הנושא: **מודלים סמויים וחשיבה מתמטית**

הוכן ע״י: אפרים פיישבין, אוניברסיטת ת״א.

תורגם מתוך: Tacit Models and Mathematical Reasoning, *For the Learning of Mathematics*, 9(2), 1989, pp. 9-14

תרגום: דורית כהן

תקציר: המאמר עוסק במספר דוגמאות של מודלים סמויים, קונקרטיים, אשר משפיעים על המושגים והפעולות המתמטיות של תלמידים. היות שמודלים אלה משפיעים על התלמיד גם בשלב האופרציות הפורמליות, מציע המחבר לשקול נקודת מבט חדשה על התיאוריה ההתפתחותית של פיאז׳ה ולאמץ תהליך מטה-קוגניטיבי כדי להתגבר על הקונפליקטים. במאמר נידון הנושא של מודלים סמויים בהקשר למושג הקבוצה, סימן השוויון, ופעולות החיסור, כפל וחילוק.

מילות מפתח: קוגניציה, פיאז׳ה, מודלים סמויים, מיסקונספציות (תפיסות מוטעות), חשיבה מתמטית, תורת הקבוצות, קבוצה, פעולות חשבון, חיסור, כפל, חילוק, שוויון.

החומר פורסם במסגרת: על״ה 16, אדר ב׳ תשנ״ה, מרץ 1995, עמודים 32–38.

החומר מכיל בנוסף לעמוד הפתיחה: 9 עמודים.

מודלים סמויים וחשיבה מתמטית

המאמר שלפנינו עוסק במספר דוגמאות של מודלים סמויים, קונקרטיים, אשר משפיעים על המושגים והפעולות המתמטיות של תלמידים. היות שמודלים מסוג זה משפיעים על התלמיד גם בשלב האופרציות הפורמליות, יש לשקול נקודת מבט חדשה על התיאוריה ההתפתחותית של פיאז'ה ויש לאמץ תהליך מטה-קוגניטיבי כדי להתגבר על הקונפליקטים.

בספרו הידוע "להיות ולדעת" כותב מיכאל פולאני (Michael Polanyi): "... אדבר על התרומה לחשיבה המדעית של פעולות שהן תוצאה של שיפוט אישי, אשר אינן יכולות לבוא במקום הפעולות של חשיבה גלויה. אנסה להראות שלפעולות סמויות אלו יש תפקיד מכריע לא רק בתגליות, אלא בכל שטחי הידע המדעי" (Polanyi, 1969).

יש להתייחס אל המושג "ידע סמוי" כאל מושג יסודי בחשיבה המדעית. לדעתנו, הפסיכולוגיה הקוגניטיבית אינה שמה די דגש על מושג זה. יש להניח שההשפעה הפיאז'נית והמידע על אודות הגישה ההתפתחותית עיכבו במידה מסויימת את ההתפתחות של מחקר שיטתי בכיוון זה. במאמר זה נתמקד באחד מהאספקטים העיקריים של ידע סמוי, דהיינו סמויים, אך נקדים לזאת הערה.

לפי תפיסתו של Polanyi, התהליך של הענקת משמעות (מתן משמעות מאחדת לאוסף מסויים של נתונים) מבוסס על הפעולה של אינטגרציה שהיא סמויה ביסודה.

"אין תהליך גלוי היכול להוביל לאינטגרציה כזו", כותב Polanyi (עמ' 191, 1969). לדעתנו, אכן אפשר לערוך ניתוח גלוי של פעולות סמויות אלו. למעשה, אפשר להסבירן ולתארן, ובלבד שנשתמש באמצעים מתאימים. זוהי השערה בעלת חשיבות מעשית ממדרגה ראשונה: אם התהליכים הסמויים של האינטגרציה מובילים לפתרון שגוי, יש אפשרות של פעילות מתקנת היכולה לזהות ולנתח את המכניזמים שבמקורם הם חבויים, ולמסור אותם לשליטתו של הפרט. "סמוי" אין פירושו, לדעתנו, מסתורי, אי-רציונלי או לא סביר. פירושו דרך להגדלת התוצר של התהליכים האינטלקטואליים. זו, למעשה, מטרתו הבסיסית של המודל הסמוי: הוא משמש כתחליף למקור מורכב, מופשט ובלתי נגיש. למודלים סמויים תפקיד חיוני בתהליכי האינטגרציה, בהענקת גישה יחידה וישירה למכלול של נתונים. התהליך נעשה פשוט יותר, באופן יחסי, וכל קונפליקט אפשרי נמנע, כאשר המודל כופה את עצמו באופן סמוי על תהליך החשיבה.

פעולות ומושגים מתמטיים הם ביסודם מבנים מופשטים ופורמליים. משמעותם ואחידותם נובעות מאילוצים אקסיומטיים ולא מעדויות נסיוניות.

הבעיה הפסיכולוגית העיקרית היא שאין לנו הכישורים הטבעיים הנחוצים כדי לבצע מניפולציות במושגים ובפעולות שאין להם תמיכה אמפירית. חשיבה המבוססת על פעולות בסמלים הכפופים רק למערכת אילוצים פורמלית, היא למעשה בלתי אפשרית. כתוצאה מכך, אנו בונים מודלים המעניקים לסמלים אלה משמעות התנהגותית, מעשית ומאוחדת. יתר על כן, כפי שהזכרנו קודם, מודלים אלה נוטים להחליף, באופן סמוי, את המקור בתהליך החשיבה שלנו. לעיתים קרובות, מודלים אלה עולים מהמציאות הראשונית, הנסיונית, אשר ממנה התפתחו המושגים המתמטיים המופשטים.

אנו ממשיכים לפנות, באופן סמוי, אל המקורות הראשוניים של המודלים המתמטיים המופשטים הרבה אחרי שהשפעת מקורות אלו על החשיבה היתה אמורה לפוג (כתוצאה מהחינוך המתמטי). למרות שיש כיום עניין הולך וגובר בתפקיד של המודלים בתהליכי החשיבה (במיוחד במדע ובחינוך מדעי), רק מעט נאמר על תפקיד המודלים החשיבתיים בחשיבה המתמטית.

רבות מהסיבות לקשיים, שבהם נתקלים תלמידים בחינוך מדעי ומתמטי, נובעות מהשפעת המודלים האינטואיטיביים הסמויים, אשר משפיעים באופן לא מודע על תהליכי החשיבה. כאשר נתונות שתי מערכות, A ו– B, אנו מתייחסים אל B כאל מודל של A, אם, על בסיס איזומורפיזם מסוים בין A ל– B, תיאור או פתרון המוצגים במונחים של A, אפשר לבטאם במונחים של B ולהיפך. מודלים עשויים להיות אינטואיטיביים או מופשטים, חיצוניים או מנטליים, סמויים או גלויים, אנלוגיים או פרדיגמטיים, ראשוניים או מורכבים.

במאמר זה התייחסנו בעיקר למודלים מנטליים, אינטואיטיביים, סמויים. כלומר, דנו בהצגה של מספר מושגים מתמטיים סמויים אשר התפתחו בשלב הראשוני של הלמידה וממשיכים להשפיע, באופן סמוי, על ההבנה ועל דרכי פתרון בעיות של הלומד. המונח "סמוי" פירושו שהפרט אינו מודע להשפעת המודל, או לפחות להיקפה.

אנו מניחים שהמטרה העיקרית של הפסיכולוגיה של החינוך המדעי היא לזהות מודלים כאלה ולהציע אמצעים אשר יוכלו לעזור לתלמיד לשלוט על השפעתם. להלן נביא מספר דוגמאות לכך.

מושג הקבוצה

Linchevski & Vinner (1988) ניתחו מספר מיסקונספציות (דעות מוטעות) שנתגלו אצל מורי בית ספר יסודי בנוגע למושג המתמטי של קבוצה. הם זיהו את המיסקונספציות האלה:

1. הנבדקים חשבו שלאיברי הקבוצה חייבות להיות תכונות מפורשות משותפות.
2. קבוצה חייבת להכיל יותר מאיבר אחד. הרעיון של קבוצה ריקה או של קבוצה בעלת איבר יחיד נדחה על–ידי הנבדקים.
3. הנבדקים התייחסו לאיבר שנרשם מספר פעמים בקבוצה כאל מספר איברים שונה.
4. איבר של קבוצה אינו יכול להיות שייך לקבוצה אחרת.
5. נוסיף מיסקונספציה נפוצה, ששתי קבוצות הן זהות אם הן מכילות מספר שווה של איברים.

אפשר למצוא הסבר פשוט לכל המיסקונספציות הללו: אם המודל המופעל בזמן שעוסקים בקבוצה הוא זה של אוסף עצמים, כל המיסקונספציות הנ"ל הן צפויות. אוסף ריק, או אוסף המכיל עצם אחד הם כמובן חסרי משמעות. אנו מעולם לא יוצרים מחלקות של עצמים שאין ביניהם קשר רעיוני (כמו למשל: שמך, זוג נעלים ישנות, המספר הדמיוני i). בכל מצב אמיתי שני עצמים זהים, אשר מתקיימים בנפרד (לדוגמה, 2 שקלים), נספרים בנפרד. עצם אחד אינו יכול להיות בשני כלים שונים באותו זמן. שני אוספים של עצמים הם שווים, אם הם מכילים אותו מספר של איברים.

איננו טוענים שהתלמיד מזהה באופן מפורש ומודע את המושג המתמטי של קבוצה עם המושג של אוסף ממשי של עצמים. אנו טוענים, שכאשר עוסקים במושג המתמטי של קבוצה, יש לנו במחשבה, באופן סמוי אך משמעותי, הרעיון של אוסף עצמים עם כל המשתמע ממנו. אין שום קונפליקט בכך. המודל האינטואיטיבי משפיע מאחורי הקלעים על המשמעות, על השימוש, ועל התכונות של המושג הפורמלי.

נראה, כי המודלים האינטואיטיביים חזקים יותר מהמודלים הפורמליים. התלמיד שוכח לחלוטין את התכונות הפורמליות ונוטה לזכור את אלה שנכפו על–ידי המודל. נראה שההסבר פשוט מאוד: התכונות שנכפות על–ידי המודל הקונקרטי הן מבנה עקבי, בעוד שלפחות במבט ראשון נראה שהתכונות הפורמליות הן אוסף שרירותי. קבוצת התכונות הפורמליות יכולה להיראות כאוסף הגיוני רק בתחום של מושגים מתמטיים ברורים ועקביים.

לדעתנו, ההשפעה של מודלים סמויים, בסיסיים ואינטואיטיביים אלו על מהלך החשיבה המתמטית, חשיבותה רבה יותר מאשר מקובל לחשוב. אנו מניחים, כי השפעה זו אינה מוגבלת לשלבים הקדם–פורמליים של ההתפתחות האינטלקטואלית. טענתנו היא שאפילו לאחר שהפרט כבר מסוגל לחשיבה פורמלית, המודלים האינטואיטיביים הבסיסיים ממשיכים להשפיע על דרכי חשיבתו. היחסים בין תהליכי החשיבה הפורמליים והקונקרטיים הרבה יותר מורכבים ממה שפיאז'ה סבר.

הרעיון של השפעה סמויה של מודלים אינטואיטיביים וראשוניים על תהליכי החשיבה הפורמליים לא משכו את תשומת לבו של פיאז'ה. למעשה, תהליכי עיבוד המידע אינם נשלטים רק על-ידי המבנה הלוגי שלנו, כי אם גם על-ידי עולם שלם של מודלים אינטואיטיביים, הפועלים באופן סמוי ומביאים עמם את מגבלותיהם.

סימן השוויון

נתייחס לדוגמה שניה. במאמר שפורסם בשנת 1977, מציין גינזבורג כי תלמידי בית ספר יסודי מפרשים את סימן החיבור ואת סימן השוויון במונחי פעולות שיש לבצע (Ginsburg, 1977). כתוצאה מזה הם יתנגדו לתבנית פסוק כמו $4 + 3 = \square$ ויחשבו שהתבנית נרשמה הפוך. גינזבורג מצא גם שהתלמידים מתנגדים לפסוק כמו $3 = 3$ כי הם חושבים שהוא חסר משמעות, בהיותו מנוגד לרעיון שסימן השוויון מבטא תהליך המביא תוצאה מסויימת בעקבות שילוב מספר מרכיבים.

Erlwanger & Nichols (1976) מצאו את אותה גישה אצל תלמידי כיתות א-ו. את הפסוק $3=3$ הם מפרשים כ: $3 = 3 - 6$ או $3 = 4 - 7$. בדומה, פסוק כמו $6 + 3 = 5 + 4$ מעלה את הבעיה הבאה: "לאחר סימן "=" יש לרשום את התשובה, זה הסוף, לא צריך להופיע תרגיל נוסף" (אצל Kieran, 1981, עמ' 319). המסקנה היא שתלמידים אינם נוטים לפרש את סימן השוויון במונחי שקילות, אלא בעזרת מודל של קלט-פלט חסר תכונות הסימטריה והרפלקסיביות. לפי מודל כזה, בצד שמאל של המשוואה מופיעים המרכיבים הראשוניים, ואילו בצד ימין מופיעה התוצאה. הדבר דומה להכנת עוגה: יש לערבב קמח, סוכר, חלב, ביצים וכו' (כמה מרכיבים) ולבסוף מתקבלת תוצאה: עוגה אחת. Lasley Booth (1988) המתייחסת לנסיונות התלמידים לפשט ביטוי כמו $2a + 5b$, כותבת: באריתמטיקה מפרשים סימנים כמו + ו = כפעולות שיש לבצע, כך ש + אומר שיש לבצע את פעולות החיבור ו = אומר שיש לרשום את התוצאה. (Booth, 1988, עמ' 14). כתוצאה מזה יהיו תלמידים שירשמו: $2a + 5b = 7ab$ או $a + b = ab$, אבל לא יהיו תלמידים שירשמו $7ab = 2a + 5b$ או $ab = a + b$. תוצאות דומות נמצאו אצל תלמידים גילאי 12-14 (Kieran, 1981) ואפילו אצל בני 17 (Wagner, 1977).

אלה אינן טעויות מקריות. הן הופכות מובנות אם תופסים את המשמעות המקורית, אך הנסתרת, שהתלמיד מייחס לסימן השוויון: הסימן מציין את הטרנספורמציה של המרכיבים הראשוניים לתוצר סופי יחיד.

אך אשליה היא, שבמשך הזמן, בכיתות הגבוהות יותר, התלמידים ילמדו שהמשמעות של סימן השוויון היא שקילות ולא פעולה שיש לבצע. כאשר מבקשים מתלמידי תיכון או מסטודנטים למצוא שבר עשרוני השווה ל- $\frac{1}{3}$, הם רושמים ללא כל בעיה כי $\frac{1}{3} = 0.333\ldots$, אבל מצד שני הם יתקשו לקבל ש $0.333\ldots$ שווה ל- $\frac{1}{3}$. הם יטענו כי 0.333 שואף ל- $\frac{1}{3}$. אפשר להסיק כי סימן השוויון אינו מייצג אצל תלמידים אלה יחס סימטרי. באופן אינטואיטיבי אפשר לקבל את הקשר $\frac{1}{3} = 0.333\ldots$, בעוד שאת הקשר $0.333\ldots = \frac{1}{3}$ קשה להבין, שכן בצד שמאל של המשוואה אי אפשר לרשום את כל המרכיבים (אינסוף) הנחוצים לקבלת התוצאה. האסימטריה נובעת ממודל הקלט-פלט האסימטרי הסמוי.

פעולת החיסור

נתייחס לדוגמה שלישית, שהופיעה לאחרונה בספרות, הלא היא פעולת החיסור. כיום יודעים שתלמידים עושים שגיאות עקביות שונות בפתירת תרגילי חיסור. חוקרים זיהו רבות מהשגיאות השיטתיות האלה. לא אכנס לפרטים, אך ברצוני לציין כי ייתכן שלפחות חלקן נובע מהתפקיד הראשוני של פעולת החיסור. אם יש לך מיכל עם A עצמים (למשל גולות) ואתה רוצה להוציא B גולות מהמיכל (זה המודל הראשוני של החיסור), אתה יכול לבצע זאת רק כאשר A < B. אם A < B התלמיד עשוי להפוך את התרגיל ל A – B. לדוגמה (Resnick, 1983, עמ' 73):

$$\begin{array}{r} 326 \\ - \underline{117} \\ 211 \end{array}$$

אפשרות נוספת, הנובעת מהמודל הראשוני, היא שכאשר A > B לוקחים כמה שאפשר ואז המיכל נותר ריק. לדוגמה:

$$\begin{array}{r} 542 \\ - \underline{389} \\ 200 \end{array}$$

(Resnick, שם)

אם התלמיד כבר למד על האפשרות "ללוות" , מצבים שונים עשויים להתרחש. הקושי הטיפוסי ביותר הוא במקרה שעל התלמיד "ללוות" מ- 0. אם A < B התלמיד לווה מהמיכל הבא, אבל אם המיכל ריק הוא עשוי לרשום 0, או ללוות מהמספר התחתון, או לדלג מעל המיכל הריק ולנסות ללוות מהמיכל השלישי.

$$\begin{array}{r} 602 \\ - \underline{327} \\ 225 \end{array}$$ – הלוואה מעבר לאפס מהמספר התחתון

$$\begin{array}{r} 702 \\ - \underline{368} \\ 454 \end{array}$$ – הלוואה מהתחתון במקום מ- 0

(ראה מיסקונספציות בחיסור גם אצל: Maurer, 1987 ; Resnick, 1982).

חלוקת קטע וחוט מתכת

נתייחס לשתי שאלות מהמחקר של פישביין, אוסטר, סתווי ותירוש: Fischbein, Oster, Stavy and Tirosh, 1988:

1. "נתון קטע AB. נחלק אותו לשני חלקים שווים. נחלק כל אחד משני החצאים שוב לשני חלקים שווים. באופן זה נמשיך לחלק את הקטעים שנוצרו שוב ושוב. האם תהליך זה של החלוקה יסתיים אי פעם?"
2. "נתון חוט מתכת. נחלק אותו לשני חלקים שווים ..." המשך השאלה הוא כמו בשאלה 1.

למעשה, השאלות שונות באופן בסיסי. בבעיה הראשונה נתון קטע גיאומטרי, ולא קטע העשוי חומר ועל כן התהליך יכול להימשך עד אינסוף. בבעיה השניה נתון חוט ממשי, העשוי מנחושת. במקרה זה התהליך יסתיים ברגע שנגיע לאטומי הנחושת.

ברור שאפשר להסביר את שתי הבעיות באופן שונה. אפשר להתייחס לקטע AB כאל קו דק המשורטט בדיו. ייתכן שאטומי הנחושת לא יהיו השלב האחרון בחלוקה, היות שהם מורכבים ממספר אלמנטים (אלקטרוניים, פרוטונים ואחרים). באופן מחשבתי אפשר לעסוק באפשרות שאלמנטים אלה הם בני חלוקה.

התשובה הצפויה הנכונה לשתי שאלות אלה היא: במקרה של הקטע AB, תהליך החלוקה הוא אינסופי; במקרה של חלוקת חוט נחושת, החלוקה תסתיים ברגע שנגיע לשלב של אטומיים (לאחר

מכן האטומים יאבדו את זהותם). השערתנו הייתה שהתלמידים יבחרו בפתרון אחד שיהפוך למודל לשתי השאלות. מהתשובות שאספנו נראה שהשערתנו אושרה. נצטט מספר דוגמאות:

גיא (כיתה י״ב). לגבי הקטע: ״התהליך אינסופי כי תמיד אפשר לחלק לשני חלקים, משום שרצף המספרים בקטע הוא אינסופי״. לגבי חוט המתכת: ״טכנית, התהליך מוגבל, אבל תיאורטית תמיד נשאר משהו ולכן התהליך אינסופי״.

עודד (כיתה י״א). לגבי הקטע: ״התהליך אינסופי כי קטע גיאומטרי מורכב מנקודות״. לגבי חוט המתכת: ״התהליך אינסופי וזה בדיוק כמו עם הקטע״.

שרה (כיתה י״א). לגבי הקטע: ״התהליך יסתיים כשנגיע לכל הנקודות ולא יהיה אפשר להמשיך לחלק״. לגבי חוט המתכת: ״התהליך סופי וזה בדיוק כמו עם הקטע – אותו עקרון. זה יקרה כשנגיע לחלקים הקטנים ביותר, האטומים״.

גלי (כיתה ח׳). לגבי הקטע: ״זה ייעשה קטן מאוד ולבסוף לא נוכל להמשיך לחלק ולכן התהליך יסתיים״. לגבי חוט המתכת: ״כן, התהליך יסתיים כי לא נוכל להמשיך לחלק״.
(Fischbein et al 1988).

דוגמאות אלה נותנות מושג על פעולת המודל הסמוי. התלמידים פגשו במושג הגיאומטרי ובחומר ממשי – נחושת – בשני הקשרים שונים לחלוטין. הצורה הזהה של התהליך (החלוקה), יצרה מודל מנטלי יחיד שהותאם לשני המצבים. בשביל תלמידים אחדים המושג הפורמלי היה הדומיננטי, בעוד שהגירסה החומרית שבתה את דמיונם של אחרים. רוב הנבדקים היו עקביים בבחירתם, הם לא חשו כל קושי בשימוש במודל אחד בשביל שני מצבים השונים באופן מהותי. המודל שולט על ההבנה, אך לא באופן מודע, כי אם ״מאחורי הקלעים״, וכופה את מבנהו כמערכת עקבית של אילוצים החלים על הנתונים.

המעניין מבחינה מעשית בדוגמה זאת הוא שהגירסה המופשטת (האפשרות לחלוקה אינסופית של קטע) ולא המציאות הקונקרטית משחקת את התפקיד של המודל הסמוי, בניגוד למה שמקובל לחשוב. למעשה, הקטע הגיאומטרי מייצג את מה שאנו קוראים מושג ״צורני״ (Pisural concept), ישות המופיעה באופן סובייקטיבי כישות מופשטת, טהורה ומושלמת – כמו כל מושג – ובו בזמן אפשר להציגה ולהפעילה באופן אינטואיטיבי כאילו הייתה עצם ממשי. אפשר לחלק את הקטע כי הוא אמיתי באופן סובייקטיבי (אי אפשר לחלק מושג) ואפשר לחלקו אינסוף פעמים כי יש לו מהות אידיאלית, למרות הכל. מהות כפולה זו של המושגים הגיאומטריים מסבירה את תפקידם היסודי בבניית מודלים מתמטיים למצבים אמיתיים.

חוט הנחושת מפסיק להיות גביש של אטומים – שהם סוף תהליך החלוקה, והופך להיות קטע שאפשר לחלקו. המודל המנטלי הנרכש באופן סמוי הופך להיות באופן ספונטני תחליף למקור, המרחיק את אותן תכונות שלא יתאימו לו וחושף את תכונותיו לניתוח מנטלי.

כפל וחילוק

לסיום, דוגמה אשר נדונה לעיתים קרובות בשנים האחרונות. היא מתייחסת לפעולות הכפל והחילוק. הניחו שהמודל הראשוני בשביל כפל הוא חיבור חוזר, ובשביל חילוק אפשר להתייחס לשני מודלים: חילוק לחלקים וחילוק המבטא חילוק להכלה (מדידה) (פישביין ואחרים, 1985).

נתמקד בפעולות הכפל. המודל של חיבור חוזר (איחוד של שתיים או יותר קבוצות זרות ושוות של עצמים) כופה מספר אילוצים. ראשית, יש להבדיל בין האופרנד (מספר האיברים בקבוצה) לבין האופרטור (מספר הקבוצות השוות). האופרנד יכול להיות כל מספר חיובי, אבל האופרטור חייב להיות מספר טבעי (שלם חיובי). הגיוני לומר ״3 פעמים 0.65״, אבל ל– ״0.65 פעמים 3״ אין משמעות אינטואיטיבית. האילוץ השני של מודל החיבור החוזר הוא העיקרון ש– ״כפל מגדיל״. נמצא שאפילו תלמידי בית ספר תיכון וסטודנטים נתקלים בקשיים בעת שהם מתבקשים לפתור בעיות כפל פשוטות אשר סותרות את האילוצים שמנינו.

נדון בשתי הבעיות.
"מ- 1 ק"ג של חיטה מקבלים 0.75 ק"ג קמח. כמה קמח תקבל מ- 15 ק"ג חיטה?"
"1 ק"ג דטרגנט משמש להכנת 15 ק"ג סבון. כמה סבון אפשר להכין מ- 0.75 ק"ג דטרגנט?"

בעיות אלה ניתנו לתלמידי כיתות ה, ז ו- ט. הם התבקשו רק לרשום את התבנית המתאימה לפתרון הבעיה, אך לא לבצע את החישוב. אחוזי התשובות הנכונות על התרגיל הראשון היו כדלקמן: 79% (כיתה ה'), 74% (כיתה ז), 76% (כיתה ט). אחוזי התשובות הנכונות על השאלה השנייה, לאותן כיתות היו בהתאמה: 27%, 18%, 35%. שתי הבעיות נפתרות באותו אופן 0.75 × 15, אבל במקרה הראשון האופרטור הוא מספר טבעי, בעוד שבמקרה השני האופרטור הוא שבר עשרוני (פישביין ואחרים, 1985, עמ' 9, 10). הממצא המפתיע ביותר הוא שהאפקט לא מופיע רק אצל תלמידים צעירים, כי אם גם אצל תלמידים מבוגרים יותר אשר לבטח רכשו כבר נסיון רב בכפל של שברים עשרוניים. לתלמידים אלו לא היה מושג שקשייהם נוצרו מהמודל של החיבור החוזר, המשפיע באופן סמוי, "מאחורי הקלעים", על דרכי פתרונם (ראה גם .Bell et al, 1987 ; Harel, Post & Behr, 1988 ; Mangan, 1986 ; Verschaffel, De Corte & Van Coillie, 1988 ; Tirosh, Graeber & Glover, 1986).

Verschaffel, De Corte & Van Coillie, (1988) הראו שבתחום פתרון בעיות, השפעת השבר העשרוני ככופל אינה מופיעה. זה מרכיב המוסיף לתקפות התיאוריה. בבעיה שבה התלמיד מתבקש לחשב שטח של מלבן, לנוכחות השבר העשרוני (אפילו בשביל שני ממדי המלבן) אין השפעה על התשובה הנכונה. במקרה זה, על התלמיד רק להשתמש בנוסחה וההבדל בין האופרטור לאופרנד אינו מפריע. בדוגמה לעיל, מודל שנלמד, אשר משתמשים בו בהתחלה מסיבות דידקטיות בצורה גלויה, הופך מאוחר יותר אצל תלמידים בוגרים יותר, למודל סמוי, שמתעלמים לגמרי מנוכחותו ומהשפעתו.

המאפיינים של המודלים המנטליים הסמויים

ננסה לסכם את המאפיינים הנפוצים של המודלים המנטליים הסמויים, האינטואיטיביים.
(1) מאפיין בסיסי של מודל מנטלי הוא היותו בעל מבנה. מודל, כמו תיאוריה, אינו חוק מבודד, אלא הבנה משמעותית של תופעה או של מושג. בדרך כלל, המודל פירושו: קבוצת חוקים, אילוצים. לעיתים קרובות קורה שלאדם מגוון של מיסקונספציות הקשורות לתופעה מסויימת. ייתכן שמיסקונספציות אלה נראות כאילו אין ביניהן כל קשר, אבל לאחר ניתוח מתאים ייתכן שכולם נכפו כל ידי אותו מודל!

(2) המאפיין השני של מודל סמוי הוא טבעו הקונקרטי והמעשי, אפילו כאשר למודל מבנה מופשט, כמו בדוגמת הקטע שהוזכרה לעיל. דוגמאות נוספות הן האמונה שכפל משמעו צירוף מספר קבוצות בעלות אותו גודל, שקבוצה היא אוסף של איברים, שסימן השוויון מייצג תהליך של קלט פלט וכו'.

(3) מאפיין שלישי של סוג זה של מודל הוא פשטותו, בסיסיותו, ואולי אף אופיו הטריוויאלי. תחליפים סמויים אלה רוכשים את תפקידם המועדף בתהליך החשיבה רק בגלל היותם פשוטים, חסכוניים ומיוצגים באופן ישיר במושגי פעילות.

(4) למרות היותם כה פשוטים, הם בדרך כלל מסוגלים לכפות מספר אילוצים. פעולת החילוק מיוצגת בהתחלה על-ידי חילוק אוסף של עצמים למספר תתי-אוספים. זוהי פעולה קונקרטית ופשוטה, אבל היא מכתיבה מספר מגבלות: על המחלק להיות מספר טבעי, הקטן מהמחולק, וגם המנה חייבת להיות קטנה מהמחולק. לבעיה אשר בה המספרים אינם עונים על דרישות אלה אין פתרון אינטואיטיבי ישיר (.Fischbein et al, 1985).

(5) מודל מנטלי, כמו כל סוג אחר של מודל ממשי, הוא ישות אוטונומית, בעלת חוקיות משלה, ולא ישות שהתנהגותה תלויה באילוצים חיצוניים (ראה אוטונומיות של מודלים אצל Williams, Hollan & Stevens, 1983). חשוב להדגיש אספקט זה כדי להבין כיצד מודל שיש לו חוקיות ונתונים משלו, עלול לכפות אותם על המצב המקורי, ואף להוביל למסקנות שאינן יכולות להיחשב כמדעיות.

(6) המאפיין השישי והיסודי של סוג זה של מודלים הוא עמידתו, היכולת שלו להישרד הרבה לאחר שכבר אין תיאום עם הידע הפורמלי שנרכש על-ידי הפרט. כפי שהראנו, תלמידי בית ספר תיכון וסטודנטים עושים טעויות מאותם סוגים ומתמידים באותן מיסקונספציות כמו תלמידים צעירים יותר.

כיצד אפשר להסביר עמידות זו?
ראשית, קשור הדבר לדרך חשיבתנו. התפקיד של המבנים הפורמליים, המושגיים, הוא ביסודו לשלוט ולא להמציא. אנו ממציאים ומבינים, למעשה, על-ידי מעבר לייצוגים קונקרטיים אשר מתווכחים בין המשמעות המופשטת לבין המהלך של פעילות קונקרטית מסוימת. זאת בבירור טענה טריוויאלית. מה שאינו טריוואלי הוא שלעיתים קרובות התהליך הקונקרטי אינו רק מעורר את תהליך החשיבה אלא למעשה הוא שולט על מהלכו.

אפשר להסביר את עמידותם של מודלים סמויים מסויימים גם בחשיבותם המרכזית בתהליך החשיבה. הם משפיעים ולעיתים קרובות אף שולטים בתהליך החשיבה. שנית, פעילות המודלים היא בדרך כלל הליך סמוי. בשל כך התחליפים הקונקרטיים הראשוניים הללו חומקים מכל שליטה. הפרט, בהיותו בלתי מודע להשפעתם, אינו מנסה להתערב כדי לשנותם או להחליפם. שלישית, אפשר להניח שמודלים ראשוניים אלה עמידים כל כך בזכות תכונותיהם: פשטות, קונקרטיות, מיידיות. אפשר להניח כי תכונות אלה מתאימות באופן כללי לנטייה הבסיסית של תהליך חשיבתנו. כל ההערות האלה אינן מתייחסות רק לבעיות יסודיות תיאורטיות (כפי שהוזכר לעיל), אלא גם לבעיות דידקטיות סבוכות.

דומה שתהליך החשיבה ממשיך להיות מושפע, במידה רבה, מייצוגים קונקרטיים "מאחורי הקלעים" אפילו במשך התקופה הנקראת תקופת האופרציות הפורמליות. התהליך של שחרור הפעילות החשיבתית מאילוצים קונקרטיים אינו ספונטני. התהליך חייב להתנהל באופן שיטתי ולהיות מנוהל באמצעים חינוכיים מתאימים. יש לבצע ניסויים רבים במסגרת פיתוח שיטות שיאפשרו לתלמידים להיות מודעים להשפעת אילוציהם האינטואיטיביים הסמויים, מחד גיסא, ומאידך גיסא יש לעזור לתלמידים לבנות מערכות מושגיות יעילות אשר ישלטו על השפעתם של מודלים אלה. זאת בעיה קשה מאוד ומורכבת וקשורה קשר הדוק למטה-קוגניציה. אמליץ על ביצוע התהליך במספר שלבים.

- ראשית, יש לנתח את הטעויות העקביות המופיעות בפתרונות התלמידים לבעיות מסויימות.
- הטעויות עשויות להצביע על אילוצים הקשורים למודל סמוי מסוים. תוך כדי דיון בכיתה אפשר לעורר את מודעות התלמידים למודלים שלהם ולקונפליקט הפוטנציאלי שנוצר בין אילוצי המודל לבין הקביעות הפורמליות שעולות מהגדרות מתמטיות וממשפטים.
  התלמידים עשויים להסיק מהמודל הסמוי המשוער את האילוצים שנכפים על ידיו ולהשוותם לאלה הנובעים מההגדרות ומהמשפטים.
- כאשר התלמידים כבר מודעים לקונפליקט, יש לבקשם לפתור בעיות הקשורות לאותו תחום תוכן, אך מוצגות בהקשרים שונים ומעורבות באספקטים חדשים (בעניין דיון כיתתי כשיטה מטה-קוגניטיבית ראה גם אצל Schoenfeld , 1987, עמ' 201–209).

לדוגמה, נניח שהתלמידים התבקשו להשוות את מספר הנקודות בשני קטעים בעלי אורך שונה. חלק מהתלמידים טוענים ששני הקטעים מכילים מספר שווה של נקודות (שתי הקבוצות

האינסופיות), בעוד שאחרים טוענים שהקטע הארוך מכיל יותר נקודות בשל היותו ארוך יותר. המורה מסביר שאי אפשר להשוות שתי קבוצות אינסופיות בשיטות הרגילות, כי אנו לא מצוידים באופן טבעי לעסוק בקבוצות אינסופיות. הסכימות המנטליות שלנו מותאמות לקבוצות סופיות של עצמים. כאשר טוענים שהקטע הארוך מכיל יותר נקודות, אנו למעשה מושפעים מהמודל הציורי של נקודה (כתם דיו קטן). מודל זה פועל באופן סמוי ולמעשה אי אפשר להיפטר ממנו. אבל הנקודה היא בעצם מושג טהור. היא מייצגת מיקום, אבל אין לה ממדים. כאשר אנו עוסקים בטענות על אודות נקודות, עלינו להשתמש בחוקים פורמליים טהורים. מצד שני, בהצהרה ש"שתי הקבוצות הן אינסופיות" אנו פשוט מתחמקים מהבעיה שכן, שוב, ליחסים "יותר", "פחות", ו"שווה" משמעות שונה בתחום הקבוצות האינסופיות מזו שיש להן בתחום הקבוצות הסופיות – אשר אליהן אנו מותאמים באופן טבעי. לאור זאת יש להשתמש באמצעים אחרים, פורמליים לחלוטין, כדי לעסוק באינסוף.

לאחר מכן, יש לבקש מהתלמידים להשוות קבוצה של מספרים טבעיים עם קבוצת מספר זוגיים חיוביים. אם תלמיד יאמר "יש להיזהר, אנו שוב עוסקים באינסוף, התשובה אינה טריוואלית", הוא למד משהו מהדיון הקודם, ללא כל ספק.

לבסוף, אם יבקשו מהתלמידים להשוות את קבוצת המספרים הרציונליים עם קבוצת המספרים האי-רציונליים הם ילמדו ששתי קבוצות אינסופיות עשויות להיות לא שוות בעוצמתן. אף על פי שהנושא נשאר זהה – והוא נושא האינסוף – ההקשר וההיבט הספציפי עשויים להשתנות (ראה Tirosh, 1985).

אם יתרחש דיון כזה בכיתה לעיתים די קרובות, אפשר לקוות שיושגו מספר הישגים דידקטיים.

- התלמידים ילמדו להיות זהירים יותר בפתרונותיהם הראשוניים ובפרשנותם הראשונית. הם ילמדו לנתח בזהירות את הכללותיהם ומסקנותיהם לאור אילוצים פורמליים. אין ללמדם שהמודלים האינטואיטיביים שגויים תמיד, אך יש להבהיר להם שהאופנים שהם מיישמים אותם בנסיבות מסויימות עלולים לא להיות מתאימים. להבחנות כאלה דרושים כישורים אינטלקטואליים אשר רק תרגול יכול לפתח.
- שנית, התלמידים עשויים לקלוט מידע חיוני בנוגע למודלים אינטואיטיביים ספציפיים – שכבר זוהו – אשר עשויים להפריע בתהליך החשיבה ולעוותו. אנו מניחים שחשוב מאוד שתלמידים ילמדו לזהות את המצבים המעשיים שבהם המודלים האינטואיטיביים שלהם באים לידי ביטוי. כתוצאה מזה, התלמידים ילמדו, דרך דוגמאות מסויימות, על נטייתם של מודלים ראשוניים אלו להישרד אפילו לאחר שהם למדו את ההגדרות והמשפטים הנכונים.
- שלישית, יש לקוות שכתוצאה מהשפעת התרגול המטה-קוגניטיבי הזה, התלמידים יפתחו הרגלים כלליים ומיומנויות כדי לנתח את הפעולות והמושגים שהם עוסקים בהם כאשר הם מנסים לזהות מודל אינטואיטיבי, סמוי, הנקרה בדרכם.
- Gavelek & Raphael כותבים, בהתייחסם לבעיית ההעברה: "...מושג המטה-קוגניציה מכוון לבעיה הנצחית של ההוראה – הבעיה של ההעברה או של הכללה של מה שלמדו. סביר שבמידה שהפרט יודע מה שהוא יודע ואיך הוא יודע, ידע מרמה גבוהה כזאת יש לנצלו לתחומים מתחומים שונים. (הנ"ל, 1985, כרך 2, עמ' 129).

במילים אחרות, אם אנשים יודעים מה הם יודעים וכיצד הם יודעים זאת, למשל, בנוגע למושג מתמטי מסוים, הרי שהם ירכשו ידע כללי יותר שאפשר להשתמש בו בלמידת מושגים מתמטיים אחרים. אותו דבר שאפשר לומר על המיומנויות המטה-קוגניטיביות עצמן. אפשר להניח שהתלמידים ירכשו מיומנויות בסיסיות כלליות לניתוח מקורות המכשולים האינטואיטיביים שלהם, ובראש ובראשונה, יבינו את השפעת מודלים סמויים על החשיבה המתמטית שלהם. אין ספק שזה עניין של פסיכולוגיה. אבל, האם אין זה מרכיב חשוב ביותר ורב-עוצמה של כל פעילות מתמטית אמיתית?

רשימת ספרות

Behr, M., Erwanger, S. and E. Nichols [1976]. *How Children View Equality Sentences.* PMDC Technical Report NO. 3, Florida State University. ERIC Document, Reporoduction Service No. ED144802.

Bell, A., L. Grimison, B. Greer and C. Mangan [1987]. *Multiplicative Word Problems. A Classification Scheme and Its Validation* (Internal report). Nottingham, Shell Centre for Mathematical Education, University of Nottingham, and Belfast: Department of Psychology, Queens University.

Booth, R. L. [1988]. Children's Difficulties in Beginning Algebra. In A. E. Coxford and A. P. Shulte (eds.), *The Ideas of Algebra, K-12.* 1988 Yearbook. The National Council of Teachers of Mathematics, Virginia, U.S.A. (20-23).

Fischbein, E., M. Deri, M.S. Nello and M.S. Marino [1985]. The Role of Implicit Models in Solving Verbal Problems in Multiplication and Division. *Journal of Research in Mathematics Education* 16, No. 1 (January).

Fischbein, E., A. Oster, R. Stavy and D. Tirosh [1988]. Reasearch in Progress.

Gavelek, J. R. and T.E. Raphael [1985]. Metacognition, Instruction and the Role of Questioning Activities. In D. L. Forrest-Pressley, G. E. MacKinnon and T. Waller (eds.), *Metacognition, Cognition and Human Per formance. Vol. 2: Instructional Practices.*

Ginsburg, H. [1977]. *Children's arthmetic.* Van Nostrand, New York.

Harel, G., T.H. Post, M. Behr [1988]. *On the Textual and the Semantic Structure of Mapping Rule and Multiplication Compare Problems. Proceeedings of the Twelfth International Conference, Psychology of Mathematics Education.* vol. II. Vezprem, Hungary

Kieran, C. [1981]. Concepts Associated with the Equality Symbol. *Educational Studies in Mathematics* 12:317-326

Linchevski, L. and Sh. Vinner [1988]. the Naive Concept of Sets in Elementary Teachers. *Proceeding of the Twelfth International Conference, Psychology of Mathematics Education,* Vol. II, pp. 471-478. Vezprem, Hungary.