ZEITSCHRIFT FÜR
PHYSIK

HERAUSGEGEBEN UNTER MITWIRKUNG
DER
DEUTSCHEN PHYSIKALISCHEN GESELLSCHAFT

VON

KARL SCHEEL

2286

VIERZIGSTER BAND

Mit 202 Textfiguren

(Abgeschlossen November 1926 — Januar 1927)

MIT REGISTER FÜR BAND 36 BIS 40

VERLAG VON JULIUS SPRINGER, BERLIN
1927

Der Comptoneffekt nach der Schrödingerschen Theorie.

Von W. Gordon in Berlin.

(Eingegangen am 29. September 1926.)

Die beim Comptoneffekt ausgestrahlten Frequenzen und Intensitäten werden nach der Schrödingerschen Theorie berechnet. Die quantentheoretischen Größen ergeben sich als geometrische Mittel aus den klassischen Größen des Anfangs- und Endzustandes des Prozesses.

1. Aufstellung der Differentialgleichung für ψ. Heisenberg und Schrödinger haben Methoden angegeben zur Bestimmung der Quantenfrequenzen und Intensitäten. Der Comptoneffekt ist bereits von Dirac[1]) nach der Heisenbergschen Methode gerechnet worden. Hier soll dasselbe Problem nach Schrödinger behandelt werden. Das Verfahren von Schrödinger hat den Vorzug, sich der gebräuchlichen mathematischen Hilfsmittel zu bedienen. Es beruht auf der Ermittlung einer Größe ψ, die für ein einzelnes Elektron eine Funktion der kartesischen Raumkoordinaten x_1, x_2, x_3 und der Zeit t ist. Schrödinger hat zwei Regeln aufgestellt zur Gewinnung der linearen partiellen Differentialgleichung zweiter Ordnung, der ψ zu genügen hat. Beide stehen in gewisser Beziehung zur klassischen Vorschrift, nach der man die Hamilton-Jacobische Differentialgleichung für die Wirkungsfunktion W erhält: Man ersetze in der Relation $f(x, t, p, E) = 0$, die die Energie E definiert, für die Impulse p_1, p_2, p_3 die Ableitungen von W nach den entsprechenden Koordinaten und für E die negative zeitliche Ableitung nach der Zeit. Nach der einen der Schrödingerschen Regeln[2]) setzt man statt der Ableitungen ihre mit $h/2\pi i$ multiplizierten Symbole und wendet den so entstehenden Differentialoperator auf ψ an (wobei zur Vermeidung von Unbestimmtheiten Symmetrisierungsannahmen gemacht werden müssen). Die klassische und die Quantenvorschrift

$$p_k = \frac{\partial W}{\partial x_k}, \quad E = -\frac{\partial W}{\partial t}; \quad p_k = \frac{h}{2\pi i}\frac{\partial}{\partial x_k}, \quad E = -\frac{h}{2\pi i}\frac{\partial}{\partial t}, \tag{1}$$

schreiben sich, wenn man in bekannter Weise die imaginären Größen

$$x_4 = i c t, \quad p_4 = \frac{iE}{c} \tag{2}$$

[1]) P. A. M. Dirac, Proc. Roy. Soc. **111**, 405, 1926.
[2]) E. Schrödinger, Ann. d. Phys. **79**, 734, 1926.

einführt, in der symmetrischen Form

$$p_\alpha = \frac{\partial W}{\partial x_\alpha}; \quad p_\alpha = \frac{h}{2\pi i}\frac{\partial}{\partial x_\alpha}, \tag{1a}$$

wo hier, wie auch im folgenden, k 1, 2, 3 und α 1, 2, 3, 4 bedeuten.

Die Definitionsgleichung für die kinetische Energie lautet in der Relativitätsmechanik

$$\sum p_k^2 - \frac{E^2}{c^2} + m^2 c^2 = 0 \tag{3}$$

(m Elektronenmasse, c Lichtgeschwindigkeit) oder nach (2)

$$\sum p_\alpha^2 + m^2 c^2 = 0. \tag{3a}$$

Das Elektron befinde sich nun in einem elektromagnetischen Felde mit den Vektorpotentialkomponenten Φ_1, Φ_2, Φ_3 und dem skalaren Potential Φ_0, zwischen denen die Beziehung

$$\sum \frac{\partial \Phi_k}{\partial x_k} + \frac{1}{c}\frac{\partial \Phi_0}{\partial t} = 0 \tag{4}$$

besteht, und aus denen sich die elektrischen und magnetischen Feldstärken nach den Formeln

$$E_k = -\frac{\partial \Phi_0}{\partial x_1} - \frac{1}{c}\frac{\partial \Phi_k}{\partial t}, \quad H_1 = \frac{\partial \Phi_3}{\partial x_2} - \frac{\partial \Phi_2}{\partial x_3} \tag{5}$$

und zyklischen Vertauschungen berechnen. Führen wir

$$\Phi_4 = i\,\Phi_0 \tag{6}$$

ein, so nehmen (4) und (5) mit Benutzung von (2_1) die Gestalt

$$\sum \frac{\partial \Phi_\alpha}{\partial x_\alpha} = 0, \tag{4a}$$

$$E_k = i\left(\frac{\partial \Phi_4}{\partial x_k} - \frac{\partial \Phi_k}{\partial x_4}\right), \quad H_1 = \frac{\partial \Phi_3}{\partial x_2} - \frac{\partial \Phi_2}{\partial x_3} \tag{5a}$$

an. Diese Formeln zeigen, daß Φ_α bis auf einen additiven Ausdruck der Form $\frac{\partial f}{\partial x_\alpha}$ bestimmt ist, wo f der Wellengleichung $\sum \frac{\partial^2 f}{\partial x_\alpha^2} = 0$ genügt.

Ist ein Feld vorhanden, so erklärt man als Energie: kinetische Energie plus Feldenergie $e\,\Phi_0$ (e Elektronenladung), und dann aus Invarianzgründen als Impulse: kinetische Impulse plus „Feldimpulse" $\frac{e}{c}\Phi_k$. Aus (3) und (3a) wird so

$$\sum \left(p_k - \frac{e}{c}\Phi_k\right)^2 - \frac{(E - e\,\Phi_0)^2}{c^2} + m^2 c^2 = \sum\left(p_\alpha - \frac{e}{c}\Phi_\alpha\right)^2 + m^2 c^2 = 0. \tag{7}$$

Die Hamilton-Jacobische bzw. Schrödingersche Differentialgleichung wird demnach gemäß (1 a)

$$\sum\left(\frac{\partial W}{\partial x_\alpha}-\frac{e}{c}\,\Phi_\alpha\right)^2+m^2c^2=0 \tag{8}$$

bzw.

$$\left\{\sum\left(\frac{h}{2\pi i}\,\frac{\partial}{\partial x_\alpha}-\frac{e}{c}\,\Phi_\alpha\right)^2+m^2c^2\right\}\psi=0$$

oder nach Ausführung des Quadrats und Multiplikation mit $-\frac{4\pi^2}{h^2}$

$$\sum\frac{\partial^2\psi}{\partial x_\alpha^2}-\frac{4\pi i}{h}\,\frac{e}{c}\sum\Phi_\alpha\frac{\partial\psi}{\partial x_\alpha}-\frac{4\pi^2}{h^2}\left(\frac{e^2}{c^2}\sum\Phi_\alpha^2+m^2c^2\right)\psi=0; \tag{9}$$

denn die zunächst vorhandene Unbestimmtheit, ob man $\sum\Phi_\alpha\frac{\partial\psi}{\partial x_\alpha}$ oder $\sum\frac{\partial(\Phi_\alpha\psi)}{\partial x_\alpha}$ schreiben soll, hebt sich auf Grund von (4a). Einer Vermehrung von Φ_α um $\frac{\partial f}{\partial x_\alpha}$ entspricht eine Vermehrung von W um $\frac{e}{c}\,f$ und eine Multiplikation von ψ mit $e^{\frac{2\pi i}{h}\frac{e}{c}f}$.

Die Differentialgleichung (9) zusammen mit der für die konjugiert-komplexe Funktion $\overline{\psi}$ können aus der Variation des Integrals

$$\left.\begin{aligned}J&=\int H\,dx_1\,dx_2\,dx_3\,dx_4,\\ H&=\sum\frac{\partial\psi}{\partial x_\alpha}\frac{\partial\overline{\psi}}{\partial x_\alpha}+\frac{2\pi i}{h}\,\frac{e}{c}\sum\left(\overline{\psi}\,\frac{\partial\psi}{\partial x_\alpha}-\psi\,\frac{\partial\overline{\psi}}{\partial x_\alpha}\right)\Phi_\alpha\\ &\qquad+\frac{4\pi^2}{h^2}\left(\frac{e^2}{c^2}\sum\Phi_\alpha^2+m^2c^2\right)\psi\,\overline{\psi}\end{aligned}\right\} \tag{10}$$

erhalten werden, wenn man ψ und $\overline{\psi}$ als unabhängige Funktionen behandelt, deren Variationen an der Grenze des Integrationsgebietes verschwinden. Daraus ergibt sich die Verallgemeinerung der anderen Schrödingerschen Regel[1]): Man hermitisiere die Hamilton-Jacobische Gleichung (8)

$$\sum\left(\frac{\partial W}{\partial x_\alpha}-\frac{e}{c}\,\Phi_\alpha\right)\left(\frac{\partial\overline{W}}{\partial x_\alpha}-\frac{e}{c}\,\Phi_\alpha\right)+m^2c^2=0$$

und mache in ihr die Substitution $W=\frac{h}{2\pi i}\log\psi$, wodurch die linke Seite nach Multiplikation mit $\frac{4\pi^2}{h^2}\,\psi\,\overline{\psi}$ in den Ausdruck H von (10) übergeht.

---

[1]) E. Schrödinger, Ann. d. Phys. **79**, 361, 1926.

Statt aber $H = 0$ zu setzen, setze man die Variation des Integrals $\int H\, d x_1\, d x_2\, d x_3\, d x_4$ gleich Null. Im limes $h = 0$ wird W reell und (9) geht in (8) über.

Sind die Potentiale zeitunabhängig, so kann man in Übereinstimmung mit (1) den Ansatz

$$\psi = u\, e^{-\frac{2\pi i}{h} E t} \tag{11}$$

mit zeitunabhängigem u machen. Aus (9) und (10) wird dann

$$\sum \frac{\partial^2 u}{\partial x_k^2} - \frac{4\pi i}{h} \frac{e}{c} \sum \Phi_k \frac{\partial u}{\partial x_k} - \frac{4\pi^2}{h^2} \left\{ \frac{e^2}{c^2} \sum \Phi_k^2 - \frac{(E - e\Phi_0)^2}{c^2} + m^2 c^2 \right\} u = 0, \tag{9a}$$

$$\left.\begin{aligned} J &= \int H\, d x_1\, d x_2\, d x_3, \\ H &= \sum \frac{\partial u}{\partial x_k} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x_k} + \frac{2\pi i}{h} \frac{e}{c} \sum \left(\bar{u} \frac{\partial u}{\partial x_k} - u \frac{\partial \bar{u}}{\partial x_k} \right) \Phi_k \\ &\quad + \frac{4\pi^2}{h^2} \left(\frac{e^2}{c^2} \sum \Phi_k^2 - \frac{(E - e\Phi_0)^2}{c^2} + m^2 c^2 \right) u\, \bar{u}. \end{aligned}\right\} \tag{10a}$$

Im Falle der klassischen Mechanik hat man E durch $E + m c^2$ zu ersetzen und zur Grenze $c = \infty$ überzugehen; davon bleibt jedoch $\frac{e}{c} \Phi_k$ unberührt, denn hier stammt das c daher, daß e in elektrostatischen Einheiten gemessen gedacht ist. In diesem Sinne hat man in (9) und (10) $\frac{\partial}{\partial t}$ durch $\frac{\partial}{\partial t} - \frac{2\pi i}{h} m c^2$, in (9a) und (10a) $\frac{(E - c\Phi_0)^2}{c^2} - m^2 c^2$ durch $2 m (E - c\Phi_0)$ zu ersetzen. Die beiden letzten Gleichungen erhalten dann für $\Phi_k = 0$ die Form, in der sie von Schrödinger mitgeteilt wurden [1]).

2. Bestimmung der Strahlung aus ψ. Klassisch berechnet man die Strahlung mit Hilfe der Bewegung des Elektrons. Aus einem vollständigen Integral von (8) mit den drei Konstanten c_k erhält man die Bewegung in dem durch diese Konstanten definierten Zustand durch die Formeln

$$\frac{\partial W}{\partial c_k} = d_k, \tag{12}$$

wo die d_k drei weitere Konstanten sind. (12) gibt aufgelöst die Koordinaten als Funktionen der Zeit.

---

[1]) E. Schrödinger, Ann. d. Phys., l. c. und **79**, 489, 1926.

In der Quantentheorie kann man nicht von der Bewegung in einem Zustand reden, sondern alle Bewegungen sind miteinander verkoppelt. Die möglichen Strahlungen sind die eines Systems räumlich verteilter Ströme und Ladungen, die sich auf die folgende Weise aus der Funktion ψ ableiten. Multiplizieren wir (9) mit $\bar{\psi}$ und die für $\bar{\psi}$ gültige konjugiert-komplexe Gleichung mit ψ und subtrahieren beide Gleichungen voneinander, so erhalten wir unter Beachtung von (4a)

$$\sum \frac{\partial s_\alpha}{\partial x_\alpha} = 0 \tag{13}$$

mit

$$s_\alpha = \frac{1}{i}\left(\bar{\psi}\frac{\partial \psi}{\partial x_\alpha} - \psi \frac{\partial \bar{\psi}}{\partial x_\alpha} - \frac{4\pi i}{h}\frac{e}{c}\Phi_\alpha \psi \bar{\psi}\right). \tag{14}$$

Setzen wir zur reellen Darstellung übergehend

$$s_k = s_k, \quad s_4 = i c \varrho, \tag{15}$$

so schreibt sich (13)

$$\sum \frac{\partial s_k}{\partial x_k} + \frac{\partial \varrho}{\partial t} = 0. \tag{13a}$$

Wir sind also dazu berechtigt, die s_k als Komponenten einer Stromdichte und ϱ als Ladungsdichte anzusprechen; denn zwischen diesen Größen besteht die Kontinuitätsgleichung (13a) und a priori haben diese Größen keine andere Bedingung zu erfüllen, um in den Maxwellschen Gleichungen als Quellen eines elektromagnetischen Feldes fungieren zu können. Der Faktor $1/i$ wurde in (14) hinzugefügt, damit die s_k und ϱ reell werden. Man bestätigt leicht, daß diese Größen unabhängig von der oben erwähnten Unbestimmtheit in den Potentialen Φ_α sind. Sie werden aus der Hamiltonschen Funktion H (10) durch Ableitungen nach den Potentialen erhalten, wie das auch in der Mieschen Theorie der Materie der Fall ist[1]). Es ist

$$s_\alpha = -\frac{h}{2\pi}\frac{e}{c}\frac{\partial H}{\partial \Phi_\alpha}. \tag{16}$$

Das von den Dichten erzeugte Feld ergibt sich aus den retardierten Potentialen

$$\Phi_\alpha = \frac{1}{c}\int \frac{[s_\alpha]}{R}\,d x, \quad d x = d x_1\, d x_2\, d x_3 \tag{17}$$

mittels der Formeln (5a). R ist die Entfernung des Volumenelements dx vom Aufpunkt, und die eckige Klammer soll anzeigen, daß für t der Wert $t - \frac{R}{c}$ einzusetzen ist. Die Ausstrahlung ist gleich der von dem

[1]) Vgl. z. B. M. v. Laue, Relativitätstheorie II, Gl. (271).

elektrischen Schwerpunkt der Ladungen herrührenden Ausstrahlung. Der Schwerpunkt ist definiert durch

$$e X_k = \int x_k \varrho \, d x, \quad e = \int \varrho \, d x, \tag{18}$$

was man mit $X_4 = i c t$ zu

$$e X_\alpha = \int x_\alpha \varrho \, d x \tag{18a}$$

zusammenfassen kann.

Aus der Kontinuitätsgleichung (13 a) folgt, wenn die Ströme an den Grenzen des Raumes in hinreichendem Maße verschwinden:

$$0 = \sum_k \int \frac{\partial s_k}{\partial x_k} d x = - \int \frac{\partial \varrho}{\partial t} d x,$$

$$0 = \sum_r \int \frac{\partial (x_k s_r)}{\partial x_r} d x = - \int x_k \frac{\partial \varrho}{\partial t} d x + \int s_k d x.$$

Die erste Gleichung besagt, daß, wie es sein muß, die Gesamtladung zeitlich konstant ist, die zweite, daß die Geschwindigkeit des Schwerpunktes gegeben ist durch

$$e \frac{d X_k}{d t} = \int s_k \, d x \tag{19}$$

oder zusammen mit der letzten Gleichung (18)

$$e \frac{d X_\alpha}{d t} = \int s_\alpha \, d x \text{ [1]}. \tag{19a}$$

Damit für $h = 0$ das Feld das klassische wird (Korrespondenzprinzip), muß (18) für $h = 0$ in die Gesamtheit der klassisch möglichen Bewegungen übergehen [2]. Insbesondere muß die Gesamtladung gleich der Ladung des Elektrons sein, wie wir schon durch die Bezeichnung angedeutet haben.

---

[1] Anmerkung bei der Korrektur. Man kann mit E. Madelung (Naturwiss. **14**, 1004, 1926) die Ströme als mit der Geschwindigkeit $\mathfrak{u} = \mathfrak{s}/\varrho$ ($\mathfrak{s} = s_1, s_2, s_3$) bewegte Elektrizität auffassen. Ihre Massendichte ist dann $m \sigma = m \varrho / e$. X_k und $\frac{d X_k}{d t}$ ist dann Ort und Geschwindigkeit des Massenschwerpunkts. — Bei Vernachlässigung des Magnetfeldes und der Relativität ergibt (14) $\mathfrak{s} = 1/i . (\overline{\psi} \operatorname{grad} \psi - \psi \operatorname{grad} \overline{\psi}) = 2 \psi \overline{\psi} \mathfrak{a}''$ (nach Madelungs Bezeichnung), $\varrho = \frac{4 \pi m}{h} \psi \overline{\psi}$, so daß $\mathfrak{u} = \frac{h}{2 \pi m} \mathfrak{a}''$, wie bei Madelung.

[2] Bei dieser Bestimmung bleibt die Möglichkeit von Zusatzgliedern, die für $h = 0$ verschwinden, bestehen. (Vgl. Anm. 1, S. 127.)

Nehmen wir zunächst an, daß die Gleichung (9) bei natürlichen Randbedingungen eine Reihe von diskreten Lösungen $\psi_1, \psi_2, \ldots$ besitzt, die wir zur Summe

$$\psi = \sum_l z_l \psi_l \tag{20}$$

zusammenfassen. Die (reellen) Konstanten z_l sind maßgebend für die Gewichte der Zustände l. Die Dichten (14) werden

$$s_\alpha = \sum_{lm} z_l z_m s_\alpha^{(lm)} \tag{21}$$

mit

$$s_\alpha^{(lm)} = \frac{1}{i}\left(\overline{\psi}_m \frac{\partial \psi_l}{\partial x_\alpha} - \psi_l \frac{\partial \overline{\psi}_m}{\partial x_\alpha} - \frac{4\pi i}{h}\frac{e}{c}\Phi_\alpha \psi_l \overline{\psi}_m\right). \tag{21 a}$$

Die $s_\alpha^{(lm)}$ bilden die Elemente einer hermitischen Matrix, sie leiten sich in der Weise (16) aus einer hermitischen Matrix $H^{(lm)}$ her, die aus H (10) dadurch entsteht, daß man ψ durch ψ_l und $\overline{\psi}$ durch $\overline{\psi}_m$ ersetzt. Die Bewegung wird gemäß (18), (19) und (21) repräsentiert durch

$$X_k = \sum_{lm} z_l z_m X_k^{(lm)}, \qquad \frac{d X_k}{dt} = \sum_{lm} z_l z_m \frac{d X_k^{(lm)}}{dt} \tag{22}$$

mit

$$e X_k^{(lm)} = \int x_k \varrho^{(lm)}\, dx, \qquad e\frac{d X_k^{(lm)}}{dt} = \int s_k^{(lm)}\, dx. \tag{22a}$$

Die $X_k^{(lm)}$ sind die Heisenbergschen Matrizen, falls die Funktionen ψ_l geeignet normiert werden. Im Falle (11) folgt aus (22a) ihre Schrödingersche Darstellung [1]).

Wenn der Index l kontinuierlicher Werte fähig ist, treten an Stelle der Summen Integrale.

3. Anwendung auf den Comptoneffekt. Die Primärstrahlung werde wiedergegeben durch eine ebene linear polarisierte Welle der Richtung n_1, n_2, n_3 und der Schwingungszahl ν. Ihre Potentiale sind

$$\Phi_\alpha = a_\alpha \cos\varphi, \quad a_4 = i a_0 \tag{23}$$

mit der Phase

$$\varphi = \frac{2\pi\nu}{c}\left(\sum n_k x_k - ct\right) = \sum l_\alpha x_\alpha = l x, \tag{24}$$

wenn

$$l_k = \frac{2\pi\nu}{c} n_k, \quad l_4 = i l_0 = i\frac{2\pi\nu}{c} \tag{25}$$

gesetzt wird und Summen der Form $\sum f_\alpha g_\alpha$ zur Abkürzung fg geschrieben werden. Die Relation $\sum n_k^2 = 1$ und die Bedingung (4a) ergeben

$$l^2 = 0, \qquad al = 0. \tag{26}$$

[1]) E. Schrödinger, Ann. d. Phys. 79, 734, 1926.

Das Feld ist nach (5 a)

$$\left.\begin{array}{l} E_k = i\,(a_k l_4 - a_4 l_k)\sin\varphi = \dfrac{2\pi\nu}{c}(a_0 n_k - a_k)\sin\varphi, \\ H_1 = (a_2 l_3 - a_3 l_2)\sin\varphi \text{ und zyklische Vertauschungen.} \end{array}\right\} \quad (27)$$

Der elektrische Vektor liegt in der Ebene durch den Vektor a_k und die Wellennormale senkrecht zu dieser und der magnetische Vektor senkrecht zu jener Ebene. Beide sind der Größe nach gleich $\frac{2\pi\nu}{c}\sqrt{a\,a}\sin\varphi$.

Die Differentialgleichungen (8) und (9) lauten mit den Werten (23) für die Φ_α bei Vernachlässigung von a_α^2

$$\sum\left(\frac{\partial W}{\partial x_\alpha}\right)^2 - 2\left(b\,\frac{\partial W}{\partial x}\right)\cos\varphi + m^2 c^2 = 0,$$

$$\sum\frac{\partial^2\psi}{\partial x_\alpha^2} - \frac{4\pi i}{h}\left(b\,\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)\cos\varphi - \frac{4\pi^2}{h^2}\,m^2 c^2\,\psi = 0$$

mit

$$b_\alpha = \frac{e}{c}\,a_\alpha. \quad (28)$$

Sie werden gelöst durch

$$W = p\,x + \frac{p\,b}{p\,l}\sin\varphi, \quad \psi = e^{\frac{2\pi i}{h}W}, \quad (29)$$

wenn zwischen den Integrationskonstanten p_α (deren Bedeutung sich sogleich ergeben wird) die Beziehung (3 a) besteht, wie man leicht unter Beachtung von (26) bestätigt[1]).

Wir bestimmen zunächst die klassische Bewegung nach (12), Nehmen wir $p_k = c_k$ zu unabhängigen Integrationskonstanten, so daß nach (3)

$$\frac{\partial E}{\partial p_k} = \frac{c^2 p_k}{E}. \quad (30)$$

Die Formeln (12) ergeben, wenn man mittels (2), (23), (28) und (25) zur reellen Darstellung übergeht

$$x_k = \frac{c^2 p_k}{E}t + \frac{c}{E(p\,l)}\left[\frac{p\,b}{p\,l}\left(l_k\frac{E}{c} - l_0 p_k\right) - \left(b_k\frac{E}{c} - b_0 p_k\right)\right]\sin\varphi + d_k. \quad (31)$$

Für die Phase ist hier nach (24) in unserer Näherung (abgesehen von einer Konstanten)

$$\varphi = 2\pi\nu\left(\sum n_k\frac{c\,p_k}{E} - 1\right)t = \frac{c^2}{E}(p\,l)\,t \quad (32)$$

---

[1]) Die Beziehnung (29) zwischen ψ und W, die sonst nur für kleine h gilt, gilt hier streng, auch, wenn man b^2 nicht vernachlässigt, wobei zu W das Glied $-\frac{b^2}{8\,p\,l}(2\varphi + \sin 2\varphi)$ hinzukommt.

zu setzen. Die Geschwindigkeiten sind dann

$$\frac{d x_k}{d t} = \frac{c^2 p_k}{E} + \frac{c^3}{E^2}\left[\frac{p\, b}{p\, l}\left(l_k \frac{E}{c} - l_0 p_k\right) - \left(b_k \frac{E}{c} - b_0 p_k\right)\right] \cos \varphi. \quad (33)$$

Die Bewegung besteht also in einer geradlinig gleichförmigen Bewegung mit der Geschwindigkeit $v \left(v_k = \frac{c^2 p_k}{E}\right)$, über die sich eine harmonische Schwingung mit der Frequenz

$$\nu_b = \nu\left(1 - \sum n_k \frac{c\, p_k}{E}\right) = \nu\left(1 - \frac{v}{c}\cos \vartheta\right) \quad (34)$$

lagert, wo ϑ der Winkel zwischen Geschwindigkeitsrichtung und Wellennormalen ist.

Die Quantengesetze der Bewegung und Ausstrahlung ergeben sich aus der Kenntnis der Dichten s_α. Wir multiplizieren die Lösung ψ von (29) zu Normierungszwecken mit einer (reellen) Funktion $C(p_1, p_2, p_3)$ der Konstanten p_k und bilden nach dem Muster (20) die Gesamtlösung

$$\psi = \int z(p)\, C(p)\, e^{\frac{2\pi i}{h} W} d p, \quad d p = d p_1\, d p_2\, d p_3, \quad (35)$$

das Integral über den ganzen p-Raum erstreckt. Wir führen analog zum Energie-Impulsvektor des Elektrons die entsprechenden Größen für das primäre Lichtquant ein

$$\pi_\alpha = \frac{h}{2\pi} l_\alpha, \quad \text{d. h.} \quad \pi_k = \frac{h\nu}{c} n_k, \quad \pi_4 = i\frac{\varepsilon}{c} = i\frac{h\nu}{c} \quad (36) \text{ [nach (25)]}$$

Die de Broglieschen Phasen für Elektron und Lichtquant sind dann

$$f = \frac{2\pi}{h}(p\, x), \quad \varphi = \frac{2\pi}{h}(\pi\, x). \quad (37)$$

Die Phase $\frac{2\pi}{h} W$ wird dann gemäß (29)

$$\frac{2\pi}{h} W = f + k \sin \varphi \quad (38)$$

mit

$$k = \frac{p\, b}{p\, \pi}. \quad (38\text{a})$$

Bilden wir nunmehr mit (35) die s_α von (14). Nach (37), (38) und (38a) ist

$$\psi \bar{\psi} = \int e^{\frac{2\pi i}{h}\delta W} z(p) z(p') C(p) C(p')\, d p\, d p',$$

$$\bar{\psi}\frac{\partial \psi}{\partial x_\alpha} = \frac{2\pi i}{h}\int (p_\alpha + k\pi_\alpha \cos \varphi)\, e^{\frac{2\pi i}{h}\delta W} z(p) z(p')\, C(p)\, C(p')\, d p\, d p',$$

wo $\delta F(p)$ die Differenz $F(p) - F(p')$ bedeutet. Bildet man von dem letzten Ausdruck den konjugiert komplexen Wert, indem man gleichzeitig gestrichene und ungestrichene Größen vertauscht (was gestattet ist, da es auf die Bezeichnung der Integrationsvariabeln nicht ankommt), so entsteht

$$\psi \frac{\partial \overline{\psi}}{\partial x_\alpha} = -\frac{2\pi i}{h} \int (p'_\alpha + k' \pi_\alpha \cos \varphi)\, e^{\frac{2\pi i}{h} \delta W} z(p) z(p') C(p) C(p')\, dp\, dp'.$$

Damit haben wir alles zusammen, um die s_α von (14) bilden zu können. Man findet, wenn man noch (23) und (28) berücksichtigt,

$$s_\alpha = \frac{2\pi}{h} \int \{\sigma p_\alpha + (\pi_\alpha \sigma k - 2 b_\alpha) \cos \varphi\}\, e^{\frac{2\pi i}{h} \delta W} z(p) z(p') C(p) C(p')\, dp\, dp',$$

wo $\sigma F(p)$ die Summe $F(p) + F(p')$ bedeutet. In unserer Näherung ist hier nach (38) $e^{\frac{2\pi i}{h} \delta W}$ durch $e^{i \delta f}(1 + i \delta k \sin \varphi)$ zu ersetzen, so daß die geschweifte Klammer, multipliziert mit $e^{\frac{2\pi i}{h} \delta W}$, gleich

$$\{\sigma p_\alpha + i \delta k \sigma p_\alpha \sin \varphi + (\pi_\alpha \sigma k - 2 b_\alpha) \cos \varphi\}\, e^{i \delta f}$$

wird, wofür man auch

$$\Re \{\sigma p_\alpha e^{i \delta f} + (\delta k \sigma p_\alpha + \pi_\alpha \sigma k - 2 b_\alpha)\, e^{i (\delta f + \varphi)}\}$$

einsetzen kann [$\Re$ = reeller Teil] [1]). Man bestätigt dies, indem man in

$$s_\alpha = \frac{2\pi}{h} \Re \int (\sigma p_\alpha e^{i \delta f} + T_\alpha e^{i (\delta f + \varphi)})\, z(p) z(p') C(p) C(p')\, dp\, dp', \tag{39}$$

$$T_\alpha = \delta k \sigma p_\alpha + \pi_\alpha \sigma k - 2 b_\alpha \tag{40}$$

zur Bildung des reellen Teiles i mit $-i$ und gestrichene und ungestrichene Größen vertauscht und das arithmetische Mittel beider Integrale nimmt. Man kann also in (39) statt der e-Funktionen die entsprechenden cos schreiben.

Um die Funktionen C zu bestimmen, vergleichen wir die „Quantenbewegung“ (19) mit der klassischen Bewegung (33) [2]). Wir haben also (39) über den gesamten Raum der x_k zu integrieren. Die dadurch entstehenden Integrale über die p'_k und die x_k können auf die Form

$$\int F(P, P')\, e^{\frac{2\pi i}{h} \sum x_k (P_k - P'_k)}\, dP'\, dx$$

---

1) Die Größen mit dem Index $\alpha = 4$ sind dabei als reell zu betrachten. Erst nach Bildung des reellen Teiles sind ihre imaginären Werte einzusetzen.

2) Die Koordinaten X_k von (18) ergeben sich aus (19) durch Integration nach der Zeit. Die Integrationskonstanten spielen keine Rolle für die Bestimmung der Ausstrahlung.

gebracht werden, was nach dem Fourierschen Integraltheorem gleich

$$h^3 F(P, P)$$

ist. So wird mit $P_k = p_k$, $P'_k = p'_k$

$$\left.\begin{aligned}\delta f &= \frac{2\pi}{h}\sum x_k (P_k - P'_k) - \frac{2\pi}{h}(E - E')\,t,\\ &\int \sigma\, p_\alpha e^{i\delta f} z(p')\, C(p')\, dp'\, dx = 2 h^3 p_\alpha z(p)\, C(p),\end{aligned}\right\} \tag{41}$$

da aus $p_k = p'_k$ auch $p_4 = p'_4$, d. h. $E = E'$ folgt. Mit $P_k = p_k + \pi_k$, $P'_k = p'_k$ wird

$$\left.\begin{aligned}\delta f + \varphi &= \frac{2\pi}{h}\sum x_k (P_k - P'_k) - \frac{2\pi}{h}(E + \varepsilon - E')\,t,\\ &\int T_\alpha e^{i(\delta f + \varphi)} z(p')\, C(p')\, dp'\, dx = h^3 T_\alpha e^{-2\pi i \nu^* t} z(p')\, C(p'),\end{aligned}\right\} \tag{42}$$

$$\nu^* = \frac{E + \varepsilon - E}{h}, \tag{42a}$$

wo $p'_k = p_k + \pi_k$ einzusetzen ist. Führt man

$$\pi_k^* = 0, \quad \pi_4^* = i\,\frac{h\nu^*}{c} \tag{43}$$

ein, so kann man diese Bedingung zusammen mit (42a) in der symmetrischen Form

$$p_\alpha + \pi_\alpha = p'_\alpha + \pi_\alpha^* \tag{44}$$

schreiben. (19a) lautet somit nach (39), (41) und (42)

$$\frac{dX_\alpha}{dt} = 4\pi h^2 \int p_\alpha z^2(p)\, C^2(p)\, dp + 2\pi h^2 \int T_\alpha z(p) z(p')\, C(p)\, C(p') \cos 2\pi\nu^* t\, dp. \tag{45}$$

Setzt man also

$$C^2 = \frac{e c^2}{4\pi h^2 E} \tag{46}$$

und $z^2 dp$ gleich dem Gewicht des Zustandes p, d. h. gleich der relativen Anzahl Elektronen in diesem Zustand, so kommen die von der gleichförmigen Bewegung herrührenden Teile in (33) und (45) für $\alpha = k$ zur Übereinstimmung [1]). Für $\alpha = 4$ muß wegen der zeitlichen Konstanz der Gesamtladung e das zweite Integral in (45) verschwinden. Dies ergibt für die Gewichte die Relation

$$\int z^2 dp = 1 \tag{47}$$

wie es sein muß.

---

[1]) Es ist sehr plausibel, anzunehmen, daß die geradlinig-gleichförmige Bewegung klassisch und quantentheoretisch übereinstimmen, so daß die in der Anmerkung 2, S. 122 erwähnten Zusatzglieder fortfallen.

Wir wollen zeigen, daß mit (46) auch die Schwingungsteile für $h = 0$ in Übereinstimmung kommen. Aus (44) folgt

$$p'^2 = p^2 + 2\,p\,\pi + \pi^2 - 2\,p\,\pi^* - 2\,\pi\pi^* + \pi^{*2}$$

oder, da nach (3 a) $p'^2 = p^2 = -m^2 c^2$ und nach (26) und (36) $\pi^2 = 0$,

$$p\,\pi = p\,\pi^* + \pi\,\pi^* - \frac{\pi^{*2}}{2}. \tag{48}$$

Daraus folgt, wenn man nach (2), (36) und (43) zur reellen Darstellung übergeht,

$$\nu^* = \frac{\nu\left(1 - \sum \frac{c\,n_k p_k}{E}\right)}{1 + \frac{2\,h\nu - h\nu^*}{2\,E}}. \tag{48 a}$$

Für $h = 0$ stimmt also ν^* mit ν_b (34) überein. T_α (40) wird nach (44)

$$T_\alpha = 2\,k\,\pi_\alpha + \delta\,k\,(2\,p_\alpha - \pi_\alpha^*) - 2\,b_\alpha. \tag{49}$$

Multiplizieren wir (44) mit b_α und summieren über α, so erhalten wir wegen der aus (26_2) in Verbindung mit (28) und (36) folgenden Beziehung $\pi\,b = 0$: $p'b = p\,b - \pi^* b$. Analog entsteht durch Multiplikation von (44) mit π_α wegen der schon benutzten Beziehung $\pi^2 = 0$: $p'\pi = p\,\pi - \pi\,\pi^*$. So wird nach (38 a)

$$\delta\,k = \frac{p\,b}{p\,\pi} - \frac{p\,b - \pi^* b}{p\,\pi - \pi\,\pi^*} = \frac{p\,\pi\,.\,\pi^* b - p\,b\,.\,\pi\,\pi^*}{p\,\pi\,(p\,\pi - \pi\,\pi^*)}$$

oder nach (48)

$$\delta\,k = \frac{\pi^* b - k\,.\,\pi\,\pi^*}{\pi^* p - \frac{\pi^{*2}}{2}}. \tag{50}$$

Die Gleichungen (48), (49) und (50) folgen aus (44) und gelten unabhängig von den speziellen Werten (43) für π_α^*. Für diese Werte wird aus (50)

$$\delta\,k = \frac{b_4 - k\,\pi_4}{p_4 - \frac{\pi_4^*}{2}} \tag{50 a}$$

Mit der Abkürzung $\mathfrak{p}_\alpha = p_\alpha - \frac{\pi_\alpha^*}{2}$ entsteht so aus (49)

$$T_\alpha = \frac{2}{\mathfrak{p}_4}\left\{k\,(\pi_\alpha \mathfrak{p}_4 - \pi_4 \mathfrak{p}_\alpha) - (b_\alpha \mathfrak{p}_4 - b_4 \mathfrak{p}_\alpha)\right\}. \tag{51}$$

Daraus folgt zunächst $T_4 = 0$. Es verschwindet also, wie wir schon oben geschlossen haben, der Schwingungsteil in (45) für $\alpha = 4$. Für

$\alpha = k$ wird nach (36), (38a) und (43) mit $\mathfrak{p}_4 = i\frac{\mathfrak{E}}{c} = \frac{i}{c}\left(E - \frac{h\nu^*}{2}\right)$

$$T_k = \frac{2c}{\mathfrak{E}}\left\{\frac{pb}{pl}\left(l_k\frac{\mathfrak{E}}{c} - l_0 p_k\right) - \left(b_k\frac{\mathfrak{E}}{c} - b_0 p_k\right)\right\}. \qquad (51\,\mathrm{a})$$

Der Schwingungsteil von $\frac{dX_k}{dt}$ in (45) lautet also mit Benutzung von (46)

$$\int \frac{c^3 z(p) z(p')}{\mathfrak{E}\sqrt{EE'}}\left\{\frac{pb}{pl}\left(l_k\frac{\mathfrak{E}}{c} - l_0 p_k\right) - \left(b_k\frac{\mathfrak{E}}{c} - b_0 p_k\right)\right\}\cos 2\pi\nu^* t\,dp.$$

Für $h = 0$ ist $\mathfrak{E} = E = E'$, $p_k = p'_k$, so daß dieser Ausdruck mit dem Schwingungsteil in (33) übereinstimmt, da, wie oben gefunden, $z^2 dp$ das Gewicht des Zustandes p ist.

Zur Bestimmung der Frequenzen und Intensitäten haben wir nunmehr (39) in (17) einzutragen. Dabei können wir uns auf den Schwingungsteil beschränken, da offenbar der geradlinig gleichförmige Teil nichts zur Ausstrahlung beiträgt. In der üblichen Näherung ersetzen wir für entfernte Aufpunkte bei $e^{i[\delta f + \varphi]}$ das R in $t - \frac{R}{c}$ durch $r - \sum \xi_k x_k$, wo r die Entfernung des Aufpunktes von einem mittleren Ort im Ladungsgebiet ist und die ξ_k die Richtungscos von r (Beobachtungsrichtung) sind. Das R im Nenner von (17) ersetzen wir einfach durch r. Mit

$$P_k = p_k + \pi_k - \frac{E+\varepsilon}{c}\xi_k,\quad P'_k = p'_k - \frac{E'}{c}\xi_k,\quad \nu^* = \frac{E+\varepsilon-E'}{h} \qquad (52)$$

wird

$$[\delta f + \varphi] = \frac{2\pi}{h}\sum (P_k - P'_k)\,x_k - 2\pi\nu^*\left(t - \frac{r}{c}\right). \qquad (52\,\mathrm{a})$$

Das Ausstrahlungspotential wird dann nach (17) und (39), wenn man für C seinen Wert (46) einträgt,

$$\Phi_\alpha = \frac{ec}{2h^3 r}\,\Re\int \frac{T_\alpha z(p) z(p')}{\sqrt{EE'}}\,e^{\frac{2\pi i}{h}\Sigma\,(P_k - P'_k)x_k - 2\pi i\nu^*\left(t - \frac{r}{c}\right)}\,dp\,dp'\,dx. \qquad (53)$$

Führen wir hier die Größen P_k und P'_k als Integrationsvariable ein. Die Funktionaldeterminante $\left|\frac{\partial P}{\partial p}\right|$ der P_k nach den p_k ist orthogonalinvariant. Man kann daher das Achsenkreuz so drehen, daß $p_2 = p_3 = 0$ wird. Mit Beachtung von (30) ist dann

$$\frac{\partial P_1}{\partial p_1} = 1 - \frac{c p_1}{E}\xi_1,\qquad \frac{\partial P_2}{\partial p_2} = \frac{\partial P_3}{\partial p_3} = 1,$$

während alle anderen Elemente der Determinante verschwinden. Man findet also, wenn man gleich wieder zu einer allgemeinen Lage des Achsenkreuzes übergeht,

$$\varDelta = \left|\frac{\partial P}{\partial p}\right| = 1 - \sum \frac{c\, p_k}{E} \xi_k = 1 - \frac{v}{c}\cos\psi, \tag{54}$$

wo ψ der Winkel zwischen Geschwindigkeit und Beobachtungsrichtung ist. $\varDelta$ ist also der bekannte Dopplerfaktor. Die Determinante $\left|\frac{\partial P'}{\partial p'}\right|$ ergibt sich aus (54), indem man die gestrichenen Größen an Stelle der ungestrichenen setzt. Die Invarianz des Gewichtes $z^2\, dp$ verlangt

$$z^2(p) = Z^2(P)\varDelta(p), \quad z^2(p') = Z'^2(P')\varDelta(p'), \tag{55}$$

wo Z^2 bzw. Z'^2 die Gewichtsfunktionen bei Zugrundelegung der Variabeln P bzw. P' sind. (53) nimmt jetzt die Gestalt

$$\Phi_\alpha = \frac{e c}{2 h^3 r} \Re \int \frac{T_\alpha Z(P) Z'(P')}{\sqrt{E \varDelta E' \varDelta'}} e^{\frac{2\pi i}{h}\Sigma (p_k - p_k') x_k - 2\pi i \nu^* \left(t - \frac{r}{c}\right)} dP\, dP'\, dx \tag{53a}$$

an ($\varDelta' = \varDelta(p')$). Wenden wir wieder das Fouriersche Integraltheorem an, so finden wir

$$\Phi_\alpha = \frac{e c}{2 r} \int \frac{T_\alpha Z(P) Z'(P)}{\sqrt{E \varDelta E' \varDelta'}} \cos 2\pi\nu^* \left(t - \frac{r}{c}\right) dP. \tag{56}$$

wo $P' = P$ einzusetzen ist. Da dann $Z^2(P)\, dP$ und $Z'^2(P)\, dP$ die Gewichte der beiden Zustandsgebiete sind, die miteinander kombinieren, so gehört zum einzelnen „Übergang" das Ausstrahlungspotential [1])

$$\Phi_\alpha = \frac{e c}{2 r} \frac{T_\alpha}{\sqrt{E \varDelta E' \varDelta'}} \cos\varphi^*. \tag{56a}$$

Führen wir das gestreute Quant

$$\pi_k^* = \frac{h\nu^*}{c} \xi_k, \quad \pi_4^* = i\frac{\varepsilon^*}{h} = i\frac{h\nu^*}{c} \tag{57}$$

ein, so nehmen die Beziehungen $P = P'$ zusammen mit der letzten Gleichung (52) wieder die Gestalt (44)

$$p_\alpha + \pi_\alpha = p_\alpha' + \pi_\alpha^* \tag{58}$$

an. Dies sind die Erhaltungssätze von Energie und Impuls, von denen die Lichtquantentheorie von Compton-Debye ausgeht. Die Gleichung (48) reduziert sich nunmehr wegen $\pi^{*2} = 0$ auf

$$p\pi = p\pi^* + \pi\pi^*. \tag{59}$$

[1]) Vgl. die Darstellung (22). Es entspricht z_l^2 dem $Z^2(P)\, dP$ und z_m^2 dem $Z'^2(P)\, dP$ und daher $z_l z_m$ dem $Z(P) Z'(P)\, dP$.

Daraus folgt, wenn man nach (2), (36) und (57) zur reellen Darstellung übergeht,

$$\nu^* = \frac{\nu\left(\frac{E}{c} - \sum p_k n_k\right)}{\frac{E}{c} - \sum p_k \xi_k + \frac{h\nu}{c}\left(1 - \sum n_k \xi_k\right)} \tag{59a}$$

oder, wenn man neben den schon früher eingeführten Winkeln ϑ, ψ noch den Winkel Θ zwischen Primär- und Sekundärstrahl einführt,

$$\nu^* = \frac{\nu\left(1 - \frac{v}{c}\cos\vartheta\right)}{1 - \frac{v}{c}\cos\psi + \frac{h\nu}{E}(1-\cos\Theta)} = \frac{\nu_b}{\varDelta + \frac{h\nu}{E}(1-\cos\Theta)}; \tag{59b}$$

letzteres nach (34) und (54)[1]. Die klassische Frequenz erhält man hieraus für $h = 0$

$$\nu_{\mathrm{kl}} = \frac{\nu_b}{\varDelta}, \tag{59c}$$

d. h. die Bewegungsfrequenz ν_b dividiert durch den Dopplerfaktor $\varDelta$, wie es sein muß. Multipliziert man (58) mit π^*_α und summiert über α, so erhält man wegen $\pi^{*2} = 0$: $p'\pi^* = p\pi^* + \pi\pi^*$, was durch Vergleich mit (59)

$$p\pi = p'\pi^* \tag{60}$$

ergibt, oder nach (2), (36) und (57) reell geschrieben

$$\frac{h\nu}{c}\left(\sum p_k n_k - \frac{E}{c}\right) = \frac{h\nu^*}{c}\left(\sum p'_k \xi_k - \frac{E'}{c}\right),$$

oder endlich mit den Bezeichnungen (34) und (54)

$$\nu^* = \frac{E\nu_b}{E'\varDelta'} = \frac{E\varDelta}{E'\varDelta'}\nu_{\mathrm{kl}}; \tag{61}$$

letzteres nach (59c). Vertauscht man in (58) gestrichene und ungestrichene Größen und gleichzeitig h mit $-h$, so gehen sie in sich über. Bei dieser Vertauschung wird aus (61)

$$\nu^* = \frac{E'\nu'_b}{E\varDelta} = \frac{E'\varDelta'}{E\varDelta}\nu'_{\mathrm{kl}}. \tag{61a}$$

Aus (61) und (61a) folgt

$$\nu^* = \sqrt{\nu_{\mathrm{kl}}\nu'_{\mathrm{kl}}} \tag{62}$$

und

$$E\varDelta E'\varDelta' = \frac{(E\varDelta)^2\nu_{\mathrm{kl}}}{\nu^*} = \frac{(E'\varDelta')^2\nu'_{\mathrm{kl}}}{\nu^*}. \tag{63}$$

Wenden wir uns nunmehr zur Berechnung der Intensität aus (56a). (56a) stellt (wenn man von dem Schwächungsfaktor $1/r$ absieht) die

[1]) De Broglie, Ann. de phys. 3, 22, 1925.

Potentiale einer ebenen Welle der Richtung ξ_1, ξ_2, ξ_3 und der Frequenz ν^* dar, so daß in Analogie mit (25) und (36) die Phase

$$\varphi^* = l^* x = \frac{2\pi}{h} \cdot \pi^* x \tag{64}$$

mit

$$l_k^* = \frac{2\pi\nu^*}{c}\xi_k, \quad l_4^* = i\frac{2\pi\nu^*}{c}, \quad \pi_\alpha^* = \frac{h}{2\pi} l_\alpha^* \tag{64a}$$

geschrieben werden kann. Daraus folgt zunächst, daß in (56a) statt (49) für T_α

$$T_\alpha = 2(k\pi_\alpha + \delta k p_\alpha - b_\alpha) \tag{65}$$

geschrieben werden kann; denn das Glied $-\delta k \pi_\alpha^*$ gibt offenbar Anlaß zu einem Zusatz der Form $\partial f/\partial x_\alpha$. Es ist leicht zu sehen, daß das T_α von (65), in den ungestrichenen oder in den gestrichenen Größen ausgedrückt, von h unabhängig ist (wenn man von einem Zusatz der Form $\frac{\partial f}{\partial x_\alpha}$ absieht). Einmal hat $k\pi_\alpha$ nach (38a) und (36) die Eigenschaft, von h unabhängig zu sein, da sich das h im Zähler und Nenner heraushebt. Ferner ist nach (50) wegen $\pi^{*2} = 0$

$$\delta k = \frac{\pi^* b - k \,.\, \pi\pi^*}{\pi^* p}. \tag{66}$$

Hier hebt sich $h\nu^*/c$ im Zähler und Nenner heraus. Da nach (40) T_α ungeändert bleibt, wenn man ungestrichene und gestrichene Größen und h mit $-h$ vertauscht [wobei, wie oben bemerkt, die Beziehungen (58) unverändert bleiben], so ist nach (49) und (66)

$$T_\alpha = 2k'\pi_\alpha + \delta k(2p'_\alpha + \pi_\alpha^*) - 2b_\alpha \tag{65a}$$

mit

$$\delta k = \frac{\pi^* b - k' \,.\, \pi\pi^*}{\pi^* p'} \tag{66a}$$

oder, wenn man den Zusatz $\delta k \pi_\alpha^*$ wieder wegläßt,

$$T_\alpha = 2(k'\pi_\alpha + \delta k p'_\alpha - b_\alpha). \tag{65b}$$

(56a) lautet mit Benutzung von (63)

$$\Phi_\alpha = \sqrt{\nu^*}\,\zeta_\alpha \cos\varphi^*, \tag{67}$$

wo

$$\zeta_\alpha = \frac{ec}{2r}\,\frac{T_\alpha}{E\Delta\sqrt{\nu_{kl}}} \tag{68}$$

gesetzt ist. Die ζ_α sind unabhängig von h und haben, nach dem was über T gesagt worden ist und nach (63), die Eigenschaft

$$\zeta_\alpha = \zeta'_\alpha. \tag{68a}$$

Die Feldstärken folgen aus (67) nach dem Muster (27). Man hat einfach in (27) φ durch φ^*, ν durch ν^* und die a_α durch die $\sqrt{\nu^*}\zeta_\alpha$ zu ersetzen. Die elektrischen und magnetischen Amplituden werden von der Form

$$A^* = (\nu^*)^{3/2}\zeta, \tag{69}$$

wo ζ wieder die Eigenschaft (68a) hat. Geht man zur Grenze $h = 0$ über, so folgt, da ζ unabhängig von h,

$$A_{\mathrm{kl}} = \nu_{\mathrm{kl}}^{3/2}\zeta. \tag{69a}$$

(69) und (69a) geben durcheinander dividiert

$$A^* = \left(\frac{\nu^*}{\nu_{\mathrm{kl}}}\right)^{3/2} A_{\mathrm{kl}}. \tag{70}$$

Setzt man in (69a) statt der ungestrichenen die gestrichenen Größen ein, so wird wegen $\zeta = \zeta'$

$$A'_{\mathrm{kl}} = \nu'^{3/2}_{\mathrm{kl}}\zeta. \tag{69b}$$

(69) und (69b) geben durcheinander dividiert

$$A^* = \left(\frac{\nu^*}{\nu'_{\mathrm{kl}}}\right)^{3/2} A'_{\mathrm{kl}}. \tag{70a}$$

Für die Intensitäten resultiert aus (70) und (70a)

$$I^* = \left(\frac{\nu^*}{\nu_{\mathrm{kl}}}\right)^{3} I_{\mathrm{kl}}, \tag{71}$$

$$I^* = \left(\frac{\nu^*}{\nu'_{\mathrm{kl}}}\right)^{3} I'_{\mathrm{kl}}. \tag{71a}$$

Multiplikation von (70) mit (70a) und (71) mit (71a) gibt unter Beachtung von (62)

$$A^* = \sqrt{A_{\mathrm{kl}}A'_{\mathrm{kl}}} \tag{72}$$

und

$$I^* = \sqrt{I_{\mathrm{kl}}I'_{\mathrm{kl}}}. \tag{73}$$

Es ergibt sich mithin als Resultat:

Die Quantenfrequenz und Intensität des Comptoneffektes sind gleich dem geometrischen Mittel aus den entsprechenden klassischen Größen im Anfangs- und Endzustand des Prozesses.

Für den Fall des anfangs ruhenden Elektrons ist die Beziehung (62) von Breit[1]), die Beziehung (71) von Breit[1]) aus Korrespondenzbetrachtungen und von Dirac (l. c.) aus der Heisenbergschen Theorie abgeleitet worden.

---

[1]) G. Breit, Phys. Rev. **27**, 362, 1926.