко ігнорує засоби масової інформації.

1996 року Перельман був удостоєний премії Європейського математичного товариства, але відмовився її отримати, оскільки вважав свою роботу про простори Александрова (за яку його нагородили) ще не завершеною і не перевіреною.

2006 року Перельману за доведення гіпотези Пуанкаре присуджена премія Філдса, однак він відмовився і від неї (розчарувався в порядках, які панують у математичному товаристві).

2010 року Математичний інститут Клея присудив Перельману премію в розмірі одного мільйона доларів США за доведення гіпотези Пуанкаре. І цього разу була відмова і звинувачення в некомпетентності тих, хто виніс вердикт про його нагородження.

15 червня 2011 року на телеканалі «Россия» вийшов документальний фільм «Иноходец. Урок Перельмана» про життя і наукову діяльність Перельмана.

Зазначимо, що хибною є думка, нібито батьком Григорія Яковича Перельмана є Яків Ісидорович Перельман — відомий популяризатор фізики, математики та астрономії. Я. І. Перельман помер більш ніж за 20 років до народження Григорія Перельмана.

Про долю Перельмана написані захопливі книги: «Григорий Перельман и гипотеза Пуанкаре» (Олег Арсенов, 2010); «Совершенная строгость. Григорий Перельман: гений и задача тысячелетия» (Маша Гессен, 2011).

І наостанок…

ДЕКІЛЬКА ВИСЛОВІВ ПРО ПЕРЕЛЬМАНА І САМОГО ПЕРЕЛЬМАНА

«Перельман дав нам ключ. Ми ламали двері, а він підійшов до замка і просто відімкнув його» — так прокоментував ситуацію з доведенням гіпотези Пуанкаре засновник премії та Інституту Лендон Клей.

«Доведення Перельмана — це видатне досягнення століття. Не було б Перельмана — не було б теореми. Ще сто років могло б не бути. Людина, яка за годину робить те, що сильний математик робить за рік. Він сім років сидів і розв'язував проблему. І розв'язав!» — так сказав Михайло Громов, постійний професор французького Інституту вищих наукових досліджень, лауреат Абелівської премії, один із найвідоміших представників ленінградської геометричної школи.

«Перельман зробив те, чого не зміг зробити я. Ми багато чого навчились у Перельмана-математика. Можливо, нам варто задуматись і повчитися в нього ставленню до життя»,— з виступу Вільяма Тьорстона на церемонії вручення Премії тисячоліття.

«Звичайно, серед математиків є більш-менш чесні люди, але майже всі вони конформісти — самі вони більш-менш чесні, але готові терпіти тих, хто є нечесним. Тому чужаками серед них стають не ті, хто порушує етичні норми. В ізоляції опиняються такі люди, як я» (*Григорій Перельман*).

■

ЕВКЛІДОВА ГЕОМЕТРІЯ

Укладач О. О. Старова, м. Харків

Евклідова геометрія — це геометрична теорія, заснована на системі аксіом, уперше викладеній у «Началах» Евкліда.

ЕВКЛІД І ЙОГО «НАЧАЛА»

Спроби викласти найважливіші математичні знання як єдине ціле в певному порядку, зв'язку і послідовності робив ще Гіппократ Хіоський (близько 450–430 рр. до н. е.), але лише Евклід зміг завершити цю працю.

Евклід, автор низки творів, до історії математики увійшов передусім як творець «Начал» (із грецької це означає «стихії, елементи», латинською твір називається Elementa).

«Начала» Евкліда складаються з 13 книг, у яких розглянуто геометричні фігури на площині, і оскільки для цього потрібні числа, то потрібно й учення про цілі (додатні) числа та дроби. Але оскільки відношення просторових фігур не завжди можна виразити раціональними числами, то Евклід вивчав також несумірні геометричні величини. Нарешті, дослідження поширюється з площини на простір, на обчислення площ поверхонь і об'ємів тіл. Таким чином, у «Началах» було викладено основи планіметрії, стереометрії та арифметики.

Кожна з 13 книг у складі «Начал» Евкліда розпочинається з означень; у першій книзі до означень приєднано п'ять постулатів і декілька аксіом, кількість яких у різних списках коливається від 5 до 9. Із цих передумов потім послідовно виведено всі твердження «Начал».

Означення в Евкліда переважно є описовими, наприклад, означення перше книги І: «Точка є те, що не має частин». Але разом з описовими трапляються й номінальні (словесні) означення, як означення 19 книги І: «Прямолінійними фігурами є ті, які містяться між прямими»; генетичні (які вказують на спосіб походження об'єкта), наприклад, означення 14 книги XI: «Сфера буде, якщо за нерухомості діаметра півкола півколо, що обертається, знову повернеться в те саме положення, з якого воно почало рухатися, то охоплена фігура і є сфера»; і нарешті аксіоматичні (тобто такі, які можна сформулювати у вигляді аксіом), наприклад, означення 1 книги III: «Рівними колами є ті, у яких діаметри рівні або прямі із центра рівні».

У сучасному трактуванні слово «постулат» вживають як назву для аксіом деякої математичної теорії; так, низку аксіом евклідової геометрії в «Началах» названо постулатами.

За Евклідом, постулати — це вимоги побудувати деякі прості фігури, аксіоми — це загальновизнані положення, що не вимагають доведення і лежать в основі доведення.

ПОСТУЛАТИ

Припустимо:

1. Що від усякої точки до всякої точки можна провести пряму лінію.
2. І що обмежену пряму [можна] безперервно продовжувати по прямій.
3. І що з усякого центра в будь-який спосіб [можна] описати коло.
4. І що всі прямі кути рівні між собою.
5. І якщо пряма, що падає на дві прямі, утворює внутрішні односторонні кути, менші за два прямих, то продовжені ці дві прямі необмежено зустрінуться з того боку, де кути менші за два прямих.

ЗАГАЛЬНІ ПОНЯТТЯ (АКСІОМИ)

1. Рівні одному й тому ж рівні і між собою.
2. І якщо до рівних додати рівні, то й цілі будуть рівні.
3. І якщо від рівних відняти рівні, то й остачі будуть рівні.
[4. І якщо до нерівних додати рівні, то цілі будуть не рівні.
5. І подвоєні одного й того ж рівні між собою.
6. І половини одного й того ж рівні між собою].
7. І суміщені один з одним рівні між собою.
8. І ціле більше за частину.
[9. І дві прямі не містять простору].

(*Евклид. Начала. Т. I–III. Перевод и комментарии. Д. Д. Мордухай-Болтовского, при ред. участии И. Н. Веселовского.*)

П'ятий постулат Евкліда є особливим. Його не можна підтвердити або спростувати досвідом. Тому впродовж двох тисячоліть після Евкліда чимало математиків намагалися його довести. Лише 1826 року російський математик М. І. Лобачевський довів, що це твердження не можна вивести логічно з інших.

Історики, порівнюючи «Начала» із більш ранніми грецькими математичними творами, що збереглися, або свідченнями про них, визначили ті частини цієї праці, у яких Евклід використав відкриття своїх попередників, звів їх у строгу логічну систему. Так, загальновизнано, що книга V і, ймовірно, перші п'ять речень книги XIII належать Евдоксу, частина книги X походить від Теетета. Проте і ці книги дотримують загального стилю «Начал», аж до слів «що й слід було довести» або «що й слід було побудувати», якими закінчуються речення, залежно від того, є вони теоремами чи «проблемами», тобто завданнями на побудову (слово «проблема» в латинських текстах «Начал» ужито саме в цьому значенні). Хоча лише в окремих випадках можна знайти конкретні вказівки на те, що певне твердження або його доведення є результатом оригінальної творчості самого Евкліда, не може бути сумніву, що автор цієї чудової праці був великим геометром. Неабияке завдання систематизувати безліч різноманітного матеріалу, з яким він так блискуче впорався, саме по собі було під силу лише видатному вченому. Ця праця є однією із найпоширеніших книг, що витримали впродовж більш ніж два тисячоліття велику кількість видань у перекладах багатьма мовами, у скорочених і перероблених варіантах. Досі, незважаючи на значний розвиток геометрії за цей період, «Начала» є зразком для підручників елементарної геометрії, за якими викладають у середній школі. Їхнього значення не може зменшити та обставина, що сучасні математики знаходять логічні недоліки як в означеннях, так і в системі аксіом. Ці недоліки не впливають на міцність основ геометрії, побудованої Евклідом у його безсмертній праці.

АКСІОМАТИКА ЕВКЛІДОВОЇ ГЕОМЕТРІЇ

Сучасна система аксіом евклідової геометрії спирається на шість основних невизначуваних понять (це три роди об'єктів — точка, пряма, площина — і три види відношень між ними, які висловлюють так: «належить», «між», «рух») і складається з п'яти груп.

АКСІОМИ НАЛЕЖНОСТІ

- ✓ Через дві точки можна провести пряму, і тільки одну.
- ✓ На кожній прямій лежать принаймні дві точки. Існують хоча б три точки, що не лежать на одній прямій.
- ✓ Через кожні три точки, що не лежать на одній прямій, можна провести площину, і тільки одну.
- ✓ На кожній площині є принаймні три точки і існують хоча б чотири точки, що не лежать в одній площині.
- ✓ Якщо дві точки цієї прямої лежать на цій площині, то й сама пряма лежить на цій площині.
- ✓ Якщо дві площини мають спільну точку, то вони мають ще одну спільну точку (і отже, спільну пряму).

АКСІОМИ ПОРЯДКУ

- ✓ Якщо точка B лежить між точками A і C, то всі три точки лежать на одній прямій.
- ✓ Для кожних точок A і B існує така точка C, що B лежить між A і C.
- ✓ Із трьох точок прямої тільки одна лежить між двома іншими.
- ✓ **Аксіома Паша.** Якщо пряма перетинає одну сторону трикутника, то вона перетинає ще й другу сторону або проходить через вершину.

АКСІОМИ РУХУ

- ✓ Рух ставить у відповідність точкам точки, прямим — прямі, площинам — площини, зберігаючи належність точок прямим і площинам.
- ✓ Два послідовних рухи дають знову рух, і для всякого руху обернений.
- ✓ Якщо подано точки A, B і напівплощини α, β, обмежені продовженими напівпрямими, які виходять із точок A, B, то існує

рух, і притому єдиний, що переводить A, a, α в B, b, β.

АКСІОМИ НЕПЕРЕРВНОСТІ

- ✓ **Аксіома Архімеда.** Всякий відрізок AB можна перекрити меншим відрізком AA_1, відкладаючи його на AB достатню кількість разів.
- ✓ **Аксіома Кантора.** Якщо подано нескінченну послідовність вкладених відрізків A_nB_n, то існує, і притому єдина, точка C, що належить усім відрізкам.

АКСІОМА ПАРАЛЕЛЬНОСТІ

- ✓ Через подану точку поза поданою прямою можна провести на площині не більше за одну пряму, що не перетинає подану, тобто не більше за одну пряму, паралельну поданій.

За допомогою основних понять визначено решту понять евклідової геометрії. Усі твердження про властивості геометричних фігур, що не містяться в аксіомах евклідової геометрії, мають бути доведені логічним висновком із цих аксіом. Системі аксіом евклідової геометрії властива повнота і несуперечність. Якщо в аксіоматиці евклідової геометрії замінити аксіому паралельності, то отримана нова система аксіом (система аксіом геометрії Лобачевського) теж несуперечлива, отже, аксіома паралельності не залежить від інших аксіом евклідової геометрії.

ІНТЕРПРЕТАЦІЯ ЕВКЛІДОВОЇ ГЕОМЕТРІЇ

Об'єкти, що задовольняють систему аксіом евклідової геометрії, допускають конкретні тлумачення (інтерпретації). Звичайна інтерпретація евклідової геометрії, що виникла як відображення фактів дійсності, пов'язана з наочними уявленнями про навколишній світ. Уся геометрична термінологія свідчить про те, що поняття про геометричні образи — це абстракція від реальних предметів. Наприклад, слово «точка» походить від дієслова «ткнути»; слово «лінія» — від латинського «льон», «льняна нитка», тобто поняття «лінія» є абстракцією від тонкої льняної нитки, поняття «пряма лінія» — абстракція натягнутої льняної нитки.

У «Началах» Евкліда міститься опис основних об'єктів як абстракцій від реальних предметів навколишнього світу. Проте об'єкти, що задовольняють систему аксіом евклідової геометрії, допускають безліч інтерпретацій. Так, у декартовій інтерпретації евклідової геометрії на площині точкою називають будь-яку пару дійсних чисел x і y, узятих у певному порядку $(x;y)$; числа x і y називають координатами точки. Пряма — це сукупність усіх точок, координати яких задовольняють лінійне рівняння

$$ax+by+c=0$$

(рівняння прямої). Точка належить прямій, якщо її координати задовольняють рівняння прямої. Відношення порядку точок на прямій також визначають за деякими умовами алгебри.

За такого конкретного розуміння точок і прямих і відношень між ними кожна з аксіом евклідової геометрії є деяким твердженням, що стосується дійсних чисел, і має місце внаслідок відповідних аксіом арифметики. Тому система аксіом геометрії Евкліда несуперечлива, якщо несуперечлива система аксіом арифметики.

ЛІТЕРАТУРА

1. *Кольман Э.* История математики в древности. — М. : Государственное издательство физико-математической литературы, 1961.
2. *История* математики с древнейших времен до начала XIX столетия : в 3-х томах / под ред. А. П. Юшкевича. — М. : Наука, 1970. — Т. 3.
3. *Болгарский Б. В.* Очерки по истории математики. — 2-е изд., исправленное и дополненное. — Минск. : Вышэйшая школа, 1979.
4. *Математический* энциклопедический словарь / под ред. Ю. В. Прохорова. — М. : Советская энциклопедия, 1988.
5. *Хрестоматия* по истории математики / под ред. А. П. Юшкевича. — М. : Просвещение, 1976.

■

ЧИТАЙТЕ В НАСТУПНОМУ НОМЕРІ:

«Елементарна геометрія»

СИСТЕМИ АЛГЕБРАЇЧНИХ РІВНЯНЬ
Розв'язування окремих видів систем рівнянь

А. Ф. Михайловська, м. Харцизьк, Донецька обл.

Закінчення. Початок у № 1 (13) за 2012 р.

СИСТЕМИ ОДНОРІДНИХ РІВНЯНЬ

Однорідним називають многочлен, усі члени якого мають однакові степені. Наприклад, многочлен

$$a_0x^n+a_1x^{n-1}y+a_2x^{n-2}y^2+\ldots+a_{n-1}xy^{n-1}+a_ny^n$$

є однорідним многочленом n-го степеня з двома змінними. Рівняння виду $f(x,y)=0$, де $f(x,y)$ — однорідний многочлен, називають однорідним рівнянням.

Системи рівнянь виду

$$\begin{cases} f(x,y)=a, \\ g(x,y)=b, \end{cases}$$

де $f(x,y)$, $g(x,y)$ — однорідні многочлени, a і b — числа, розв'язують за допомогою застосування методів алгебраїчного додавання та введення нових змінних.

Приклад. Розв'яжіть систему рівнянь:

а) $$\begin{cases} 2x^2+5xy-18y^2=0, & (1) \\ xy+y^2-12=0. & (2) \end{cases}$$

Розв'язання

Поділимо почленно рівняння (1) на y^2, де $y\neq 0$, оскільки якщо $y=0$, то з першого рівняння системи знаходимо, що $x=0$, а пара чисел $(0;0)$ не є розв'язком другого рівняння системи. Дістанемо:

$$2\frac{x^2}{y^2}+5\frac{x}{y}-18=0. \qquad (3)$$

Виконаємо в рівнянні (3) заміну: $\frac{x}{y}=t$, тоді:

$$2t^2+5t-18=0,\ t_1=-\frac{9}{2},\ t_2=2.$$

Повертаючись до початкових змінних, дістанемо:

$$\frac{x}{y}=-\frac{9}{2},\ \frac{x}{y}=2.$$

Тобто подана система рівнянь розгалужується на дві:

1) $$\begin{cases} \frac{x}{y}=-\frac{9}{2}, \\ xy+y^2-12=0, \end{cases}$$

$$\begin{cases} x=-\frac{9}{2}y, \\ -\frac{9}{2}y^2+y^2-12=0, \end{cases} \quad \begin{cases} x=-\frac{9}{2}y, \\ \frac{7}{2}y^2=-12, \end{cases}$$

оскільки $\frac{7}{2}y^2>0$ при $y\neq 0$, то система рівнянь дійсних розв'язків не має;

2) $$\begin{cases} \frac{x}{y}=2, \\ xy+y^2-12=0, \end{cases}$$

$$\begin{cases} x=2y, \\ 2y^2+y^2-12=0, \end{cases} \quad \begin{cases} x=2y, \\ 3y^2=12, \end{cases} \quad \begin{cases} x=2y, \\ y^2=4, \end{cases}$$

$$\begin{cases} x=-4, \\ y=-2 \end{cases} \text{ або } \begin{cases} x=4, \\ y=2. \end{cases}$$

Відповідь. $(-4;-2)$, $(4;2)$.

б) $$\begin{cases} 3x^2+2xy+y^2=11, \\ x^2+2xy+3y^2=17. \end{cases}$$

Розв'язання

Помножимо перше рівняння поданої системи на -17, а друге — на 11 і додамо їх почленно:

$$+\begin{cases} -51x^2-34xy-17y^2=-187, \\ 11x^2+22xy+33y^2=187; \end{cases}$$
$$\overline{-40x^2-12xy+16y^2=0,}$$

звідки $10x^2+3xy-4y^2=0$.

Рівняння $10x^2+3xy-4y^2=0$ однорідне. Складемо нову систему рівнянь, рівносильну поданій:

$$\begin{cases}10x^2+3xy-4y^2=0, & (1)\\ x^2+2xy+3y^2=17. & (2)\end{cases}$$

Поділивши почленно рівняння (1) на y^2, де $y\neq 0$ (див. попередній приклад), дістанемо:

$$10\left(\frac{x}{y}\right)^2+3\cdot\frac{x}{y}-4=0. \qquad (3)$$

Виконаємо в рівнянні (3) заміну: $\frac{x}{y}=t$, тоді

$$10t^2+3t-4=0,\ t_1=-\frac{4}{5},\ t_2=\frac{1}{2}.$$

Повертаючись до початкових змінних, дістанемо:

$$\frac{x}{y}=-\frac{4}{5},\ \frac{x}{y}=\frac{1}{2}.$$

Тобто подана система рівнянь розгалужується на дві:

1) $\begin{cases}x=-\frac{4}{5}y,\\ x^2+2xy+3y^2=17,\end{cases}$

$$\begin{cases}x=-\frac{4}{5}y,\\ \frac{16}{25}y^2-\frac{8}{5}y^2+3y^2=17,\end{cases}\quad \begin{cases}x=-\frac{4}{5}y,\\ y^2=\frac{25}{3},\end{cases}$$

$$\begin{cases}x=-\frac{4}{5}y,\\ y_1=-\frac{5}{\sqrt3},y_2=\frac{5}{\sqrt3},\end{cases}\quad \begin{cases}x=\frac{4}{\sqrt3},\\ y=-\frac{5}{\sqrt3}\end{cases}\ \text{або}\ \begin{cases}x=-\frac{4}{\sqrt3},\\ y=\frac{5}{\sqrt3}.\end{cases}$$

2) $\begin{cases}x=\frac{1}{2}y,\\ x^2+2xy+3y^2=17,\end{cases}$

$$\begin{cases}x=\frac{1}{2}y,\\ \frac{1}{4}y^2+y^2+3y^2=17,\end{cases}\quad \begin{cases}x=\frac{1}{2}y,\\ y^2=4,\end{cases}\quad \begin{cases}x=\frac{1}{2}y,\\ y_1=-2,y_2=2,\end{cases}$$

$$\begin{cases}x=-1,\\ y=-2\end{cases}\ \text{або}\ \begin{cases}x=1,\\ y=2.\end{cases}$$

Відповідь. $\left(\frac{4}{\sqrt3};-\frac{5}{\sqrt3}\right)$, $\left(-\frac{4}{\sqrt3};\frac{5}{\sqrt3}\right)$, $(-1;-2)$, $(1;2)$.

Вправи для самостійного розв'язування

Розв'яжіть систему рівнянь:

а) $\begin{cases}2x^2-3xy+y^2=3,\\ x^2+2xy-2y^2=6;\end{cases}$ б) $\begin{cases}x^2-2xy+3y^2=9,\\ x^2-4xy+5y^2=5.\end{cases}$

Відповідь. а) $(2;1)$, $(-2;-1)$; б) $\left(-\frac{5}{\sqrt2};-\frac{1}{\sqrt2}\right)$, $\left(\frac{5}{\sqrt2};\frac{1}{\sqrt2}\right)$, $(-3;-2)$, $(3;2)$.

СИМЕТРИЧНІ СИСТЕМИ РІВНЯНЬ

Многочлен $f(x,y)$ називають симетричним, якщо під час заміни x на y, y на x він не змінюється, тобто $f(x,y)=f(y,x)$.

Приклади симетричних многочленів:

$$f(x,y)=x+y,\ f(x,y)=x^2+y^2,\ f(x,y)=x^3+y^3,$$

$$f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}+xy,\ f(x,y)=nx^2+mxy+ny^2,$$

де n, m — деякі числа.

Многочлени $(x+y)$ і xy називають основними (або елементарними) симетричними многочленами з двома змінними.

Усі симетричні многочлени з двома змінними можна записати за допомогою основних.

Наприклад,

$$x^2+xy+y^2=(x+y)^2-xy;\ x^2+y^2=(x+y)^2-2xy;$$

$$x^3+y^3=(x+y)(x^2-xy+y^2)=$$

$$=(x+y)\left((x+y)^2-3xy\right)=(x+y)^3-3(x+y)xy.$$

Якщо в системі рівнянь всі рівняння симетричні, то таку систему рівнянь називають симетричною.

Розв'язують симетричні системи рівнянь за допомогою заміни змінних, де новими змінними є основні симетричні многочлени.

Приклад. Розв'яжіть систему рівнянь:

а) $\begin{cases}x^2+y^2=34,\\ x+y+xy=23.\end{cases}$

Розв'язання

Оскільки $x^2+y^2=(x+y)^2-2xy$, то, ввівши заміну $\begin{cases}u=x+y,\\ v=xy,\end{cases}$ дістанемо таку систему рівнянь:

$$\begin{cases}u^2-2v=34,\\ u+v=23,\end{cases}\quad \begin{cases}(23-v)^2-2v=34,\\ u=23-v,\end{cases}$$

$$\begin{cases}v^2-48v+495=0,\\ u=23-v,\end{cases}\quad \begin{cases}v_1=15, v_2=33,\\ u=23-v,\end{cases}$$

$$\begin{cases}u=8,\\ v=15\end{cases} \text{ або } \begin{cases}u=-10,\\ v=33.\end{cases}$$

Повертаючись до початкової змінної, дістанемо:

$$\begin{cases}x+y=8,\\ xy=15\end{cases} \text{ або } \begin{cases}x+y=-10,\\ xy=33.\end{cases}$$

Розв'язками системи рівнянь

$$\begin{cases}x+y=8,\\ xy=15\end{cases}$$

є пари чисел: $(3;5)$, $(5;3)$.

Система рівнянь

$$\begin{cases}x+y=-10,\\ xy=33\end{cases}$$

розв'язків не має.

Відповідь. $(3;5)$, $(5;3)$.

б) $\begin{cases}x^2+y^2-3x-3y=-2,\\ 2x^2-xy+2y^2=20.\end{cases}$

Розв'язання

Запишемо рівняння системи у вигляді:

$$\begin{cases}\left(x^2+y^2\right)-3(x+y)=-2,\\ 2\left(x^2+y^2\right)-xy=20,\end{cases}$$

$$\begin{cases}(x+y)^2-2xy-3(x+y)=-2,\\ 2\left((x+y)^2-2xy\right)-xy=20.\end{cases}$$

Уведемо заміну: $\begin{cases}u=x+y,\\ v=xy,\end{cases}$ тоді

$$\begin{cases}u^2-2v-3u=-2,\\ 2\left(u^2-2v\right)-v=20,\end{cases}\quad \begin{cases}u^2-2v-3u=-2,\\ 2u^2-5v=20.\end{cases}$$

Виразимо з другого рівняння системи v: $v=\frac{2}{5}u^2-4$. Підставимо його значення в перше рівняння системи:

$$u^2-3u-2\left(\frac{2}{5}u^2-4\right)=-2;\ u^2-3u-\frac{4}{5}u^2+10=0;$$

$$\frac{1}{5}u^2-3u+10=0;\ u^2-15u+50=0,\ u_1=5,\ u_2=10.$$

Тоді $v_1=\frac{2}{5}\cdot 5^2-4=6$, $v_2=\frac{2}{5}\cdot 10^2-4=36$.

Повертаючись до початкових змінних, дістанемо: $\begin{cases}x+y=5,\\ xy=6\end{cases}$ або $\begin{cases}x+y=10,\\ xy=36.\end{cases}$

Розв'язками системи рівнянь $\begin{cases}x+y=5,\\ xy=6\end{cases}$ є пари чисел: $(3;2)$, $(2;3)$.

Система рівнянь $\begin{cases}x+y=10,\\ xy=36\end{cases}$ розв'язків не має.

Відповідь. $(3;2)$, $(2;3)$.

в) $\begin{cases}x^3+x^3y^3+y^3=17,\\ xy(x+y)=6.\end{cases}$

Розв'язання

$$\begin{cases}\left(x^3+y^3\right)+(xy)^3=17,\\ xy(x+y)=6.\end{cases}$$

Уведемо заміну: $\begin{cases}u=x+y,\\ v=xy.\end{cases}$ Враховуючи, що $x^3+y^3=(x+y)^3-3(x+y)xy$, дістанемо систему рівнянь:

$$\begin{cases}u^3-3uv+v^3=17,\\ uv=6,\end{cases}\quad \begin{cases}\left(\frac{6}{v}\right)^3-3\cdot 6+v^3=17,\\ u=\frac{6}{v}.\end{cases}$$

Розв'яжемо перше рівняння системи:

$$\frac{216}{v^3}+v^3-35=0,\ v^6-35v^3+216=0,$$

$v^3=8$ або $v^3=27$, тоді $v=2$ або $v=3$.

Отже, $\begin{cases}u=3,\\ v=2\end{cases}$ або $\begin{cases}u=2,\\ v=3.\end{cases}$

Повертаючись до початкової змінної, дістанемо:

$$\begin{cases} x+y=3, \\ xy=2 \end{cases} \text{ або } \begin{cases} x+y=2, \\ xy=3. \end{cases}$$

Розв'язками системи рівнянь $\begin{cases} x+y=3, \\ xy=2 \end{cases}$ є пари чисел: $(2;1)$, $(1;2)$.

Система рівнянь $\begin{cases} x+y=2, \\ xy=3. \end{cases}$ розв'язків не має.

Відповідь. $(2;1)$, $(1;2)$.

Вправи для самостійного розв'язування

Розв'яжіть систему рівнянь:

а) $\begin{cases} 2x^2+2y^2-(x+y)=49, \\ xy+x^2+y^2=13; \end{cases}$

б) $\begin{cases} x^3+x^3y^3+y^3=17, \\ xy+x+y=5. \end{cases}$

Відповідь. а) $(4;-3)$, $(-3;4)$; б) $(1;2)$, $(2;1)$.

СИСТЕМИ РІВНЯНЬ З МОДУЛЯМИ

Найбільш поширеним методом розв'язування систем рівнянь, що містять невідомі під знаком модуля, є метод розкриття модуля за означенням:

$$|a|=\begin{cases} a, \text{ якщо } a\ge 0, \\ -a, \text{ якщо } a<0. \end{cases}$$

Приклад. Розв'яжіть систему рівнянь:

а) $\begin{cases} |x-1|+y=3, \\ x+3y=6. \end{cases}$

Розв'язання

1) Якщо $x-1\ge 0$, $x\ge 1$, то $|x-1|=x-1$ і подана система рівнянь набуває вигляду:

$$\begin{cases} x-1+y=3, \\ x+3y=6, \end{cases} \begin{cases} x+y=4, \\ x+3y=6, \end{cases} \begin{cases} x=3, \\ y=1. \end{cases}$$

2) Якщо $x-1<0$, $x<1$, то $|x-1|=-x+1$ і подана система рівнянь набуває вигляду:

$$\begin{cases} -x+1+y=3, \\ x+3y=6, \end{cases} \begin{cases} x-y=-2, \\ x+3y=6, \end{cases} \begin{cases} x=0, \\ y=2. \end{cases}$$

Відповідь. $(3;1)$, $(0;2)$.

б) $\begin{cases} y-2|x|+3=0, \\ |y|+x-3=0. \end{cases}$

Розв'язання

Запишемо подану систему рівнянь так:

$$\begin{cases} y-2|x|+3=0, \\ |y|=3-x. \end{cases}$$

З другого рівняння системи випливає, що $3-x\ge 0$, тобто $x\le 3$.

1) Якщо $x=3$, то дістанемо таку систему рівнянь:

$$\begin{cases} y-6+3=0, \\ y+3-3=0, \end{cases} \begin{cases} y=3, \\ y=0. \end{cases}$$

Тобто система рівнянь несумісна.

2) Якщо $0\le x<3$ і $y\ge 0$, то $|x|=x$, $|y|=y$ і подана система рівнянь набуває вигляду:

$$\begin{cases} y-2x+3=0, \\ y+x-3=0, \end{cases} \begin{cases} 3x=6, \\ y=3-x, \end{cases} \begin{cases} x=2, \\ y=1. \end{cases}$$

3) Якщо $0\le x<3$, $y<0$, то $|x|=x$, $|y|=-y$ і подана система рівнянь набуває вигляду:

$$\begin{cases} y-2x+3=0, \\ -y+x-3=0, \end{cases} \begin{cases} x=0, \\ y=-3. \end{cases}$$

4) Якщо $x<0$, $y\ge 0$, то $|x|=-x$, $|y|=y$ і подана система рівнянь набуває вигляду:

$$\begin{cases} y+2x+3=0, \\ y+x-3=0, \end{cases} \begin{cases} x=-6, \\ y=9. \end{cases}$$

5) Якщо $x<0$, $y<0$, то $|x|=-x$, $|y|=-y$ і подана система рівнянь набуває вигляду:

$$\begin{cases} y+2x+3=0, \\ -y+x-3=0, \end{cases} \begin{cases} x=0, \\ y=-3. \end{cases}$$

$x=0$ не задовольняє умову $x<0$.

Відповідь. $(2;1)$, $(0;-3)$, $(-6;9)$.

в) $\begin{cases} |x-1|+|y-5|=1, \\ |x-1|+5=y. \end{cases}$

Розв'язання

Запишемо подану систему рівнянь так:

$$\begin{cases} |x-1|+|y-5|=1, \\ |x-1|=y-5. \end{cases}$$

Тоді з другого рівняння системи випливає, що $y-5\ge 0$, тобто $y\ge 5$.

1) Якщо $x-1\ge 0$, $x\ge 1$, то $|x-1|=x-1$ і подана система рівнянь набуває вигляду:

$$\begin{cases}x-1+y-5=1,\\x-1+5=y,\end{cases}\quad\begin{cases}x+y=7,\\x-y=-4,\end{cases}\quad\begin{cases}x+y=7,\\x=1,5,\end{cases}\quad\begin{cases}x=1,5,\\y=5,5.\end{cases}$$

2) Якщо $x<1$, то $|x-1|=-x+1$ і подана система рівнянь набуває вигляду:

$$\begin{cases}-x+1+y-5=1,\\-x+1+5=y,\end{cases}\quad\begin{cases}y-x=5,\\y+x=6,\end{cases}\quad\begin{cases}x=0,5,\\y=5,5.\end{cases}$$

Відповідь. $(1,5;5,5)$, $(0,5;5,5)$.

г) $\begin{cases}3x^2+8x|y|+4y^2=0,\\x|x|+4y|y|=8.\end{cases}$

Розв'язання

Запишемо подану систему рівнянь у вигляді:

$$\begin{cases}8x|y|=-3x^2-4y^2,\\4y|y|=8-x|x|.\end{cases}$$

Оскільки в першому рівнянні $-3x^2-4y^2\le 0$, а $|y|\ge 0$, то $8x|y|\le 0$. Звідси $x\le 0$.

Тоді в другому рівнянні $8-x|x|\ge 0$, звідки $4y|y|\ge 0$, $y\ge 0$.

Подану систему рівнянь можна записати у вигляді:

$$\begin{cases}3x^2+8xy+4y^2=0,\\-x^2+4y^2=8.\end{cases}$$

Розв'яжемо перше рівняння системи як квадратне відносно x:

$$3x^2+8xy+4y^2=0,\quad \frac{D}{4}=16y^2-12y^2=4y^2\ge 0,$$

$$x_1=\frac{-4y-2y}{3}=-2y,\quad x_2=\frac{-4y+2y}{3}=-\frac{2}{3}y.$$

Подана система рівнянь розгалужується на дві:

1) $\begin{cases}x=-2y,\\-4y^2+4y^2=8,\end{cases}$ розв'язків немає;

2) $\begin{cases}x=-\dfrac{2}{3}y,\\-\dfrac{4}{9}y^2+4y^2=8,\end{cases}\quad\begin{cases}x=-\dfrac{2}{3}y,\\y^2=\dfrac{9}{4}.\end{cases}$

Враховуючи, що $y\ge 0$:

$$\begin{cases}x=-1,\\y=\dfrac{3}{2}.\end{cases}$$

Відповідь. $\left(-1;1\dfrac{1}{2}\right)$.

д) $\begin{cases}|x+y|=1,\\|x|+|y|=1.\end{cases}$

Розв'язання

Оскільки в рівняннях системи праві частини рівні, то рівні також і ліві частини, тобто

$$|x+y|=|x|+|y|.$$

З урахуванням властивості модуля

$$|x+y|\ge|x|+|y|$$

рівність можлива лише тоді, коли $xy\ge 0$. Якщо $x\ge 0$, $y\ge 0$, то подана система рівнянь набуває вигляду:

$$\begin{cases}x+y=1,\\x+y=1,\end{cases}$$

тобто рівносильна рівнянню $x+y=1$.

Якщо $x\le 0$, $y\le 0$, то подана система рівнянь набуває вигляду:

$$\begin{cases}-(x+y)=1,\\-(x+y)=1,\end{cases}$$

тобто рівносильна рівнянню $x+y=-1$.

Отже, розв'язком поданої системи рівнянь є будь-яка пара невід'ємних чисел, сума яких дорівнює 1, а також будь-яка пара недодатних чисел, сума яких дорівнює −1.

Відповідь. $x+y=1$, якщо $x\ge 0$, $y\ge 0$; $x+y=-1$, якщо $x\le 0$, $y\le 0$.

Зауваження. Під час розв'язування таких систем рівнянь можна скористатися графічним способом розв'язання.

Вправи для самостійного розв'язування

Розв'яжіть систему рівнянь:

а) $\begin{cases}2|x-2|+3|y+1|=4,\\2x-y=3;\end{cases}$ б) $\begin{cases}|x|-2y=5,\\|x|+3|y+2|=6.\end{cases}$

Відповідь. а) $\left(\dfrac{3}{2};0\right)$, $\left(\dfrac{3}{4};-\dfrac{3}{2}\right)$; б) $(3;-1)$, $(-3;-1)$.

СИСТЕМИ РІВНЯНЬ З ПАРАМЕТРАМИ

Параметр (грец. parametros — той, що відміряє) — змінна або стала величина в рівнянні або системі рівнянь, яку не вважають невідомою, а навпаки, знаходять розв'язок залежно від її величини.

Приклади

1. Залежно від параметра a знайдіть розв'язки системи рівнянь:

а) $\begin{cases} ax+y=2, \\ x+y=2a. \end{cases}$

Розв'язання

Розв'яжемо подану систему рівнянь за допомогою формул Крамера:

$$\Delta=\begin{vmatrix} a & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}=a-1,\ \ \Delta_x=\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2a & 1 \end{vmatrix}=2(1-a),$$

$$\Delta_y=\begin{vmatrix} a & 2 \\ 1 & 2a \end{vmatrix}=2\left(a^2-1\right).$$

Якщо $\Delta\neq 0$, тобто $a\neq 1$, то

$$x=\frac{\Delta_x}{\Delta}=-2,\ \ y=\frac{\Delta_y}{\Delta}=2(a+1).$$

Якщо $\Delta=0$, тобто $a=1$, $\Delta=\Delta_x=\Delta_y$, то система невизначена, тобто має безліч розв'язків.

Відповідь. При $a\neq 1$ система визначена і $x=-2$, $y=2(a+1)$; при $a=1$ система невизначена, тобто має безліч розв'язків.

б) $\begin{cases} (a+1)x+8y=4a, \\ ax+(a+3)y=3a-1. \end{cases}$

Розв'язання

Розв'яжемо подану систему рівнянь за допомогою формул Крамера:

$$\Delta=\begin{vmatrix} a+1 & 8 \\ a & a+3 \end{vmatrix}=$$

$$=(a+1)(a+3)-8a=a^2-4a+3=(a-1)(a-3);$$

$$\Delta_x=\begin{vmatrix} 4a & 8 \\ 3a-1 & a+3 \end{vmatrix}=$$

$$=4a(a+3)-8(3a-1)=4a^2-12a+8=4(a-2)(a-1);$$

$$\Delta_y=\begin{vmatrix} a+1 & 4a \\ a & 3a-1 \end{vmatrix}=$$

$$=(a+1)(3a-1)-4a\cdot a=-a^2+2a-1=-(a-1)^2.$$

Якщо $\Delta\neq 0$, тобто $(a-1)(a-3)\neq 0$, $a\neq 1$, $a\neq 3$, то

$$x=\frac{\Delta_x}{\Delta}=\frac{4(a-1)(a-2)}{(a-1)(a-3)}=\frac{4(a-2)}{a-3};$$

$$y=\frac{\Delta_y}{\Delta}=\frac{-(a-1)^2}{(a-1)(a-3)}=\frac{1-a}{a-3}.$$

Якщо $a=1$, то система невизначена, тобто має безліч розв'язків.

Якщо $a=3$, то система несумісна, тобто не має розв'язків.

Відповідь. При $a\neq 1$, $a\neq 3$,

$$x=\frac{4(a-2)}{a-3},\ \ y=\frac{1-a}{a-3};$$

при $a=1$ система невизначена, тобто має безліч розв'язків;
при $a=3$ система несумісна, тобто не має розв'язків.

2. Знайдіть усі значення параметра a, при яких система рівнянь

$$\begin{cases} x^2+y^2=1, \\ x+y=a \end{cases}$$

має єдиний розв'язок.

Розв'язання

Виразимо з другого рівняння y через x і підставимо його значення в перше рівняння системи:

$$\begin{cases} x^2+(a-x)^2=1, \\ y=a-x. \end{cases}$$

Розв'яжемо відносно x перше рівняння системи:

$$x^2+a^2-2ax+x^2=1,\ \ 2x^2-2ax+\left(a^2-1\right)=0.\ \ (1)$$

Рівняння (1) має єдиний розв'язок, якщо його дискримінант дорівнює нулю.

$$\frac{D}{4}=a^2-2\left(a^2-1\right);\ \ \frac{D}{4}=2-a^2,\ \ \frac{D}{4}=0,$$

якщо $2-a^2=0$, $a=-\sqrt{2}$, $a=\sqrt{2}$.

Отже, подана система має єдиний розв'язок, якщо $a=-\sqrt{2}$ або $a=\sqrt{2}$. При інших значеннях

a вона має два розв'язки або не має жодного розв'язку.

Відповідь. $-\sqrt{2}$, $\sqrt{2}$.

3. Знайдіть усі значення параметра b, при яких система рівнянь

$$\begin{cases} bx+y=1, \\ 4x-2y=b \end{cases}$$

має безліч розв'язків.

Розв'язання

Виразимо з першого рівняння системи y через x і підставимо його значення в друге рівняння системи:

$$\begin{cases} y=1-bx, \\ 4x-2(1-bx)=b, \end{cases}$$

тоді $\begin{cases} y=1-bx, \\ (4+2b)x=b+2, \end{cases}$ звідки

$$\begin{cases} y=1-bx, \\ x=\dfrac{b+2}{2(b+2)}. \end{cases}$$

Отже, подана система рівнянь має безліч розв'язків, якщо $b=-2$. При інших значеннях b вона має єдиний розв'язок.

Відповідь. -2.

4. Знайдіть усі значення параметра a, при яких рівняння $x^2+x+4a=0$ і $a^2x^2+ax+4a=0$ мають спільний дійсний корінь.

Розв'язання

Складемо і розв'яжемо систему рівнянь

$$\begin{cases} x^2+x+4a=0, \\ a^2x^2+ax+4a=0. \end{cases}$$

Віднявши друге рівняння системи від першого, дістанемо:

$$x^2+x-a^2x^2-ax=0,\quad x^2\left(1-a^2\right)+x(1-a)=0,$$

$$x^2(1-a)(1+a)+x(1-a)=0,$$

$$x(1-a)\big(x(1+a)+1\big)=0.$$

Тоді подану систему рівнянь можна записати у вигляді:

$$\begin{cases} x(1-a)\big(x(1+a)+1\big)=0, \\ x^2+x+4a=0. \end{cases}$$

Ця система рівнянь розгалужується на три системи рівнянь:

1) $\begin{cases} x=0, \\ x^2+x+4a=0, \end{cases}$ $\begin{cases} x=0, \\ a=0; \end{cases}$

2) $\begin{cases} 1-a=0, \\ x^2+x+4a=0, \end{cases}$ $\begin{cases} a=1, \\ x^2+x+4a=0; \end{cases}$ система розв'язків не має;

3) $\begin{cases} x(1+a)+1=0, \\ x^2+x+4a=0; \end{cases}$

$$\begin{cases} 1+a\neq 0; \\ x=-\dfrac{1}{1+a}; \\ \left(-\dfrac{1}{1+a}\right)^2-\dfrac{1}{1+a}+4a=0; \end{cases}\qquad \begin{cases} a\neq -1; \\ x=-\dfrac{1}{1+a}; \\ a\left(4a^2+8a+3\right)=0. \end{cases}$$

Розв'яжемо рівняння $a\left(4a^2+8a+3\right)=0$.

Дістанемо: $a=0$ або $4a^2+8a+3=0$, звідки

$$a=-\frac{3}{2} \text{ або } a=-\frac{1}{2}.$$

Переконаємося, що при цих значеннях a корені системи рівнянь

$$\begin{cases} x(1+a)+1=0, \\ x^2+x+4a=0 \end{cases}$$

є дійсними числами.

При $a=0$ $x=-1$; $x=0$ при $a=-\dfrac{3}{2}$ $x=2$; при $a=-\dfrac{1}{2}$ $x=-2$.

Відповідь. Рівняння

$$x^2+x+4a=0 \text{ і } a^2x^2+ax+4a=0$$

мають спільний корінь при

$$a=0,\ a=-\frac{3}{2},\ a=-\frac{1}{2}.$$

5. При яких значеннях параметрів a і b система рівнянь

$$\begin{cases} 2a+\dfrac{2b^2}{a}=x\left(1+\dfrac{b}{a}\right)+y\left(1-\dfrac{b}{a}\right), \\ 2\dfrac{a}{b}-2ab=x\left(\dfrac{1}{b}-a\right)+y\left(\dfrac{1}{b}+a\right) \end{cases}$$

має розв'язки? Знайдіть ці розв'язки.

Розв'язання

Якщо $a=0$, $b=0$, то подана система рівнянь не має розв'язків.

Нехай $a\neq 0$, $b\neq 0$. Тоді:

$$\begin{cases} 2a+\dfrac{2b^2}{a}=x\left(1+\dfrac{b}{a}\right)+y\left(1-\dfrac{b}{a}\right), & |\times a^2 \\ 2\dfrac{a}{b}-2ab=x\left(\dfrac{1}{b}-a\right)+y\left(\dfrac{1}{b}+a\right), & |\times b \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2a^3+2ab^2=a^2x+abx+a^2y-aby, \\ 2a-2ab^2=x-abx+y+aby. \end{cases}$$

Додаючи перше рівняння системи до другого, дістанемо рівняння:

$$2a^3+2a=a^2x+x+a^2y+y,$$

$$2a\left(a^2+1\right)=x\left(a^2+1\right)+y\left(a^2+1\right),$$

звідки

$$x=\frac{2a\left(a^2+1\right)-y\left(a^2+1\right)}{a^2+1},\quad x=2a-y.$$

Дістали систему рівнянь, рівносильну попередній:

$$\begin{cases} x=2a-y, \\ 2a-2ab^2=x\left(1-ab\right)+y\left(1+ab\right), \end{cases}$$

$$\begin{cases} x=2a-y, \\ 2a-2ab^2=\left(2a-y\right)\left(1-ab\right)+y\left(1+ab\right). \end{cases}$$

Розв'яжемо друге рівняння цієї системи:

$$2a-2ab^2=2a-y-2a^2b+aby+y+aby,$$

$$2a-2ab^2=2a-2a^2b+2aby,$$

звідки $y=a-b$.

Дістали систему рівнянь:

$$\begin{cases} x=2a-y, \\ y=a-b, \end{cases}\quad \begin{cases} x=a+b, \\ y=a-b. \end{cases}$$

Відповідь. При $a\neq 0$, $b\neq 0$ $x=a+b$, $y=a-b$; при $a=0$, $b=0$, то система розв'язків не має.

Вправи для самостійного розв'язування

1. Знайдіть значення параметра a, при яких система рівнянь

$$\begin{cases} 2ax+y=a^2-2a, \\ -10x+\left(a-6\right)y=10a-5a^2 \end{cases}$$

не має розв'язків.

2. Залежно від параметра a знайдіть розв'язки системи рівнянь:

$$\begin{cases} x+ay=1, \\ ax-3ay=2a+3. \end{cases}$$

Відповідь. 1. Система рівнянь не має розв'язків при $a=5$.

2. При $a\neq 0$, $a\neq -3$ $x=2$, $y=-\dfrac{1}{a}$; при $a=-3$ система невизначена, тобто має безліч розв'язків; при $a=0$ система несумісна.

ЛІТЕРАТУРА

1. *Алгебра* и начала анализа : учебное пособие для 10 класса средней школы / под редакцией А. Н. Колмогорова — М. : Просвещение, 1978.
2. *Гайштут О. Г., Литвиненко Г. М.* Алгебра. Розв'язування задач та вправ. — К. : Магістр—5, 1997.
3. *Петров К.* Сборник задач по алгебре : книга для учителя / перевод с болгарського. — М. : Просвещение, 1984.
4. *Супрун Г. Ф., Слєпкань З. І.* Системи рівнянь другого степеня : посібник для вчителів. — К. : Радянська школа, 1964.
5. *Брысина И. В., Головченко А. В., Николаев А. Г.* и др. Сборник конкурсных задач по математике с методическими указаниями и решениями для поступающих в Харьковский авиационный институт. Книга 1. — Х., 1996.
6. *Цыпкин А. Г., Пинский А. И.* Справочное пособие по методам решения задач по математике для средней школы. — М. : Наука, 1984.
7. *Болтянский В. Г., Сидоров Ю. В., Шабунин М. И.* Лекции по элементарной математике. — М. : Наука, 1972. — 309 с.
8. *Аверьянов Д. И.* и др. Математика. Большой справочник для школьников и поступающих в вузы. — М. : Дрофа, 1999. — 89 с.
9. *Математический* энциклопедический словарь / под ред. Ю. В. Прохорова. — М. : Советская энциклопедия, 1989. — 140 с.
10. *Л. І. Михайленко, Т. Г. Платова.* Параметри. Математика в школах України. — № 16–18. — червень 2008. — Х. : ВГ «Основа».
11. *Маслай Г. С., Щоголева Л. О.* Рівняння та системи рівнянь з параметрами. — К., 2000.
12. *Титаренко О. М., Роганін О. М., Максименко О. Ю., Тарасенко О. О.* Математика. Комплексний довідник. — Х. : Торсінг плюс, 2009.
13. *Афанасьева О. Н., Бродский Я. С.* Системы уравнений. — Донецк : ДонНУ, 2006.
14. *Лукаш О. В., Пресс Е. М.* Розв'язуємо задачі з параметрами. — Х. : ВГ «Основа», 2006.

■

ПОДІЛЬНІСТЬ ЧИСЕЛ

О. О. Глюза, м. Донецьк

Ця стаття містить задачі, для розв'язування яких використовують подільність чисел. Щоб успішно впоратися із завданнями, необхідно згадати основні поняття й властивості натуральних чисел, пов'язані з подільністю.

ДІЛЬНИКИ Й КРАТНІ

У шкільному курсі математики розглядають поняття дільника числа, кратного числу, простого й складеного чисел, а також деякі ознаки подільності.

Натуральні числа поділяють на прості й складені. Число називають простим, якщо воно має тільки два різних дільники: одиницю і саме це число. Число, яке має більше ніж два дільники, називають складеним. Число є складеним, якщо його можна подати у вигляді добутку двох менших від нього натуральних чисел. Наприклад, число 6 є складеним, тому що $6 = 2 \cdot 3$.

Одиниця не належить ні до простих, ні до складених чисел.

Кожне натуральне число, за винятком одиниці, можна подати у вигляді добутку простих множників, причому єдиним способом.

Це твердження називають **основною теоремою арифметики.**

Якщо натуральне число a ділиться на натуральне число b, тобто $a = k \cdot b$, де k — натуральне число, то число b називають дільником числа a. Наприклад, число 3 є дільником числа 24, тому що $24 = 8 \cdot 3$.

Два числа називають взаємно простими, якщо вони не мають спільних дільників, відмінних від одиниці. Наприклад, взаємно простими є числа 8 і 9, 15 і 26, 54 і 55.

Справедливі наступні твердження.

1. Якщо числа a і b діляться на c, то і їх сума $a+b$, і їх різниця $a-b$ діляться на c.

$$\boxed{a \,\vdots\, c \text{ і } b \,\vdots\, c \Rightarrow (a+b) \,\vdots\, c;\ (a-b) \,\vdots\, c}$$

Доведення. З умови випливає, що $a = k_1 c$, $b = k_2 c$, де k_1 і k_2 — натуральні числа. Запишемо їх суму й різницю

$$a + b = k_1 c + k_2 c = c(k_1 + k_2);$$

$$a - b = k_1 c - k_2 c = c(k_1 - k_2).$$

Отже, $a+b$ і $a-b$ діляться на c, що й потрібно було довести.

2. Якщо число a ділиться на c, а число b ділиться на d, то їх добуток $a \cdot b$ ділиться на $c \cdot d$.

$$\boxed{a \,\vdots\, c,\ b \,\vdots\, d \Rightarrow (a \cdot b) \,\vdots\, (c \cdot d)}$$

Доведення. За умовою a ділиться на c, тобто $a = k_1 c$; b ділиться на d, тобто $b = k_2 d$, де k_1 і k_2 — натуральні числа. Розглянемо добуток a і b:

$$a \cdot b = (k_1 \cdot c) \cdot (k_2 \cdot d) = (k_1 \cdot k_2) \cdot (c \cdot d).$$

Отже, $a \cdot b$ ділиться на $c \cdot d$.

3. Якщо деяке число a ділиться на взаємно прості числа n і m, то число a ділиться на їх добуток.

$$\boxed{a \,\vdots\, n,\ a \,\vdots\, m,\ n \text{ і } m - \text{взаємно прості} \Rightarrow a \,\vdots\, (n \cdot m)}$$

4. Якщо деяке число $k \cdot a$ ділиться на m, де k і m — взаємно прості числа, то a ділиться на m.

$$\boxed{(k \cdot a) \,\vdots\, m,\ k \text{ і } m - \text{взаємно прості} \Rightarrow a \,\vdots\, m}$$

Розглянемо приклади застосування наведених тверджень.

Задача 1. Доведіть, що якщо $a \cdot b$ ділиться на c і $a+b$ ділиться на c, то $a^2 + b^2$ ділиться на c.

Розв'язання. Зауважимо, що

$$a^2 + b^2 = (a+b)^2 - 2ab.$$

Оскільки $a+b$ ділиться на c, то $a + b = k \cdot c$, де k — натуральне число. Аналогічно $a \cdot b = m \cdot c$. Отже,

$$a^2 + b^2 = k^2 \cdot c^2 - 2 \cdot m \cdot c = c \cdot (k^2 \cdot c - 2 \cdot m).$$

А це означає, що $(a^2 + b^2)$ ділиться на c.

Задача 2. Доведіть, що при будь-яких a, b, c, d число $\overline{abcd} + \overline{dcba}$ ділиться на 11.

Розв'язання. Числа $\overline{abcd}$ і $\overline{dcba}$ можна подати відповідно у вигляді

$$1000a+100b+10c+d \text{ і } 1000d+100c+10b+a.$$

Тоді сума цих чисел дорівнює:

$$\overline{abcd}+\overline{dcba}=$$
$$=(1000a+100b+10c+d)+(1000d+100c+10b+a)=$$
$$=(1000a+a)+(1000d+d)+(100c+10c)+(100b+10b)=$$
$$=1001a+1001d+110b+110c=$$
$$=11\cdot 91a+11\cdot 91b+11\cdot 10b+11\cdot 10c=$$
$$=11(91a+91d+10b+10c).$$

Отже, сума поданих чисел кратна 11, що й потрібно було довести.

Серед спільних дільників чисел a, b виділяють найбільший і позначають $\text{НСД}(a;b)$.

Найбільшим спільним дільником двох чисел називають найбільше натуральне число, на яке кожне з цих чисел ділиться без остачі.

Наприклад, числа 1, 2, 3, 6 є спільними дільниками чисел 12 і 18, а $\text{НСД}(12;18)=6$.

Найбільший спільний дільник чисел зручно знаходити, попередньо розклавши їх на прості множники. Наприклад, знайдемо

$$\text{НСД}(255;170).$$

Подамо числа 255 і 170 у вигляді добутку простих множників:

$$255=3\cdot 5\cdot 17;\ 170=2\cdot 5\cdot 17.$$

Оскільки 255 і 170 діляться і на 5, і на 17, то кожне з них ділиться на 85. Легко переконатися, що це найбільший спільний дільник.

Найменшим спільним кратним двох натуральних чисел називають найменше натуральне число, яке ділиться на кожне з поданих чисел. Коротке позначення: $\text{НСК}(a;b)$. Наприклад, $\text{НСК}(12;18)=36$.

Знайдемо $\text{НСК}(64;108)$. Розкладемо на прості множники числа 64 і 108:

$$64=2\cdot 2\cdot 2\cdot 2\cdot 2\cdot 2;\ 108=2\cdot 2\cdot 3\cdot 3\cdot 3.$$

Випишемо всі прості множники числа 64, а потім допишемо ті множники числа 108, яких немає в розкладі числа 64. Дістанемо:

$$\text{НСК}(64;108)=2\cdot 2\cdot 2\cdot 2\cdot 2\cdot 2\cdot 3\cdot 3\cdot 3=1\,728.$$

Доведемо деякі відомі ознаки подільності.

Ознака подільності на 2

Натуральне число ділиться на 2 тоді й тільки тоді, коли воно закінчується парною цифрою.

Доведення. Будь-яке натуральне число можна подати у вигляді суми $10a+b$, де a — будь-яке число, b — число одиниць поданого числа. Перший доданок $10a$ ділиться на 2. Якщо другий доданок ділиться на 2, тобто число b парне, то й сума $10a+b$ ділиться на 2. І навпаки, якщо число ділиться на 2, то й b ділиться на 2, тобто є парним, тому що $10a$ ділиться на 2.

Ознака подільності на 4

Натуральне число ділиться на 4 тоді й тільки тоді, коли двозначне число, утворене двома останніми цифрами поданого числа, ділиться на 4.

Доведення. Будь-яке натуральне число можна записати у вигляді $100a+\overline{bc}$, де a — будь-яке натуральне число, b — число десятків, c — число одиниць. Перший доданок $100a$ ділиться на 4. Отже, число $100a+\overline{bc}$ ділиться на 4 тоді й тільки тоді, коли $\overline{bc}$ ділиться на 4.

Ознака подільності на 9

Натуральне число ділиться на 9 тоді й тільки тоді, коли сума його цифр ділиться на 9.

Доведення. Нехай є шестизначне натуральне число $\overline{abcdef}$. Його можна записати у вигляді

$$a\cdot 10^5+b\cdot 10^4+c\cdot 10^3+d\cdot 10^2+e\cdot 10+f=$$
$$=(99999a+a)+(9999b+b)+(999c+c)+(99d+d)+$$
$$+(9e+e)+f=(99999a+9999b+999c+99d+9e)+$$
$$+(a+b+c+d+e+f).$$

Перший доданок ділиться на 9. Другий доданок ділиться на 9 тоді й тільки тоді, коли подане число ділиться на 9. А другий доданок є сумою цифр поданого числа.

Легко помітити, що із двох послідовних натуральних чисел одне ділиться на 2. Із чотирьох послідовних натуральних чисел два обов'язково парні, а одне з них обов'язково ділиться на 4. Ці й інші спостереження можна використовувати під час розв'язування задач.

Задача 3. Доведіть, що добуток будь-яких трьох послідовних натуральних чисел ділиться на 6.

Розв’язання. Серед будь-яких трьох послідовних натуральних чисел є хоча б одне парне й одне, що ділиться на 3, тобто в розкладі на множники добутку трьох послідовних натуральних чисел є множники 2 і 3, які містяться і в розкладі на множники числа 6. Отже, добуток трьох послідовних натуральних чисел ділиться на 6.

Завдання для самостійної роботи

1. Семеро рибалок ловлять рибу на озері. Перший рибалить щодня, другий — через день, третій — через 2 дні й т. ін., сьомий — через 6 днів. Сьогодні всі рибалки зібралися на озері. Через яку найменшу кількість днів усі семеро рибалок знову зберуться разом на озері?

2. Жили-були дід і баба. Була в них курочка Ряба. Курочка несе кожне друге яєчко просте, а кожне третє — золоте. Чи може таке бути?

3. Учням двох шостих класів видали 469 підручників. Кожний одержав однакову кількість книг. Скільки було шестикласників і скільки підручників одержав кожний із них?

4. Як розрахуватися за покупку, якщо ти повинен заплатити 19 грн і в тебе є банкноти по 3 грн, а в касира тільки по 5 грн?

5. Скільки чисел із множини

$$\{1,2,3,4,\ldots,19,20\}:$$

а) ділиться на 2; на 3; на 5; на 2 і 3; на 2 і 5; на 3 і 5; на 2, 3 і 5;

б) ділиться на 2, але не ділиться на 3; ділиться на 3, але не ділиться на 2;

в) не ділиться на 2; не ділиться на 3; не ділиться ні на 2, ні на 3?

6. Напишіть загальний вигляд усіх непарних чисел, більших за 1 і не кратних 3.

7. Знайдіть усі двозначні числа, які діляться на добуток своїх цифр.

8. Запишіть множину цифр, підстановка яких замість зірочок дає числа кратні 5:

а) 142*; б) 32*5.

9. У числах 651 і 5211 переставте цифри так, щоб кожне з них ділилося:

а) на 2; б) на 5.

10. Знайдіть цифри сотень і одиниць числа 52*2*, якщо відомо, що воно ділиться на 36.

11. Використовуючи кожну цифру один раз, запишіть найбільше натуральне число, яке ділиться:

а) на 2; б) на 5; в) на 10.

12. Напишіть найбільше п’ятицифрове число кратне 9, перша цифра якого 3 і всі цифри різні.

13. Запишіть найменше натуральне число, складене з 10 різних цифр, яке ділиться:

а) на 2; б) на 5; в) на 10.

14. Число складено із семи 8, дев’яти 1 і цифри 5. Чи ділиться воно на 9?

15. Доведіть, що сума двох послідовних непарних чисел ділиться на 4.

16. Доведіть, що різниця квадратів двох послідовних непарних чисел ділиться на 8.

17. Доведіть, що сума двох непарних послідовних чисел ділиться на 4 і будь-яке число, що ділиться на 4, є сумою двох непарних послідовних чисел.

18. Доведіть, що добуток трьох послідовних натуральних чисел, перше з яких — парне, кратний 24.

19. Доведіть, що при будь-якому цілому n число $n(n+1)(2n+1)$ ділиться на 6.

20. Знайдіть НСД і НСК чисел:

а) 858 і 253; б) 42628 і 33124;

в) 299, 391 і 667; г) $3n+4$ і $n+1$;

д) $\underbrace{11\ldots11}_{100}$ і $\underbrace{11\ldots11}_{60}$.

21. На складі є ножі й виделки. Їх кількість більша ніж 300, але менша ніж 400. Якщо ножі й виделки разом рахувати десятками або дюжинами, то в обох випадках дістанемо ціле число десятків і ціле число дюжин. Скільки було ножів і скільки виделок на складі, якщо ножів на 160 менше, ніж виделок?

22. 72 бутерброди й 48 тістечок порівно розділили між учнями класу. Скільки учнів у класі, якщо відомо, що їх більше ніж 20?

23. Петрик розставив моделі літаків на 14 полицях, а потім переставив їх на 8 полиць, так, що на кожній полиці моделей літаків було порівно. Скільки моделей у Петрика, якщо відомо, що їх у нього більше ніж 100 і менше ніж 120?

24. Доведіть, що два послідовних непарних числа є взаємно простими числами.

25. Доведіть, що різниця $\overline{ab}-\overline{ba}$ кратна 9.

26. Доведіть, що різниця $\overline{abc}-\overline{cba}$ кратна 99.

27. Написали підряд два рази трицифрове число (наприклад, 548 548). Доведіть, що отримане число ділиться на 7, на 11 і на 13.

28. Написали підряд три рази двоцифрове число (наприклад, 737 373). Доведіть, що отримане число ділиться на 3, на 7, на 13 і на 37.

29. Доведіть, що число, записане шістьма однаковими цифрами, ділиться на 3, на 7, на 11, на 13 і на 37.

ДІЛЕННЯ З ОСТАЧЕЮ

Нехай a і b — два натуральних числа. Якщо число a можна записати у вигляді

$$a=bq+r,$$

де r — натуральне число і $0\le r<b$, то кажуть, що a від ділення на b дає частку q і остачу r.

Нехай задано натуральні числа a і b. Тоді можна підібрати такі натуральні числа q і r, що $0\le r<b$ і $a=bq+r$. Числа q (частка) і r (остача) визначаються цими умовами однозначно.

Наприклад, $a=22$, $b=7$. Тоді $q=3$, $r=1$. Дійсно,

$$22=3\cdot 7+1.$$

Ділення з остачею використовують для знаходження НСД двох натуральних чисел. Такий спосіб знаходження НСД чисел має назву алгоритму Евкліда.

Знайдемо НСД чисел a і b, де $a>b$. Спочатку a ділимо на b і одержуємо остачу r_1 ($0\le r_1<b$). Потім b ділимо на r_1 і знаходимо остачу r_2 ($0\le r_2<r_1$). Далі r_1 ділимо на r_2 і одержуємо остачу r_3 ($0\le r_3<r_2$) і т. ін. Остання, відмінна від нуля остача й буде дорівнювати НСД$(a;b)$.

Для скорочення числа ділень в алгоритмі Евкліда користуються тим, що при $a>b$

$$\text{НСД}(a;b)=\text{НСД}(b;a-b).$$

Під час розв'язування задач, у яких потрібно знайти остачі від ділення, корисно використовувати такі твердження.

1. Якщо число a ділиться на c без остачі, b від ділення на c дає остачу r, то $a+b$ від ділення на c дає ту ж остачу r.

2. Якщо від ділення двох чисел a і b на одне й те саме число c утворюються однакові остачі, то різниця $a-b$ ділиться на c без остачі.

3. Якщо добуток натуральних чисел ділиться на деяке просте число, то хоча б один із множників ділиться на це число.

Довести ці твердження неважко, записавши кожне з поданих чисел у вигляді

$$a=qc+r.$$

Розглянемо застосування цих тверджень.

Задача 4. Доведіть, що при будь-якому натуральному n число n^3+2n ділиться на 3.

Розв'язання. Число n від ділення на 3 може давати одну з трьох остач: 0, 1 або 2. Розглянемо три випадки:

1) якщо n дає остачу 0, то n^3 і $2n$ діляться на 3 і тому n^3+2n також ділиться на 3;
2) якщо n дає остачу 1, то n^3 дає остачу 1, $2n$ — остачу 2, а 1 + 2 ділиться на 3;
3) якщо n дає остачу 2, то n^3 дає остачу 1, $2n$ — остачу 1, а 2 + 1 ділиться на 3.

Розглянемо ще один спосіб розв'язання поданої задачі. Зауважимо, що:

$$n^3+2n=n^3-n+3n=n\left(n^2-1\right)+3n=$$
$$=(n-1)n(n+1)+3n.$$

Число $3n$ ділиться на 3, тому що в його розкладі є число 3, а $(n-1)n(n+1)$ — добуток трьох послідовних чисел і, як було показано в задачі 1, ділиться на 3. Отже, число n^3+2n ділиться на 3.

Задача 5. Знайдіть останню цифру числа

$$1989^{1989}.$$

Розв'язання. Зазначимо, що остання цифра числа 1989^{1989} збігається з останньою цифрою числа 9^{1989}. Випишемо останні цифри декількох початкових степенів числа 9: 9, 1, 9, 1, 9, …

Оскільки для знаходження останньої цифри чергового степеня числа 9 достатньо помножити на 9 лише останню цифру попереднього степеня, то зрозуміло, що за дев'яткою іде одиниця ($9\cdot 9=81$), а за одиницею — дев'ятка ($1\cdot 9=9$). Таким чином, непарні степені дев'ятки закінчуються на 9. Тому остання цифра числа 1989^{1989} — дев'ятка.

Завдання для самостійної роботи

1. Напишіть загальний вигляд чисел, що дають від ділення на 4:
а) остачу 1; б) остачу 2; в) остачу 3.

2. Знайдіть усі числа, від ділення яких на 7 у частці дістанемо те ж саме число, що й в остачі.

3. Знайдіть суму всіх двозначних чисел, які від ділення на 4 дають в остачі одиницю.

4. Знайдіть найбільше трицифрове число, яке:
а) від ділення на 2 дає остачу 1;
б) від ділення на 5 дає остачу 3;
в) від ділення на 10 дає остачу 7.

5. Від ділення на 2 деяке число дає остачу 1, а від ділення на 3 — остачу 2. Яку остачу дає це число від ділення на 6?

6. Знайдіть найменше число, яке від ділення на 2 дає остачу 1, від ділення на 3 — остачу 2, на 4 — остачу 3, на 5 — остачу 4, на 6 — остачу 5, на 7 — остачу 6, на 8 — остачу 7, на 9 — остачу 8, на 10 — остачу 9.

7. Знайдіть найбільше трицифрове число, від ділення якого на 4 дістанемо остачу 3, від ділення на 5 — остачу 4, від ділення на 6 — остачу 5.

8. Доведіть, що якщо жодне з трьох чисел не ділиться на три, то або сума всіх цих чисел, або сума будь-яких двох із них ділиться на 3.

9. Доведіть, що якщо від ділення на 3 одне із двох чисел дає остачу 1, а друге — остачу 2, то добуток цих чисел від ділення на 3 дає остачу 2.

10. Чи ділиться на 9 число $10^{33}+8$?

11. Доведіть, що число $7^{16}+3\cdot 16-1$ ділиться на 9.

12. Доведіть, що сума $333^{555}+555^{333}$ ділиться на 37.

13. Якою цифрою закінчується число:
а) 7^{43}; б) 12^{109}?

14. Знайдіть останню цифру числа:
а) 3^{20}; б) 27^{48}; в) 508^{63}.

15. Доведіть, що число $77^{99}+3^{44}+4^{88}$ кратне 10.

16. Знайдіть три останні цифри суми:

$$1^{100}+2^{100}+3^{100}+4^{100}+\ldots+999\,998^{100}+999\,999^{100}.$$

17. Якою цифрою закінчується сума

$$54^{35}+28^{21}?$$

18. Якою цифрою закінчується різниця

$$43^{43}-17^{17}?$$

РІВНЯННЯ В ЦІЛИХ ЧИСЛАХ

У множині цілих чисел завжди можна виконати додавання, віднімання, множення, але дія ділення можлива не завжди. Поділити число a на число b $(b\neq 0)$ — це означає знайти таке число k, від множення якого на b отримуємо a, тобто $bk=a$. Якщо для цілих чисел a і b $(b\neq 0)$ таке ціле число k існує, то говорять, що a ділиться на b.

Наприклад, число -56 ділиться на 7, тому що існує ціле число k таке, що $-56=7k$, а саме $k=-8$.

В означенні ділення виключили випадок, коли $b=0$. Тому що, якщо $a=0$ і $b=0$, то $0=0\cdot m$ при будь-якому m, тобто m стає невизначеним. Усі властивості й твердження, розглянуті вище, справедливі й для цілих чисел, за винятком випадку, коли $b=0$.

Задача 6. Знайдіть усі точки прямої

$$y=\frac{2}{3}x$$

із цілочисловими координатами.

Розв'язання. По-іншому цю задачу можна сформулювати так:

Знайдіть усі цілочислові розв'язки рівняння $2x=3y$.

Неважко зрозуміти, що пари точок $(3;2)$, $(6;4)$, $(9;6)$, … $(-3;-2)$, $(-6;-4)$, … є розв'язками поданого рівняння. Щоб дістати всі цілочислові розв'язки рівняння, зауважимо, що рівняння можна звести до вигляду $\frac{x}{y}=\frac{3}{2}$, при $y\neq 0$. Права частина рівняння — нескоротний дріб. Тому вона утворюється із лівої частини скороченням x і y на величину t. Тому $x=3t$, а $y=2t$, де t — будь-яке ціле число.

У загальному вигляді сформулюємо наше спостереження так:

Якщо цілі числа a і b взаємно прості, то всі точки $(x;y)$ із цілочисловими координатами, що лежать на прямій $bx=ay$, знаходять за формулами: $x=at$, $y=bt$, де t — довільне ціле число.

Ми розглянули розв'язування однорідного рівняння $ax-by=0$ в цілих числах.

Обговоримо розв'язування в цілих числах неоднорідного рівняння $ay-bx=c$. Розглянемо приклади.

1. У рівнянні $20y+28x=22$ ліва частина при всіх x і y ділиться на 4, а права — не ділиться. Отже, рівняння не має розв'язків у цілих числах.
2. Розглянемо рівняння $28y-20x=12$. Поділимо обидві його частини на 4. Одержимо: $7y-5x=3$. Зауважимо, що пряма, задана цим рівнянням, проходить через точку з координатами $x=5$, $y=4$. Тобто
$$7\cdot 4-5\cdot 5=3.$$
Тоді $7y-5x=7\cdot 4-5\cdot 5$, звідки
$$7(y-4)=5(x-5).$$
Якщо $y-4$ замінимо на y', а $x-5$ на x', то одержимо однорідне рівняння $7y'=5x'$, яке ми вміємо розв'язувати. Отже, всі цілочислові розв'язки рівняння можна знайти за формулами
$$x=5+7t,\ \ y=4+5t,$$
де t — будь-яке ціле число.

Сформулюємо ці міркування в загальному вигляді.

а) Рівняння $ax-by=c$ має розв'язок $(x;y)$ у цілих числах тоді й тільки тоді, коли c ділиться на НСД$(a;b)$.

б) Якщо НСД$(a;b)=1$, c — довільне ціле число, то рівняння $ax+by=c$ має безліч число розв'язків $(x;y)$ у цілих числах.

Якщо відомий один розв'язок $(x_0;y_0)$ рівняння $ax+by=c$, то решта розв'язків мають вигляд $x=x_0+at$, $y=y_0+bt$, де t — будь-яке ціле число.

Завдання для самостійної роботи

1. Розв'яжіть у цілих числах рівняння:

а) $16y+12x=26$; б) $25y-15x=30$;

в) $124x+216y=515$; г) $827x+288y=125$.

2. Чи належить графіку рівняння
$$15x+25y=114$$
хоча б одна точка, координатами якої є цілі числа?
3. Скільки монет вартістю 2 к. і 5 к. потрібно взяти, щоб набрати 23 к.?
4. У магазин привезли n метрів тканини по 6 грн за метр і m метрів тканини по 5 грн; усього на суму 510 грн. Скільки метрів тканини по 5 грн і по 6 грн привезли в магазин, якщо n більше ніж 45, m більше ніж 40, n і m — натуральні числа.

ЗАПИТАННЯ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЮ

1. Чи ділиться:

а) $2^9\cdot 3$ на 2; б) $2^9\cdot 3$ на 5; в) $2^9\cdot 3$ на 8;

г) $2^9\cdot 3$ на 9; д) $2^9\cdot 3$ на 6?

2. Чи правильно, що якщо ціле число ділиться на 4 і на 3, то воно ділиться на 12?
3. Чи правильно, що якщо натуральне число ділиться на 4 і на 6, то воно ділиться на 24?
4. Число a не ділиться на 3. Чи може на 3 ділитися число $2a$?
5. Число a парне. Чи правильно, що число $3a$ ділиться на 6?
6. Число $5a$ ділиться на 3. Чи правильно, що число a ділиться на 3?
7. Число $15a$ ділиться на 6. Чи правильно, що число a ділиться на 6?
8. Чи правильне твердження:

а) якщо один із доданків ділиться на 15, а другий не ділиться на 15, то їх сума не ділиться на 15;

б) якщо кожний із двох доданків не ділиться на 15, то їх сума не ділиться на 15;
в) якщо кожний із двох множників не ділиться на 15, то і їх добуток не ділиться на 15;
г) якщо один із двох множників ділиться на 15, то добуток ділиться на 15;
д) якщо число ділиться на 15 і на 21, то воно ділиться на їхній добуток?

9. Нехай $a=2^3\cdot3^{10}\cdot5\cdot7^2$, $b=2^6\cdot3\cdot11$. Чому дорівнює $\text{НСД}(a,b)$?

10. Нехай $a=2^6\cdot5^3\cdot7$, $b=2^6\cdot3\cdot5^7$. Чому дорівнює $\text{НСК}(a,b)$?

11. Нехай p — просте число. Скільки існує натуральних чисел:
а) менших від p і взаємно простих із ним;
б) менших від p^2 і взаємно простих із ним?

12. Чи правильне твердження:
а) якщо число a від ділення на 8 дає в остачі 3, то й від ділення на 4 воно дає в остачі 3;
б) якщо число a від ділення на 4 дає в остачі 3, то й від ділення на 8, воно дає в остачі 3;
в) якщо число a від ділення на 15 дає в остачі 7, то від ділення на 5 воно не може дати в остачі 3;
г) якщо число a від ділення на 45 дає в остачі 3, то від ділення на 9 воно може дати в остачі 6?

КОНТРОЛЬНИЙ ТЕСТ

Критерії оцінювання:

«Відмінно» — правильно розв'язано не менше ніж 18 завдань;

«добре» — правильно розв'язано не менше ніж 15 завдань.

1. Число $3^8\cdot5$ не ділиться на...

А	Б	В	Г
15	9	6	27

2. Якщо число ділиться на 9 і 6, то воно ділиться на...

А	Б	В	Г
54	27	12	18

3. Число a не ділиться на 6. На 6 ділиться число...

А	Б	В	Г
$2a$	$12a$	$3a$	$4a$

4. При будь-якому натуральному n цілим є число...

А	Б	В	Г
$\frac{n(n+1)}{2}$	$\frac{n(n+2)}{2}$	$\frac{n(n+3)}{4}$	$\frac{n(n+2)}{3}$

5. Число $21a$ ділиться на 15. Число a ділиться на...

А	Б	В	Г
15	3	5	10

6. p і q — прості числа. Скільки існує натуральних чисел, менших від pq і взаємно простих із ним?

А	Б	В	Г
$pq-1$	$(p-1)(q-1)$	$pq-2$	$p(q-1)$

7. Якщо n — непарне число, то n^2-1...

А	Б	В	Г
ділиться на 2 і не ділиться на 4	ділиться на 4 і не ділиться на 8	ділиться на 8	ділиться на 16

8. Яке з наведених тверджень неправильне?

А	Б	В	Г
Квадратом непарного числа є непарне число	Якщо квадрат деякого числа — парне число, то й саме це число парне	Квадрат парного числа кратний 4	Добуток двох послідовних цілих чисел кратний 4

9. Усі натуральні числа, починаючи з 1, записані підряд у порядку їх зростання: 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12... Яка цифра в цьому запису стоїть на сотому місці?

А	Б	В	Г
5	0	4	1

10. Скільки дільників має число $2^{10} \cdot 3$?

А	Б	В	Г
20	12	13	22

11. Найбільший спільний дільник натурального числа a і 1...

А	Б	В	Г
дорівнює a	дорівнює 1	не існує	визначити неможливо

12. Сума цифр деякого числа від ділення на 9 дає в остачі 1. Яку остачу дістанемо від ділення цього числа на 9?

А	Б	В	Г
4	7 або 4	1	Визначити неможливо

13. У скільки разів збільшиться двозначне число, якщо праворуч до нього приписати таке ж саме двозначне число?

А	Б	В	Г
У 2 рази	В 11 разів	У 101 раз	У 99 разів

14. Як зміняться від ділення з остачею частка й остача, якщо ділене й дільник збільшити в 3 рази?

А	Б	В	Г
Не зміняться	Частка не зміниться, остача збільшиться в 3 рази	Збільшаться в 3 рази	Остача не зміниться, частка збільшиться в 3 рази

15. Від ділення одного числа на друге дістали частку 18 і остачу 24. Ділене й дільник зменшили в 6 разів. Чому дорівнюють частка й остача?

А	Б	В	Г
3 і 4	18 і 24	18 і 4	3 і 24

16. Сума й добуток двох натуральних чисел не можуть бути числами...

А	Б	В	Г
парним і парним	непарним і парним	парним і непарним	непарним і непарним

17. Від ділення поданого числа на 225 в остачі дістали 150. Подане число ділиться на...

А	Б	В	Г
50	150	75	45

18. Сума чотирьох послідовних парних чисел дорівнює 100. Найменше з них дорівнює...

А	Б	В	Г
20	22	24	18

19. Різниця квадратів двох послідовних цілих чисел є числом...

А	Б	В	Г
парним	непарним	кратним 3	простим

20. Якою цифрою закінчується число 43^{43}?

А	Б	В	Г
7	3	9	1

КОНТРОЛЬНЕ ЗАВДАННЯ

Контрольне завдання складається із двох частин: основної й додаткової. Досить виконати одну з них. Кожну частину завдання оцінюють окремо.

Критерії оцінювання

Основне завдання

«Відмінно» — правильно розв'язано не менше ніж 15 задач;

«добре» — правильно розв'язано не менше ніж 12 задач;

«зараховано» — правильно розв'язано не менше ніж 9 задач.

Додаткове завдання

«Відмінно» — правильно розв'язано не менше ніж 8 задач;

«добре» — правильно розв'язано не менше ніж 5 задач.

Основне завдання

1. Замініть зірочку такою цифрою, щоб число 81* 372 564 ділилося на 9.
2. Розкладіть на прості множники числа:

а) 2 007; б) 2 008.

3. Числа $2+a$ і $35-b$ діляться на 11. Доведіть, що число $a+b$ ділиться на 11.

4. p і q — різні прості числа. Скільки дільників у числа:

а) pq; б) p^2q; в) p^2q^2?

5. Наведіть приклад числа, що має:

а) рівно вісім дільників;

б) рівно сім дільників.

6. а) Знайдіть яке-небудь шестицифрове число, яке ділиться на 321.

б) Знайдіть найменше таке число.

7. Доведіть, що добуток будь-яких п'яти послідовних чисел ділиться на 30.

8. У шестицифровому числі перша цифра збігається із четвертою, друга — з п'ятою, третя — із шостою. Доведіть, що це число кратне:

а) 7; б) 11; в) 13.

9. Сума цифр числа дорівнює 1234. Знайдіть остачу від ділення цього числа на 9.

10. Від ділення натурального числа a на натуральне число b дістали частку c і остачу d. З'ясуйте, чи можуть усі числа a, b, c і d бути непарними.

11. Укажіть найменше з чисел більших від 1975, яке від ділення на 7 дає в остачі 3?

12. Сума двох натуральних чисел дорівнює 153. Яке найбільше значення може мати НСД цих чисел?

13. Знайдіть остачу від ділення:

а) $1\,989\cdot 1\,990\cdot 1\,991+1\,992^2$ на 7; б) 9^{100} на 8.

14. В одному з під'їздів восьмиповерхового будинку на першому поверсі знаходяться квартири від № 97 до № 102. На якому поверсі і в якому під'їзді буде квартира № 178, якщо на всіх поверхах однакове число квартир і всі під'їзди влаштовані однаково?

15. Знайдіть усі натуральні значення a, при яких корінь рівняння

$$(a-1)x=12$$

є натуральним числом.

16. Розв'яжіть у цілих числах рівняння

$$2x-5y=3.$$

17. Розв'яжіть у натуральних числах рівняння:

а) $x^2-y^2=31$; б) $x^2-y^2=303$.

18. Учневі надіслали завдання, що складається із 20 задач. За кожну правильно розв'язану задачу йому ставлять 8 балів; за кожну неправильно розв'язану — мінус 5 балів; за задачу, яку він не брався розв'язувати — 0 балів. Учень одержав у сумі 13 балів. Скільки задач він брався розв'язувати?

Додаткове завдання

1. Доведіть, що якщо числа ab і $a+b$ діляться на c, то число a^3+b^3 ділиться на c^2.

2. p і q — різні прості числа. Скільки дільників у числа $p^m q^n$?

3. Доведіть, що при кожному n число

$$n^5-5n^3+4n$$

ділиться на 120.

4. Чи може число, записане за допомогою 100 нулів, 100 одиниць і 100 двійок, бути точним квадратом?

5. Доведіть, що число

$$2\,222^{5555}+5\,555^{2222}$$

ділиться на 7.

6. Було сім аркушів паперу. Деякі з них розрізали на сім частин. Потім деякі із цих частин знову розрізали на сім частин, і так зробили кілька разів. Чи змогли в результаті отримати 1983 частини?

7. Знайдіть найменше число, що дає остачі: 1 від ділення на 2; 2 від ділення на 3; 3 від ділення на 4; 4 від ділення на 5; 5 від ділення на 6.

8. Розв'яжіть у натуральних числах рівняння

$$x^3+x^2+x=3.$$

9. Натуральні числа x, y, z такі, що

$$x^2+y^2=z^2.$$

Доведіть, що хоча б одне із цих чисел ділиться на 3.

10. Один майстер робить на довгій стрічці позначки синім олівцем від її початку через кожні 36 см. Другий майстер — позначки червоним олівцем від початку стрічки через кожні 25 см. Чи може синя позначка бути розташованою на відстані 1 см від будь-якої червоної?

11. Доведіть, що НСК двох сусідніх натуральних чисел дорівнює їх добутку.

■

ДИАЛОГИ О МАТЕМАТИКЕ И ПРИРОДЕ
Открытое заседание кружка

И. Ф. Белозёрова, г. Одесса

Заседание кружка проходит в виде спектакля, в ходе которого старшеклассники знакомят учеников младших классов с красотой математики, её историей, показывают, как математика помогает понять окружающий мир, изучить законы живой и неживой природы. Действие спектакля сопровождается показом фрагментов фильмов о природе, демонстрацией слайдов, рисунков. Помещение, в котором проходит заседание кружка, украшают портреты математиков и высказывания о математике, о связи математики с природой.

Природа формулирует свои законы языком математики.
Г. Галилей

Великая книга природы написана математическими символами.
Г. Галилей

Высшее назначение математики… состоит в том, чтобы находить скрытый порядок в хаосе, который нас окружает.
Н. Винер

Математика есть прообраз красоты мира.
И. Кеплер

Числа не управляют миром, но они показывают, как управляется мир.
И. Гете

В ходе подготовки к заседанию кружка старшеклассники написали рефераты по темам: «Виды симметрии в природе», «Геометрия природных форм», «Математика и красота в природе», «Животные строят», «Геометрия — посредник между природой и архитектурой», «Вездесущая спираль», «Геометрия кристаллов». Материалы, собранные учащимися в этих рефератах, были использованы для написания сценария спектакля.

Оборудование: таблицы, отражающие математические закономерности живой природы, учебные пособия из кабинета биологии, демонстрирующие виды симметрии в природе (морская звезда, омар, морские раковины и др.), модели кристаллов.

Действующие лица: Пифагор, Евклид, Гаусс, Эйлер, Архимед, Декарт, Фибоначчи.

Начинается спектакль демонстрацией фрагмента фильма о природе.

Архимед. Мы живем в мире удивительных форм и красок. Природа старательно позаботилась об их разнообразии. Будучи ее неотъемлемой частицей, мы ежечасно сталкиваемся с ними: одних мы просто не замечаем, другие вызывают у нас восхищение и интерес. Но так ли далеки они друг от друга? Стоит вооружиться измерительными инструментами, и мы обнаружим, что казавшиеся недавно такими непохожими с виду формы в большей степени сходны, чем различны. В поистине бездонной кладовой живой природы непременно обнаружатся великолепные образцы современных конструкций и механизмов…

Декарт. Современных Вам, уважаемый Архимед?

Архимед. И Вам, уважаемый Декарт, и нашим потомкам! Природа, обладающая неисчерпаемым богатством своих форм, создает их по общим законам.

На всем увидим математики печать…
Обсудим это! Кто готов начать?

Фибоначчи

Сплелись в клубок запутанные трассы
рабочих пчел, и оводов, и ос.
Разгул цветов.
Сплошное буйство красок.
Неразбериха полная.
Хаос.

Архимед

Что скажете, Декарт, на эти фразы?

Декарт

Готов ответить я Собранью сразу.
Ведь это только кажется снаружи.
Лишь озарясь познания огнем,
Мы изнутри порядок обнаружим,
Строжайший строй в нестройности найдем.
И станет ясным листьев бормотанье,
И пляска пчел у тесного летка,

И, разглядев растение, ботаник
Изобразит нам формулу цветка.

Пифагор

Но только ли о формах речь пойдет?
Ведь числа правят миром! Наперед
О них бы стоило хоть толику сказать...

Архимед

Согласен! Числа с формами сумеем увязать...
Хотя великий Гете говорил:
Не правят миром числа,
А лишь показывают нам,
Сколь есть в природе смысла!

Пифагор. Еще древние охотники (древнее нас, древних греков) увидели связь между небом и числом семь. Наблюдая за изменениями лунного диска, они заметили, что через семь дней после новолуния на небе видна половинка этого диска, а еще через семь дней вся Луна сияет на полуночном небе. Проходит еще семь дней — и опять остается половинка диска, а еще через семь дней на ночном небе сияют только звезды, а Луны совсем не видно. Возникло понятие лунного месяца — четыре семерки — 28 дней. В неделе семь дней...

Архимед

К Собранию я должен обратиться:
Где может нам еще семерка вдруг случиться?

Обращение ко всем.

Пифагор

Семь цветов радуги...

Гаусс

Семь звуков в музыкальной гамме...

Проигрывает.

Эйлер

Пословиц, поговорок и не счесть.
Здесь это подтвердят Вам, Ваша Честь!

Дети называют пословицы и поговорки, в которых встречается число семь.

Одним махом семерых побивахом!
Семь бед — один ответ.
Семь пятниц на неделе.
Один с сошкой, семеро с ложкой.
Семь раз отмерь, один раз отрежь.

Архимед

Мера свойственна обществу,
И даже морю ритмично ропщется,
И все, что на небе, в душе, на земле,
Можно выразить в точном числе.

Пифагор. В нашей школе пифагорейцев мы весь мир представляли состоящим из четырех элементов: огня, земли, воды и воздуха. Этим элементам приписывали числа соответственно один, два, три, четыре. Сумма этих чисел

$$1+2+3+4=10$$

обозначала окружающий нас мир.

Фибоначчи

Что числа всемогущи, то не враки!
О них писал я в «Книге об абаке»...

Гаусс

Леонардо Пизанский, прозванный Фибоначчи...

Фибоначчи. Это я!

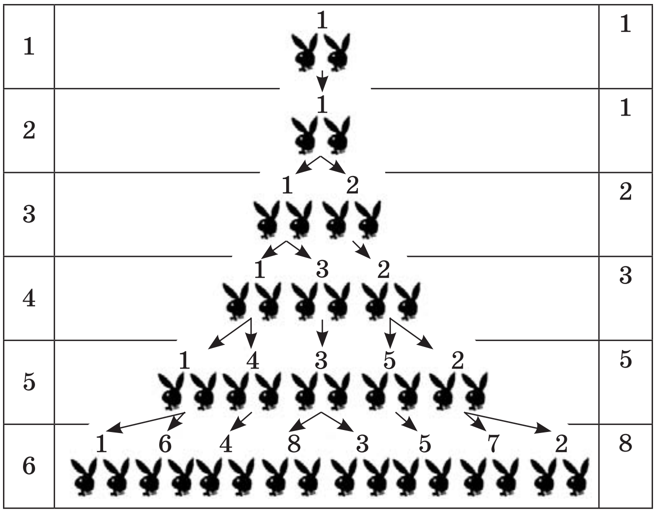
Гаусс

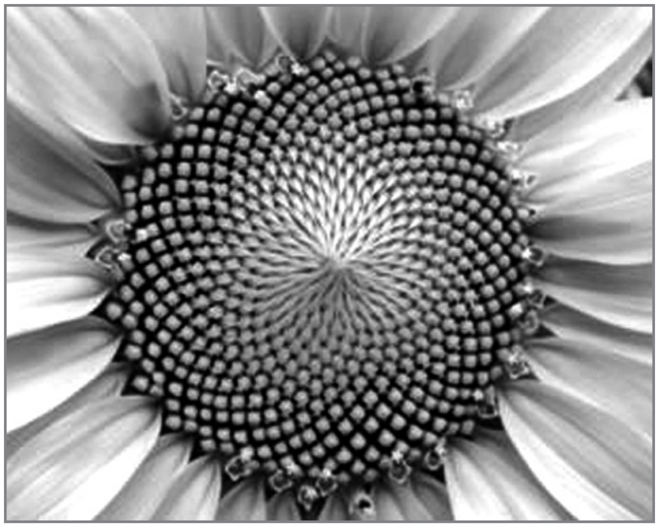
...приводит в своем труде следующую задачу...

Фибоначчи. «Сколько пар кроликов в один год от одной пары рождается?»

Некто поместил пару кроликов в некое место, огороженное со всех сторон стеной, чтобы узнать, сколько пар кроликов родится при этом в течение года, если природа кроликов такова, что через месяц пара кроликов производит на свет другую пару, а рождают кролики со второго месяца после своего рождения. Первая пара дает в первом месяце потомство, и в этом же месяце окажутся две пары; из них одна пара, а именно первая, рождает и в следующем месяце, так что во втором месяце оказывается три пары; из них в следующем месяце две пары будут давать потомство, так что в третьем месяце родятся еще две пары кроликов, и число пар кроликов в этом месяце достигнет пяти; из них в этом же месяце будут давать потомство три пары, и число пар кроликов в четвертом месяце достигнет восьми... Так можно считать по порядку до бесконечности.

Гаусс. В итоге, подсчитывая количество пар кроликов, родившихся в каждом месяце, получим следующий ряд чисел, названный именем Фибоначчи: 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, ... (*записывает на доске*), каждый член которого, начиная с третьего, равен сумме двух предыдущих членов.





Эйлер. Эти числа часто встречаются в различных спиральных формах, которыми так богат мир растений: черенки листьев примыкают к стеблю по спирали, которая проходит между двумя соседними листьями; чешуйки на еловой шишке, ячейки на ананасе, семена подсолнечника расположены спиралями, причем количества спиралей каждого направления, как правило, числа Фибоначчи. (*Демонстрирует таблицы или слайды, на которых изображены шишки, цветы подсолнечника и т. д., где просматриваются спирали*.)

Фибоначчи. Это я!

Архимед

От этой замечательной задачи
Уже рябит в глазах от Фибоначчи,

то есть, я хотел сказать, от кроликов. Вот, например, в Австралии этих самых кроликов развелось так много, что с ними приходится бороться.

Гаусс. Размножаются не только кролики, а, скажем, инфузория туфелька. При температуре 20 °С она за сутки становится взрослой и делится. Закон ее размножения описывают формулой $k = 2^n$, где k — количество «родившихся» инфузорий, n — число дней. Таким образом, через десять дней получается 1024 «потомка». Законы размножения в живом мире описывают математически!

Есть такая наука — математическая статистика. По статистике прослеживается интересная природная закономерность: в среднем на каждую тысячу новорожденных приходится 516 мальчиков. Математическими методами проводят исследования демографы, изучающие динамику роста населения.

Архимед

Почтенному Собранию хочу задать вопрос:
Что в мире есть порядок, а что, увы,
хаос?

Декарт

Думаю, симметрией оно называется.

Архимед

Желающим слово предоставляется.

Евклид. Трудно назвать растение или биологическое существо, форма которого не характеризовалась бы одним или несколькими видами симметрии. (*Вопрос зрителям.*) Какие виды симметрии вы знаете?

Симметрия бывает билатеральная, или осевая. Ею обладают насекомые и млекопитающие. Она связана с движениями организмов. Активно подвижные животные симметричны. Осевой симметрией обладают практически все растения. (*Демонстрирует таблицы или слайды, на которых изображены животные и растения, обладающие осью симметрии.*)

Симметрия бывает радиальная, или центральная. Ею обладают цветы, низшие животные, как-то: морские звезды, морские ежи, медузы и пр. Цветок ириса — пример циклической симметрии 3-го порядка. (*Демонстрирует таблицы или слайды, на которых изображены животные и растения, обладающие центром симметрии.*)

Эйлер. Каждый организм живой природы в процессе своего развития стремится к форме, которая способна наиболее полно удовлетворить его функциональные потребности: добывание пищи, самосохранение, размножение.

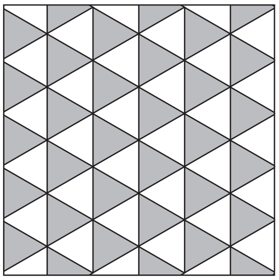
Влияние на организм гравитационных сил Земли, атмосферного или водяного давления, напора ветра, температуры вынуждают природу находить универсальную форму. Основные принципы: экономия материала, энергии, прочность, устойчивость.

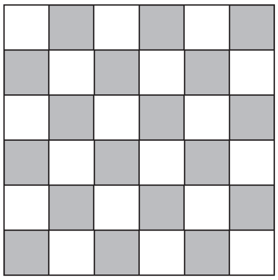
Экономия материала в природных конструкциях достигается не столько путем уменьшения их абсолютного веса, сколько путем нахождения такой геометрической формы, в которой данный конкретный материал способен работать наилучшим образом.

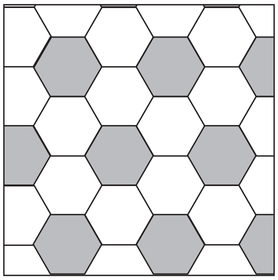
Архимед

Здесь в качестве весьма разумной меры
Вам следовало б привести примеры,
Чтоб дать Собранию возможность
убедиться,
Что Ваше выступленье — не водица!

Пифагор. Мы, пифагорейцы, доказали первыми, что плоскость может быть покрыта полностью лишь тремя видами правильных многоугольников: треугольниками, квадратами, шестиугольниками. И мы готовы привести убедительный пример к предыдущему выступлению. (*Демонстрирует рисунки трех видов покрытия плоскости*.)







Пифагор. Примером служит конструкция пчелиных сот. Соединенные плотно вместе, они не только полностью занимают имеющийся объем, ввиду указанного выше свойства (соты в разрезе дают правильные шестиугольники), но и экономят используемый материал (воск). Можно доказать, что именно такая конструкция оказывается оптимальной в отмеченном выше смысле, то есть максимальная ёмкость при минимуме расхода материала (при равной с другими фигурами площади правильный шестиугольник имеет наименьший периметр). В сотах, на строительство которых ушло 40 грамм воска, помещается свыше двух килограммов меда!

Эйлер. Еще примеры. Хрупкость материала панциря ракообразных (например, краб) компенсируется его формой. Благодаря тому, что она криволинейна, панцирь способен выдерживать огромную тяжесть толщи воды.

Известковый материал скорлупы яйца хрупкий и непрочный, тем не менее, в целом виде скорлупа, благодаря своей форме, обладает достаточной прочностью и жесткостью. У многих птиц яйца имеют форму геометрического тела под названием эллипсоид.

Евклид. Есть еще одна экономная форма — сфера. Сферические поверхности имеют наименьшую площадь при наибольшем объеме. (*Вопрос к зрителям*.) Где встречается сфера в природе?

Ёж, сворачиваясь клубочком во время опасности, неосознанно использует описанное свойство сферы. Чтобы защититься, малоподвижные животные — ящер, хитон, многоножка — обзавелись покрытием из роговых пластинок или чешуи на спине и голове. При приближении опасности эти животные свертываются в плотные шары, укрывая мягкую, уязвимую нижнюю часть туловища.

(*Вопрос к зрителям*.) Почему кошка, когда ей холодно, сворачивается клубочком?

Архимед

Что ж, спору нет! И гармоничны сферы,
Природа-мать дает тому примеры.
Но мне б хотелось, коль вы не устали,
Поговорить немного о спирали.
Давайте спросим моего соседа,
Что слышно о спирали Архимеда?

Декарт

С точки зрения исторической,
Я больше занимался логарифмической.

Гаусс. Кривая, названная именем нашего уважаемого собеседника — спираль Архимеда — известна с древних времен...

Архимед

Стремительно летит за веком век,
И вот теперь я очень древний грек!..

Гаусс. Если вообразить себе траекторию движения жучка, который перемещается равномерно по вращающейся пластинке проигрывателя радиально от центра к краю, то это и даст нам представление об этой кривой. Только пластинка должна быть бесконечного радиуса. Расстояние между двумя соседними витками спирали Архимеда постоянно.

Наш уважаемый Архимед исследовал многие свойства этой спирали и использовал их при решении некоторых сложных задач.

Эйлер. Эти же замечательные свойства используют в современной технике: в звукозаписи, в электротехнике, в некоторых механических приспособлениях (пластинка, конденсатор, швейная машинка).

Фибоначчи

Объясните для народа,
А при чем же здесь природа?

Декарт. А вот в природе чаще встречается другая спираль, о которой я писал еще в 1638 году — логарифмическая. «Вездесущая спираль» — так часто характеризуют эту кривую благодаря ее широкому распространению в природе. Гете считал ее математическим символом жизни и духовного развития.

Евклид. Вы видели когда-нибудь спиральную галактику?

Фибоначчи. Я — Фибоначчи! Поэтому, разумеется… не видел! И не слышал!

Евклид. А ведь фотография такой галактики дает хорошее представление о логарифмической спирали. Эта кривая имеет очень красивое уравнение в так называемых полярных координатах.

Декарт. Я, как истинный Декарт, предпочитаю исключительно декартовы!..

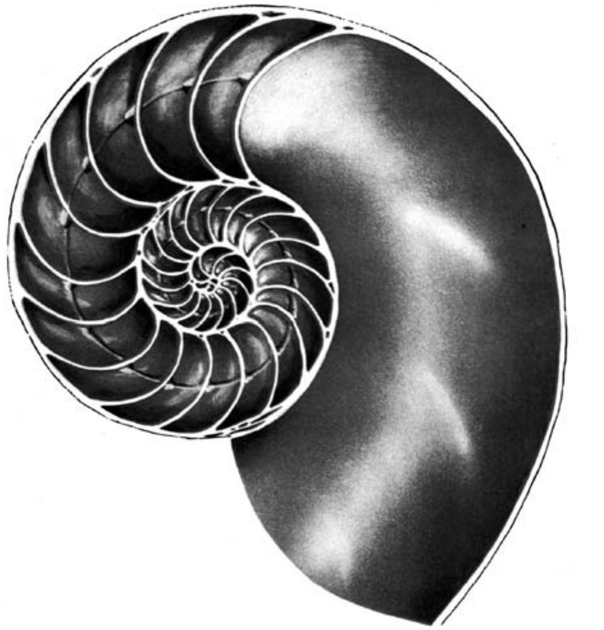
Увидеть логарифмическую спираль можно в витках раковины. Семена в корзине подсолнуха, семена сосновой шишки, если взглянуть на нее с нижнего торца, также располагаются по кривым, близким к дугам логарифмической спирали.

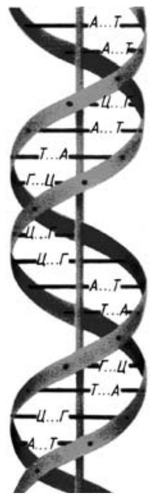
Паук плетет свою паутину в форме логарифмической спирали. Паутина есть надежное приспособление. Оптимально сотканная из тончайших нитей сеть, способна выдержать вес в десятки раз превосходящий ее собственный.

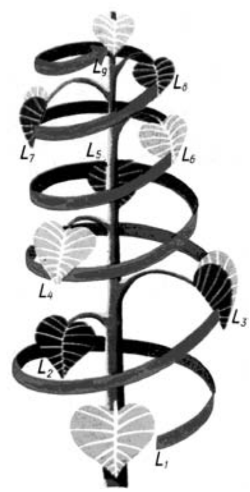
Ночные бабочки, которые пролетают большие расстояния, ориентируясь по параллельным лунным лучам, инстинктивно сохраняют постоянный угол между направлением полета и лучом света. Если они ориентируются на точечный источник света, скажем на пламя свечи, инстинкт их подводит, и бабочки попадают в пламя по скручивающейся логарифмической спирали. (*Демонстрирует таблицы или слайды с изображением логарифмической спирали в живой и неживой природе*.)

Фибоначчи

Бедные бабочки! Надо же! По спирали!
И думать не думали, и знать не знали!







Архимед. Увы! Но зато мне, как известному инженеру, приятно сообщить, что выдающиеся свойства и этой кривой используются в технике. Например, в гидротехнике, в аэромеханике.

Фибоначчи

Что ж! Жизнь бабочек возможно нелегка,
А что там говорили нам о формуле
цветка?

Архимед

Послушаем на этот счет коллегу
Пифагора,
Он речью строгой знаменит, не ведая
укора.

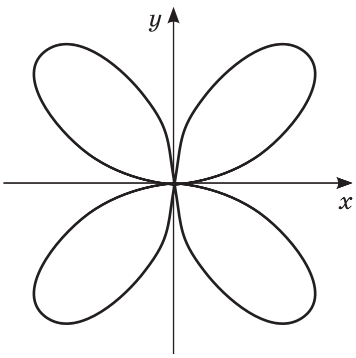
Пифагор. Итальянский геометр, совсем не древний (жил всего триста лет назад), Гвидо Гранди придумал уравнения, которые описывают на плоскости необычайной красоты цветы.

Оказывается математически можно описать, и довольно точно, формы некоторых растений, их цветов, листьев. Кстати, эти уравнения легко записываются в полярных координатах.

Декарт. Это крайне невежливо упоминать о каких-то там «полярных координатах» в присутствии Декарта!

Пифагор. Кривая, получившая поэтическое название «Листок жасмина», имеет в декартовой системе координат уравнение

$$x^3 + y^3 = 3axy.$$



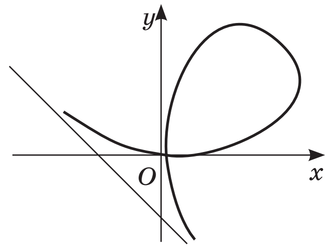
В математике семейство кривых, исследованных Г. Гранди, получило название роз, хотя в действительности эти кривые больше всего похожи на цветы семейства сложноцветных.

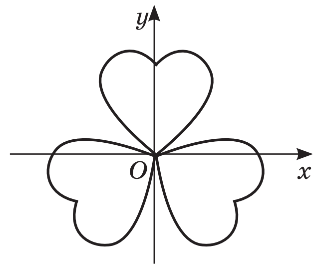
Немецкий геометр XIX века Б. Хабенихт продолжил математическое «садоводство» Гвидо Гранди и получил новые сорта цветов. Его уравнения тоже записывают в полярных координатах!.. Постепенно усложняя уравнения, Хабенихт получил большое количество уравнений контуров листьев: плюща, крапивы и др. (*Демонстрирует таблицы или слайды с изображением кривых в форме цветов и листьев.*)

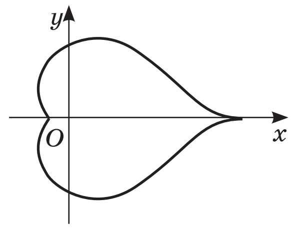
В наши дни такого рода эксперименты легко проделывать, имея под рукой персональный компьютер.

Архимед

Сколь ни прекрасны математики плоды,
Приходит под конец Собранье, и труды
Иных подвижников науки, будет час,
Вновь, верю, соберут на этом месте нас!







Пускай останется извечный мир загадок,
Чтоб продолжалась жизнь, не ведая конца.
О, трезвые умы и строгие сердца,
Все чувства привести способные в порядок,
Пускай останется извечный мир загадок!

ЛИТЕРАТУРА

1. *Михайленко В. Е., Кащенко А. В.* Природа, геометрия, архитектура. — К. : Будівельник, 1981.
2. *Клейнер Г. М., Клейнер Л. М.* Математика и научная картина мира. — К. : Радянська школа, 1984.
3. *Депман И. Я., Виленкин Н. Я.* За страницами учебника математики. — М. : Просвещение, 1989.
4. *Воробьев Н. Н.* Числа Фибоначчи. — М. : ГИТТЛ, 1951.
5. *Фомин С. В.* Матемсатика в биологии. — М. : Знание, 1969.
6. *Иваницкий Г. Р., Гартштейн В. П.* Геометрия живого. — М. : Знание, 1971.
7. *Гильдерман Ю. И.* Математизация биологии. — М. : Знание, 1969.
8. *Энциклопедический* словарь юного математика / под ред. Б. В. Гнеденко и др. — М. : Педагогика, 1985.

■

МІС МАТЕМАТИКА
Математичний вечір для старшокласників

М. М. Гнатів, м. Бучач, Тернопільська обл.

Мета: працювати над формуванням інтересу до математики; розвивати логічне мислення, спостережливість, кмітливість, увагу; виховувати самостійність.

Підготовчий етап. Відбір конкурсанток за результатами тестування.

Обладнання: комп'ютер з проектором (для показу презентації), картки із завданням, чорна скринька із приладами плакати і надувні кульки для оздоблення сцени.

ХІД ВЕЧОРА

Ведучий 1
О математико всесвітня!
Ти всім наукам мати рідна,
В віках оспівана ти словом,
Світило всіх земних світил.
Тебе царицею велично
Недарма Гаусс охрестив.

Ти визнана главою всіх наук,
Потрібна нам завжди і всюди.
Без математики ми нині як без рук,
З тобою з казки дійсність творять люди.

Ведучий 2. Якщо ви почуєте в розмові, що людина не любить математику, не вірте. Математику не можна не любити, її можна тільки не знати. Сьогодні ми проведемо конкурс «Міс Математика» для тих, хто любить, знає і хоче знати математику. Конкурс оцінюватиме журі. Запрошуємо на сцену учасниць конкурсу.

Вихід учасниць. Кожній учасниці присвоюють номер.

Ведучий 1. Якими якостями повинна володіти сучасна міс Математика? Звичайно, красою, витонченістю, логічністю, спостережливістю, умінням робити висновки, бути справедливою та об'єктивною.

Для того щоб конкурсантки налаштувалися на змагання, проведемо розминку.

ПЕРШИЙ КОНКУРС. БЛІЦТУРНІР, ПРИСВЯЧЕНИЙ ЦИФРІ 7

Ведучий 2. Ви, мабуть, звернули увагу, що цифру 7 можна зустріти набагато частіше, ніж решту цифр. Її використовують у прислів'ях і приказках, у назвах кінофільмів і книг тощо. Ми сьогодні теж приділимо їй увагу.

Учасницям конкурсу будуть запропоновані запитання. Відповідає та дівчина, яка першою підніме руку. Кожну правильну відповідь журі оцінить у 2 бали.

1) Назвіть сім барв веселки.
2) Як називають проміжок часу, який складається із семи діб?
3) Укажіть сьомий місяць року.
4) Назвіть сьому ноту октави.
5) Яка сьома буква українського алфавіту?
6) Чому дорівнює сім у квадраті?

ДРУГИЙ КОНКУРС. ВИПРОБУВАННЯ НА ВІРНІСТЬ

Ведучий 1. Однією з чеснот, яку так цінують молоді люди, є постійність, вірність одному хлопцеві. Завдання, які мають виконати дівчата, пов'язані з якою-небудь сталою величиною.

Перше завдання. Між поданими числами розставте знаки дій і дужки так, щоб у кожному прикладі виходило одне й те саме число — одиниця.

1) $1\ 2\ 3 = 1$;
2) $1\ 2\ 3\ 4 = 1$;
3) $1\ 2\ 3\ 4\ 5 = 1$.

За кожну правильну відповідь конкурсантки одержують 2 бали.

Друге завдання. Розмістіть у клітинках квадрата 5×5 числа 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 і 9, взявши кожне з них хоча б один раз, так, щоб суми чисел у кожному рядку і кожному стовпцю квадрата були однаковими (постійними).

Дівчата, які встигнуть виконати це завдання за відведений час, одержують 5 балів.

Ведучий 2. Поки журі перевіряє правильність виконання завдань і підбиває підсумки, прихильники конкурсанток дарують їм свої пісні.

ТРЕТІЙ КОНКУРС. МОДНА ЗАЧІСКА

Ведучий 1. Що тільки не придумують дівчата для того, щоб бути привабливими і не відставати від моди. Уявіть собі, що наступний рік буде роком математики і, звичайно, модним буде все математичне, у тому числі й зачіски.

Ведучий 2. Волосся — це дар природи, унікальний інструмент самовиявлення людини.

Кожна учасниця повинна показати модель зачіски і дати їй математичну назву.

Максимальна оцінка за конкурс — 2 бали.

ЧЕТВЕРТИЙ КОНКУРС. НАЙРОЗУМНІША

Ведучий 1. Кожній учасниці конкурсу будуть поставлені запитання з математики. Для обдумування і відповіді відводиться не більше 3 секунд. За кожну правильну відповідь конкурсантка одержує 1 бал.

Ведучий 2. (*Зачитує запитання.*)

№ 1. 1) Як називають рівність, яка має невідомі числа, позначені буквами?
2) Який розділ геометрії вивчає властивості фігур на площині?
3) Як називають функцію, яку можна задати формулою $f(x)=ax^2+bx+c$, де $a\neq 0$, b, c — довільні числа, а x — аргумент?
4) За якою формулою можна обчислити площу трикутника, якщо відомі довжини всіх його сторін?
5) Чому дорівнює різниця квадратів двох виразів?

№ 2. 1) У якому трикутнику дві висоти перетинаються у вершині?
2) Як називають відрізок, що сполучає дві точки кола і проходить через його центр?
3) Квадрат яких чисел дорівнює 1?
4) Які рівняння мають два корені?
5) Чому дорівнює сума суміжних кутів?

№ 3. 1) Як називають відношення прилеглого катета до гіпотенузи?
2) Чиє ім'я носить теорема про зв'язок коефіцієнтів квадратного рівняння з його коренями?
3) Як називають суму одночленів?
4) Скільки коренів має рівняння $ax=b$, якщо $a=0$?
5) Як називають промінь, який виходить з вершини кута і ділить кут навпіл?

№ 4. 1) Як називають результат віднімання?
2) Скільки кутів має коло?
3) Графіком якої функції є парабола?
4) Скільки прямих можна провести через дві точки?
5) У якому трикутнику сума кутів дорівнює $180°$?

№ 5. 1) Чому дорівнює дріб, чисельник якого дорівнює знаменнику?
2) Як називають соту частину числа?
3) Графіком якої функції є пряма?
4) Як називають відрізок, що сполучає дві точки кола?
5) Чому дорівнює периметр квадрата, площа якого дорівнює 16 $см^2$?

№ 6. 1) Як називають число, яке задовольняє рівняння?
2) Скільки прямих можна провести через одну точку?
3) Як називають твердження, яке потребує доведення?
4) Чи можливо встановити рівність трикутників за трьома кутами?
5) Чому дорівнює значення виразу: 2012^0?

П'ЯТИЙ КОНКУРС. ЩО В ЧОРНІЙ СКРИНЬЦІ?

Ведучий 1. Кожна дівчина має володіти неабиякою інтуїцією, а також умінням логічно мислити, швидко і правильно приймати рішення. Усі ці якості знадобляться для того, щоб відгадати, який предмет лежить у чорній скриньці.

Відповідає та учасниця конкурсу, яка першою підніме руку. За правильну відповідь нараховують 2 бали.

Ведучий 2 (*Оголошує запитання.*)

1) У чорній скриньці лежить предмет, назва якого походить від грецького слова, що в перекладі означає «гральна кістка». Цей термін увели піфагорійці. Зараз цей предмет є однією з улюблених іграшок маленьких дітей.

2) У чорній скриньці лежить геометричний інструмент, який, за твердженням римського поета Овідія (I ст.), було винайдено в Стародавній Греції.
3) Воїни римського консула Марцелла були надовго затримані біля стін міста Сіракузи потужними машинами-катапультами. Їх винайшов для захисту свого міста великий учений Архімед.

У чорній скриньці лежить ще один винахід Архімеда, який і понині використовують у побуті.

ШОСТИЙ КОНКУРС. КУЛІНАРНИЙ

Ведучий 1. Нам відомо, що наші конкурсантки захоплюються не тільки математикою, а й кулінарією. Тому вони вдало впораються із завданнями цього конкурсу.

Учасниці отримують аркуші з умовами задач, виконують завдання в письмовій формі і здають аркуші журі для перевірки.

За кожне правильно виконане завдання нараховують 2 бали.

1) Як за допомогою трьохлітрової і п'ятилітрової каструль набрати з крана 4 літри води?
2) Ви спекли пиріжки з повидлом, маком і сиром: по 10 штук з кожною начинкою. Яке найменше число пиріжків слід узяти, щоб серед них обов'язково було три пироги з однаковою начинкою?
3) Маса рибини дорівнює п'ять кілограмів і ще піврибини. Яку масу має рибина?
4) Потрібно підсмажити 6 котлет. На сковороді поміщається лише 4 котлети. Кожну котлету потрібно обсмажувати 5 хвилин з одного боку й 5 хвилин із другого. За яку найменшу кількість часу можна підсмажити всі котлети?

Ведучий 2. Поки дівчата працюють над виконанням завдань, ми проведемо гру з глядачами «Жартівливі запитання». Хто дасть правильну відповідь на запитання, одержує 1 бал, який може подарувати улюбленій учасниці конкурсу.

1) Дід, баба, внучка, Жучка, кішка та мишка тягнули-тягнули ріпку і нарешті витягли. Скільки очей дивилося на ріпку?
2) Бабуся плела онукам шарфи і рукавички. Всього вона сплела три шарфи і шість рукавичок. Скільки онуків у бабусі?
3) Зараз сестрі чотири роки, а братові — шість. Скільки років буде братові, коли сестрі буде шість років?
4) Біля їдальні, де обідали лижники, стояло 20 лиж і 20 палок. Скільки лижників ходило в похід?
5) Скільки буде півтори третини від 100?
6) Скільки часу необхідно для того, щоб 12 яблук розкласти на три купки так, щоб число яблук у кожній купці було непарним?

ПІДБИТТЯ ПІДСУМКІВ

Журі оголошує підсумки конкурсу та імена переможниць у номінаціях: міс Чарівність, міс Ерудиція, міс Оригінальність, міс Логічність, міс Екстравагантність. Називає ім'я переможниці конкурсу міс Математика.

Ведучий 1. Міс Математика має право:

- ✓ Відвідувати всі заняття як з улюблених, так і з не улюблених навчальних предметів.
- ✓ Першою приходити на іспити.
- ✓ Бути організатором і учасником усіх заходів, що проводяться в коледжі.
- ✓ Має право на симпатії всіх молодих людей, що захоплюються й не захоплюються математикою.

Ведучий 2. Ще раз вітаємо всіх і дякуємо за участь у конкурсі.

■

УПЕРЕД, ДО МЕТИ
Віршована математика

Р. Й. Кунашенко, смт Лугини, Житомирська обл.

УЧИСЬ УЧИТИСЯ

Учитися — нелегка справа,
Це не жарт і не забава!
Але я хочу вам порадити,
Як учити математику.
Щоб виконати домашнє завдання,
Пригадай ретельно класне навчання.
Щоб потім менше було турботи,
Переглянь записи класної роботи.
Спочатку вивчи всі означення:
Вони мають важливе значення.
Виділи для конкретної теми
Основні формули і теореми.
І щоб до істини дійти,
Їх сформулюй і доведи.
А щоб не було великої мороки,
Розбий процес на окремі кроки.
Все перевір, обдумай, обґрунтуй,
І у зошит ретельно ти занотуй.

ЗАГАЛЬНА СХЕМА РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧ

Хочеш розв'язати задачу?
Прочитай її спочатку.
Що дано? А що знайти?
По полицях розклади.
Зроби рисунок або схему,
Згадай потрібну теорему.
Якщо все дуже заморочено,
Запиши умову скорочено.
Все обдумавши детально,
Склади план для розв'язання.
Знайшовши відповідь, обов'язково
Перевір, чи відповідає вона умові.
Чи достовірний результат?
Де треба, повернись назад.
Задовольняє все умову?
Отже, відповідь готова!

***

Сподіваюся, друже, ти все зрозумів:
Розв'язати задачу, не розв'язуючи її,
Ніхто і ніколи ще не зумів!

ОСНОВНА ВЛАСТИВІСТЬ ДРОБУ

Чисельник і знаменник дробу
Помножити чи поділити спробуй
На однаковий вираз або на число,
Собі на радість, а не на зло.
І можеш не перевіряти заново:
Дістанеш дріб, що дорівнює даному.
Щоб справу швидше завершити,
Дріб потрібно скоротити.
І виконуй без вагання
Додавання та віднімання.
Собі на користь, а не на злобу,
Запам'ятай властивість дробу.

ВІДСОТКИ

Ну і задача, ну і діла:
Знайти відсоток від числа.
А ти не бийся об парту лобом:
Помнож число на відсоток, виражений
дробом.

***

А ось іще одна проблема:
Знайти число за відсотком треба.
Відсоток ти на дріб перетвори,
І подане число на нього поділи.
Жодної проблеми тут нема,
І хвилювався ти задарма.

***

Ти знову потрапив у скрутне становище:
Як знайти відсоткове відношення?
Одне число на друге поділи,
Помнож на 100 % — і всі труди.

ВЛАСТИВОСТІ СТЕПЕНІВ

Як множать степені із рівними основами?
Основи залиши такими ж, а не новими,
А показник додай до показника —
Властивість степенів така.

***

Коли ділити будеш степені,
Якщо однакова у них основа,

Показники ти їхні відніми,
Основу залиши тією ж — відповідь
готова.

***

А під час піднесення
Степеня до степеня
Показники помнож мерщій,
Основу незміною залиши.

***

Щоб піднести до степеня частку,
Ділене до степеня піднеси спочатку,
А потім і про дільник ти не забудь.
Підніс їх обох? — То ж спокійним ти
будь.

ПОКАЗНИКОВІ РІВНЯННЯ

Рівняння зі степенем зі змінною
в показнику
Відоме, мабуть, кожному, випускнику.
Як розв'язати його? Коротка мова:
Зведи степені до спільної основи,
Прирівняй показники, і майже все
готово.
Здобуте рівняння мерщій розв'яжи,
У відповідь корені запиши.
Умова лиш одна (тобі, напевно, сниться):
Основа степеня додатна і не одиниця.

ПОКАЗНИКОВІ НЕРІВНОСТІ

А це — нерівності показникові,
Розв'язувати їх ти вже готовий.
Потрібно добре придивитися:
Якщо основа більш ніж одиниця,
То за переходу до показника
Ти не змінюй нерівності знак.
Якщо ж основа в них дробова
Менш ніж одиниця і більша від нуля,
Слід поміняти нерівності знак —
І майже готова відповідь твоя.

УПЕРЕД, ДО МЕТИ!

«Щоб дійти мети,
Треба перш за все йти» —
Так сказав не простак —
Оноре де Бальзак.
Від помилки в житті
Страхування нема.
Та й від неї є користь
Під час навчання.
Прагни лиш неодмінно її віднайти,
Проаналізувавши — не припустись,
Бо справжнє життя — це бажання
дійти
Через усі перепони — вперед,
до мети!

■

ИЗБРАННЫЕ МЕСТА КАЛЕНДАРЯ ОТ «СЕРЕНАДЫ МАТЕМАТИКИ»*

Александр Василенко, заслуженный учитель Украины

ФЕВРАЛЬ, 2012 ГОД

7 135 лет тому назад родился (в Кренли) англичанин ***Годфри Гарольд Харди*** (1877–1947), который познал числа и функции, Литлвуда и Рамануджана, «Ряды Фурье» (М., 1962, + Рогозинский В. В.) и «Неравенства» (М., 1968, + Литлвуд Дж., Полиа Д.), оставив «Курс чистой математики» (М., 1949) и «Расходящиеся ряды» (М., 1951), а ещё «Исповедь математика» (*см.:* Математики о математике. — М. : Знание, 1967) (медали: Королевская, им. Де Моргана, им. Сильвестра).

Воспоминания Джона Литлвуда:

1) На экзамене в Кембридже я получил максимальное число очков за задачи из анализа, и это было моим первым знакомством с изумлённым Харди, который в это время только начинал свою работу в Тринити-колледже. Позже я послал в Лондонское математическое общество длинную работу относительно функций порядка 0. Написана она была вполне прилично, но рецензенты разошлись во мнениях. Харди был назначен третьим рецензентом, и работу напечатали. (*Курьёз:* С тех пор у меня никогда не было никаких затруднений с публикацией работ, за исключением одной работы, написанной мной совместно с Харди.) Вскоре началось моё 35-летнее сотрудничество с Харди.

2) В определении дедекиндова сечения все рациональные числа распределяются на два класса — L и R. Эти обозначения (левый и правый), которые с благодарностью восприняло целое поколение студентов, были введены мною. «Курс чистой математики» Харди содержит много ссылок на меня, но когда я намекнул Харди, что ему следовало бы отметить и эту мою заслугу, он отказался выполнить мою просьбу на том основании, что упоминать такие мелочи было бы оскорбительно для меня.

3) В гранках книги Харди о Рамануджане я прочёл: «Кто-то сказал, что каждое положительное целое число было одним из его личных друзей». Моей реакцией на это место было: «Интересно, кто это сказал; я бы хотел, чтобы это был я». Харди выслушал моё замечание молча, с непроницаемым лицом, так что я решил, что он пропустил его мимо ушей. Я упрекнул Харди в том, что он имеет привычку часто не реагировать на замечания, на что он ответил: «Что мне остаётся делать? Неужели каждый раз говорить: вот это здорово!» Мой ответ: «Да». И в вёрстке я уже прочитал (так, как это теперь напечатано) «Литлвуд сказал...» (*Курьёз:* Однажды я предложил Харди найти опечатку на одной странице нашей общей работы. Он не смог её найти. Ошибка была в его собственном имени.) (*Перевод В. Левина*).

Воспоминание Констанс Рид:

Харди и Гарольд Бор были частыми гостями в Гёттингене. Как правило, они заезжали сюда по дороге из Дании или Англии, куда они направлялись для встречи друг с другом. Когда Харди покидал Бора, возвращаясь домой через неспокойный пролив Северного моря, он всегда отправлял ему открытку с извещением: «У меня есть доказательство гипотезы Римана о нулях дзета-функции!» Харди говорил, что Бог не позволит ему умереть с такой славой... (*Перевод И. Долгачёва*).

К слову: Харди действительно первым установил, что дзета-функция имеет бесконечное количество нулей на прямой

$$\sigma = \frac{1}{2}...$$

Воспоминания Норберта Винера:

Харди я впервые увидел у Рассела, когда приезжал в Кембридж с отцом. Тогда мы

---

* Полную версию его ищи в научно-методическом журнале «Математика в школах України» (Харьков: ИГ «Основа») начиная с 1 сентября 2007 года.

оба приняли его за студента, и только позднее я узнал, что этот робкий юноша, упорно стремившийся оставаться в тени,— великолепный спортсмен и высший авторитет во всех играх с мячом.

Чтобы ознакомиться более серьёзно с математикой, я обратился к Харди, лекции которого оказались самыми интересными, и обнаружил, что он не только идеальный учитель, но и учёный, которого каждый молодой честолюбивый математик смело мог избрать образцом для подражания. Лекции Харди доставляли мне истинное наслаждение. Он с такой обдуманностью и осторожностью вёл меня по лабиринту высшей математики, что при нашем приближении все препятствия отступали как по мановению волшебной палочки, и я, наконец, понял, что такое настоящее математическое доказательство...

В зрелые годы Харди стал типичным кембриджским профессором: невероятно сухопарый, вечно в невыутюженных брюках и мятой куртке, добрый, готовый каждому прийти на помощь, но ревниво оберегающий свою независимость и панически боящийся женщин...

Из всех знакомств в Кембридже самым важным для меня по-прежнему оставалось знакомство с Харди и его вторым я — Литлвудом. Юноша, которого я когда-то студентом встретил в доме Рассела, превратился в пожилого ссутулившегося учёного. Но Харди всё ещё был опасным противником на теннисном корте и с энтузиазмом относился к крикету, прекрасно разбираясь во всех тонкостях этой игры. Позднее, побывав несколько раз в Соединённых Штатах, он заразился любовью к бейсболу. Харди и Литлвуд повели меня как-то на крикетный матч и показали мне регби — игру, во время которой противники устраивают невообразимую свалку из-за мяча. Боюсь, что прелесть этих игр ускользнула от моего понимания.

За долгие годы творческого содружества роли Харди и Литлвуда определились вполне чётко: оригинальность замыслов и ясность мысли шли от Харди, непреклонное упорство и неустанная энергия — от Литлвуда. Интересно, что из них двоих Литлвуд был гораздо менее заметен, чем более старший Харди... (*Перевод Ю. Родман*).

АНКЕТА АВТОРА ВИДАВНИЧОЇ ГРУПИ «ОСНОВА»

Прізвище ____________________

Ім'я ____________ По батькові ____________

Місце роботи (повна назва закладу) ____________________

Посада ____________________

Кваліфікаційна категорія, звання ____________________

Паспортні дані: серія ______ № ______ виданий ____________
(ким виданий) (дата)

Ідентифікаційний номер ____________________

Домашня адреса ____________________

Поштовий індекс ______ телефон моб.(______) ____________

телефон служб. (______) ____________ e-mail: ____________

РОЗПИСКА-ДОЗВІЛ

Я, ____________________
(кваліфікаційна категорія)

вчитель ____________________
(посада, назва закладу)

дозволяю друкувати мій матеріал ____________________
(назва матеріалу)

у всеукраїнському науково-методичному журналі ____________________
(назва журналу)

Видавничої групи «Основа».

☐ Так, я передплачую журнал(и) ВГ «Основа», додаю копію передплатної квитанції

☐ Передаю свій матеріал на безоплатній основі

Гарантую, що цей матеріал є моєю власною розробкою і не переданий до інших видавництв.

Дата ____________ Підпис ____________

Легенды истории:

Рассказывают, что Харди однажды даже провозгласил тост: «За чистую математику! Да не найдёт она никаких приложений!» (*Морис Клайн*).

Курьёз:

Не менее 90 % всех упоминаний имени воинственного адепта чистой математики Харди в современной научной, научно-популярной и учебной литературе связано не с его на самом деле выдающимися достижениями в теории чисел, а с единственным грехом — с выполненной в молодости несложной работой прикладного характера, где Харди сформулировал закон пропорциональностей доминантных и рецессивных менделевских особенностей генетики, перенесённых на большие смешанные популяции (*Исаак Яглом*).

11 355 лет тому назад родился французский популяризатор науки ***Бернар ле Бовье де Фонтенель*** (1657–1757), который познал «Историю оракулов» (где критиковал суеверия и фанатизм), оставил «Геометрию бесконечности» и «Множественность миров» и стал (столетним!) кратером на Луне.

Откровения Фонтенеля:

1) Просвещённый ум составляется из умов всех предшествующих веков (*Перевод Е. Лихтенштейна*).

2) Математики похожи на влюблённых: согласитесь с математиком в самом простом высказывании, и он выведет из него следствие, с которым вы также должны согласиться, а из этого следствия — другое (*Перевод С. Киро*).

14 135 лет тому назад родился (Берлин) ***Эдмунд Георг Герман Ландау*** (1877–1938), который познал «Основы анализа», оставив «Введение в дифференциальное и интегральное исчисление», трёхтомный трактат по теории чисел, собственный символ и полином.

Воспоминания:

1) *Норберт Винер:* Перед самым началом Первой мировой войны я перебрался в Гёттинген, где весной 1914 года моим учителем стал Ландау. Он родился в богатой еврейской семье, где многие поколения мужчин занимались банковским делом. В детстве его счита-

ли вундеркиндом, воспитывали в обстановке изысканной роскоши, и он с раннего возраста привык пользоваться всеми благами жизни, которые можно получить за деньги. Этот миниатюрный человек с совершенно недисциплинированным умом и внешностью херувима — маленькие стоящие торчком усики не нарушали общего впечатления — всегда казался чуточку не на месте в этом грубом мире. Если кто-нибудь спрашивал, как отыскать в Гёттингене его дом, он совершенно спокойно говорил: «Нет ничего проще. Это самый красивый дом в городе». Однажды к нему приехал Литлвуд, увидев которого этот баловень судьбы и математики со свойственной ему непосредственностью воскликнул: «Так, значит, Вы на самом деле существуете! А я-то думал, что это псевдоним, которым Харди подписывает свои работы, когда считает, что они недостаточно хороши для него (*Перевод Ю. Родман*).

2) *Карл Зигель:* Когда я отказался от службы в армии, то был помещён в психиатрическую лечебницу, расположенную рядом с клиникой, владельцем которой был отец Ландау. Таким образом я — ещё робкий мальчик — познакомился с гёттингенским профессором. Если бы не Ландау, я мог бы умереть (*Перевод И. Долгачёва*).

3) *Констанс Рид:* У Ландау не было интереса ни к геометрии, ни к математической физике, и он абсолютно презирал прикладную математику. Однажды Штейнгауз описал Ландау свой докторский экзамен, где его должен был экзаменовать астроном. Было видно, что на Ландау произвело большое впечатление то обстоятельство, что изучающий чистую математику мог успешно ответить на вопросы математика-прикладника. «Что же он спросил вас?» Польщённый интересом профессора к его делам, Штейнгауз объяснил, что астроном спросил его о дифференциальных уравнениях движения трёх небесных тел. «Ах, так он знает это! — воскликнул Ландау. — Так он знает это»…

Таким был Ландау. Коллеги и студенты не любили его высокомерия и боялись его остроумия и безжалостной прямоты. Однако они отдавали дань уважения и были преданы ему за фантастическое трудолюбие и неожиданную беспристрастность в его привязанности к математике. «Большинство из нас подсознательно немного завидует успехам других,— однажды заметил Харди,— но Ландау, казалось, был начисто лишён таких недостойных эмоций».

В то время большинство немецких профессоров были весьма прилично устроены. Ландау же был просто очень богат. С приходом новой власти он остался на родине, так как был привязан к своим владениям, а профессором стал ещё при империи. Ландау продолжал читать лекции, однако, когда он объявил новый курс по математическому анализу, негодующая толпа студентов помешала ему войти в аудиторию. Ландау также покинул Гёттинген. Харди организовал для него серию лекций в Англии. Было так трогательно наблюдать тот восторг, который его охватил, когда он снова оказался у доски, и то сожаление, когда всё окончилось…

23 95 лет тому назад скончался (Париж; операция, которую долго откладывал) рождённый в Ниме французский дифференциальный геометр ***Жан Гастон Дарбу*** (1842–1917), который познал суммы и интегралы и оставил многотомные «Лекции по общей теории поверхностей», «Лекции об ортогональных системах и криволинейных координатах», а также собственные вектор и тензор, квадрику и пучок.

Легенды истории:

Когда до Гёттингена дошли известия о смерти Дарбу, Гильберт немедленно подготовил мемориальную статью. Как только она вышла из печати, разгневанная толпа студентов собралась перед его домом и потребовала, чтобы автор немедленно отрёкся от своей статьи, посвящённой памяти вражеского (ведь продолжалась война) математика, а все копии уничтожил. Гильберт отказался. Более того, он пошёл к ректору университета и, пригрозив отставкой, потребовал официального извинения за поведение студентов, что немедленно и последовало. Статья в печати осталась. Преданность Гильберта своей науке всегда была абсолютной. Никаким предрассудкам — национальным, расовым, половым — не разрешалось играть в ней какой-либо роли (*Констанс Рид, перевод И. Долгачёва*).

Гурману: Дарбу построил бесконечный класс непрерывных функций, не имеющих производной ни в одной из точек (*Алексей Добролюбов*).

25 40 лет тому назад скончался рождённый в Ясле польский популяризатор науки ***Дионисий Гуго Штейнгауз*** (Хуго Штейнхаус, 1887–1972), который знал «О математической строгости», «Чем является и чем не является математика», «Орёл или решка» и оставил «Сто задач» (М., 1959. — 160 с.), «Сто простых, но в то же время трудных задач арифметики» и «Математический калейдоскоп» (М. : Наука, 1981. — 160 с.).

Гурману: Штейнгауз изобрёл прибор для локализации посторонних тел в организме больного с помощью рентгеновских лучей (*Алексей Боголюбов*).

Откровения Штейнгауза:

1) Научная ценность самой красивой шахматной задачи не выдерживает никакого сравнения с самой скромной теоремой элементарной геометрии, и это потому, что игра, называемая геометрией, является единоборством человека с окружающим его миром, и каждая победа в этой игре сохраняет прочное значение для человеческого рода.

2) Красивым может быть только понятное…

3) Математика никогда не бывает оконченной…

4) Педагоги, словно дорожные указатели, должны одной рукой указывать в оставшееся позади прошлое, а другой — в ещё неизведанное будущее.

Тест Штейнгауза:

1. Почему после 1879 года игра «в 15» вышла из моды?

2. Какая игра Эйлера получила практическое применение в агрономии?

3. На какую лошадь выгодно ставить в таких играх, как тотализатор?

■

«Математика в школах України. Позакласна робота»
один випуск на місяць, індекс 49671
Засновник ТОВ «Видавнича група "Основа"»
Свідоцтво серія КВ № 16537-5009Р від 06.04.2010 р.
Головний редактор Ірина Маркова
Редакція може не поділяти точки зору автора. Автори публікацій відповідають за достовірність фактів, цитат, власних назв. Відповідальність за рекламну інформацію несе рекламодавець. Рукописи не рецензуємо і не повертаємо.
Адреса для листування: 61001, м. Харків, вул. Плеханівська, 66, «ВГ "Основа"», редакція журналу «Математика в школах України. Позакласна робота». Тел. (057) 731-96-33
e-mail: math@osnova.com.ua
Якщо не отримуєте журнали, телефонуйте: (057) 731-96-36
З питань замовлення книг:
(057) 731-96-35, pochta2@osnova.com.ua
Рекламний відділ:
(057) 731-96-34, reklama@osnova.com.ua
Адміністратор сайту:
(057) 731-96-33, site@osnova.com.ua
WWW.OSNOVA.COM.UA
Виготовлено в друкарні «Тріада+», м. Харків, вул. Киргизька, 19.
Підписано до друку 02.02.12. Формат 84x108/16. Папір друкарський. Гарнітура «Шкільна». Друк офсетний. Ум. друк. арк. 5,04. Наклад прим.
Зам. 12-02/10-03.