Aula 12
Derivada de Funções Logarítmicas. Funções Hiperbólicas

MA111 - Cálculo I

Turmas O, P e Q

Marcos Eduardo Valle

Departamento de Matemática Aplicada
Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica
Universidade Estadual de Campinas

Derivada do Logaritmo Natural

Derivada da Função Logaritmo:

$$\frac{d}{dx}[\ln x] = \frac{1}{x}.$$

Exemplo

Derive

$$y = \ln(x^3 + 1).$$

Derivada do Logaritmo Natural

Derivada da Função Logaritmo:

$$\frac{d}{dx}[\ln x] = \frac{1}{x}.$$

Exemplo

Derive

$$y = \ln(x^3 + 1).$$

Resposta:

$$y' = \frac{3x^2}{x^3 + 1}.$$

Exemplo

Encontre
$$\frac{d}{dx}\left[\ln(\operatorname{sen} x)\right].$$

Exemplo

Encontre
$$\frac{d}{dx}\left[\ln(\operatorname{sen} x)\right].$$

Resposta:
$$\frac{d}{dx}\left[\ln(\operatorname{sen} x)\right] = \operatorname{cotg} x.$$

Exemplo

Derive $f(x) = \log_{10}(2 + \operatorname{sen} x)$.

Exemplo

Derive $f(x) = \log_{10}(2 + \operatorname{sen} x)$.
Resposta:

$$f'(x) = \frac{1}{\ln 10} \frac{\cos x}{(2 + \operatorname{sen} x)}.$$

Derivação Logaritmica:

Exemplo

Derive

$$y = \frac{x^{3/4}\sqrt{x^2+1}}{(3x+2)^5}.$$

Derivação Logaritmica:

Exemplo

Derive

$$y = \frac{x^{3/4}\sqrt{x^2+1}}{(3x+2)^5}.$$

Resposta:

$$y' = \frac{x^{3/4}\sqrt{x^2+1}}{(3x+2)^5}\left(\frac{3}{4x} + \frac{x}{x^2+1} - \frac{15}{3x+2}\right).$$

A Regra da Potência:

A Regra da Potência:

Se

$$f(x) = x^a,$$

com $x \neq 0$ e $a \neq 0$, então

$$f'(x) = ax^{a-1}.$$

Exemplo

Derive

$$y = x^{\sqrt{x}}.$$

Exemplo

Derive
$$y = x^{\sqrt{x}}.$$

Resposta:
$$y' = \frac{x^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}(\ln \sqrt{x} + 1).$$

O Número e como um limite:

Considere $f(x) = \ln x$. Por um lado,

$$f'(1) = \lim_{h \to 0} \frac{\ln(1+h) - \ln 1}{h} = \lim_{h \to 0} \ln(1+h)^{\frac{1}{h}}.$$

Por outro lado,

$$f'(x) = \frac{1}{x} \quad \Rightarrow \quad f'(1) = 1.$$

Logo,

$$\lim_{x \to 0} \ln(1+x)^{\frac{1}{x}} = 1.$$

O Número e como um limite:

Considere $f(x) = \ln x$. Por um lado,

$$f'(1) = \lim_{h \to 0} \frac{\ln(1+h) - \ln 1}{h} = \lim_{h \to 0} \ln(1+h)^{\frac{1}{h}}.$$

Por outro lado,

$$f'(x) = \frac{1}{x} \quad \Rightarrow \quad f'(1) = 1.$$

Logo,

$$\lim_{x \to 0} \ln(1+x)^{\frac{1}{x}} = 1.$$

O Número e como um limite:

$$\lim_{x \to 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e.$$

O Número e como um limite:

Considere $f(x) = \ln x$. Por um lado,

$$f'(1) = \lim_{h \to 0} \frac{\ln(1+h) - \ln 1}{h} = \lim_{h \to 0} \ln(1+h)^{\frac{1}{h}}.$$

Por outro lado,

$$f'(x) = \frac{1}{x} \quad \Rightarrow \quad f'(1) = 1.$$

Logo,

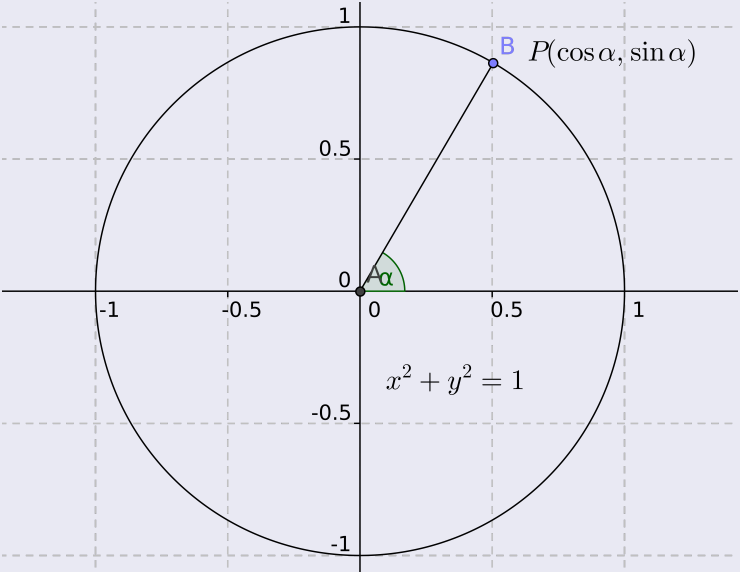
$$\lim_{x \to 0} \ln(1+x)^{\frac{1}{x}} = 1.$$

O Número e como um limite:

$$\lim_{n \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e.$$

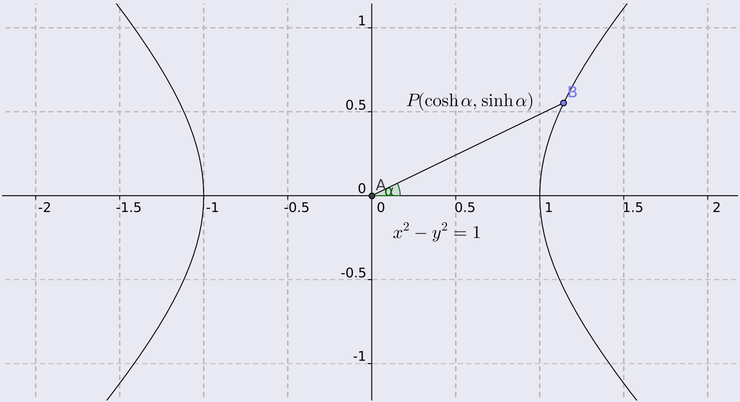
Funções Hiperbólicas

Funções Trigonométricas



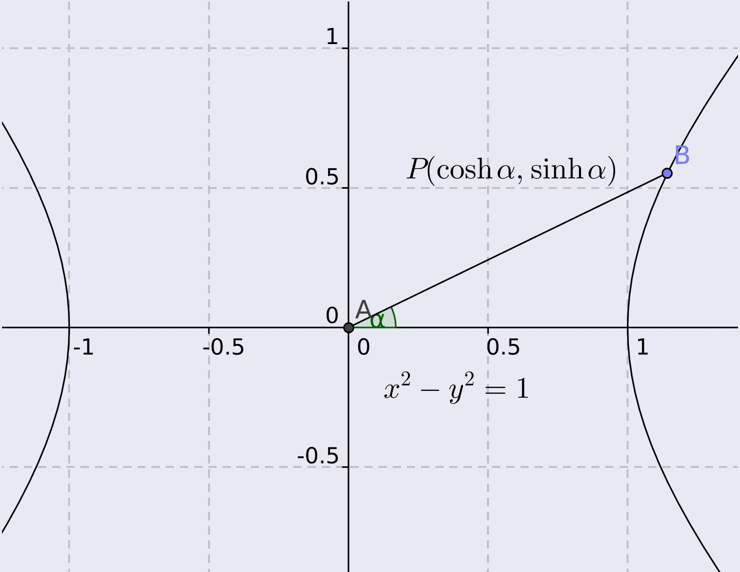
Funções Hiperbólicas

Funções Hiperbólicas



Funções Hiperbólicas

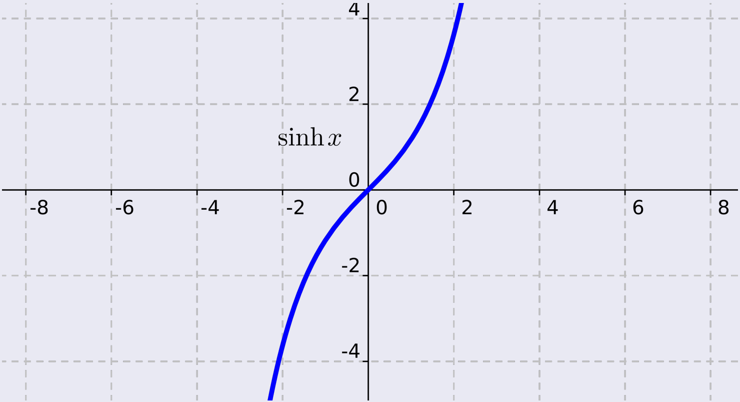
Funções Hiperbólicas



Definição

Seno Hiperbólico

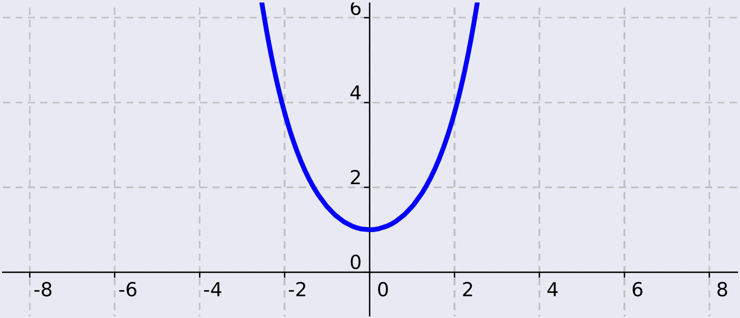
$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}.$$



Definição

Cosseno Hiperbólico

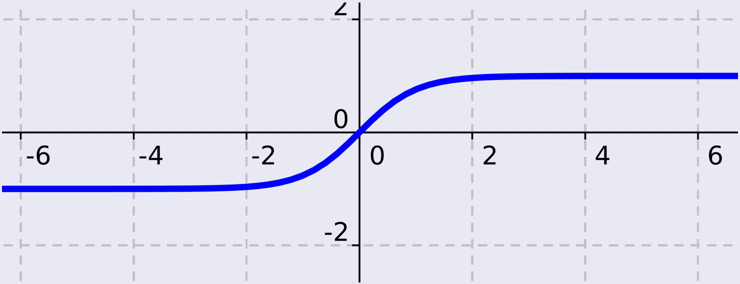
$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}.$$



Definição

Tangente Hiperbólico

$$\sinh x = \frac{\sinh x}{\cosh x}.$$



Funções Hiperbólicas

Identidade

$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$$

Derivadas

$$\frac{d}{dx}[\sinh x] = \cosh x.$$
$$\frac{d}{dx}[\cosh x] = \sinh x.$$
$$\frac{d}{dx}[\tanh x] = \operatorname{sech}^2 x.$$

Funções Hiperbólicas

Exemplo

Mostre que

$$\sinh^{-1} x = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}).$$

Exemplo

Mostre que

$$\frac{d}{dx}\left[\sinh^{-1} x\right] = \frac{1}{\sqrt{1 + x^2}}.$$