הנושא: קשרי הגומלין בין המרכיבים הפורמאליים, האלגוריתמיים והאינטואיטיביים של פעילות מתמטית

הוכן ע״י: אפריים פישביין (ז״ל).
תרגום מאנגלית: מיכל רהט.

תקציר: המאמר עוסק בניתוח קשרי הגומלין בין המרכיבים הפורמאליים, האלגוריתמיים והאינטואיטיביים של הפעילות המתמטית האנושית.
המחבר מביא דוגמאות מתחומים שונים במתמטיקה להדגמת קשרי גומלין אלו.

מילות מפתח: מספרים שלמים, מספרים רציונליים, שבר פשוט, שבר עשרוני, פעולות חשבון, חיבור, חיסור, כפל, חילוק, חוק הפילוג, בעיות מילוליות, תורת הקבוצות, סדרה, סדרות, גבול של סדרה, סכום סדרה הנדסית, יחס, הנדסה, גיאומטריה, גיאומטרית המישור, הנדסת המישור, מושגי יסוד, זווית, מצולע, מעגל, הוראת המתמטיקה, הבנה, חשיבה מתמטית, שגיאות, תפיסות מוטעות, מודלים אינטואיטיביים, אינטואציה, אלגוריתמים, אלגוריתם, היסטוריה של המתמטיקה, מחקר.

החומר פורסם במסגרת: על״ה 32, סיוון תשס״ד - יוני 2004, עמודים 5-13.

החומר מכיל בנוסף לעמוד הפתיחה: 9 עמודים.

קשרי הגומלין בין המרכיבים הפורמאליים, האלגוריתמיים והאינטואיטיביים של פעילות מתמטית

אפרים פישביין*

1. הקדמה

ההתייחסות אל המתמטיקה – עליה להיעשות משתי נקודות מבט:

א. מתמטיקה כגוף ידע (body of knowledge) פורמאלי, דדוקטיבי ומדויק (rigorous) – כפי שהוא בא לידי ביטוי במחקרים ובספרי הלימוד של המתמטיקה הגבוהה.

ב. מתמטיקה כפעילות אנושית.

העובדה, שהאידיאל של כל מתמטיקאי הוא לקיים גוף ידע עקבי מאוד ובעל מבנה לוגי, אינה שוללת את הצורך להתייחס למתמטיקה גם כאל תהליך יצירתי: למעשה, אנו מעוניינים שתלמידים יבינו, שמתמטיקה היא בעיקרה פעילות אנושית, שהמתמטיקה הומצאה על-ידי בני אנוש. תהליך היצירה במתמטיקה טומן בחובו רגעים של הארה, הססנות, קבלה והפרכה; לעיתים דורות של מאמצים, תיקונים מוצלחים, ושכלולים. אנו רוצים שהתלמידים ילמדו לא רק את הסדר הפורמאלי והדדוקטיבי של הטענות המובילות למשפט, אלא שיוכלו גם לייצר בעצמם טענות מתמטיות, לבנות הוכחה מתאימה, ולהעריך את תקפותן של טענות מתמטיות לא רק באופן פורמאלי אלא גם באופן אינטואיטיבי.

* על-פי תרגום מאנגלית של:
Fischbein E. (1993), The Interaction between the Formal, the Algorithmic and the Intuitive Components in a Mathematical Activity. In: Biehler R. W., Scholz R. W., Sträßer R., Winkelmann B., (Eds.), *Didactics of Mathematics as a scientific Discipline. pp. 231-245,* Kluwer Academic Publishers, Dordrecht.
תרגום מאנגלית: מיכל רהט, מכללת אוהלו, קצרין
rahato@zahav.net.il
באישורה האדיב של ההוצאה:
Kluwer Academic, Publishers, Dordrecht.

במסה המיוחדת במינה 'מהי מתמטיקה?' כתבו קורנט ורובינס:

> *המתמטיקה כביטוי לרוח האנושית משקפת את הרצון המעשי, ההרהור ההגיוני ואת השאיפה לשלמות אסתטית. המרכיבים היסודיים שלה הם הגיון ואינטואיציה, ניתוח והבניה, כלל ופרט. למרות שזרמים שונים מדגישים היבטים שונים, רק האינטראקציה בין כוחות מנוגדים אלה והמאמץ לאחד אותם היא אשר מפיחה חיים וחיוניות בערך העליון של מדעי המתמטיקה.*

(Courant & Robbins, 1941,1969,1978, p. I)

במאמר זה ארצה להתייחס לאינטראקציה בין שלושה מרכיבים עיקריים של המתמטיקה כפעילות אנושית: הפורמאלי, האלגוריתמי והאינטואיטיבי.

1. *ההיבט הפורמאלי*: היבט זה מתייחס לאקסיומות, הגדרות, משפטים והוכחות. העובדה, שכל אלה מייצגים את הליבה של המתמטיקה כמדע פורמאלי, לא אומרת, שלא נתייחס אליהם כאשר ננתח את המתמטיקה כתהליך אנושי.

על האקסיומות, ההגדרות, המשפטים וההוכחות לחדור כמרכיבים פעילים לתהליך החשיבה. על התלמיד להמציא, לארגן, לבדוק, וללמוד להשתמש בהם. הבנת המשמעות של דיוק (rigor), של מבנה היפותטי-דדוקטיבי, ההרגשה של לכידות (coherence) ועקביות, היכולת להניח הנחות באופן בלתי תלוי באילוצים מעשיים, אינן פעילויות ספונטאניות למתבגר. בתיאוריה של פיאז'ה מיוחסות יכולות אלה לגיל – לשלב האופרציות הפורמאליות. למעשה, אצל התלמיד קיים הפוטנציאל להפעיל יכולות אלה, אך רק תהליך הוראה נכון יכול לעצב אותן ולהוציאן מן הכוח אל הפועל.

2. *המרכיב האלגוריתמי*: זוהי אשליה בלבד להאמין שניתן לפתור בעיות מתמטיות בעזרת אקסיומות, הגדרות, משפטים והוכחות, כפי שהם מופיעים בספרי הלימוד. יכולות מתמטיות חבויות גם בפרוצדורות פתרון, המוצדקות באופן תיאורטי, אך מן ההכרח להתאמן בהן. על-פי תפיסה מוטעית נפוצה, מי שמבין מערכת של מושגים במתמטיקה, ידע להשתמש בה באופן ספונטאני על-מנת לפתור בעיות מתאימות בכיתה. יש צורך במיומנויות ולא רק בהבנה, ומיומנויות נרכשות על-ידי אימון מעשי שיטתי. לפעמים ההדדיות נשכחת. אי-אפשר לצמצם חשיבה מתמטית למערכת של פרוצדורות פתרון. המערכת המנטאלית של מיומנויות פתרון המורכבת ביותר תישאר קפואה ולא פעילה כאשר עליה להתמודד עם מצב לא סטנדארטי. יש לספק לתלמיד את ההצדקה הפורמאלית לפרוצדורות הנלמדות. יתרה מכך, פרוצדורות פתרון שאינן נתמכות על-ידי הצדקות פורמאליות מפורשות, נשכחות עד מהרה.

כמובן שגורם הגיל משפיע על ההחלטה ביחס ל'מה ואיך ללמד'. לבסוף, אני מצפה שתלמידים הלומדים את הפעולות המתמטיות הבסיסיות, למשל, ילמדו במוקדם או במאוחר, לא רק את האלגוריתמים עצמם, אלא גם מדוע הם עושים מה שהם עושים. קשרי הגומלין העמוקים בין משמעות למיומנויות הם תנאי יסודי לחשיבה מתמטית יעילה ופורייה.

3. *מרכיב שלישי של חשיבה מתמטית יצרנית הוא האינטואיציה*: הכרה אינטואיטיבית, הבנה אינטואיטיבית, פתרון אינטואיטיבי. הכרה אינטואיטיבית היא סוג של הכרה המתקבלת באופן מיידי ללא הרגשת צורך בהצדקה כלשהי. הכרה אינטואיטיבית מאופיינת בראש ובראשונה בהיותה *self-evident – היא מעידה על עצמה/מסבירה או מוכיחה את עצמה*. אנו מקבלים כ- self-evident טענות כמו: 'השלם גדול מחלקיו', 'דרך נקודה מחוץ לישר ניתן להעביר מקביל אחד לישר הנתון', 'הקו הישר הוא המרחק הקצר ביותר בין שתי נקודות'. להכרות שהן self-evident ומקובלות באופן אינטואיטיבי יש השפעה כפייתית על הפרשנות ועל אסטרטגיות החשיבה שלנו. הידיעות האינטואיטיביות שלנו יכולות לעיתים להתאים לאמיתות הניתנות להצדקה באופן לוגי, אך הן יכולות גם לסתור אותן. לכן, לאינטואיציות יכול להיות תפקיד המקל על תהליך ההוראה, אך לעיתים קרובות יכולות להופיע סתירות: אינטואיציות עלולות להפוך למכשולים – מכשולים אפיסטמולוגיים (הכרתיים), בתהליכי למידה, פתרון או המצאה.

2. דוגמאות היסטוריות

מספר דוגמאות היסטוריות עשויות לעזור בהבהרה של הצהרה זו. כיצד נוכל להסביר את העובדה שהגיאומטריה האוקלידית – שהיא מתמטיקה אמיתית, למרות כל הפגמים שלה – פותחה בימי קדם, ואילו גיאומטריות לא-אוקלידיות הופיעו רק 2000 שנה אחר-כך, במאה ה-19? אם המתמטיקה היא תחום סגור, ביחס למציאות, אם מתמטיקה היא בעיקרה בניה לוגית, מהו ההבדל? ישנו הבדל עקרוני: הגיאומטריה האוקלידית מבוססת על טענות המקובלות באופן אינטואיטיבי (הדבר נכון גם ביחס לאקסיומה החמישית המפורסמת) ועל 'מושגים משותפים' (מושגי יסוד). את כולם ניתן לקבל באופן אינטואיטיבי. כידוע, אריסטו הבחין בין אקסיומות (או מושגי יסוד) לבין עקרונות יסוד (ר' Boyer & Merzbach, 1989, p. 120). הרעיון, לאמתו של דבר, היה להתחיל בניה דדוקטיבית מאיזשהו בסיס שיכול להתקבל ללא הוכחה. משחק באקסיומות הנוגדות את האינטואיציה שלנו, פירושו, קבלה של טענות מסוימות ללא הוכחה וללא הרגשה *ישירה* שהן נכונות. גיאומטריות לא-אוקלידיות אינן פוגעות בלוגיקה אך הן א-אינטואיטיביות (counter intuitive). כל התפיסה (קונספציה) של המתמטיקה הייתה צריכה להשתנות על-מנת לאפשר את הקבלה של טענות הסותרות את האינטואיציה כאקסיומות.

מצב דומה קרה עם מושג האינסוף. ראשית, נשחזר את ההבדל בין *אינסוף בכוח* (פוטנציאלי) לבין *אינסוף בפועל*. תהליך יקרא 'אינסופי בכוח' (potentially infinite) אם נוכל להניח כי ניתן להמשיך אותו מבלי להפסיק לעולם. 'אינסוף בפועל' (actual infinity) מתייחס לסך-כל האיברים של קבוצות אינסופיות. התהליך של חלוקה חוזרת ונשנית של קטע הוא אינסופי בכוח ואילו סך-כל המספרים הטבעיים, הרציונאליים או הממשיים הן דוגמאות יסודיות של אינסוף בפועל. ראינו כבר שאפילו ילדים בני 11-12 מסוגלים לקלוט באופן אינטואיטיבי את ההרחבה

האינסופית-בכוח של קטע נתון (Fischbein, 1963), או את החלוקה האינסופית-בכוח שלו. ולעומת זאת, אינסוף-בפועל הוא מושג מופשט, א-אינטואיטיבי. התבונה שלנו התרגלה לגדלים סופיים, ובמקביל, חשיבה בעזרת גדלים אינסופיים מובילה לפרדוקסים מדומים. כתוצאה מכך, פילוסופים, מדענים ומתמטיקאים גדולים כמו אריסטו, גאוס או אפילו פואנקרה, דחו את השימוש במושג אינסוף-בפועל. רק במאה ה-19 התקבל, בעזרת קנטור, המושג אינסוף-בפועל כמושג מתמטי כתוצאה משינוי מהותי בנקודת המבט.

בהמשך, אתייחס באופן מפורש לסוגים מסוימים של קשרי גומלין בין המרכיבים הפורמאליים, האלגוריתמיים והאינטואיטיביים של פעולות מתמטית.

3. פעולות ומודלים אינטואיטיביים

את כל הנאמר לעיל ביחס לתפקיד של יכולת הקבלה האינטואיטיבית [של טענות או מושגים מ.ר.] בהיסטוריה של המדעים, ניתן לטעון גם ביחס לתהליך הלמידה. הקשרים בין ההיבטים הפורמאליים לבין ההיבטים האינטואיטיביים של החשיבה המתמטית בתהליכי הלמידה, ההבנה והפתרון הם מורכבים מאוד. לפעמים יש התאמה מוחלטת ביניהם, אך לעיתים קרובות ניתן לפגוש בתופעה המכילה קונפליקט ומובילה לתפיסות מוטעות (misconceptions), לטעויות שיטתיות, ולמכשולים הכרתיים (אפיסטמולוגיים). קונפליקטים כאלה הם רגישים במיוחד כאשר הם נוגעים בתחומים של אינסוף והסתברות, אך למעשה בכל תחום של המתמטיקה ניתן להיתקל במושגים, טענות ופעולות, שקשה להבין ולקבל אותם בגלל היחס הסותר בין האילוצים הפורמאליים לאינטואיטיביים.

אזכיר מספר דוגמאות. אתייחס לתפיסה המוטעית הנפוצה: 'כפל מגדיל' ו'חילוק מקטין'. תפיסה מוטעית זו נמצאה לא רק אצל תלמידי בית-הספר היסודי (Fischbein, Nello, & Marino,1986) אלא גם אצל פרחי הוראה (ר' למשל Tirosh, Graeber & Glover, 1986) ניתוח שיטתי חשף עולם של בעיות פסיכולוגיות.

הבה נתייחס לשתי הבעיות הבאות:

1. מקילוגרם [במקור: קווינטאל, מ.ר.] אחד של תבואה ניתן להפיק 0.75 קילוגרם קמח. כמה קמח מקבלים מ- 15 קילוגרם תבואה?
2. יש להשתמש ב- 1 קילוגרם דטרגנט על מנת לייצר 15 קילוגרם סבון. כמה סבון ניתן לייצר מ- 0.75 קילוגרם דטרגנט?

אלה היו שתי דוגמאות מסדרת שאלות שניתנו לתלמידים בכיתות ה, ז, ו- ט מ- 13 בתי-ספר שונים בפיזה, איטליה. התלמידים נתבקשו לבחור את הפעולה הנדרשת לפתרון מבלי לבצע אותה ממש. להלן אחוזי ההצלחה לפי הכיתות על-פי:

Fischbein, Nello, & Marino,1986, p. 10

בעיה 1: 79% (כיתה ה); 74% (כיתה ז); 76% (כיתה ט)

בעיה 2: 27% (כיתה ה); 18% (כיתה ז); 35% (כיתה ט)

בשתי הבעיות הפתרון מכיל את פעולת הכפל: 15×0.75. פורמאלית, ומבחינת התהליך הנדרש, הפתרון הוא זהה. מהו בכל-זאת ההבדל בין שתי הבעיות?

אם נבחן את שתי הבעיות בעיון, נוכל לשים לב לכך שבבעיה הראשונה, הכופל הוא מספר שלם (15) ובשניה, הכופל הוא שבר עשרוני. מבחינה פורמאלית אין זה משנה בכלל, הלא פעולת הכפל היא פעולה חילופית (קומוטטיבית). אך מבחינה אינטואיטיבית הדבר נראה שונה לגמרי.

הבה נתאר לעצמנו שמאחורי פעולת הכפל עומד מודל מקובל (הנלמד בהרבה מכיתות היסוד): הכפל היא פעולת חיבור חוזרת. מודל זה מתאים כאשר מדובר במספרים שלמים. 'חמש כפול שלוש' פירושו, לפי מודל זה $15=5+5+5$ אך מה תהיה המשמעות של '5 כפול 0.75'? פורמאלית, '5 כפול 0.75' ו- '0.75 כפול 5' מובילים לאותה תוצאה. אך לא כך באופן אינטואיטיבי. ל- '5 כפול 0.75' אין משמעות מבחינה אינטואיטיבית. אי אפשר לייצג תרגיל זה בעזרת מודל החיבור החוזר. בפעולת הכפל $A\times B$ המבוטאת באופן מילולי כ-A כפול B (או B פעמים A), B הוא הכופל, ו-A הוא הנכפל. אם הכופל הוא שבר, לפעולת הכפל אין משמעות אינטואיטיבית. כתוצאה מכך, כאשר עומד התלמיד בפני בעיית כפל שבה הכופל הוא שבר, הוא לא יקלוט את תהליך הפתרון באופן ישיר ואינטואיטיבי. 'מודל החיבור החוזר' העומד מאחורי הקלעים של פעולת הכפל ימנע פתרון נכון, במקום להקל על מציאתו.

כתוצאה ממצב זה (השפעת מודל 'החיבור החוזר' המתאים רק למספרים שלמים) התלמיד מבין ש'כפל מגדיל' ו'חילוק מקטין'. טענות אלה נכונות, ומתקבלות באופן אינטואיטיבי, רק כל עוד הכופל הוא מספר שלם.

4. אלגוריתמים ומודלים אינטואיטיביים

4.1 דוגמא: פעולת החיסור

ידוע, כיום, כי תלמידים נוהגים לבצע מספר טעויות שיטתיות בתהליך החיסור. שגיאות רבות כאלה כבר אופיינו. אין בכוונתי להיכנס לפרטיהן. אציין רק שניתן לצַפּות לפחות את חלקן מתוך המודל הפרימיטיבי של החיסור:

אם יש במיכל כלשהו A עצמים (למשל: גולות) ורוצים להוציא מתוכם B עצמים (המודל הפרימיטיבי של החיסור), ניתן לעשות זאת רק אם $B < A$.

אם $B > A$, קיימת אצל התלמידים נטייה להפוך את תרגיל החיסור ל- $B - A$.

למשל (Resnik, 1983 עמ' 73):
$$\begin{array}{r} 326 \\ -\;117 \\ \hline 211 \end{array}$$

טעות נוספת הנגזרת מן המודל הפרימיטיבי, מונחית על-ידי המחשבה שכאשר $B > A$, מוציאים מן המיכל כמה עצמים שאפשר, עד שהמיכל נשאר ריק.

למשל (Resnik, 1983 עמ' 73):
$$\begin{array}{r} 542 \\ -\;389 \\ \hline 200 \end{array}$$

אם התלמיד למד את הפטנט של ה'השאָלה', יכולים להתרחש מספר מצבים. הקושי האופייני ביותר קיים כאשר התלמיד צריך 'לשאול' מ- 0. אם $B > A$, 'שואלים' מהמיכל הבא, אבל אם הוא ריק, אז אפשר לכתוב 0, או – אפשר 'לשאול' מלמטה, או שאפשר לדלג על המיכל הריק ולנסות לעבור למיכל שלישי.

השאָלה מלמטה במקום מ- 0:
$$\begin{array}{r} 702 \\ -\;368 \\ \hline 454 \end{array}$$

השאָלה בדילוג על ה- 0:
$$\begin{array}{r} 602 \\ -\;327 \\ \hline 225 \end{array}$$

(ביחס לתפיסות מוטעות בחיסור ר' גם: Maurer, 1987; Resnik, 1983)

5. מושגים וייצוגים אינטואיטיביים

5.1 מושג הקבוצה

לינצ'בסקי ווינר (1988) ניתחו מספר תפיסות מוטעות בהם מחזיקים מורים בבית הספר היסודי ביחס למושג הקבוצה המתמטי. הם זיהו את התפיסות המוטעות הבאות:

א. הנבדקים סברו שלאיברי קבוצה צריכה להיות תכונה משותפת.
ב. קבוצה צריכה להכיל יותר מאיבר אחד. הרעיונות הקבוצה הריקה או קבוצה בת איבר אחד, נידחים.
ג. חזרה על אותו איבר נחשבת כאיברים שונים.
ד. איבר בקבוצה אחת לא יכול להיות איבר בקבוצה אחרת.
ה. לאלה נוכל להוסיף תפיסה מוטעית חמישית, לפיה, קבוצות הן שוות, אם הן מכילות אותו מספר איברים.

פירוש פשוט יכול להסביר את כל התפיסות המוטעות האלה. אם המודל בו מחזיקים כאשר חושבים על מושג הקבוצה הוא *אוסף של עצמים*, ניתן לצפות לכל התפיסות המוטעות האלה. 'קבוצה ריקה' או 'קבוצה בת איבר אחד', הם בודאי 'שטויות'. לעולם איננו יוצרים קבוצות של עצמים שאין להם מכנה משותף [כמו הקבוצה] {שֵם, זוג נעליים ישנות, המספר המדומה i}. במצב אמיתי, שני עצמים זהים, שיש לכל אחד מהם קיום עצמאי, נמנים כשם שנמנים שניים שונים (למשל: שתי מטבעות). עצם אחד לא יכול להיות בו זמנית בשני מיכלים שונים. שתי קבוצות של עצמים נחשבות כשוות אם יש בהן אותו מספר עצמים.

אינני טוען שתלמידים מזהים באופן מפורש ועקבי את המושג המתמטי של קבוצה עם הרעיון של אוסף עצמים מוחשי. מה שאני כן טוען הוא, שכאשר התלמידים חושבים על המושג המתמטי של קבוצה, הם מחזיקים במוחם באופן *מרומז* אך *בעל השפעה* את הרעיון של אוסף עצמים מוחשי על כל מרכיביו. אין כאן קונפליקט סובייקטיבי. המודל האינטואיטיבי יוצר *מאחורי הקלעים*, את המשמעות, את השימוש ואת התכונות של המושג הנרכש. נראה כי המודל האינטואיטיבי חזק יותר מהמושג הפורמאלי. התלמיד פשוט שוכח את התכונות הפורמאליות ונוטה להחזיק את אלה שנוצרות על-ידי המודל. וההסבר נראה פשוט מאוד: לתכונות שנוצרות על-ידי המודל המוחשי יש מבנה הגיוני, לעומתן, מופיעות התכונות הפורמאליות, לפחות במבט ראשון, כאוסף אקראי. ניתן להצדיק את אוסף התכונות הפורמאלי כעקבי, רק כחלק ממושג מתמטי שלם והגיוני.

לדעתי, השפעת מודלים מרומזים, בסיסיים ואינטואיטיביים, על החשיבה המתמטית, היא הרבה

יותר משמעותית ממה שנחשב בדרך-כלל. ההשערה שלי היא, שהשפעה זו איננה מוגבלת לשלבים פרה-פורמאליים של ההתפתחות האינטלקטואלית. טענתי היא שאפילו לאחר שהיחיד מסוגל לחשיבה פורמאלית, מודלים אינטואיטיביים בסיסיים ימשיכו להשפיע על דרכי חשיבתו. הקשרים בין המוחשי לפורמאלי בתהליכי החשיבה, הם הרבה יותר מורכבים ממה שפיאז'ה חשב. רעיון ההשפעה המרומזת של מודלים אינטואיטיביים פרימיטיביים על תהליכי חשיבה פורמאליים לא תפס את תשומת ליבו של פיאז'ה. *למעשה, מכונת ייצור המידע שלנו נשלטת לא רק על-ידי מבנים לוגיים, אלא, בו-זמנית גם על-ידי עולם של מודלים אינטואיטיביים המשפיעים באופן מרומז וכופים את האילוצים שלהם.*

5.2 מושג הגבול

כשנעבור לחשיבה מתמטית ברמה גבוהה יותר, נוכל למצוא דוגמאות נהדרות של מורכבות היחסים בין המרכיבים הפורמאליים, האלגוריתמיים והאינטואיטיביים שלה. בלי להבין יחסים אלה, יהיה קשה מאוד, ואף כמעט בלתי אפשרי, לאתר את הגישה הפדגוגית הנכונה.

על-מנת לוודא שההערות הפסיכולוגיות הן לא ספקולציות בלבד, אני חושב שמן הרצוי שאצטט מתמטיקאים. אני מתייחס ל- "מהי מתמטיקה?" של קורנט ורובינס (Courant & Robbins, 1941,1969,1978).

בחרתי במושגים: גבול והתכנסות, כיוון שהם נושאים תפקיד מרכזי בחשיבה המתמטית. בו בזמן, השילוב בין האספקטים הפורמאליים, האלגוריתמיים והאינטואיטיביים עשיר במשמעויות פסיכולוגיות ודידאקטיות.

אך הבה נצטט מהכתוב אצל קורנט ורובינס:

> *את ההגדרה של התכנסות הסדרה a_n ל- a ניתן לתמצת באופן פורמאלי כדלהלן: לסדרה $a_1, a_2, a_3, \ldots$ יש גבול a כאשר n שואף לאינסוף, אם בהתאמה לכל מספר ε, לא חשוב עד כמה הוא קטן, ניתן למצוא מספר שלם N (התלוי ב- ε) כך ש: $|a-a_n|<\varepsilon$ לכל $n \ge N$. זוהי הפורמאליזציה המופשטת של מושג הגבול של סדרה. לא ייפלא אפוא, שכאשר נתקלים בה בפעם הראשונה לא יורדים לעומקה תוך דקות ספורות. קיימת גישה מצערת, כמעט סנובית של כמה ממחברי ספרי הלימוד המציגים הגדרה ללא הכנה נאותה, כאילו שהסבר הוא למטה מכבודו של מתמטיקאי......*
>
> *קיים קושי פסיכולוגי ברור לתפוס הגדרה מדויקת זו של מושג הגבול. האינטואיציה שלנו מציעה רעיון 'דינמי' למושג הגבול כתוצאה מתהליך ה'תנועה': אנו נעים דרך שורת השלמים: $1, 2, 3, \ldots, n \ldots$ ואז מסתכלים על התנהגות הסדרה a_n. אנו חשים שניתן יהיה לראות את ההתקרבות $a_n \to a$. אך גישה 'טבעית' זו לא ניתנת לפורמאליזציה מתמטית. כדי להגיע להגדרה מדויקת עלינו להפוך את סדר הצעדים; במקום להסתכל קודם על המשתנה החופשי n ואח"כ על המשתנה התלוי a_n, עלינו לבסס את ההגדרה על מה שעלינו לעשות אם ברצוננו לבדוק את האמירה $a_n \to a$. בפרוצדורה כזאת, עלינו ראשית לבחור קטע שרירותי קטן סביב a ואז לקבוע אם ניתן לממש תנאי זה על-ידי בחירת משתנה חופשי n מספיק גדול. לבסוף על-ידי נתינת שמות סימבוליים ε, ו-N, לביטויים 'קטע שרירותי קטן' ו-'n מספיק גדול' אנו מובלים להגדרה המדוייקת של הגבול.*

(Courant & Robbins, 1941,1969,1978, p. 291-292)

יחסית, קל להבין, באופן אינטואיטיבי, כפי שאומרים קורנט ורובינס, את המושגים גבול והתכנסות. אינטואיטיבית, ניתן לחשוב על סדרת מספרים a_n המתקרבת יותר ויותר למספר a כאשר n שואף ל- ∞. אז נאמר ש-a הוא הגבול של a_n, והסדרה מתכנסת ל-a. אם נוסיף דוגמא, הדברים יהפכו לברורים לגמרי אינטואיטיבית. למשל, נחשוב על הסדרה שהאיבר ה-n-י שלה הוא $a_n = \frac{1}{n}$:

לסדרה: $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots$

יש גבול שערכו 0, שכן על-ידי הגדלת n: $\frac{1}{n} \to 0$ כאשר $n \to \infty$.

אך איננו יכולים לעבור ישירות מהייצוג האינטואיטיבי להגדרה הפורמאלית המדויקת. ההגדרה הפורמאלית הופכת את סדר הרעיונות, סותרת את הייצוג הטבעי, הדינאמי של התהליך. זה הופך למעשה את הגדרת הגבול לאַ-אינטואיטיבית, לקשה לתפיסה. איננו מתחילים בתיאור התהליך של התקרבות ל-a על-ידי

a_n. אנו מתחילים למרבה הפלא, בהזכרת מספר חיובי ε 'לא חשוב עד כמה הוא קטן', *ואחר-כך* אנו מציגים את N ו- $n \geq N$. זאת אומרת, לא רק שאין זה ε התלוי ב-N (כפי שקורה במציאות) – המרווח $\left|a-a_n\right|$ קטן כאשר ממשיכים להגדיל את N (המתאים ל-n) – אלא שבהגדרה הפורמאלית אנו הופכים את N להיות 'תלוי ב- ε'. אנו הופכים את סדר החשיבה הטבעי.

למעשה, ההגדרה הפורמאלית שהובאה לעיל, אינה 'נקייה' לחלוטין מאלמנטים אינטואיטיביים. המונח 'שואף' ("לסדרה $a_1, a_2, a_3, ...$ יש גבול a כאשר n *שואף* לאינסוף...") אינו מונח מופשט לגמרי. אנו עדיין מחזיקים במוחנו, באופן מרומז, מודל אינטואיטיבי. למונח 'שואף' יש משמעות פסיכולוגית, ולא מתמטית או פיזיקלית. אנשים ש'שואפים ל-' (tend to), בעצם 'נוטים ל-' (inclined to). ל'שואפים ל-' יש קונוטציה של השתוקקות למשהו (desire, aspiration) מספרים אינם *שואפים*. הם קיימים או שאינם קיימים. המונח 'שואף ל-' הוא מה שנותר מהפירוש האינטואיטיבי והדינאמי הראשוני של המושגים גבול והתכנסות. זה מבטא את האינסוף-בכוח המתקבל אינטואיטיבית. אני מניח שהמתמטיקאים חשו באופן אינטואיטיבי שעל-ידי ביטול כל זכר אינטואיטיבי (שבמקרה זה הוא מהותי מבחינת התהליך), הם היו הופכים את המוצר הפורמאלי לחסר משמעות לחלוטין. המונח 'שואף ל-' הוא פשרה בין הדינאמיקה של הייצוג הפרימיטיבי, האינטואיטיבי של ההתכנסות, לבין הצורך להקפיא קבוצה אינסופית של איברים בתוך הגדרה פורמאלית. כאשר 'שואפים', לא זזים, אך גם לא נשארים לגמרי מאובנים.

כתוצאה מן היחסים הסותרים הללו בין ההגדרה הפורמאלית לבין הייצוג האינטואיטיבי של מושג הגבול, מופיעות מספר תפיסות מוטעות. שלמה וינר (Vinner, 1991) ביקש מ-15 תלמידים מחוננים בבית-ספר יוקרתי להגדיר את מושג הגבול (לאחר שלמדו את המושג). רק תלמיד אחד כתב הגדרה פורמאלית, לא מלאה, שאפשר לקבל. 14 התלמידים האחרים הפגינו מספר תפיסות מוטעות טיפוסיות. שלמה וינר מזכיר את התפיסות המוטעות הבאות:

1. סדרה "לא יכולה להגיע לגבול שלה" (לפיכך היינו אומרים שהסדרה ... ,1 ,1 ,1 לא מתכנסת לגבול).
2. סדרה צריכה להיות מונוטונית עולה או מונוטונית יורדת. לפיכך הסדרה שהאיבר ה-n-י שלה נתון על-ידי $a_n = 1+\frac{(-1)^n}{n}$, אינה מתכנסת.
3. הגבול הוא האיבר 'האחרון' בסדרה. מגיעים לגבול לאחר שעוברים מספר אינסופי של איברים.

(Vinner, 1991, p. 79)

לפי מה שהראה קורנו (Cornou, 1991), למונח 'לשאוף ל-' (tend to) קיימות מספר משמעויות פרימיטיביות במוחו של התלמיד המשפיעות על המושג הפורמאלי. המשמעות של 'לשאוף ל-' יכולה להיות:

להתקרב (אך בסופו של דבר להישאר במרחק)

להתקרב... ...מבלי להגיע

להתקרב... ורק לגעת

להיות דומה ל-... ...(כשם שכחול דומה לסגול)

(Cornou, 1991, p. 54)

המשמעות שהתלמיד יעניק למונח 'שואף ל-' בהקשר למושג הגבול תהיה תלויה במודל האינטואיטיבי בו הוא מחזיק. התלמיד שלא מקבל את העובדה שהסדרה ... ,1 ,1 ,1 מתכנסת (לגבול שהוא, למעשה, 1) מחזיק באופן אינטואיטיבי במודל על-פיו המונח 'שואף ל-' מרמז על:

א. שהמרווחים בין איברים רצופים בסדרה לבין הגבול חייבים לקטון.

ב. שלא ניתן להגיע לגבול.

שני תנאים אלה לא התמלאו בדוגמא דלעיל (לדיון במכשולים האפיסטמולוגיים בהקשר למושג הגבול ר' Cornou, 1991).

למעשה, מושג הגבול מלא סתירות (במובן הדיאלקטי, ההגליאני). כיוון שבאופן טבעי מוחנו אינו מותאם להמשגה של אינסוף-בפועל.

דוגמא נוספת: הרעיון שמעגל הוא הגבול של סדרת מצולעים הוא בלתי-נתפס אינטואיטיבית: זהו רעיון עם סתירה פנימית. כאשר קיים מעגל, אין יותר מצולעים. *אינטואיטיבית* למצולע יש מספר סופי, אולי מספר גדול מאוד של צלעות. ל'משהו' שהוא בו-זמנית גם מעגל וגם מצולע אין משמעות ברמה האינטואיטיבית. את הסתירה ניתן לבטל ברמה הפורמאלית הטהורה. אך רמה פורמאלית, טהורה, היא כשלעצמה בלתי אפשרית מבחינה פסיכולוגית. אנו נוטים אליה במתמטיקה, אך למעשה לעולם לא מגיעים אליה פסיכולוגית.

כתוצאה מכך, אנו נתקלים במכשלות אפיסטמולוגיות אצל תלמידים בהקשר למושגים גבול ורציפות, ומקבלים את המשמעויות החלקיות השונות של מושגים אלה (לעולם לא מגיעים לגבול או תמיד מגיעים לגבול).

ניתן לזהות אותו סוג של מכשול בהיסטוריה של המתמטיקה: מספר מתמטיקאים, כמו רובינס (Robbins 1679-1751, על-פי: Cornou, 1991 p. 161) טענו שלא ניתן להגיע לגבול. אחרים כמו ג'ורין (Jurin, 1685-1750) אמרו שה"יחס המרבי (האולטימטיבי) בין שתי כמויות הוא היחס שאליו מגיעים כאשר הכמויות מתבטלות" (Cornou, 1991).

גישות סותרות אלה הולידו את המושג 'אינפיטיסימאלים' או 'מספרים קטנים באופן שרירותי' המבטא את הניסיון להמשיג *תהליך* שנראה אינסופי, באופן אינטואיטיבי.

הרשו לי להוסיף דוגמא נוספת: במחקר שנועד למדוד את מידת האינטואיטיביות של פתרון (Fischbein, Tirosh, & Melamed, 1981) נשאלה השאלה הבאה:

> נתון קטע $AB=1m$. מוסיפים קטע $BC=\frac{1}{2}m$. נמשיך להוסיף, באותו אופן, קטעים בגודל $\frac{1}{4}m$, $\frac{1}{8}m$, וכו'. מה יהיה סכום הקטעים $AB+BC+CD...$ (וכן הלאה)? התקבלו התשובות בקטגוריות הבאות:
>
> 1. הסכום = 2 (5.6%) (תשובה נכונה).
> 2. הסכום = אינסוף (51.4%).
> 3. 'הסכום קטן מ-2' או 'הסכום שואף ל-2' (16.8%).

(Fischbein, Tirosh, & Melamed, 1981, p. 499)

כפי שאנו רואים רק אחוז קטן מן התלמידים נתן תשובה נכונה $(S=2)$. ההסבר הוא, כפי שהוזכר לעיל, שאינסוף-בפועל הוא מושג א-אינטואיטיבי. על מנת לקבל את העובדה שסכום הסדרה $[1,\frac{1}{2},\frac{1}{4},\frac{1}{8},...]$ הוא: $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}...=2$, יש לתפוס *באופן אינטואיטיבי* את כל האינסוף-בפועל של הסדרה. כיוון שזה לא קורה, התלמידים שוכחים בקלות את התשובה $(S=2)$ ומתייחסים לאינסופיות של הסדרה *כאינסוף-בכוח* (הסכום *קטן מ-*2, או הסכום *שואף ל-*2).

כאשר מבקשים מתלמידי תיכון או מכללה למצוא את השבר העשרוני השווה ל-$\frac{1}{3}$, הם כותבים בקלות $\frac{1}{3}=0.333...$. אך מצד שני, הם בקושי מסכימים לכך ש- $0.333...$ *שווה ל-*$\frac{1}{3}$. כמו בדוגמא לעיל הם טוענים ש- $0.333...$ *שואף ל-*$\frac{1}{3}$. אנו נתקלים כאן באותו סוג של מכשול אינטואיטיבי שהזכרנו. בנוסף יש להדגיש את ההיבט הבא:

אם תלמיד מקבל ש- $\frac{1}{3}=0.333...$, עליו לקבל גם ש- $0.333...=\frac{1}{3}$ יחס השוויון הוא סימטרי. בפועל, כפי שכבר נמצא (ר' Kieran, 1981) המודל האינטואיטיבי החבוי המתקשר לסימן השוויון הוא בדרך-כלל זה של תהליך קלט←פלט שאיננו סימטרי!

6. ההשפעה של אלגוריתם קשיח על ייצוג אינטואיטיבי

בראיונות עם פרחי הוראה למתמטיקה, הוצגה בעיה מהסוג הבא:

> מחיר חמישה קילוגרם של תפוחים הוא 15 שקלים. כמה יעלו 7 קילוגרם של תפוחים?
>
> זוהי בעיה בסיסית קלאסית של יחסים. חלק מהתלמידים פתרו את הבעיה על-ידי מציאת המחיר לקילוגרם אחד ($15\div5=3$) ואחר-כך על-ידי הכפלה ב- 7 הם חישבו: $3\times7=21$. היו תלמידים שחישבו ישירות את היחס $\frac{15}{5}=\frac{x}{7}$.

בעיה נוספת הוצגה:

> שבעה פועלים מסיימים עבודה מסוימת תוך 28 ימים. בכמה ימים יסיימו את אותה עבודה חמישה פועלים?
>
> תלמידים טענו שגם זוהי בעיית יחס וכתבו: $\frac{7}{28}=\frac{5}{x}$. הם מצאו ש- $x=20$ וזו הייתה התשובה שלהם.

לאחר מכן הם נתבקשו לנתח את התשובה שלהם: אם שבעה פועלים מסיימים את העבודה המסוימת תוך 28 ימים, פחות עובדים (אצלנו – חמישה), יסיימו בפחות ימים? התלמידים הבינו ששגו. הם השתמשו בתבנית

באופן עיוור, אוטומאטי. והפירוש האינטואיטיבי, הישיר, שיכול היה להיות שימושי, לא תיפקד.
לפעמים הרקע האינטואיטיבי פועל מאחורי הקלעים של הפירוש הפורמאלי או של הפרוצדורה האלגוריתמית. אך, לפעמים דווקא היישום העיוור של תבניות הוא שמוביל לפתרונות מוטעים, למרות שפנייה לפירוש האינטואיטיבי הישיר יכול היה למנוע מהפותר להגיע לתשובה שגויה.

7. קשרי הגומלין בין אילוצים פורמאליים לבין אלגוריתמים לפתרון

שימוש בפרוצדורות פתרון בהכללת יתר, יכול להוביל לפעמים לפתרונות מוטעים שאינם עולים בקנה אחד עם האילוצים הפורמאליים המתאימים. אתייחס למספר דוגמאות.
נמצא שפעמים רבות תלמידים כותבים:

$$\sin(a+b)=\sin a+\sin b$$

או:

$$\log(a+b)=\log a+\log b$$

כמובן שחוק הפילוג של הכפל על החיבור $\left[m(a+b)=ma+mb\right]$ אינו ישים במקרים שנזכרו כאן. תלמידים שוכחים שמדובר בתכונה פורמאלית של כפל וחיבור. הם מעבירים אותה למודל פתרון, ובגלל הדמיון החיצוני, היא הופכת לפרוצדורת פתרון. ניתן למצוא אותו סוג של טעות נפוצה, בה טכניקה של פתרון אינה עולה בקנה אחד עם החוקים הפורמאליים, ולכן מיושמת באופן מוטעה, בדוגמא הבאה:

$$\frac{an}{an+by}=\frac{\cancel{a}\cancel{n}}{\cancel{a}\cancel{n}+by}=\frac{1}{by}$$

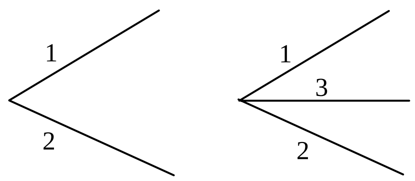
קטגוריות כאלה של שגיאות ידועות היטב למורים. מה שאולי מובן פחות הוא, שכדי להתגבר על טעויות כאלה התלמיד צריך להגיע להבנה מלאה של היחסים בין המרכיבים הפורמאליים לבין המרכיבים האלגוריתמיים של המתמטיקה. על התלמיד להבין, לדעתנו, את הבסיס הפורמאלי (הגדרות ומשפטים) המצדיקים את האלגוריתם. לימוד עיוור של אלגוריתמים הוא שמוביל לסוגים כאלה של שימוש מוטעה. בהעדר הבנה ברורה של ההצדקה ושל המסגרת הפורמאלית, דמיון שטחי של בעיות מוביל להכללה מוטעית.

8. המושגים הצורניים

המצב המעניין ביותר ביחס לקשרי הגומלין בין ההיבטים המושגיים לבין אלה הצורניים (האינטואיטיביים) מתרחש בתחום הגיאומטריה.
ספרי הפסיכולוגיה מבחינים בדרך-כלל בין מושגים לבין דימויים כשני מרכיבים עיקריים של פעולת החשיבה. אך לצורות גיאומטריות יש מעמד מיוחד. מהו קו, משולש, כדור או מהי קובייה? מובן שהם דימויים. הם בעלי צורה מסוימת. אבל בזרם החשיבה הגיאומטרית הם אינם דימויים במובן הרגיל. (אינני מתייחס לשרטוטים. אני מתייחס לישויות גיאומטריות מתמטיות.) הם ישויות אידיאליות מופשטות. הם בעלי אוניברסאליות המאפיינת מושגים בלבד. *כל* תכונה של צורה גיאומטרית נגזרת מההגדרה של הצורה המתאימה, מהמבנה האקסיומטי אליה היא שייכת. מכך ניתן לטעון שלצורות גיאומטריות בעלות דימויים מרחביים תכונות השייכות למושגים בלבד: אידיאליות, מופשטות, אוניברסאליות, תלות בהגדרה, ומעין טוהר ושלמות שאינם קיימים במציאות. בחשיבה גיאומטרית אנו עוסקים בצורות שאינן רק דימויים, אלא ישויות מנטאליות המוצגות כאידיאליות וכפופות לחלוטין לאילוצים אקסיומטיים. אנו עשויים אז לטעון שצורה גיאומטרית היא אובייקט מנטאלי שאינו ניתן לצמצום למושגים או לדימויים רגילים. זה איננו רק מושג, כי הוא גם הייצוג המרחבי שלו. מושג הוא *רעיון* שאם נדייק, הוא אינו בעל תכונות צורניות. מצד שני, צורה גיאומטרית היא לא רק דימוי, כיוון *שכל* התכונות שלה נכפות עליה באופן חד-משמעי ומדויק מן ההגדרה שלה. צורה גיאומטרית היא, *בו-זמנית*, מושג וגם דימוי. השרטוט של מעגל או משולש הוא מודל גרפי של צורה גיאומטרית, ולא הצורה הגיאומטרית עצמה.
אך המיזוג המלא הזה בין התכונות הצורניות (אינטואיטיביות) לבין התכונות המושגיות של צורה גיאומטרית, הוא בדרך-כלל רק מצב אידיאלי. פעמים רבות האילוצים הפורמאליים והצורניים סותרים זה את זה, הסתירות האלה עשויות להשפיע על זרימת החשיבה הגיאומטרית.
לילדים קשה לקבל שריבוע הוא מלבן, מעוין או אפילו מקבילית, גם אם הם יודעים את ההגדרות המתאימות. הייחוד הצורני בתבנית שלמה הוא כל-כך חזק, עד שהוא משמיד את השפעת האילוצים הפורמאליים.
אלסנדרה מריוטי מדווחת על הדוגמא הבאה: לתלמידה בת 16, אליסיה (כיתה י"א) ניתנה הבעיה הבאה:
כמה זוויות נראות בציורים $1a$ ו- $1b$?

אליסיה: כאשר אני רואה שני ישרים שנחתכים, אני יודעת שהרווח ביניהם הוא זווית. אני חושבת שבכל אחד מהציורים יש זווית אחת. למרות שבתחילה חשבתי שבציור השני יש שתי זווית.אני יכולה להסביר את זה. בתחילה חשבתי כך: קו 1 וקו 2 יוצרים זווית אחת וקו 2 וקו 3 יוצרים זווית שניה. בכל אופן, עכשיו אני חושבת שיש רק זווית אחת הנוצרת על-ידי שני ישרים שנחתכים (1,2) וקו 3 הוא חוצה זווית.

(Marrioti, 1992, p. 11)



ציור 1*b*   ציור 1*a*

הקושי של אליסיה נובע מכך שהמושג לא יוצר אצלה צורה. הדבר קורה לא משום שהמושג אינו נכון אצלה, אלא כיוון שהצורה עדיין נושאת עמה תכונות של תבנית שלמה המושפעת מן הניסיון. למעשה, המיזוג המלא שנדון לעיל, לא קיים; אם נחתוך פרוסת עוגה לשני חצאים, נקבל שתי חתיכות, ולא שלוש (הפרשנות הראשונה של אליסיה). אם קו 3 הוא חוצה זווית, הוא לא יכול להשתייך בו-זמנית לשתי זוויות שונות (הפרשנות השנייה). במקרה דלעיל, מושג הזווית עדיין לא שולט באופן מלא בתכונות האינטואיטיביות הצורניות ובמשמעותן. בדוגמא שלנו, בקשרי הגומלין בין האילוצים האינטואיטיביים לבין אלה הפורמאליים, האילוצים האינטואיטיביים הם שמכריעים.

9. סיכום

הטענה העיקרית שהוצגה במאמר זה היא שבניתוח ההתנהגות המתמטית של התלמיד יש להתייחס אל שלושה היבטים בסיסיים: הפורמאלי, האלגוריתמי והאינטואיטיבי. ההיבט הפורמאלי מתייחס לאקסיומות, הגדרות, משפטים והוכחות. ההיבט האלגוריתמי מתייחס לטכניקות פתרון ולאסטרטגיות סטנדרטיות. ההיבט האינטואיטיבי מתייחס למידת הסובייקטיביות שבה מקבל היחיד באופן ישיר, מושג, משפט או פתרון. לפעמים שלושת המרכיבים האלה מתאחדים. אך בדרך-כלל בתהליכי למידה, הבנה ופתרון בעיות יכולים להיווצר קונפליקטים. לפעמים מיישמים באופן מוטעה תבנית פתרון בגלל דמיון שטחי, מבלי להתחשב באילוצים הפורמאליים. לפעמים תבנית פתרון המושרשת עמוק במוחו של התלמיד, מיושמת באופן מוטעה, למרות הבנה אינטואיטיבית נכונה פוטנציאלית.

אך, בדרך כלל, הפירוש האינטואיטיבי, המבוסס על ניסיון אישי מוגבל, פרימיטיבי, אך מושרש עמוקות, הוא שמשמיד את השליטה הפורמאלית או את הדרישות של הפתרון האלגוריתמי וכך מעוות או אפילו חוסם תגובה מתמטית נכונה.

קשרי הגומלין והסתירות בין המרכיבים הפורמאליים, האלגוריתמיים והאינטואיטיביים של פעילות מתמטית הם מאוד מורכבים ולא תמיד ניתן לזהותם ולהבין אותם. יש לשתף פעולה בין ניתוח תיאורטי, תצפיות קשובות, ומחקר ניסיוני על מנת לחשוף את המקורות הרבים של גישות שגויות בפעילות מתמטית. הדבר מחייב ששיתוף פעולה אינטימי בין פסיכולוגיה לבין ניסיון דידאקטי יהוו תנאי בסיסי לקידום החינוך המתמטי.

רשימת מקורות

Boyer, C.B., & Merzbach, U.C. (1968, 1989). *A History of Mathematics.* New York: Wiley.

Cornou, B. (1991). Limits. In D. Tall (Ed.), *Advanced Mathematical Thinking,* Dordrecht, Holland: Kluwer Academic Publishers, 153-165.

Courant, R., & Robbins, H. (1941,1969,1978). *What is Mathematic? An Elementary Approach to Ideas and Methods.* Oxford: Oxford University Press.

Fischbein, E. (1963). Conceptele Figurale [in Roumanian Bucureti]. Editura Academiei, R.S.R.

Fischbein, E., Deri, M., Nello, M.S., & Marino, M.S. (1985). The role of implicit models in solving verbal problems in multiplication and division. *Journal of Research in Mathematics Education, 16 (1),* 3-17.

Fischbein, E., Tirosh, D., & Melamed, U. (1981). Is It possible to measure the intuitive acceptance of a mathematical statement? *Educational Studies in Mathematics, 12,* 491-512.

Kieran, C. (1981). Concepts associated with the equality symbol. *Educational Studies in Mathematics, 12,* 317-326.

Linchevski, L. & Vinner, Sh. (1988). The naive concept of sets in elementary teachers. *Proceedings of the Twelfth International Conference, Prychology of Mathematics Education* Vol. 2. Vezprem, Hungary.

Mariotti, M.A. (1992). Imagini e concetti in geometria. *L'Insegnamento della Matematica e delle Scienze Integrate, 15* (9), 863-885.

Maurer, S.B. (1987). New knowledge about errors and new views about learners: What they mean to educators and what more educators would like to know. In A.H. Schoenfeld (Ed.), *Cognitive Science and Mathematics Education.* Hillsdale, NJ, Erbaum, 165-188.

Resnik, L.B. (1983). Procédure et compréhension en arithmétique élémentaire. *Seminaire de Didactique de Mathématiqe 1982-1983.* Grenoble: IMAG.

Tirosh, D., Graeber, A.D., & Glover, R.M. (1986). Preservice teachers' choice of operation for multiplication and division word problems. *Proceedings of the Tenth International Conference, Psychology of Mathematics Education.,* London, 57-62.

Vinner, Sh. (1991). The role of definitions in the teaching and learning of mathematics. In d. Tall (Ed.), *Advanced Mathematical Thinking.* Dordecht, Holland: Kluwer, 65-79.